



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ EDUARDO DA SILVA JÚNIOR

A ESPIRAL DE EULER

CAMPINA GRANDE
2022

JOSÉ EDUARDO DA SILVA JÚNIOR

A ESPIRAL DE EULER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof^ª. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE

2022

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva Junior, Jose Eduardo da.
A espiral de Euler [manuscrito] / Jose Eduardo da Silva Junior. - 2022.
36 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Espiral de Euler. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. Geometria diferencial. 4. Curvas planas. I. Título

21. ed. CDD 516.22

JOSÉ EDUARDO DA SILVA JÚNIOR

A ESPIRAL DE EULER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Aprovado em: 12/04/2022

BANCA EXAMINADORA



Prof^ª. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Sem a direção dada por Deus, a conclusão deste trabalho não seria possível. Por causa disso, dedico esta monografia a Ele. Com muita gratidão no coração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele, eu, nada conseguiria.

Agradeço a minha esposa Jaynara Talita Barbosa Silva a qual estive comigo em boa parte do meu curso, me dando apoio nas horas escuras, me dando alegria nas horas tristes e segurando em minha mão para vencermos essa batalha juntos.

Agradeço profundamente a meus pais Tânia Maria dos Santos Silva e José Eduardo Da Silva, por todo os ensinamentos, cuidados e empenho em querer proporcionar o melhor para mim.

Agradeço a meus irmãos Pablo Henrique dos Santos Silva, Pollyana Nathalia dos Santos Silva, Erika Thais dos Santos Silva, e seus respectivos companheiros(as), Isabela Sonally e Maxuel Ferreira, por todo o apoio e carinho para com minha luta.

Agradeço também a minha orientadora Prof^a. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho por toda paciência e pelos conselhos dados ao longo do trabalho, sem os quais o mesmo não teria sido feito.

Por fim, agradeço aos meus familiares, amigos(as) e professores por todos os conselhos valiosíssimos e apoio em toda trajetória. Não me atreverei a dizer os nomes para não cometer o pecado do esquecimento, mas meu mais profundo agradecimento.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.” (Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo introdutório em Geometria Diferencial das Curvas Planas, de modo a apresentar, em particular, alguns fatos sobre a espiral de Euler(ou Clotóide): uma curva clássica que suscitou o interesse de alguns dos mais conceituados matemáticos de todos os tempos, dentre eles Leonhard Euler. Para um melhor desenvolvimento do trabalho foi feita uma abordagem didática do primeiro capítulo do livro “Curves for the Mathematically Curious” de Julian Havil (2019). Para isso, recorreremos a alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral como cálculo de limites, uso das regras de derivação e aplicação das técnicas de integração. Por fim, foi elencado os motivos primitivos que levaram Euler e outros matemáticos a se debruçar sobre essa curva.

Palavras-chave: Espiral de Euler. Geometria Diferencial. Curvas Planas.

ABSTRACT

The present work aims to carry out an introductory study on Differential Geometry of Plane Curves, in order to present, in particular, some facts about the Euler spiral (or Clotoid): a classical curve that aroused the interest of some of the most renowned mathematicians of all time, among them Leonhard Euler. For a better development of the work, a didactic approach was made to the first chapter of the book “Curves for the Mathematically Curious” by Julian Havil (2019). For this, we resort to some concepts of Differential and Integral Calculus such as calculation of limits, use of derivation rules and application of integration techniques. Finally, the primitive reasons that led Euler and other mathematicians to focus on this curve were listed.

Keywords: Euler spiral. Differential Geometry. Flat Curves.

SUMÁRIO

	Página	
1	INTRODUÇÃO	9
2	RESULTADOS PRELIMINARES	12
2.1	Curvas Planas	12
2.1.1	Curva Parametrizada Diferenciável	12
2.1.2	Mudança de parâmetro e comprimento de arco	15
3	A ESPIRAL DE EULER	27
3.1	Uma parametrização incomum?	27
3.2	Uma parametrização natural	30
3.3	Por que Espiral de Euler?	32
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	35
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma curva nótavel da geometria diferencial, conhecida como a Espiral de Euler, que mais à frente recebera o nome de Clotóide e de Espiral de Cornu. Salienta-se que a espiral de Euler pode ser vista, de maneira mais aprofundada, em cursos de geometria avançada, por esse motivo, este trabalho consiste em apresentar essa curva de uma forma didática e compreensível a graduandos e, ou graduados, apresentando-a, suas dificuldades e algumas curiosidades, de modo a termos uma maior independência literária; para isso utilizaremos como embasamento e norte o artigo “Curves for the Mathematically Curious” de Julian Havil (2019).

O estudo da geometria obteve vários aprimoramentos com o passar dos tempos. Iniciando na Grécia antiga, com os estudiosos: Pitágoras, Tales de Mileto e Euclides; sendo esses os primeiros a dar forma a esse estudo. Séculos mais tarde outros renomados matemáticos também fizeram importantes contribuições para a história da matemática, dentre eles Leonhard Euler.

No século em que o Cálculo estava revolucionando a Matemática, mais especificamente no ano de 1707, nasce um dos maiores matemáticos que se tem registro da história, mais especificamente na Basileia, na Suíça, chamado Leonhard Euler, que também morou por décadas na Rússia e na Alemanha. Ele estudou diversas áreas e desenvolveu pesquisas dos mais diversos níveis e dos mais diversos campos. O pai de Leonhard, Paul Euler, tinha conhecimentos de Matemática, e ajudou Leonhard com algumas coisas mais básicas de Matemática. Leonhard Euler teve incríveis contribuições em diversas áreas da matemática como Teoria dos Números, Análise Real, Análise Complexa e Geometria. Nem todos conhecem esse grande estudioso que além de sua principal área de pesquisa, também deu muitas contribuições para a Física e para áreas que hoje são fundamentais para a programação como a Teoria de Grafos.

Em Teoria dos Grafos, Euler mostrou como resolver o problema das Pontes de Königsberg, assim contribuindo para o estudo de Grafos Eulerianos. Em Geometria Espacial, Leonhard contribuiu com a “Relação de Euler”. Essa relação nos dá uma fórmula que conecta o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Sendo então $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Já dentro da Geometria Plana, temos como contribuição a Espiral de Euler, a qual vamos nos deter posteriormente.

Euler foi responsável por grande parte das notações matemáticas que usamos hoje, como e para retratar a base do logaritmo natural, i para representar $\sqrt{-1}$ e também π sendo a constante obtida pela razão da circunferência pelo diâmetro do círculo. Durante todo o seu período de produção, que foi entre 1727 e 1783, Euler teve feitos incríveis, desenvolveu teoremas que até hoje são importantes para continuar desenvolvendo a Ma-

temática.

Ainda sobre suas contribuições, temos a Identidade de Euler, que por muitos é chamada de “fórmula mais bonita da Matemática”, conhecida assim por reunir alguns dos elementos mais importantes da Matemática, sendo eles os elementos neutros da adição e da multiplicação, respectivamente, 0 e 1, e também reúne e , i e π . Essa fórmula é obtida da relação $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$, quando tomamos $\theta = \pi$, utilizando os valores conhecidos do \sin e \cos , concluímos que $e^{i\pi} + 1 = 0$

Segundo Roque e Pitombeira (2012), durante os anos de 1747 e 1748 Leonhard Euler remeteu várias cartas para d’Alembert sobre sua descoberta acerca de logaritmos de números negativos, pois ao contrário do que se acreditava, um número negativo não possuía logaritmo real.

Depois de muita produção em Matemática, em 1735 Euler havia perdido a visão do olho direito, mas ao invés de parar de produzir, ele continuou com suas pesquisas. Durante toda a sua vida, Euler produziu mais de 500 livros e artigos, então por seu constante esforço em estudar e propagar suas descobertas, conquistou prestígio internacional muito cedo e era notório que ele estava sempre produzindo. Sua produção não se resumia a pesquisas avançadas, Euler também chegou a produzir material escolar.

Por volta de 1766, Leonhard descobriu que também estava perdendo a visão do olho esquerdo devido a catarata, mas ele continuou produzindo, ditando para seus filhos enquanto eles escreviam. Em 1771 ele passou por uma cirurgia para tentar resolver o problema e obteve sucesso, mas somente por alguns dias, logo depois ele ficou totalmente cego e assim passou os últimos 17 anos da sua vida. Em 1783, aos setenta e seis anos de idade, Leonhard Euler morreu de forma súbita enquanto tomava chá com um dos seus netos.

Como dito anteriormente, a espiral de Euler é uma, das muitas, contribuições de Leonhard Euler para a matemática. Sendo essa uma importante curva plana a qual apresenta muitas particularidades descobertas então por Euler. No decorrer dos anos, outros matemáticos estudaram essa teoria e desenvolveram suas percepções acerca do que Euler havia estudado, dentre eles podemos citar Jakob Bernoulli (1655 – 1705), matemático suíço, Augustin Jean Fresnel (1788 – 1827) físico francês, que relata a relação da Teoria da Elasticidade com a espiral, Alfred Cornu (1841 – 1902) também físico francês, seguindo as ideias de Fresnel, porém mais tarde, depois de algumas descobertas, deu o seu nome a espiral, chamando-a: A Espiral de Cornu; Já em 1888 Ernesto Cesàro (1859 – 1906) matemático italiano após descobrir algumas propriedades geométricas, cunhou de Clotóide. E por fim, existe alguns cientistas que a chamam de radioide dos arcos. Salientamos que os problemas que envolviam a Espiral no campo da física foram investigados, antes mesmo de, no campo matemático, ser considerada uma curva. Curva essa assegurada pelo teorema fundamental das curvas planas.

Como afirma o teorema fundamental das curvas planas podemos gerar uma curva através de sua curvatura, sendo essa, única. Mesmo que duas curvas possuam um mesmo

traço, segundo o teorema, essas ditas curvas diferem por um movimento rígido no espaço. A espiral de Euler é uma curva plana garantida essencialmente pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas . Em verdade, a Espiral de Euler é exatamente a curva gerada pela curvatura dada pela função identidade $k(s) = s$.

O trabalho está disposto da seguinte maneira: o primeiro capítulo abordará sobre conceitos necessários do campo da geometria diferencial acerca de curvas planas como Introdução à este tópico; Já no segundo capítulo, apresentaremos a Espiral de Euler; uma construção da parametrização e algumas observações históricas sobre essa curva.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção apresentamos definições e resultados que são necessários para o melhor entendimento do objeto principal desta monografia, com o objetivo de tornar esse texto o mais autossuficiente possível. Inicialmente, introduzimos alguns conceitos e resultados inerentes a Geometria Diferencial, área de concentração do trabalho. Para esta primeira parte, sempre que possível, iremos exibir as justificativas dos resultados introduzidos. Quando isso não for possível - pela prova requerer muitos resultados que fogem ao escopo do trabalho - indicaremos referências em que possam ser encontradas.

2.1 Curvas Planas

A Geometria Diferencial das Curvas é entendida como o estudo das curvas planas e espaciais usando, como ferramentas, técnicas oriundas do Cálculo. Nosso resultado principal encontra-se na área da Geometria Diferencial das Curvas Planas, por isso, vamos apresentar alguns conceitos dela que são preliminares ao estudo que apresentamos no próximo Capítulo. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em Manfredo (1963), Delgado e Frensel (2019), Tenenblat (2008) e estas referências são recomendadas para uma leitura aprofundada dos temas abordados.

2.1.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 2.1. Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto da reta. Uma curva parametrizada no plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ .

Observação 2.1. Nas condições da definição anterior, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in I$,

1. Dizemos que t é o parâmetro da curva;
2. O conjunto $\alpha(I) = \{\alpha(t); t \in I\}$ é dito traço da curva;
3. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente à curva α em $t \in I$.

Exemplo 2.1. Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (a, b)$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço se reduz ao ponto (a, b) .

Observação 2.2. Segue dos resultados do cálculo que a aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é de classe C^∞ , se e somente se, suas funções coordenadas $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ . E que a derivada de ordem j de α é dada por $\alpha^j(t) = (x^j(t), y^j(t))$ para todo $t \in I$.

Definição 2.2. Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t = t_0 \in I$ quando $\alpha'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, a reta r que passa por $\alpha(t_0)$, paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$, é chamada de reta tangente a α em t_0 e é dada por:

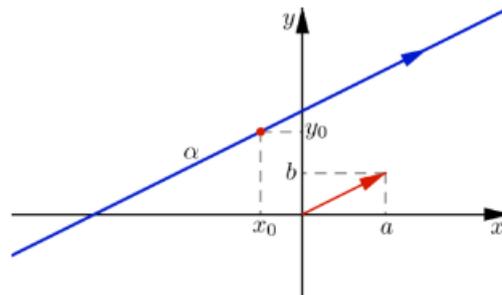
$$r_{t_0} = \{\alpha(t_0) + \alpha'(t_0) \cdot s; s \in \mathbb{R}\}.$$

Um ponto singular de α é um valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = 0$, ou seja, é um ponto cujo a curva “toca” em si mesma.

Quando α é regular em todos os pontos $t \in I$, dizemos que α é uma curva parametrizada diferenciável regular.

Exemplo 2.2. Sejam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto e (a, b) um vetor. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x_0, y_0) + t(a, b)$, com $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (a, b) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O traço de α é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b) .

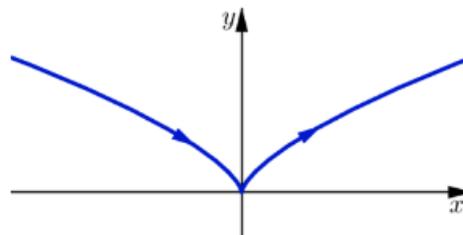
Figura 1 – Reta tangente(em azul) e Vetor paralelo(em vermelho)



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

Exemplo 2.3. A curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ é diferenciável, mas não é regular, pois com $\alpha'(t)|_{t=0} = (3t^2, 2t)|_{t=0} = (0, 0)$, isto é, $t = 0$ é um ponto singular.

Figura 2 – Traço da curva α no exemplo 2.3



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

Exemplo 2.4. Considere a espiral de Arquimedes, escrita da forma $\alpha(t) = (at \cdot \cos(t), at \cdot \sin(t))$, $a > 0$ e definida em $J = [0, \infty)$. Ao fazermos $a = 1$ e $J = [0, 6\pi]$, cujo o traço pode ser observado na Figura 3. Observemos que, a curva é regular.

Como

$$\alpha(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t))$$

para todo $t \in J$, tem-se

$$\alpha'(t) = (\cos(t) - t \cdot \sin(t), \sin(t) + t \cdot \cos(t))$$

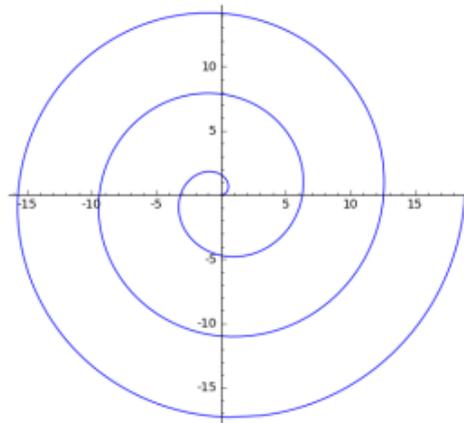
para $t \in (0, 6\pi)$. Suponha que $\alpha'(t) = (0, 0)$, para algum t , então

$$\cos^2(t) = t \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \tag{2.1}$$

$$\sin^2(t) = -t \cdot \cos(t) \cdot \sin(t). \tag{2.2}$$

Logo, ao somarmos (2.1) e (2.2) obtemos $1 = 0$, o que é um absurdo. Portanto, podemos concluir que a Espiral de Arquimedes é uma curva regular.

Figura 3 – Espiral de Arquimedes



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

Como estamos interessados em utilizar ferramentas do Cálculo, para a sequência, é essencial a existência de uma reta tangente à curva em todos os pontos. Portanto, o nosso estudo será apenas sobre às curvas regulares, ou seja, às curvas sem pontos singulares.

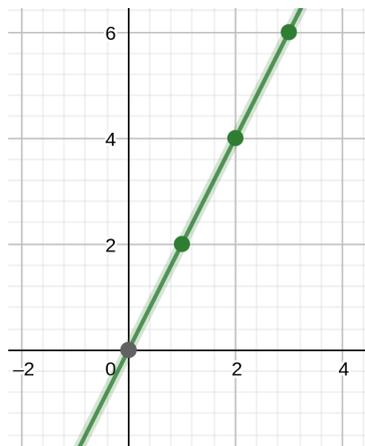
Definição 2.3. Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é simples quando a aplicação α é injetora, isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se $t_1 \neq t_2$ para todo $t_1, t_2 \in I$.

2.1.2 Mudança de parâmetro e comprimento de arco

Observamos que certas curvas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. Por exemplo, considere as curvas $\alpha(t) = (t, 2t)$ e $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2)$, com $t, s \in \mathbb{R}$. Vamos esboçar os traços de α e β .

Como $\alpha(t) = (t, 2t)$, temos que a abscissa $x(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}$ e a ordenada $y(t) = 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, para $t = 0, 1, 2, 3$ encontramos $x = 0, 1, 2, 3$ e $y = 0, 2, 4, 6$, formando assim os pares ordenados $(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)$. Logo, seu traço é:

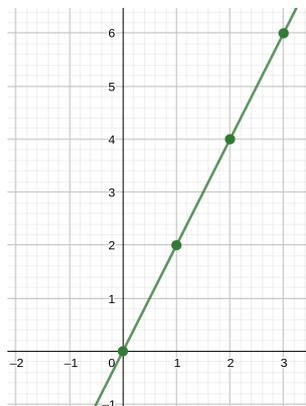
Figura 4 – Traço de $\alpha(t) = (t, 2t)$



Fonte: Construção no Geogebra

De forma análoga para $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2)$ e para $s = 0, 1, 2$ encontramos os seguintes pares ordenados $(1, 2), (3, 6), (5, 10)$. Portanto, seu traço é:

Figura 5 – Traço de $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2)$



Fonte: Construção no Geogebra

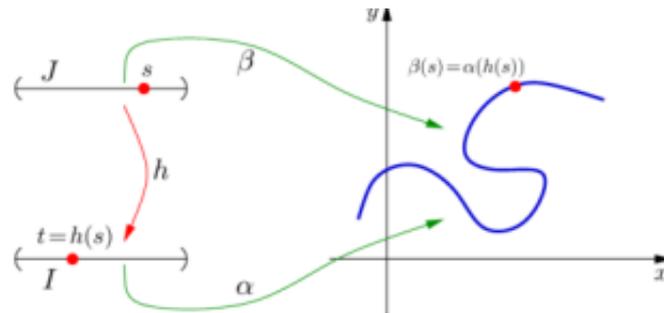
Note que as curvas α e β possuem o mesmo traço. Observe também que o vetor tangente a β no ponto $t = s$ é o dobro do vetor tangente a α no ponto t , isto é, $\beta'(t) = 2 \cdot \alpha'(t)$.

Na realidade, dada uma curva parametrizada diferenciável regular, podemos obter várias curvas parametrizadas diferenciáveis regulares que têm o mesmo traço de α da seguinte maneira:

Teorema 2.1. *Sejam I e J intervalos abertos da reta, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável regular e $h : J \rightarrow I$, uma função diferenciável de classe C^∞ , tal que $h(J) = I$ e $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Então, a aplicação $\beta = \alpha \circ h; J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular que tem o mesmo traço de α .*

Prova: Como α e β são de classe C^∞ , $\alpha \circ h$ também será de classe C^∞ com $(\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s)) \neq 0$ para todo $s \in I$. Note no esquema da figura 6 que α e β coincidem.

Figura 6 – Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

Além disso, o traço de $\beta = (\alpha \circ h)$ é dado por $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J))$. Como $h(J) = I$ tem-se, $\alpha(h(J)) = \alpha(I) =$ o traço de α . Portanto, o traço de β coincide com o traço de α .

A curva $\beta = \alpha \circ h$ é chamada de reparametrização de α por h , e a função h é dita mudança de parâmetro.

□

Observação 2.3. Se β é uma reparametrização de α por $h : J \rightarrow I$, isto é, $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ para todo $s \in J$, então α é uma reparametrização de β por $h^{-1} : I \rightarrow J$, a inversa de h , pois $\beta \circ h^{-1}(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in I$.

Além disso, se $s^{-1} = h : J \rightarrow I$, temos $h'(u) = \frac{1}{s'(h(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$ para todo $u \in J$.

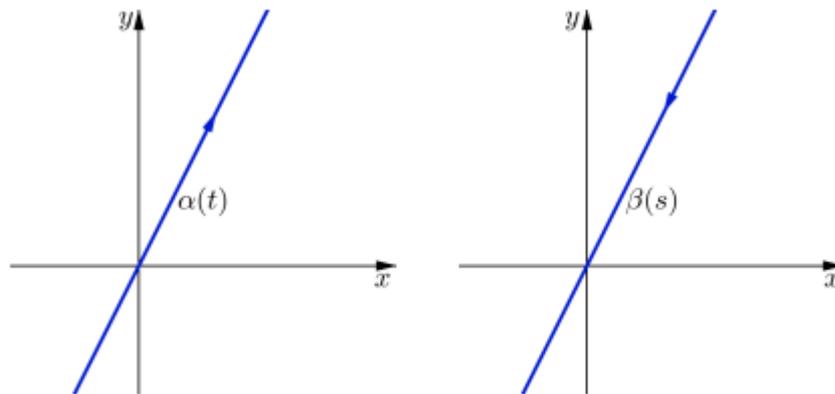
Definição 2.4. A orientação de uma curva plana α é o sentido de percurso do traço de α definidos pelos valores crescentes de t , para todo $t \in I$, tal que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

Observação 2.4. Seja $\beta = \alpha \circ h$ uma reparametrização da curva α . Então, α e β têm a mesma orientação, se $h'(s) > 0$ e os valores de s crescem para todo $s \in J$; E se os valores de s decrescem, α e β têm a orientação oposta e $h'(s) < 0$ para todo $s \in J$.

Exemplo 2.5. A curva diferenciável $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2)$ é a reparametrização da curva $\alpha(s) = (s, 2s)$, que tem mesma orientação, pois, observando que $\beta = \alpha \circ h$, com $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(s) = 2s + 1$, é tal que $h'(s) = 2 > 0$, para todo s .

Exemplo 2.6. Analogamente ao Exemplo 2.5, a curva diferenciável $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2)$, é uma reparametrização da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (s, 2s)$, que tem orientação oposta, pois $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(s) = -2s + 1$ é tal que $h'(s) < 0$ e $\beta = \alpha \circ h$.

Figura 7 – Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem, mas o sentido da orientação não.



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

Definição 2.5. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável regular, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds,$$

é chamada função comprimento de arco da curva a partir de t_0 , onde $t_0 \in I$.

Definição 2.6. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0,$$

para todo $t_0, t_1 \in I, t_0 \neq t_1$. Isto é, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Proposição 2.1. : Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, então

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| \, du = \int_{t_0}^t du = u \Big|_{t_0}^t = t - t_0.$$

(\Leftarrow) Seja $t_0 \in I$ fixo e consideramos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0 . Então,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| \, du = t - t_0,$$

se $t_0 \leq t$ e

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| \, du = \int_t^{t_0} -\|\alpha'(u)\| \, du = - \int_t^{t_0} \|\alpha'(u)\| \, du = -(t_0 - t) = t - t_0,$$

se $t_0 \geq t$, ou seja, $s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$ para todo $t \in I$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$s'(t) = \left(\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| \, du \right)' = \|\alpha'(t)\| = 1,$$

para todo $t \in I$. □

Segundo PEREIRA(2016, p.67), para uma aplicação do teorema acima mostra-se uma circunferência unitária que é uma circunferência cuja a norma do vetor tangente é igual a 1. Uma circunferência unitária centrada na origem está parametrizada pelo comprimento de arco, então pela proposição 2.1, para cada $t \in [0, 2\pi]$, considere a circunferência de equação

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sen(t)),$$

onde

$$\alpha'(t) = (-\sen(t), \cos(t)).$$

Logo,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sen(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1.$$

Assim, a circunferência unitária é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.7. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva regular dada por $\alpha(s) = \left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \cdot \sen\left(\frac{s}{r}\right) \right)$, $s \in \mathbb{R}$, onde $r \neq 0$. Assim, α é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, já que $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

De fato, como $\alpha'(s) = \left(\left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)', \left(r \cdot \sen\left(\frac{s}{r}\right) \right)' \right)$, inicialmente vamos calcular $x'(s) = \left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)'$.

$$x'(s) = r \cdot \left(-\sen\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} \right) = -r \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\sen\left(\frac{s}{r}\right) \right) = -\sen\left(\frac{s}{r}\right).$$

Analogamente, para $y'(s) = \left(r \cdot \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)'$, obtemos

$$y'(s) = r \cdot \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}\right) = r \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \cos\left(\frac{s}{r}\right).$$

Portanto,

$$\|\alpha'(s)\|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2 = \left(-\text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 \Leftrightarrow \|\alpha'(s)\|^2 = 1 \Leftrightarrow \|\alpha'(s)\| = 1, \forall s$$

Proposição 2.2. *Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite uma reparametrização β , tal que β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos $s : I \rightarrow J$, com

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du, t \in I,$$

a função comprimento de arco a partir de t_0 . Pela Observação 2.3, $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ é uma função de classe C^∞ com $h'(u) = \frac{1}{s(h(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$ para todo $u \in J$.

Logo, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(u) = \alpha(h(u))$ é uma reparametrização de α tal que

$$\beta'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot h'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$$

donde

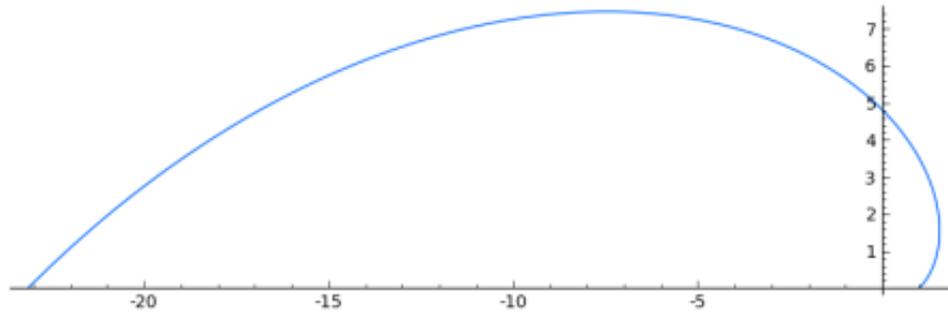
$$\|\beta'(u)\| = \frac{\|\alpha'(h(u))\|}{\|\alpha'(h(u))\|} = 1, u \in J.$$

Portanto, pela Proposição 2.1, β é uma reparametrização de α que está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Exemplo 2.8. A curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\alpha(t) = (e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \text{sen}(t))$, é chamada de espiral logarítmica.

Verificação. Para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \text{sen}(t), e^t \cdot \text{sen}(t) + e^t \cdot \cos(t)) \\ &= (e^t \cdot (\cos(t) - \text{sen}(t)), e^t \cdot (\cos(t) + \text{sen}(t))) \end{aligned}$$

Figura 8 – Espiral logarítmica α no intervalo $[0, \pi]$ 

Fonte: LUÍS, R. **A Espiral de Euler e suas principais propriedades**. Monografia

Daí, segue que,

$$\begin{aligned}
 \|\alpha'(t)\|^2 &= (e^t \cdot (\cos(t) - \sen(t)))^2 + (e^t \cdot (\cos(t) + \sen(t)))^2 \\
 &= e^{2t} \cdot (\cos^2 t - 2 \cdot \cos(t) \cdot \sen(t) + \sen^2 t) + e^{2t} \cdot (\cos^2 t + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sen(t) + \sen^2 t) \\
 &= e^{2t} - 2 \cdot e^{2t} \cdot \cos(t) \cdot \sen(t) + 2 \cdot e^{2t} \cdot \cos(t) \cdot \sen(t) \\
 &= 2 \cdot e^{2t}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\alpha'(t)\| = e^t \cdot \sqrt{2}.$$

Logo, a função comprimento de arco, a partir de t_0 , é dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t e^u \cdot \sqrt{2} du = \sqrt{2} \cdot e^u \Big|_0^t = \sqrt{2} \cdot (e^t - e^0) = \sqrt{2} \cdot e^t - \sqrt{2}.$$

Assim, a função inversa $h = s^{-1} : (-\sqrt{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, é obtida por: $s(t) = \sqrt{2} \cdot e^t - \sqrt{2}$. Sendo $u = s(t)$ e $t = h(u)$, temos,

$$u = \sqrt{2} \cdot e^{h(u)} - \sqrt{2} \Leftrightarrow e^{h(u)} = \frac{u + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Aplicando \ln em ambos os lados, obtemos,

$$\ln(e^{h(u)}) = \ln\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \Leftrightarrow h(u) = \ln\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right), u \in (-\sqrt{2}, \infty).$$

Portanto, $\beta = \alpha \circ h : (-\sqrt{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$\beta(u) = \alpha \circ h = \left(\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \cdot \cos\left(\ln \frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right), \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \cdot \sen\left(\ln \frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \right), u \in (-\sqrt{2}, \infty)$$

temos que $\beta(u)$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

O procedimento de reparametrização pelo comprimento de arco não será tratado mais a fundo aqui para não desviarmos dos objetivos do trabalho que é a espiral de Euler. Para um tratamento mais aprofundado sobre reparametrização pelo comprimento de arco sugere-se consultar TENENBLAT (2008).

Definição 2.7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \in \mathbb{N}$ e sejam $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ bases ordenadas de V . Dizemos que β e β' têm a mesma orientação, se a matriz de mudança de base de β' para β possui determinante positivo.

Observação 2.5. Como o determinante da matriz de mudança de base ou é positivo ou é negativo, existem apenas duas possibilidades. Assim, as bases de V têm exatamente duas orientações e, se fixarmos uma das duas de maneira arbitrária, a outra será chamada orientação oposta.

Definição 2.8. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. O vetor $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $s \in I$, é dito normal à curva α em $\alpha(s)$.

Observação 2.6. Nas condições acima, o vetor $n(s)$ é unitário e ortogonal a $\alpha'(s)$. Ainda, é tal que a base ortogonal $\{\alpha'(s), n(s)\}$ tem a mesma orientação da base canônica $\{e_1, e_2\}$.

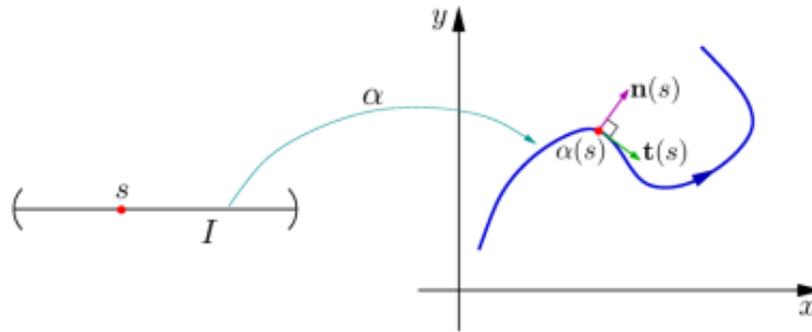
De fato, como $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $s \in I$, temos

- $\|n(s)\|^2 = (-y'(s))^2 + (x'(s))^2 = \|\alpha'(s)\|^2 = 1$, donde $\|n(s)\| = 1$, para todo $s \in I$;
- $\langle \alpha'(s), n(s) \rangle = -x'(s) \cdot y'(s) + x'(s) \cdot y'(s) = 0$ e
- A matriz de mudança de base é dada por $\begin{pmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{pmatrix}$, logo

$$\begin{vmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{vmatrix} = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = \|\alpha'(s)\|^2 = 1 > 0.$$

o que confirma o fato de $n(s)$ ser unitário, ortogonal e ter mesma orientação a $\alpha(s)$, respectivamente.

Figura 9 – Vetores normal e tangente à curva α em s



Fonte: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**

A base ordenada $\{\alpha'(s), n(s)\}$ é chamada *O Referencial de Frenet* da curva α em s . Como para cada $s \in I$, $\{\alpha'(s), n(s)\}$ é uma base ortonormal (ortogonal e unitária) de \mathbb{R}^2 , temos que $\alpha''(s)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\alpha'(s)$ e $n(s)$. Além disso, $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, daí $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, ou seja, $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$ para todo $s \in I$. Mostremos isso.

Como $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, temos

$$(\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle)' = 1' \Leftrightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

portanto

$$2\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0.$$

Logo, conclui-se que $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ e $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Daí, como $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$, então $\alpha''(s)$ é paralelo a $n(s)$, visto que $n(s)$ também é ortogonal a $\alpha'(s)$. Sendo assim, existe uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\alpha''(s) = k(s) \cdot n(s)$ para todo $s \in I$. Esse fato é garantido pela condição de paralelismo entre vetores, que afirma que dois vetores são paralelos se suas coordenadas são proporcionais. E mais, como o ângulo θ entre os vetores é nulo, pois os vetores são paralelos, então

$$\begin{aligned} \frac{\langle \alpha''(s), n(s) \rangle}{k(s)} = \cos \theta &\Leftrightarrow \frac{\langle \alpha''(s), n(s) \rangle}{k(s)} = 1 \\ &\Leftrightarrow k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \\ &\Leftrightarrow k(s) = -x''(s) \cdot y'(s) + y''(s) \cdot x'(s) \end{aligned}$$

que podemos chamá-la de curvatura de α em $s \in I$.

De modo análogo, como $n(s)$ é unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e é

portanto, paralelo a $\alpha'(s)$. Além disso, como $\langle n(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle n'(s), \alpha'(s) \rangle &= \langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\ &= (-y''(s) \cdot x'(s) + x''(s) \cdot y'(s)) \\ &= -\langle \alpha''(s), n(s) \rangle \\ &= -k(s) \cdot \langle n(s), n(s) \rangle \end{aligned}$$

Então, como $n'(s)$ é paralelo a $\alpha'(s)$ e pela condição de paralelismo entre vetores, podemos escrever, $n'(s) = -k(s) \cdot \alpha'(s)$.

Conclui-se que se $\alpha'(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $\{\alpha'(s), n(s)\}$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} \alpha''(s) = k(s) \cdot n(s) \\ n'(s) = -k(s) \cdot \alpha'(s) \end{cases}, \text{ para todo } s \in I,$$

que são chamadas de fórmulas de Frenet de uma curva plana.

Exemplo 2.9. Consideramos a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = \left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) + a, r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) + b \right),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, cujo o traço é o círculo de centro (a, b) e raio r . Vamos calcular a curvatura de α .

Temos

$$\alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right) \cdot r \cdot \frac{1}{r}, \cos\left(\frac{s}{r}\right) \cdot r \cdot \frac{1}{r} \right) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

e

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} k(s) &= -\frac{1}{r} \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) + \frac{1}{r} \cdot \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(\cos^2\left(\frac{s}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{aligned}$$

logo,

$$k(s) = \frac{1}{r}.$$

O referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. A seguir vamos determinar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro.

Definição 2.9. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$, $s : I \rightarrow J$ a função comprimento de arco a partir de $r_0 \in I$ e $h = s^{-1} : J \rightarrow I$. Consideremos a curva $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, que é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s que tem a mesma orientação de α .

Se $\{\beta'(s), n_\beta(s)\}$ é o referencial de Frenet e $k_\beta(s)$ é a curvatura de β em s dizemos que $\{\beta'(r) = \beta'(s(r)), n'(r) = n_\beta(s(r))\}$ é o referencial de Frenet de α em r e que $k(r) = k_\beta(s(r))$ é a curvatura de α em r .

Proposição 2.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ uma curva regular. Então,

$$\alpha'(r) = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}, n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}$$

e

$$k(r) = \frac{-x''(r) \cdot y'(r) + x'(r) \cdot y''(r)}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração. Seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ é a função comprimento de arco a partir de $r_0 \in I$.

Como $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, para todo r e pela regra da cadeia, temos

$$\alpha'(r) = \beta'(s(r)) \cdot s'(r)$$

logo,

$$\alpha''(r) = \beta''(s(r)) \cdot s'(r) \cdot s'(r) + s''(r) \cdot \beta'(s(r)) = \beta''(s(r)) \cdot s'(r)^2 + \beta'(s(r)) \cdot s''(r).$$

Onde $s'(r) = \|\alpha'(r)\|$ e mais, por definição de função norma, temos $\|\alpha'(r)\| = \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Agora, derivando novamente, obtemos

$$s''(r) = \frac{1}{2} \cdot \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle = \frac{\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle}{\sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle}} = \frac{\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|}.$$

Então,

- $\beta'(r) = \beta'(s(r)) = \frac{\alpha'(r)}{s'(r)} = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}$
- $n(r) = n_\beta(s(r)) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}} = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\|\alpha'(r)\|}$

E, como $k_\beta(s(r)) = \langle \beta''(s(r)), n_\beta(s(r)) \rangle$, temos

$$\begin{aligned} k(r) = k_\beta(s(r)) &= \frac{\langle \alpha''(r) - \beta'(s(r)) \cdot s''(r), n_\beta(s(r)) \rangle}{s'(r)^2} \\ &= \frac{\langle \alpha''(r), n(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^2} \\ &= \frac{-y'(r) \cdot x''(r) + x'(r) \cdot y''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2} \\ &= \frac{-x''(r) \cdot y'(r) + x'(r) \cdot y''(r)}{\|\alpha'(r)\|^3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$k(r) = \frac{-x''(r) \cdot y'(r) + x'(r) \cdot y''(r)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Exemplo 2.10. Consideremos a espiral logarítmica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sen(t)).$$

Pelo Exemplo 2.8, temos $\|\alpha'(t)\| = e^t \cdot \sqrt{2}$. Como,

$$k(r) = \frac{-x''(r) \cdot y'(r) + x'(r) \cdot y''(r)}{\|\alpha'(r)\|^3}.$$

calculando as derivadas em t , para $x(t) = e^t \cdot \cos(t)$ e $y(t) = e^t \cdot \sen(t)$, temos

$$x'(t) = e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sen(t)$$

logo,

$$x''(t) = e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sen(t) - (e^t \cdot \sen(t) + e^t \cdot \cos(t))$$

portanto,

$$x''(t) = -2 \cdot e^t \cdot \sen(t)$$

. Para y , temos

$$y'(t) = e^t \cdot \cos(t) + e^t \cdot \sen(t)$$

logo,

$$y''(t) = e^t \cdot \cos(t) + e^t \cdot \sen(t) - e^t \cdot \sen(t) + e^t \cdot \cos(t)$$

e, portanto,

$$y''(t) = 2 \cdot e^t \cdot \cos(t).$$

Por fim, calculando a curvatura $k(t)$, temos

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{-2 \cdot e^t \cdot \operatorname{sen}(t) \cdot (e^t \cdot \operatorname{cos}(t) + e^t \cdot \operatorname{sen}(t)) + 2 \cdot e^t \cdot \operatorname{cos}(t) \cdot (e^t \cdot \operatorname{cos}(t) - e^t \cdot \operatorname{sen}(t))}{(e^t \sqrt{2})^3} \\ &= \frac{2 \cdot e^{2t}}{2 \cdot e^{3t} \cdot \sqrt{2}} \cdot (\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{sen}(t) \cdot \operatorname{cos}(t) + \operatorname{cos}^2(t) - \operatorname{cos}(t) \cdot \operatorname{sen}(t)) \\ &= \frac{2 \cdot e^{2t}}{2 \cdot e^{3t} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{e^t \cdot \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ainda, $\lim_{t \rightarrow -\infty} k(t) = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$.

Definição 2.10. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s_0) \neq 0, s_0 \in I$, o número $R(s_0) = \frac{1}{|k(s_0)|}$ é o raio de curvatura e $C(s_0) = \alpha(s_0) + R(s_0) \cdot n(s_0)$ é o centro de curvatura de α em s_0 .

O círculo osculador de α em s_0 é o círculo de centro $C(s_0)$ e raio $R(s_0)$.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). *Dada uma função de classe C^∞ , $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k_\alpha(s) = k(s)$, para todo $s \in I$.*

A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, acima, é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .

Se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura, então diferem por um movimento rígido, isto é, existem uma rotação R e uma translação T em \mathbb{R}^2 , tais que

$$\alpha(s) = (T \circ R) \circ \beta(s) \text{ para todos } s \in I.$$

Para a demonstração do Teorema 2.2, consideramos a seguinte função

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t k(u) du$$

e utilizamos argumentos de equações diferenciais e do Cálculo Diferencial concluímos que

$$\alpha(s) = (x_0 + \int_{t_0}^s \operatorname{cos}(\theta(u) + a) du, y_0 + \int_{t_0}^s \operatorname{sen}(\theta(u) + a) du)$$

é a curva procurada, com $s \in I$ e $a \in \mathbb{R}$. Para os detalhes, indicamos a leitura do livro: DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**. Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019. Ou qualquer das referências citadas anteriormente.

3 A ESPIRAL DE EULER

Historicamente, muitas curvas tem chamado atenção de matemáticos e curiosos, seja por suas propriedades analíticas, seja pelo seu traço. Neste Capítulo, nos deteremos a apresentar alguns fatos e curiosidades sobre uma dessas curvas que se destacam: A Espiral de Euler.

A Espiral de Euler, no decorrer da histórica foi observada e analisada em problemas distintos. Alguns no campo da Física, abordando sobre elasticidade e valores de difração da luz e outros, é claro, no campo da Matemática com suas mais variadas aplicações. Salientamos que os problemas que envolviam a espiral no campo da Física foram investigados, antes mesmo de, no campo matemático, ser considerada uma curva. Curva essa assegurada pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas uma vez que o que a caracteriza é que a Espiral de Euler é a curva gerada pela curvatura dada pela função identidade $k(s) = s$.

Assim, na notação do Teorema Fundamental das Curvas, considerando $t_0 = 0$,

$$\theta(t) = \int_0^t k(s) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

Logo, para $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $a = 0$, temos

$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds \right).$$

Estas integrais são chamadas de Integrais de Fresnel. Elas não podem ser expressas em termos de funções elementares e, por isso, a dificuldade de se trabalhar com essa parametrização. O que pretendemos aqui, seguindo as ideias apresentadas no Primeiro Capítulo do Livro “Curves for the Mathematically Curious”, de Julian Havil, é mostrar alguns fatos interessantes sobre essa curva.

3.1 Uma parametrização incomum?

Normalmente, expressamos uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Essa forma paramétrica trás consigo variantes de fórmulas para suas características comuns: Além dos mencionados anteriormente comprimento de arco e curvatura e ainda temos a inclinação que é dada por

- Inclinação: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$.

Nosso maior interesse aqui é apresentar um outro olhar sobre a parametrização para a Espiral de Euler. Vamos tentar construir a ideia a parametrização, para isso, seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, em que

$$x(t) = \int_0^t \cos f(u) du$$

e

$$y(t) = \int_0^t \operatorname{sen} f(u) du.$$

Aqui, nosso parâmetro inicia em 0 e $f(u)$ é qualquer função diferenciável em u . Pelas técnicas de integração e características das funções sen , \cos e f , envolvidas, α é uma curva parametrizada. Ainda,

$$x'(t) = \cos f(t), \quad x'' = -\operatorname{sen} f(t) \cdot f'(t),$$

$$y'(t) = \operatorname{sen} f(t) \text{ e } y'' = \cos f(t) \cdot f'(t)$$

que resultam em:

- Inclinação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(f(t))}{\cos(f(t))} = \operatorname{tg}(f(t))$$

- Comprimento de arco:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du \\ &= \int_0^t \sqrt{(\cos f(u))^2 + (\operatorname{sen}(f(u)))^2} du \\ &= \int_0^t \sqrt{1} du \\ &= \int_0^t 1 du = t \Leftrightarrow s(t) = t. \end{aligned}$$

- Curvatura:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{-x''(t) \cdot y'(t) + x'(t) \cdot y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-(-\operatorname{sen}^2 f(t) \cdot f'(t)) + \cos^2 f(t) \cdot f'(t)}{(\cos^2 f(t) + \operatorname{sen}^2 f(t))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{f'(t) \cdot (\operatorname{sen}^2 f(t) + \cos^2 f(t))}{1} = \frac{f'(t)}{1} \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

Notamos que o valor do parâmetro t é precisamente o comprimento do arco, e a curvatura no ponto dado pelo parâmetro t é $f'(t)$, assim

$$\int_0^t k(u)du = \int_0^t f'(u)du = f(t)$$

Podemos, portanto, reescrever a parametrização, em função do comprimento de arco s , como

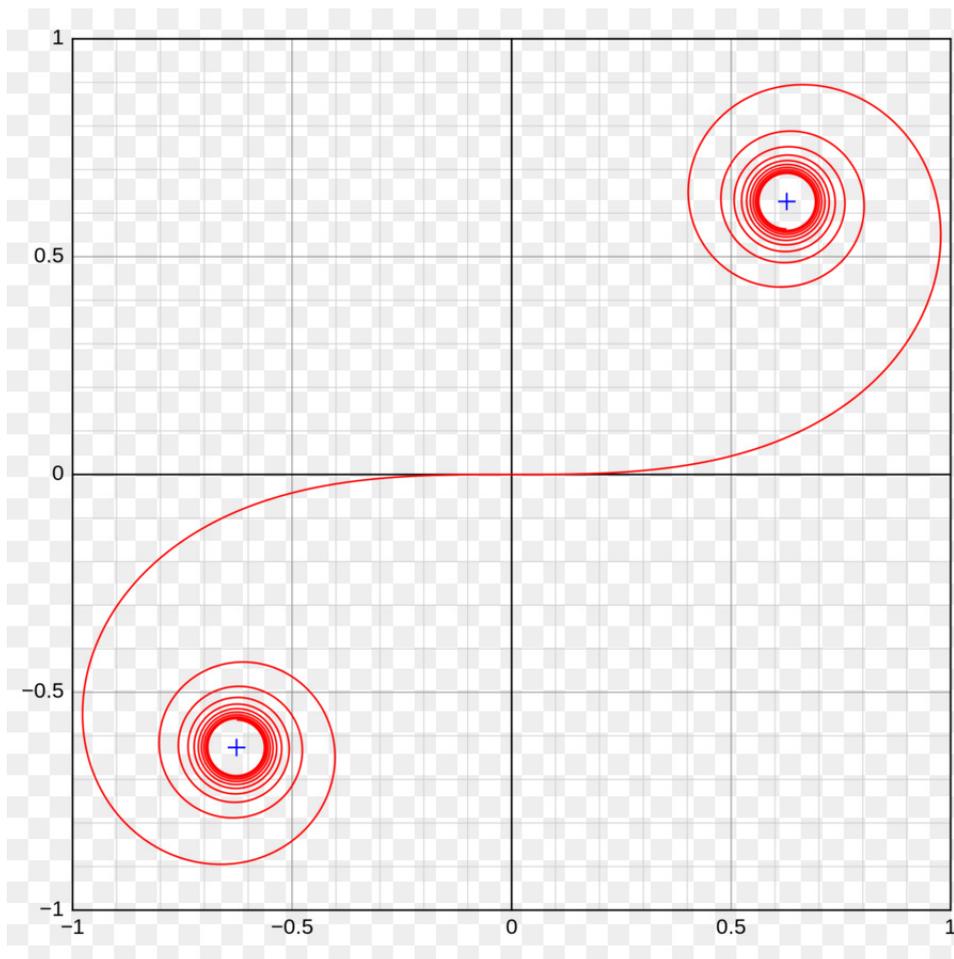
$$x(s) = \int_0^s \cos f(t)dt = \int_0^s \cos \left(\int_0^t k(u)du \right) dt$$

e

$$y(s) = \int_0^s \text{sen} f(t)dt = \int_0^s \text{sen} \left(\int_0^t k(u)du \right) dt.$$

Recordamos que para $k(t) = 0$ o traço da curva seria uma reta. Já para $k(t) = 1$, seria um círculo. Agora assumindo $k(t) = t$, para todo t , como dito, obtemos a Espiral de Euler, apresentada na figura 1.

Figura 1 – Espiral de Euler



Fonte: <https://www.gratispng.com/png-ptgki7/>

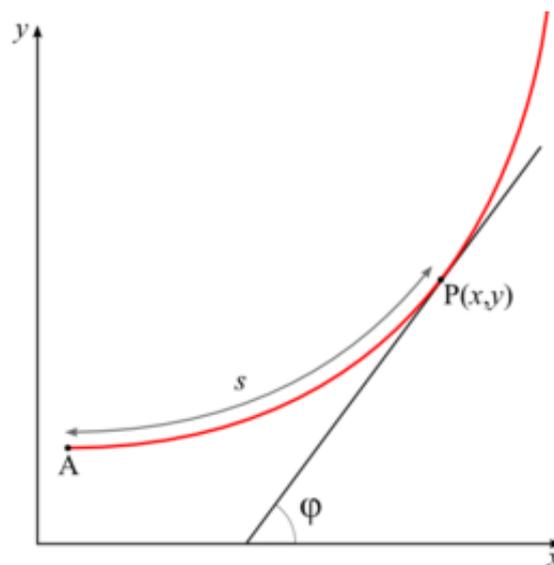
Observamos que a curvatura da curva aumenta linearmente com o comprimento de

arco. Essa curva deve espiralar para dentro, pois a curvatura se torna maior à medida que a curva se desenvolve e faz isso para formar a Espiral de Euler, mostrada na Figura 1.

3.2 Uma parametrização natural

Segundo Julian Havil, se um resultado matemático recebe um nome, é uma indicação clara de sua importância percebida, se esse nome começa com o adjetivo: fundamental; essa importância é ampliada ao nível em que o resultado ocupa um papel central na teoria em questão, ou talvez na matemática em geral. É o caso, então, do teorema fundamental das curvas planas cujas afirmações formais atraem a abstração necessária à previsão matemática, porém sua essência é que "a curvatura determina a curva". Ou seja, se nos é dado um ponto de partida no plano em função da curvatura, a curva é determinada. De acordo com o exposto acima, mostraremos duas quantidades primitivas que são denominadas de coordenadas intrínsecas e o ângulo tangencial.

Figura 2 – Coordenadas intrínsecas e Ângulo tangencial



Fonte: HAVIL, JULIAN. **Curves for the Mathematically Curious**

As coordenadas intrínsecas é o ponto $P(x, y)$ de tangência à curva dada. Já o ângulo tangencial é o ângulo φ formado entre a reta que passa por $P(x, y)$ e intercepta, no sentido positivo, o eixo x . Vemos na figura 2 que $s = 0$ quando φ é nulo e $\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\varphi)$. Além disso, $\frac{d\varphi}{ds} = k(s)$, onde $k(s)$ é a curvatura da curva s . Temos ainda,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2(\varphi)} = \sqrt{\text{sec}^2(\varphi)} = \text{sec}(\varphi)$$

Logo, $\frac{dx}{ds} = \cos(\varphi)$. Por outro lado,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{dy}{ds} \cdot \operatorname{sec}(\varphi) \Leftrightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)}}{\frac{1}{\cos(\varphi)}} = \operatorname{sen}(\varphi) \Leftrightarrow \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}(\varphi).$$

Agora, temos o suficiente para derivar a equação de uma curva a partir do conhecimento de sua curvatura. Se a curva tem uma parametrização pelo comprimento de arco, digamos com $x = g(s)$, $y = h(s)$, escrevemos

$$\frac{dx}{ds} = g'(s) \text{ e } \frac{dy}{ds} = h'(s).$$

Definindo a curva em termos de coordenadas intrínsecas, com um conjunto de equações diferenciáveis, temos:

$$g'(s) = \cos(\varphi), \quad h'(s) = \operatorname{sen}(\varphi) \text{ e } k(s) = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Assim, dado $k(s)$, primeiro encontramos $\varphi(s)$, e a partir disso as equações paramétricas da curva. Notemos que

$$\int \frac{d\varphi}{ds} = \int k(s) \Leftrightarrow \varphi(s) = \int k(s) ds \Leftrightarrow \varphi(s) = \int_0^s k(t) dt + \varphi_0$$

que é a solução geral. Isso significa que

$$g'(s) = \cos\left(\int_0^s k(t) dt + \varphi_0\right) \text{ e } h'(s) = \operatorname{sen}\left(\int_0^s k(t) dt + \varphi_0\right)$$

que têm solução geral

$$\int g'(s) = \int \cos\left(\int_0^s k(t) dt + \varphi_0\right) \Leftrightarrow g(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^u k(t) dt + \varphi_0\right) du + x_0$$

e

$$\int h'(s) = \int \operatorname{sen}\left(\int_0^s k(t) dt + \varphi_0\right) \Leftrightarrow h(s) = \int_0^s \operatorname{sen}\left(\int_0^u k(t) dt + \varphi_0\right) du + y_0.$$

Agora, lembrando de algumas relações trigonométricas usuais

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \text{ e} \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Podemos obter,

$$g(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^u k(t) dt + \varphi_0\right) du + x_0$$

$$g(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^u k(t) dt\right) du \cdot \cos(\varphi) - \int_0^s \operatorname{sen}\left(\int_0^u k(t) dt\right) du \cdot \operatorname{sen}(\varphi) + x_0$$

e

$$h(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(\int_0^u k(t) dt + \varphi_0 \right) du + x_0$$

$$h(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(\int_0^u k(t) dt \right) du \cdot \cos(\varphi) + \int_0^s \cos \left(\int_0^u k(t) dt \right) du \cdot \operatorname{sen}(\varphi) + x_0.$$

Concluimos então que nossa curva é determinada exclusivamente pelas equações paramétricas

$$x = g(s) = \int_0^s \cos \left(\int_0^u k(t) dt \right) du$$

e

$$y = h(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(\int_0^u k(t) dt \right) du$$

com o comprimento de arco como parâmetro.

Essas equações são a personificação do Teorema Fundamental das Curvas Planas e confirmam que a curvatura determina a curva, em especial a Espiral de Euler.

3.3 Por que Espiral de Euler?

Em 1694, James Bernoulli estudou o que agora é chamado de Problema de Cantilever: “Uma viga fina horizontal de massa desprezível, fixada em uma extremidade e carregada na outra, assume uma forma de curva, mas que forma?”

A resposta para essa pergunta é o que se chama de Elástica, uma curva que está diretamente ligada com a Espiral de Euler. O que acontece é que a viga permanece fixa em uma extremidade, mas agora assume uma curva, forma ascendente que se transforma em uma linha horizontal pela ação de um peso colocado em sua outra extremidade. Bernoulli deu uma equação intrínseca dessa curva, da forma $a^2 = sR$, em que a é uma constante e R é o raio da curvatura da curva. Assim, é natural que a curvatura seja proporcional ao comprimento de arco. O argumento de Bernoulli é mais uma afirmação que uma prova, propriamente dita e foi questionada por Nicolau I, quando da edição do trabalho do seu tio, em 1744.

Também em 1744, Euler publicou um trabalho em que aparecem dois apêndices: O primeiro trata de curvas elásticas em que, em determinada parte, ele trata do problema de Bernoulli. Considerando a figura abaixo

Figura 3 – Argumento de Euler



Fonte: HAVIL, JULIAN. **Curves for the Mathematically Curious**

Supondo que a curvatura da viga em um ponto S antes da aplicação da força de flexão é $k_1(s)$ e é $k_2(s)$ depois da aplicação da força de flexão. Suponha também que S dista s

do ponto de aplicação da força. A força é medida pela equação $M = kEI$ em que M , E e I são, respectivamente, o Momento de Força, o Módulo de Young e o segundo momento de área da viga. Se $M = Ps$, então a curvatura da vida é dada por

$$k(s) = \frac{Ps}{EI} = \frac{s}{a^2}.$$

Assim, $k_2(s) = k_1(s) - k(s)$ e como o final da curva é uma reta, $k_2(s) = 0$, logo

$$0 = k_1(s) - \frac{s}{a^2} \Leftrightarrow k_1(s) = \frac{1}{r} = \frac{s}{a^2}.$$

Dessa equação intrínseca, Euler extraiu as equações paramétricas da curva

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{2a^2}\right) du \text{ e } y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{2a^2}\right) du.$$

Essas equações paramétricas permitem a extensão da curva para além dos limites assumidos: para a vertical e, ao infinito, em espiral.

Como já comentado, essa integral não pode ser resolvida em termos de funções elementares, e Euler sabia disso, então usou expansão em série e integração termo a termo para produzir expressões que fossem úteis:

$$x(s) = s - \frac{s^5}{2! \cdot 5} + \frac{s^9}{4! \cdot 9} - \frac{s^{13}}{6! \cdot 13} + \dots$$

e

$$y(s) = \frac{s^5}{1! \cdot 5} - \frac{s^7}{3! \cdot 7} + \frac{s^{11}}{5! \cdot 11} + \dots$$

Euler ainda observou que o raio de curvatura diminui continuamente quanto maior o arco feito. Assim, a curva não pode se tornar infinita, mesmo que o arco o seja, portanto a curva será uma espiral, de forma que, após uma quantidade finita de enrolamentos, a espiral se concentrará num ponto que chamaremos de centro, sendo, porém muito difícil de achá-lo. Euler então aponta a necessidade de encontrar um método do qual um valor aproximado possa ser atribuído às integrais, quando s é tomado infinito e, em 1781, o próprio Euler encontra

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Essas considerações de Euler respondiam a à pergunta de Bernoulli e introduziam essa curva incrível conhecida como Espiral de Euler.

Em verdade, Espiral de Euler não é a única nomenclatura utilizada para essa curva; Ao menos mais dois nomes são conhecidos: Clotoide e Espiral de Cornu.

Antes de chegarmos ao nome Espiral de Cornu, atentamos para a contribuição do físico francês Augustin Fresnel, que deduziu a seguinte expressão para a intensidade de iluminação num ponto de difração

$$I_v = \left[\int_0^v \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt \right]^2 + \left[\int_0^v \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt \right]^2.$$

Assim, mesmo que não seja para a própria Espiral de Euler, os termos da parametrização apareceram nas pesquisas de Fresnel e, em 1818, ele produziu uma tabela de valores para as duas integrais considerando valores de v , diferidos por 0.1, de $v = 0.1$ até $v = 5.1$. Por causa disso, essas componentes são conhecidas como Integrais de Fresnel. Em 1874, (Marie) Alfred Cornu, traçou a curva, seguindo os valores de Fresnel e identificou seu uso para problemas de difração, associando então a Espiral de Euler às Integrais de Fresnel. Sua influência fez com que o nome de Cornu fosse associada à curva, de forma que a espiral é também conhecida como Espiral de Cornu.

No caso de Clotoide, o nome é em homenagem a Cloto, filandeiro entre as Três Parcas que tece o fio da vida humana. O termo foi cunhado pelo matemático italiano Ernesto Cesáro, que se debruçou para estudar as propriedades dessa curva e a quem a curva se assemelhava à forma que um pedaço de fio assume quando é enrolado em torno do seu eixo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Geometria Diferencial das Curvas é voltado para o trato com curvas planas e espaciais. É conveniente que a abordagem desse conteúdo seja direcionado como relação com a teoria abordada no Cálculo Diferencial e Integral e na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Os quais trabalham com tópicos conceituais fundamentais para o melhor entedimento do texto.

O estudo feito nesse texto propocionou um olhar diferente sobre a curva plana denominada Espiral de Euler. Dando ênfaze à conceitos matemáticos referentes a Geometria Diferencial associados a espiral através do uso das regras de derivação, das técnicas de integração e das aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias. Além disso, foi possível perceber a importância dos conceitos vistos ao decorrer do curso de graduação, por diferentes situações, em que esses conceitos uniram-se ao longo dessa construção e conseguiram-se mesclar os conhecimentos aparentemente distintos.

Por fim, considerando que tópicos em geometria diferencial, em particular das curvas planas, não são vistos na nossa graduação, espera-se colaborar com a produção de conhecimento científico, ao passo que fornecemos uma abordagem didática para a apresentação de uma curva que, em geral, não se encontra em livros didáticos de geometria diferencial. Por isto, este trabalho poderá vir a ser importante para o aprimoramento destes estudos e aplicações. Bem como, destaca-se que tal abordagem foi responsável pelo enriquecimento no alicerce da conclusão de curso.

REFERÊNCIAS

DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA. **Geometria Diferencial I**. Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

HAVIL, JULIAN. **Curves for the Mathematically Curious**. Princeton University Press, New Jersey: Vickie Kearn, Susannah Shoemaker, and Lauren Bucca, 2019.

MACÊDO, L. **Número De Euler, sua irracionalidade e sua transcendência**. Monografia(Graduação em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2022.

LUÍS, R. **A Espiral de Euler e suas principais propriedades**. Monografia(Mestrado em Matemática)- Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p.47, 2013.

PERDIGÃO, MANFREDO. **Geometria Diferencial Local**. 4^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Poço de Caldas. Minas Gerais, 1963.

PEREIRA, G. **CURVAS PARAMETRIZADAS DIFERENCIÁVEIS: Parametrização de curvas planas e um teorema geral de classificação**. Monografia (Graduação) – Instituto Federal Goiano Campus Urutaí, p.67 2016.

ROQUE, Tatiana, PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012

TENENBLAT, KETI. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2^a ed. São Paulo: Blucher, 2008.