UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

DIEGO JONATHAN BEZERRA SILVA

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS MÉTRICOS NO CONTEXTO DA ANÁLISE

MONTEIRO
2022

DIEGO JONATHAN BEZERRA SILVA

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS MÉTRICOS NO CONTEXTO DA ANÁLISE

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO
2022

S586i Silva, Diego Jonathan Bezerra.
Introdução aos espaços métricos no contexto da análise [manuscrito] / Diego Jonathan Bezerra Silva. - 2022.
46 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Espaços métricos. 2. Análise. 3. Funções contínuas. I. Título

21. ed. CDD 515

Elaborada por Luciana D. de Medeiros - CRB - 15/508 BCIA2/UEPB

DIEGO JONATHAN BEZERRA SILVA

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS MÉTRICOS NO CONTEXTO DA ANÁLISE

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 22/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador

Pammella Queiroz de Souza

Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza
Examinador externo (CCT/UFCG)

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Àqueles que, incansavelmente, acreditaram e me ajudaram a chegar até aqui. Pai e Mãe!

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível. Também agradeço a meus pais, seu JOTA e dona DORINHA, por todo apoio ao longo de minha trajetória, sem o alicerce proporcionado por eles nada disso seria possível. À minha irmã, a NEGA, que sempre me apoia em momentos complicados.

Agradeço ao meu orientador, Roger Ruben Huaman Huanca, o PROFESSOR ROGER, por todos os seus conselhos que me ajudaram a trilhar meu caminho acadêmico. No fim viramos grandes amigos.

Agradeço aos membros da banca, a professora Pammella Queiroz de Souza e o professor Luciano dos Santos Ferreira, por todas as suas contribuições e apreciação do trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas, e em particular àquele que hoje posso chamar de amigos, os amigos que a universidade me deu.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para com minha trajetória acadêmica, em particular àqueles que chamo de amigos.

Enfim, um fraterno abraço a todos, MUITO OBRIGADO!

“Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente.”

(Elon Lages Lima)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a teoria sobre os Espaços Métricos no contexto da Análise, onde expomos suas principais definições e como se deu o desenvolvimento da pesquisa com a utilização de alguns modelos. Chamamos de “modelos” exemplos clássicos de Métrica e Espaços Métricos, bem como os conceitos de Bolas, Esferas e algumas noções de Topologia, culminando, portanto, em Funções contínuas. Assim, no contexto da Análise, um Espaço Métrico é um conjunto não-vazio, onde as distâncias entre quaisquer de seus elementos são bem definidas através de uma função. Tal função atribui ao conjunto uma estrutura de espaço a qual chamamos de Espaço Métrico. A partir daí, podemos definir propriedades topológicas como conjuntos abertos e fechados, e, partindo disso, podemos entender as consequências causadas por tais propriedades. Ao fim do texto apresentamos em um apêndice, algumas noções prévias que utilizamos ao longo do trabalho.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Análise. Funções contínuas.

ABSTRACT

In this work we present the theory of metric spaces in the context of analysis, where we expose its main definitions and how the research developed using some models. We call “models” classic examples of metrics and metric spaces, as well as the concepts of balls, spheres and some notions of topology, culminating, therefore, in continuous functions. Thus, in the context of analysis, a metric Space is a non-empty set, where the distances between any of its elements are well defined through a function. This function assigns to the set a space structure which we call metric space. Thereafter, we can define topological properties as open and closed sets, and from that, we can understand the consequences caused by such properties. At the end of the text, we present in an appendix, some previous notions that we use throughout the work.

Key-words: Metric Spaces. Analysis. Continuous functions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade, e o supremo valor das ciências exatas.

No entanto ao mesmo tempo que se torna cada vez mais decisiva para as nossas vidas, a matemática é considerada, por vezes, uma ciência hermética e tecnicista, em que poucos se aventuram. Neste trabalho abordaremos a teoria de espaços métricos, que generaliza a noção de distancias entre pontos de um conjunto não vazio.

O conceito de distância é de certa maneira uma ideia bastante elementar, no sentido de que, apesar de qualquer ideia matematicamente formal, concebemos tal conceito sem nenhum esforço maior e o utilizamos constantemente.

Em matemática uma das primeiras ideias de distância que nos é apresentada é a distância entre dois pontos no plano cartesiano que, salvo engano, é estudada no terceiro ano do Ensino Médio. No entanto este conceito pode torna-se insuficiente para medir distâncias reais, por exemplo quando falamos em distância entre dois pontos, assim como é estudada no terceiro ano do Ensino Médio, estamos interessados essencialmente no valor do comprimento do segmento de reta que liga estes dois pontos, porém em outros contextos, esta não poderá ser a distância considerada, podemos observar que a distância entre duas cidades será dada pelo comprimento da estrada que liga estas, e desconhecendo estradas perfeitamente retas, esta não será a distância estudada na escola.

Partindo ao rigor matemático ao invés de tomarmos o plano cartesiano como o nosso conjunto de pontos, escolhemos um conjunto qualquer $M \neq \emptyset$ e uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz um conjunto de axiomas que serão definidos precisamente posteriormente. Ao par (M, d) nomeamos espaço métrico, a função d é chamada métrica, tal função mede distância entre pontos de M.

Quando construímos um espaço métrico da forma anteriormente mencionada, temos a liberdade de escolher qualquer função d, que satisfaz os axiomas de métrica, para "medir" a distância entre elementos do conjunto M. Se escolhermos, por exemplo, $M = \mathbb{R}^2$, uma métrica possível para M é a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que a cada par (u_1, u_2), com $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, associa o número $d(u_1, u_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Claramente M terá a mesma representação como plano cartesiano que conhecemos, no entanto essa forma de medir distância gera pontos no interior de um quadrado de centro em u_1 e diagonais paralelas aos eixos, ou seja, gera os círculos quadrados e $\pi = 4$, interessante, não?

Bem, estamos interessados, necessariamente, em fazer uma introdução à teoria de Espaços Métricos, teoria que de certa maneira generaliza diversos conceitos de análise, e têm diversas aplicações. Para tal, necessitamos de alguma base de conjuntos, álgebra linear e análise.

A introdução tecida neste texto deve mencionar os primeiros conceitos de espaços métricos e de continuidade de funções em espaços métricos. A diante, no capítulo 2, apresentamos o conceito de Espaço Métrico e suas consequências imediatas. No capítulo 3, desenvolvemos algumas noções de bolas e esferas, destacando a sua importância à teoria. No capítulo 4, abordaremos conceitos mais gerais e abstratos, uma vez que trataremos de algumas noções topológicas dos espaços métricos. No capítulo 5, trataremos acerca da continuidade de funções em espaços métricos. E ao final do texto trazemos um apêndice que trata de conceitos iniciais que foram utilizados sem maiores preocupações ao longo do trabalho.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

2.1 DEFINIÇÃO DE MÉTRICA, DISTÂNCIAS E ESPAÇOS MÉTRICOS

De forma bem objetiva temos que

> Uma métrica é uma função de distância; um espaço é um conjunto com alguma estrutura; e um espaço métrico é um conjunto com estrutura determinada por uma noção bem definida de distância. (SEARCÓID, 2007, p.12, tradução nossa)

Para nós uma noção bem definida de distância será uma função a qual chamaremos de métrica e definimos como se segue,

Definição 2.1 (Métrica)**.** Sejam M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que goza das propriedades

i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;

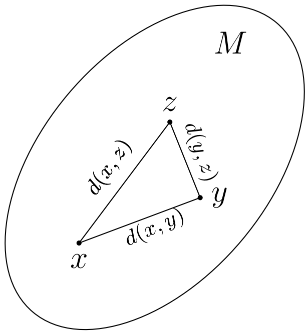
iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$,

é dita uma métrica em M.

A grosso modo, uma métrica d sobre um conjunto M serve para medir a distância entre elementos de M, então as propriedades exigidas para a função d mostram-se bastante razoáveis. Vemos que a propriedade (i) nos diz que a distância entre dois elementos do conjunto M não pode ser negativa, e que, além disso, a distância de um elemento a ele mesmo deve ser zero, a esta propriedade damos o nome de positividade. A propriedade (ii) nos diz que o cálculo da distância entre elementos do conjunto M independe da ordem em que são tomados os elementos, esta chamamos de simetria. Por fim, a propriedade (iii) é chamada desigualdade triangular, que em termos geométricos nos diz que a medida do comprimento do lado de um triângulo é sempre menor do que ou igual a soma das medidas dos outros dois lados, isto é ilustrado na Figura 1.

Um conjunto $M \neq \emptyset$ munido de uma métrica d será chamado de espaço métrico e denotado pelo par (M, d), porém quando não houver confusão omitiremos a métrica utilizada e escreveremos simplesmente M. Aos elementos do conjunto M daremos o nome de pontos, nesse passo a imagem dos pontos $x, y \in M$ pela função d será chamada distância entre os pontos x e y e denotada por $d(x, y)$.

Figura 1 – Desigualdade triangular



Fonte: Próprio autor

Proposição 2.1. *Seja* (M, d) *um espaço métrico e* $x, y, z \in M$. *Então*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Demonstração. Fazendo uso da desigualdade triangular obtemos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Reorganizando a inequação e utilizando a simetria obtemos

$$d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z).$$

Analogamente, para $d(y, z)$ temos, $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$, o que acarreta, $-d(x, z) \leq d(y, x) - d(y, z) = d(x, y) - d(y, z)$. Desse modo segue que

$$-d(x, z) \leq d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z),$$

ou seja,

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Isto conclui a prova. ■

Modelo 2.1 ($\mathbb{R}$)**.** O conjunto dos números reais, ou simplesmente a reta, é um espaço métrico. A função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa o número $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Com efeito, $d(x, y) \geq 0$ em virtude da definição de módulo, além disso se for $d(x, y) = 0 = |x - y|$ deve ser $x - y = 0$, ou seja, $x = y$, reciprocamente, se for $x = y$ devemos ter $|x - y| = 0$. Também temos a simetria pois

$$d(x, y) = |x - y| = | - (y - x)| = |y - x| = d(y, x)$$

. E uma vez que vale a desigualdade triangular no módulo, temos

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Assim $\mathbb{R}$ é espaço métrico.

Observação 2.1. A métrica exibida anteriormente para $\mathbb{R}$ é chamada métrica usual de $\mathbb{R}$.

Modelo 2.2 ($\mathbb{R}^n$)**.** Temos que $\mathbb{R}^n$ é o conjunto da forma

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i \in I_n\}.$$

Podemos definir, normalmente, três métricas em $\mathbb{R}^n$. São elas, $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ onde para cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ temos

$$d(x, y) = \left(\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(Métrica Euclidiana)}$$

$$d'(x, y) = \sum_{i \in I_n} |x_i - y_i| \qquad \textbf{(Métrica da Soma)}$$

$$d''(x, y) = \max_{i \in I_n} |x_i - y_i| \qquad \textbf{(Métrica do Máximo)}.$$

As funções d, d' e d'' são, métricas em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Para d temos que, como $(x_i - y_i)^2 \geq 0$, segue que $\left(\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, ou seja, $d(x, y) \geq 0$. Ainda, se for $d(x, y) = \left(\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ devemos ter $(x_i - y_i)^2 = 0$, o que acarreta $x_i = y_i$, donde segue que $x = y$, reciprocamente, se for $x = y \in \mathbb{R}^n$ devemos ter $x_i = y_i$, para todo $i \in I_n$, e assim teremos $0 = \left(\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y)$, dessa forma mostramos a positividade. Por outro lado,

$$d(x, y) = \left(\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i \in I_n} (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(y, x),$$

e assim mostramos a simetria. Para a desigualdade triangular partiremos da desigualdade de Calchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i \in I_n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i \in I_n} a_i^2\right)\left(\sum_{i \in I_n} b_i^2\right)$$

mais precisamente partiremos da desigualdade equivalente

$$\sum_{i \in I_n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i \in I_n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i \in I_n} b_i^2}$$

Fazendo agora $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$ obtemos

$$\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) \leq \sqrt{\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2}\sqrt{\sum_{i \in I_n} (y_i - z_i)^2}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por 2 e somando os termos $\sum_{i \in I_n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i \in I_n} (y_i - z_i)^2$ obtemos

$$\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i\in I_n}(y_i-z_i)^2+2\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\leq\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i\in I_n}(y_i-z_i)^2+$$
$$+2\sqrt{\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)^2}\sqrt{\sum_{i\in I_n}(y_i-z_i)^2}$$

ou seja,

$$\sum_{i\in I_n}(x_i-z_i)^2=\sum_{i\in I_n}((x_i-y_i)+(y_i-z_i))^2\leq\left(\sqrt{\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i\in I_n}(y_i-z_i)^2}\right)^2$$

tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade segue

$$\sqrt{\sum_{i\in I_n}(x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i\in I_n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i\in I_n}(y_i-z_i)^2}$$

e com isto temos a desigualdade desejada

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z).$$

Agora para d', uma vez que $|x_i-y_i|\geq 0$ temos $d'(x,y)=\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i|\geq 0$, e caso seja, $d'(x,y)=\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i|=0$ deve ser, $|x_i-y_i|=0$ e daí teremos, $x_i=y_i$, ou seja, será $x=y$, reciprocamente, se for $x=y\in\mathbb{R}^n$ devemos ter $x_i=y_i$, para todo $i\in I_n$, e assim teremos $0=\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i|=d(x,y)$, isto mostra a positividade. Para a simetria vemos que

$$d'(x,y)=\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i|=\sum_{i\in I_n}|y_i-x_i|=d'(y,x).$$

Uma vez que $\mathbb{R}$ é espaço métrico temos que $|x_i-z_i|\leq|x_i-y_i|+|y_i-z_i|$, o que acarreta

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i| &\leq \sum_{i\in I_n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)\\ &=\sum_{i\in I_n}|x_i-y_i|+\sum_{i\in I_n}|y_i-z_i|\end{aligned}$$

ou seja, $d'(x,z)\leq d'(x,y)+d'(y,z)$.

Por fim, para d'' temos que, analogamente ao feito anteriormente $|x_i-y_i|\geq 0$, e assim será, $d''(x,y)=\max_{i\in I_n}|x_i-y_i|\geq 0$, e caso seja $d(x,y)=0=\max_{i\in I_n}|x_i-y_i|$, deve ser $x_i=y_i$ donde concluímos que $x=y$, reciprocamente, se for $x=y\in\mathbb{R}^n$ devemos ter $x_i=y_i$, para todo $i\in I_n$, e assim teremos $|x_i-y_i|=0$ para todo $i\in I_n$, daí, $0=\max_{i\in I_n}|x_i-y_i|=d(x,y)$, isto mostra a positividade . Para a simetria

$$d''(x,y)=\max_{i\in I_n}|x_i-y_i|=\max_{i\in I_n}|y_i-x_i|=d''(y,x).$$

Para concluir provemos a desigualdade triangular, sendo $\mathbb{R}$ espaço métrico temos $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, e assim será

$$\max_{i \in I_n} |x_i - z_i| \leq \max_{i \in I_n} |x_i - y_i| + \max_{i \in I_n} |y_i - z_i|$$

ou seja, $d''(x,z) \leq d''(x,y) + d''(y,z)$.

Observação 2.2. A métrica d exibida anteriormente para $\mathbb{R}^n$ é chamada métrica usual de $\mathbb{R}^n$ ou métrica euclidiana.

2.1.1 Subespaços e métrica induzida

Consideremos agora (M,d) um espaço métrico qualquer. Sendo $X \subset M$ um conjunto não vazio podemos induzir uma métrica em X a partir da métrica de M. Para tal, basta considerar a restrição $d|_X$ da métrica d aos elementos de X. Segue portanto que $(X, d|_X)$ é um espaço métrico. Com efeito, uma vez que (M,d) é espaço métrico, temos

i) $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in M$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in M$;

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in M$.

para quaisquer $x, y, z \in M$. Em particular se tomarmos $x', y', z' \in X \subset M$ devemos ter

i) $d|_X(x',y') = d(x',y') \geq 0, \forall x', y' \in X \subset M$ e $d|_X(x',y') = d(x',y') = 0 \Leftrightarrow x' = y'$;

ii) $d|_X(x',y') = d(x',y') = d(y',x') = d|_X(y',x'), \forall x', y' \in X \subset M$;

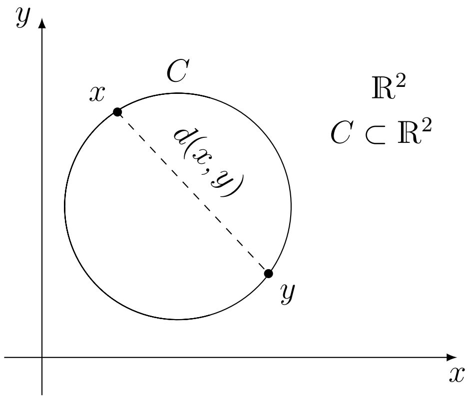
iii) $d|_X(x',z') = d(x',z') \leq d(x',y') + d(y',z') = d|_X(x',y') + d|_X(y',z'), \forall x', y', z' \in X \subset M$.

Para fixar ideias consideremos o seguinte modelo

Modelo 2.3 (Pontos de um círculo)**.** Consideremos em $\mathbb{R}^2$ um círculo C,

a princípio não estamos interessados na equação que descreve tal lugar geométrico. A fim de que o círculo tenha a aparência geométrica a que estamos acostumados, consideremos a métrica usual para $\mathbb{R}^n$, também conhecida como métrica euclidiana, apresentada no Modelo 2.2 no caso $n = 2$. Então, dados $x, y \in C$ definimos a distância de x a y como sendo $e(x,y) = d|_C(x,y)$. Pelo que foi anteriormente mostrado temos que (C, e) é um espaço métrico.

Figura 2 – Pontos de um círculo



Fonte: Próprio autor

2.1.2 Produto cartesiano de espaços métricos

Uma das maneiras de entender o espaço euclidiano $n-$dimensional sobre $\mathbb{R}$, ($\mathbb{R}^n$) é como produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$, a saber escrevemos $\mathbb{R}^n = \prod_{i \in I_n} \mathbb{R}$. Já mostramos anteriormente que tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^n$ são espaços métricos. A seguir mostraremos que o produto cartesiano de espaços métricos é ainda um espaço métrico.

Seja $(M_i)_{i=1}^n$ uma coleção de n espaços métricos, onde a métrica do $i-$ésimo espaço é a função $d_i : M_i \times M_i \to \mathbb{R}$. Consideremos o produto cartesiano

$$M = \prod_{i \in I_n} M_i.$$

Um elemento de $x \in M$ é uma lista da forma $x = (x_i)_{i=1}^n$ onde $x_i \in M_i$. As métricas naturais a serem definidas em M são as seguintes

$$d(x, y) = \left(\sum_{i \in I_n} (d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d'(x, y) = \sum_{i \in I_n} d_i(x_i, y_i)$$

e

$$d''(x, y) = \max_{i \in I_n} d_i(x_i, y_i).$$

A demonstração de que d, d' e d'' são de fato métricas em M é análoga a prova das métricas de $\mathbb{R}^n$. Além disso, como é de se esperar, as métricas acima descritas são chamadas de Métrica Euclidiana, Métrica da Soma e Métrica do Máximo, respectivamente.

2.2 MAIS MODELOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Modelo 2.4 (Zero-um)**.** Consideremos um conjunto M não vazio qualquer e a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in M \times M$ faz corresponder

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

(M, d) é um espaço métrico. De fato, se $x = y$, então, por definição $d(x, y) = d(x, x) = 0$. Se $x \neq y$, $d(x, y) = 1 > 0$, isto é, $d(x, y) > 0$ sempre que $x \neq y$, isto mostra a positividade. Para a simetria, se $x = y$, não há o que fazer. Se $x \neq y$, $d(x, y) = 1 = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$, com $x \neq y$. Por fim, para a desigualdade triangular, se $x = y$, $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$, qualquer que seja $y \in M$. Se $x \neq z$, então temos que $x \neq y$ ou $y \neq z$. Assim $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$. E desse modo concluímos que (M, d) é espaço métrico.

Modelo 2.5 (Espaços de Função)**.** Seja X um conjunto qualquer não vazio. Consideremos o conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$. Consideremos agora a função $d : \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que a cada par $(f, g) \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ faz corresponder o número

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

$(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico. Com efeito, consideremos $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, temos que para cada $x \in X$, $|f(x) - g(x)| \geq 0$, e sendo $f(x) - g(x)$ limitado, deve ser $0 \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, além disso $d(f, g) = 0$ acarreta $f = g$. Com efeito, caso não o fosse, existiria $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, daí teríamos $0 < |f(x_0) - g(x_0)|$, e desse modo

$$0 < |f(x_0) - g(x_0)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0$$

absurdo, logo teremos $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, $f = g$. Quanto a simetria basta notar que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |-1| \cdot |g(x) - f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f).$$

Por fim, para mostrar a desigualdade triangular consideramos $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ e usamos o fato de que para cada $x \in X$ temos

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

e daí,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)|.$$

E assim concluímos que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é de fato um espaço métrico.

Definição 2.2 (Espaços normados)**.** Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função $v \in E \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ que goza das seguintes propriedades

Positividade $\|v\| \geq 0, \forall v \in E$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

Homogeneidade $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \forall v \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

Desigualdade triangular $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E$.

Um espaço vetorial E munido de uma norma chama-se espaço vetorial normado e o denotamos por $(E, \|\cdot\|)$ ou simplesmente por E quando não houver confusão quanto a norma de que se fala.

Dessa forma definimos a seguinte função $(u, v) \in E \times E \mapsto d(u, v) = \|u - v\| \in \mathbb{R}$. d é uma métrica sobre E e desse modo (E, d) torna-se um espaço métrico. Com efeito, para quaisquer $u, v, w \in E$ temos positividade pois $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0$ e $d(u, v) = \|u - v\| = 0$ se, e somente se, $u - v = 0$, ou seja, $u = v$. Temos a simetria uma vez que $d(u, v) = \|u - v\| = |-1|\|v - u\| = d(v, u)$. E por fim a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(u, w) = \|u - w\| &= \|u - v + v - w\| \\ &\leq \|u - v\| + \|v - w\| \\ &= d(u, v) + d(v, w). \end{aligned}$$

A métrica atribuída a E chamamos de métrica proveniente da norma. Em suma, sempre que for dado um espaço normado é possível construir um espaço métrico. Assim, é importante ressaltar que toda norma pode induzir uma métrica, se considerarmos $\|x - y\| = d(x, y)$.

Modelo 2.6 (Espaços de produto interno)**.** Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $(u, v) \in E \times E \mapsto \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, que goza das seguintes propriedades

P_1) $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

P_2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

P_3) $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$;

P_4) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

Isto para quaisquer $u, v, w \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um espaço vetorial E munido de um produto interno chama-se espaço vetorial de produto interno e o denotamos por $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ou simplesmente por E quando não houver confusão quanto ao produto interno de que se fala.

Em um espaço de produto interno podemos sempre definir uma norma, pondo para cada vetor $u \in E$, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ e dessa forma será $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$. Com efeito, a positividade segue da propriedade (P_1) do produto interno enquanto que a homogeneidade segue da propriedade (P_3). A fim de mostrar a desigualdade triangular devemos primeiro mostrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é, dados $u, v \in E$ devemos ter

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

De fato, sendo E um espaço vetorial real, dados $u, v \in E$, $u \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ o vetor $w = v - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u$ é ainda um vetor de E. Assim calculemos $\langle w, w\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle v - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u, v - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\rangle &= \langle v, v\rangle - \left\langle v, \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\rangle - \left\langle \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u, v \right\rangle + \\
&+ \left\langle \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u, \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\rangle \\
&= \|v\|^2 - 2\left\langle v, \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\rangle + \left\| \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}\langle v, u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} \\
&= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}.
\end{aligned}$$

Em virtude da propriedade (P_1) segue que $\|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} \geq 0$ e assim temos $\|v\|^2 \geq \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$, o que acarreta a desigualdade desejada $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Por fim, demonstremos a desigualdade triangular. Para isso basta calcular $\|u + v\|^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2.
\end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade anterior segue a desigualdade triangular. Com isto mostramos que $\|\cdot\|$ é de fato norma. Tal norma é chamada norma proveniente do produto interno. Agora em E basta definir $d(u, v) = \|u - v\|$ e então (E, d) torna-se um espaço métrico.

3 BOLAS E ESFERAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

3.1 BOLAS E ESFERAS

A noção de bola em um espaço métrico mostra-se de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria, estes conceitos serão utilizados neste texto para tratar da continuidade de funções e da topologia dos espaços métricos. Para tal, consideremos a seguintes definições:

Definição 3.1. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados a um ponto de M e $r > 0$ um número real, definimos a bola aberta de centro a e raio r, denotada por $B_r(a)$ como sendo o conjunto dos pontos de M que distam menos que r de a, simbolicamente

$$B_r(a) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

A bola fechada de centro a e raio r, denotada por $\overline{B}_r(a)$ como sendo o conjunto dos pontos de M que distam r ou menos do ponto a, simbolicamente

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

E a esfera de centro a e raio r, denotada por $S_r(a)$ como sendo o conjunto dos pontos de M que distam exatamente r do ponto a, simbolicamente

$$S_r(a) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Observando as definições apresentadas vemos imediatamente que a bola fechada de centro a e raio $r > 0$ é a união da bola aberta com a esfera, isto é, $\overline{B}_r(a) = B_r(a) \cup S_r(a)$. O termo "bola" nos leva a imaginar a esfera em $\mathbb{R}^3$, no entanto, quando as bolas em espaços métricos possuírem alguma interpretação geométrica estas podem ser extremamente distintas, a depender do espaço e de sua métrica. Comecemos por um modelo que ilustra bem o que foi mencionado

Modelo 3.1 (Círculos quadrados e $\pi = 4$)**.** Primeiro consideremos $\mathbb{R}^2$ com a métrica da soma (d') que denotaremos por d por simplicidade de notação.

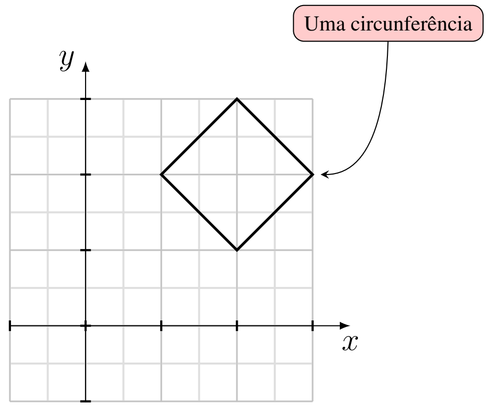
Na geometria sabemos que uma circunferência de centro a e raio r é o conjunto dos pontos que distam exatamente r de a, no nosso texto, esta coincide com a esfera de centro a e raio r. Com a métrica escolhida, seja $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a nossa circunferência é dada pela equação:

$$C : |x - c_1| + |y - c_2| = r \tag{3.1}$$

onde $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

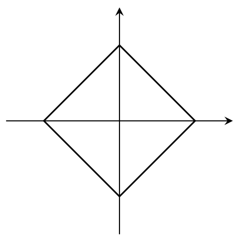
Não é difícil observar que a circunferência descrita na equação (3.1) geometricamente é da forma apresentada na Figura 3.

Figura 3 – A circunferência quadrada



Fonte: Próprio autor

Em qualquer circunferência, com a métrica escolhida, teremos $(\pi = 4)$.[1] De fato, Dada uma circunferência de raio r,



observe que o seu diâmetro $\delta = 2r$ e seu comprimento é $C = 8r$. Assim temos

$$\pi = \frac{C}{\delta} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Este resultado apesar de contra intuitivo é verdadeiro e ocorre pelo fato de termos alterado a forma de medir distâncias em $\mathbb{R}^2$.

Modelo 3.2. Em $\mathbb{R}$ consideremos a métrica usual. Consideremos $a \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer e $r > 0$. As bolas $\overline{B}_r(a)$ e $B_r(a)$ são respectivamente os intervalos $[a - r, a + r]$ e $(a - r, a + r)$. E a esfera $S_r(a)$ é o conjunto $\{a - r, a + r\}$.

Modelo 3.3. Consideremos M um espaço métrico munido da métrica zero-um. E sejam $a \in M$ e $r > 0$ um número real. Se for $r > 1$ temos

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in M; d(x, a) \leq r\} = M = \{x \in M; d(x, a) < r\} = B_r(a),$$

[1] Devemos lembrar que na geometria define-se o número π como sendo o valor obtido ao dividir o comprimento de uma circunferência por seu diâmetro

ainda como o maior valor que $d(x, a)$ pode assumir é 1, temos também $S_r(a) = \emptyset$. Caso seja $r < 1$ devemos ter

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in M; d(x, a) \leq r\} = \{a\},$$

$$B_r(a) = \{x \in M; d(x, a) < r\} = \{a\}$$

e

$$S_r(a) = \{x \in M; d(x, a) = r\} = \emptyset.$$

No caso em que $r = 1$ devemos ter

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in M; d(x, a) \leq r\} = M,$$

$$B_r(a) = \{x \in M; d(x, a) < r\} = \{a\}$$

e

$$S_r(a) = \{x \in M; d(x, a) = r\} = M.$$

Vemos, portanto, que com esta métrica não temos figuras geométricas bem definidas.

Já foi visto que se M é um espaço métrico então o conjunto $X \subset M$ ainda o é, onde a métrica de X é a métrica de M restrita aos pontos de X. Assim dados $a \in X$ e r um número real positivo, denotaremos as bolas fechada, aberta e a esfera relativamente aos elementos de X respectivamente por $\overline{B_r}|_X(a)$, $B_r|_X(a)$ e $S_r|_X(a)$ e teremos

$$\overline{B_r}|_X(a) = \overline{B}_r(a) \cap X,$$

$$B_r|_X(a) = B_r(a) \cap X$$

e

$$S_r|_X(a) = S_r(a) \cap X.$$

Assim, tomemos, por exemplo, o $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sendo uma circunferência C assim como no Modelo 2.3. Sendo $a \in C$ e $r > 0$ e menor que o diâmetro do círculo, então as bolas de centro em a e raio r serão arcos de circunferência, ver Figura 4. Quando for r maior que o diâmetro do círculo, as bolas centradas em a e de raio r serão a Própria circunferência.

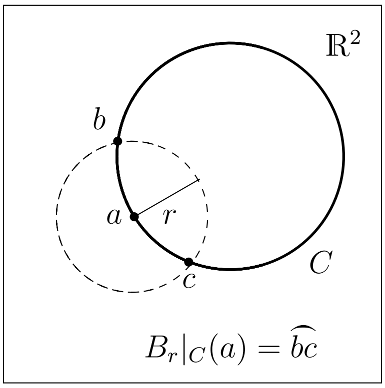
Proposição 3.1. *Seja M um espaço métrico. Dados $a \neq b \in M$ e r, s números reais positivos satisfazendo $r + s \leq d(a, b)$, segue-se que $B_r(a) \cap B_s(b) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que existe $x_0 \in B_r(a) \cap B_s(b)$. Desta forma devemos ter $d(a, x_0) < r$ e $d(x_0, b) < s$. No entanto temos

$$r + s \leq d(a, b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, b) < r + s$$

ou seja, temos $r + s < r + s$, absurdo! Pois estamos supondo que $B_r(a) \cap B_s(b) \neq \emptyset$, logo deve ser $B_r(a) \cap B_s(b) = \emptyset$. Com isto concluímos a prova. ■

Figura 4 – Bolas em subespaços



Fonte: Próprio autor

3.2 ESPAÇO MÉTRICO DISCRETO

A fim de introduzir a noção de espaço métrico discreto precisamos definir o que é um ponto isolado em um espaço métrico.

Definição 3.2. Seja M um espaço métrico. Um ponto a de M é dito isolado se for possível encontra $r > 0$ de tal modo que $B_r(a) \cap M = \{a\}$.

Em outras palavras, se a é um ponto isolado de um espaço métrico sempre existirá um raio r de modo que a bola centrada em a e de raio r possui apenas o centro a.

Definição 3.3. Seja M um espaço métrico. Se todos os pontos de M forem pontos isolados então, dizemos que M é um espaço métrico discreto.

Modelo 3.4. Consideremos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{Z}$ é um espaço métrico discreto. Com efeito, sendo $a \in \mathbb{Z}$ basta tomar $0 < r < 1$, a bola $B_r(a) = (a - r, a + r)$ possui apenas o ponto a de $\mathbb{Z}$, logo é a é ponto isolado. Como a foi tomado arbitrariamente concluímos que $\mathbb{Z}$ é discreto.

Modelo 3.5. O conjunto $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ munido da métrica induzida de $\mathbb{R}$, é um espaço métrico discreto. De fato, consideremos o ponto $a = \frac{1}{n} \in M$, $n \in \mathbb{N}$ e tomemos $r = \frac{1}{n(n+1)}$. A bola $B_r(a)$ não possui elementos de M diferentes de a, se existisse $b \in M \cap B_r(a)$ existiria $m \in \mathbb{N}$ tal que $b = \frac{1}{m}$ e daí a desigualdade $|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| < \frac{1}{n(n+1)}$ deveria ser satisfeita, com efeito

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n(n+1)} &\Leftrightarrow -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m} < \frac{n^2 + 2n}{n^2(n+1)} < \frac{n+1}{n^2}
\end{aligned}
$$

donde segue,

$$\frac{n^2}{n+1} < m < n + 1.$$

Há apenas três possibilidades para m, a saber: $m > n$; $m < n$ ou $m = n$. Se for $m > n$ teremos $n < m < n + 1$, absurdo, pois temos um natural entre dois naturais consecutivos. Caso seja $m < n$, observamos que

$$n - 1 = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = \frac{n^2 - 1}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$$

e daí teremos $n - 1 < m < n$, absurdo, novamente um natural entre dois naturais consecutivos. Logo, só resta $m = n$, mas assim deve ser $a = b$. Desta forma concluímos que todo ponto a de M é isolado e portanto M é um espaço métrico discreto.

3.3 CONJUNTOS LIMITADOS

Definição 3.4. Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subset M$ será dito limitado se existir uma constante $k > 0$ tal que $d(x, y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in X$.

Devemos observar que o conjunto $D = \{d(x, y) \leq k; x, y \in X\}$ é um subconjunto de números reais não negativos. Convém observar que o número k apresentado na definição anterior é uma cota superior do conjunto D e, assim, D é um subconjunto de números reais limitado superiormente[2] desta forma, é adequado falar do supremo do conjunto D, e deste modo temos a seguinte definição

Definição 3.5. Seja X um subconjunto limitado de um espaço métrico M. Definimos o diâmetro de X como sendo o número

$$\delta(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y).$$

Proposição 3.2. *Um conjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola fechada.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $X \subset M$ está contida na bola $\overline{B}_r(a)$ para algum $a \in M$ e para algum $r > 0$. Afirmação: X é um conjunto limitado. Com efeito, tomemos $x, y \in X$ daí $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r$.

Reciprocamente suponhamos que X seja um conjunto limitado. Assim, existe $k > 0$ de tal modo que $d(x, y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in X$. Provaremos que $X \subset \overline{B}_k(a)$ para algum $a \in X$ fixado. De fato, tomemos $x \in X$ daí como X é limitado $d(x, a) \leq k$ o que acarreta que $x \in \overline{B}_k(a)$. Com isto concluímos a prova. ∎

Proposição 3.3. *Toda bola $B_r(a)$ em um espaço métrico é um conjunto limitado. E além disso seu diâmetro não excede o dobro do raio.*

Demonstração. Tomemos a bola $B_r(a)$ e sejam $x, y \in B_r(a)$, temos que,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r,$$

[2] D também é limitado inferiormente em virtude da propriedade (i) da métrica

como x e y são arbitrários o resultado segue.

Ora, $2r$ é cota superior do conjunto $\{d(x,y); x, y \in X\}$ e como $\delta(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y)$ concluímos que $\delta(X) \leq 2r$. ■

Proposição 3.4. *Se E é um espaço vetorial normado então o diâmetro de qualquer bola aberta é exatamente o dobro de seu raio.*

Demonstração. Seja $B_r(a)$ uma bola de centro a e raio r. Em virtude do resultado anterior sabemos que $\delta(B_r(a)) \leq 2r$. Mostraremos que $s < 2r$ não pode ser diâmetro da bola. Para tal escolhemos um número t satisfazendo $s < 2t < 2r$ e o vetor $x = \frac{ty}{\|y\|}$, $y \neq 0 \in E$. Os vetores $a + x$ e $a - x$ pertencem a bola, pois

$$\|(a + x) - a\| = \|x\| = t < 2r$$

e

$$\|(a - x) - a\| = \| - x\| = t < 2r.$$

Daí temos $d(a + x, a - x) = \|2x\| = 2t > s$, logo $s < 2r$ não pode ser diâmetro da bola. Com isto concluímos que $\delta(B_r(a)) = 2r$. ■

Proposição 3.5. *Seja M um espaço métrico. A e B são subconjuntos de M com $A \cap B \neq \emptyset$. Se $\delta(A) \leq k$ e $\delta(B) \leq k$ então, $A \cup B \subset \overline{B}_{2k}(a)$ para algum $a \in A$.*

Demonstração. Seja $x \in A \cup B$. Daí $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ não há o que fazer pois $d(x,a) \leq \delta(A) \leq k \leq 2k$, ou seja, $x \in \overline{B}_{2k}(a)$. Se $x \in B$, como $A \cap B \neq \emptyset$, fixando $x_0 \in A \cap B$, daí

$$d(x,a) \leq d(x,x_0) + d(x_0,a) \leq \delta(B) + \delta(A) \leq k + k = 2k,$$

ou seja, $x \in \overline{B}_{2k}(a)$. Como tomamos um x arbitrário pertencente $A \cup B$ e mostramos que $x \in \overline{B}_{2k}(a)$, concluímos que $A \cup B \subset \overline{B}_{2k}(a)$. ■

Proposição 3.6. *Se A e B são subconjuntos limitados de um espaço métrico M então, $A \cup B$ é um conjunto limitado de M.*

Demonstração. Se A e B são conjuntos limitados existem números positivos k_1 e k_2 tais que, $\delta(A) \leq k_1$ e $\delta(B) \leq k_2$. Se $A \cap B \neq \emptyset$, pelo resultado anterior, e fácil ver que $A \cup B \subset \overline{B}_{k_1+k_2}(a)$, com $a \in A \cup B$, logo é limitado.

Consideremos agora o caso em que $A \cap B = \emptyset$. Mostraremos que existe $k > 0$ tal que $\delta(A \cup B) \leq k$. Para isto fixemos $a \in A$ e $b \in B$, tomando $k = k_1 + d(a,b) + k_2$; como a e b estão fixos $d(a,b) < \infty$, consequentemente $k < \infty$. A partir daí consideremos $x, y \in A \cup B$, sem perca de generalidade suponha $x \in A$ e $y \in B$, donde segue $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$ mas, $d(a,y) \leq d(a,b) + d(b,y)$, combinando estas últimas desigualdades obtemos,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B) \leq k_1 + d(a,b) + k_2 = k.$$

Como $\delta(A \cup B) \leq k < \infty$, segue que $A \cup B$ é limitado. ■

3.4 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM CONJUNTO E DISTÂNCIAS DE CONJUNTOS

Dados M um espaço métrico, a um ponto de M e $A \neq \emptyset$ um subconjunto de M estamos interessados em determinar a distância do ponto a ao conjunto A. Como A, em geral, contêm mais de um ponto de M poderíamos considerar como a distância do ponto a ao conjunto A a menor das distâncias $d(x, a)$ onde $x \in A$, no entanto conhecemos conjuntos limitados inferiormente de números reais que não possuem mínimo e desse modo a distância não estaria sempre bem definida. Desse modo, convêm considerar o ínfimo das distâncias $d(x, a)$ onde $x \in A$ como sendo a distância de a ao conjunto A, desse modo a distância sempre estará bem definida. Assim, temos a definição.

Definição 3.6. Sejam M um espaço métrico $A \neq \emptyset$ um subconjunto de M e a um elemento de A. Definimos a distância de a a A, denotada por $\text{dist}(a, A)$ como sendo o número

$$\text{dist}(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x).$$

Quando necessário explicitar a métrica utilizada pode-se escrever $\text{dist}_d(a, A)$.

Proposição 3.7. *Seja M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não vazio A de M vale:*

$$|d(a, A) - d(b, A)| \leq d(a, b).$$

Demonstração. Sabemos que $\text{dist}(a, A) \leq d(a, x)$ para todo $x \in A$, assim conseguimos as desigualdades

$$\text{dist}(a, A) \leq d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x)$$

o que acarreta

$$\text{dist}(a, A) - d(a, b) \leq d(b, x),$$

isto ocorre para todo $x \in X$. Deste modo $\text{dist}(a, A) - d(a, b) \leq \text{dist}(b, A)$. E com isso deve ser $\text{dist}(a, A) - d(b, A) \leq d(a, b)$.

Por outro lado temos as desigualdades

$$\text{dist}(b, A) \leq d(b, x) \leq d(b, a) + d(a, x)$$

o que acarreta

$$\text{dist}(b, A) - d(a, b) \leq d(a, x),$$

para todo $x \in X$. Assim, $\text{dist}(b, A) - d(a, b) \leq \text{dist}(a, A)$. E com isso deve ser $-d(a, b) \leq \text{dist}(a, A) - \text{dist}(b, A)$. Assim temos

$$-d(a, b) \leq \text{dist}(a, A) - \text{dist}(b, A) \leq d(a, b)$$

e, portanto, concluímos o resultado

$$|d(a, A) - d(b, A)| \leq d(a, b).$$

$\blacksquare$

Agora falaremos da distância entre subconjuntos de um espaço métrico.

Definição 3.7. Sejam M um espaço métrico e A e B subconjuntos não vazios de M. Definimos a distância de A a B, denotada por dist(A, B) como sendo o número

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

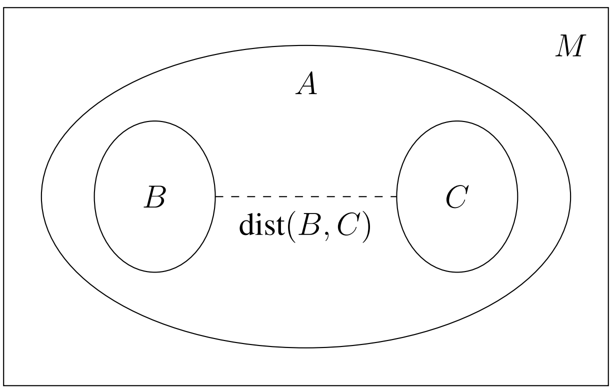
Quando necessário podemos especificar a métrica do espaço escrevendo dist$_d(A, B)$.

Proposição 3.8. *Seja M um espaço métrico. Tomemos $x \in M$ e A e B subconjuntos não vazios de M. Então, dist$(A, B) \leq$ dist$(x, A) +$ dist(x, B).*

Demonstração. Fixemos $x \in M$ e tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Dessa forma existe $a \in A$ com $d(x, a) \leq$ dist$(x, A) + \frac{\varepsilon}{2}$, da mesma forma dever existir $b \in B$ satisfazendo $d(x, b) \leq$ dist$(x, B) + \frac{\varepsilon}{2}$. Usando estas duas desigualdades e a definição de distância entre conjuntos obtemos, dist$(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq$ dist$(x, A) +$ dist$(x, B) + \varepsilon$. Sendo ε arbitrário fazemos $\varepsilon \to 0$ e obtemos a desigualdade desejada, dist$(A, B) \leq$ dist$(x, A) +$ dist(x, B). $\blacksquare$

Devemos observar que a distância entre conjuntos definida anteriormente é uma função de $\mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\}$ assumindo valores em $\mathbb{R}$ que satisfaz dist$(A, B) \geq 0$, o que é imediato, visto que as distâncias de quaisquer dois elementos em um espaço métrico é sempre positiva ou zero. No entanto temos que dist$(A, A) = 0$ mas a recíproca não é verdadeira, isto é, dist$(A, B) = 0$ não acarreta $A = B$, para ver isto é suficiente tomar $A, B \subset M$ com $A \neq B$ e $A \cap B \neq \emptyset$, como existe $\tilde{x}$ que é elemento de A e B ao mesmo tempo temos que dist$(A, B) = d(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$. Também não é válida a desigualdade triangular, para ver isto tomemos conjuntos $A, B, C \subset M$ como na Figura 5

Figura 5 – A distância de conjuntos não satisfaz a desigualdade triangular



Fonte: Próprio autor

vemos, portanto, que $0 < r = \text{dist}(B, C) \not\leq \text{dist}(B, A) + \text{dist}(A, C) = 0$. Podemos ainda introduzir uma métrica sobre $\mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\}$ usando a aplicação

$$(A, B) \mapsto \max\left\{\sup_{x\in B} \text{dist}(x, A), \sup_{x\in A} \text{dist}(x, B)\right\},$$

para tal, ver Searcóid (2007).

3.5 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Definição 3.8. Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é uma imersão isométrica se $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Proposição 3.9. *Toda imersão isométrica é injetiva.*

Demonstração. Consideremos M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma imersão isométrica. Tomemos $f(a) = f(b) \in f(M)$, devemos concluir que $a = b$. Com efeito, sendo f imersão isométrica temos $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo $x \in M$, em particular, $0 = d(f(a), f(b)) = d(a, b)$, isto é, $d(a, b) = 0$ o que acarreta $a = b$. Com isto concluímos que f é injetiva e concluímos a prova. ■

Definição 3.9. Chamamos de isometria uma imersão isométrica sobrejetiva.

Proposição 3.10. *A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.*

Demonstração. Sejam M, N, T espaços métricos, $f : M \to N$ e $g : N \to T$ isometrias. Provemos que $g \circ f$ é isometria. De fato, $g \circ f$ é imersão isométrica pois

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d(g(f(x)), g(f(y))) \\ &= d(f(x), f(y)) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Agora consideremos $z \in T$, sendo g isometria deve existir $y \in N$ tal que $z = g(y)$, analogamente sendo f isometria deve existir $x \in M$ onde $y = f(x)$, com isto temos $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, isto mostra que $g \circ f$ é sobrejetiva, assim concluímos que $g \circ f$ é isometria.

Agora mostraremos que a inversa de uma isometria é ainda uma isometria. Ora, como f é bijetiva temos que f^{-1} está bem definida e é sobrejetiva, resta apenas mostrar que f^{-1} é imersão isométrica. Para tal escolhemos $x = f(a)$ e $y = f(b)$, dessa forma temos $a = f^{-1}(x)$ e $b = f^{-1}(y)$, e com isto temos

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) &= d(a, b) \\ &= d(f(a), f(b)) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Assim concluímos que f^{-1} é isometria e concluímos a prova. ■

Modelo 3.6. Consideremos o espaço vetorial normado $\mathbb{C}$, dos números complexos. Fixemos $u \in \mathbb{C}$ tal que $\|u\| = 1$, e consideremos a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que a cada $w \in \mathbb{C}$ faz corresponde o elemento $f(w) = u \cdot w$. f é uma isometria, ora, f é sobrejetiva pois dado $z \in \mathbb{C}$ o elemento $w = \frac{z}{u}$ é tal que $f(w) = u \cdot w = u \cdot \frac{z}{u} = z$. E f é imersão isométrica pois

$$\begin{aligned} d(f(z), f(w)) &= \|f(z) - f(w)\| \\ &= \|uz - uw\| \\ &= \|u\| \cdot \|z - w\| \\ &= d(z, w). \end{aligned}$$

E desta forma concluímos que f é isometria.

Modelo 3.7. Consideremos o espaço vetorial normado $\mathbb{R}^n$. Então dado um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|u\| = 1$ fixemos $a \in \mathbb{R}^n$. Consideremos a aplicação $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder $r(t) = a + t \cdot u$. Note que r é uma reta em $\mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto a e tem a direção do vetor u. A reta assim definida é uma imersão isométrica. Com efeito,

$$\begin{aligned} d(r(x), r(y)) &= \|r(x) - r(y)\| \\ &= \|a + x \cdot u - (a + y \cdot u)\| \\ &= |x - y| \cdot \|u\| \\ &= |x - y| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

E desta forma vemos que de fato a aplicação r é uma imersão isométrica da reta $\mathbb{R}$ no espaço $\mathbb{R}^n$.

Por fim devemos observar que, dado X um conjunto qualquer. É sempre possível introduzir em X uma estrutura de espaço métrico, basta tomar (M, d) um espaço métrico e tomar $f : X \to M$ uma aplicação injetiva, então definimos $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$ e desse modo (X, d') torna-se um espaço métrico.

4 NOÇÕES TOPOLÓGICAS DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

A fim de generalizarmos os conceitos apresentados anteriormente, introduziremos nessa seção algumas noções de topologia.

4.1 CONJUNTOS ABERTOS

Definição 4.1. Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$. Um ponto $a \in A$ chama-se ponto interior ao conjunto A se existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$. Denotamos o conjunto dos pontos interiores de A por $\operatorname{int} A$.

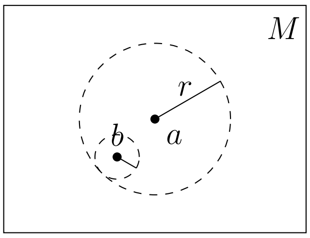
Observação 4.1. Um conjunto A em um espaço métrico M é aberto se, e somente se, $A = \operatorname{int} A$.

Ainda de forma equivalente devemos ter

Definição 4.2. Seja M um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é aberto se para qualquer $a \in A$ existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$.

Proposição 4.1. *Toda bola aberta em um espaço métrico é um conjunto aberto.*

Figura 6 – Uma bola aberta é um conjunto aberto



Fonte: Próprio autor

Demonstração. Sejam M um espaço métrico $a \in M$ e $r > 0$ um número real. A bola $B_r(a)$ é um conjunto aberto. Com efeito, consideremos $b \in B_r(a)$ e $\varepsilon = r - d(b,a)$, a bola $B_\varepsilon(b)$ está inteiramente contida em $B_r(a)$. De fato, se $x \in B_\varepsilon(b)$ ocorre $d(x,b) < \varepsilon = r - d(b,a)$ e portanto deve ser $d(x,b) + d(b,a) < r$, uma vez que $d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a)$ temos que $d(x,a) < r$ e portanto $x \in B_r(a)$, ou seja, $B_r(a)$ é um conjunto aberto. Com isto concluímos a prova. ∎

Modelo 4.1. Em $\mathbb{R}^n$ o conjunto $A = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n; x_i > 0,\ \forall i \in I_n\}$ é aberto. Como não foi especificada a métrica de $\mathbb{R}^n$ faremos a prova utilizando a métrica euclidiana. Com efeito, tomemos $a = (a_i)_{i=1}^n \in A$ e escolhemos $0 < \varepsilon < \min_{i \in I_n} a_i$. A bola $B_\varepsilon(a)$ está inteiramente contida em A. De fato, tomemos $x = (x_i)_{i=1}^n \in B_\varepsilon(a)$ temos que,

$$|a_k - x_k| = \left((a_k - x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i \in I_n} (a_i - x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

para algum $k \in I_n$. Com isto temos $a_k - \varepsilon < x_k$, sendo $\varepsilon < \min_{i \in I_n} a_i$ ocorre que $a_k - \varepsilon > 0$ e portanto $x_k > 0$. Como k foi tomado arbitrariamente, segue-se que $x_k > 0$ para todo $k \in I_n$, com isto concluímos que $(x_i)_{i \in I_n} \in A$, isto é, A é um conjunto aberto.

Modelo 4.2. Em $\mathbb{C}$ o conjunto $X = \{z \in \mathbb{C}; 1 < \|z\| < 2\}$ é aberto. Com efeito, tomemos $z_0 \in X$. Uma, e apenas uma das seguintes opções é satisfeita

i) $\|z_0\| = \frac{3}{2}$;

ii) $\frac{3}{2} < \|z_0\| < 2$;

ii) $1 < \|z_0\| < \frac{3}{2}$.

Se ocorrer (i) tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, daí $B_\varepsilon(z_0) \subset X$. De fato, tomemos $z \in B_\varepsilon(z_0)$ e então,

$$\begin{aligned} z \in B_\varepsilon(z_0) &\Rightarrow |\|z\| - \|z_0\|| \leq |z - z_0| < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon + \|z_0\| < \|z\| < \|z_0\| + \varepsilon \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} < \|z\| < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 1 < \|z\| < 2 \end{aligned}$$

e, portanto, $z \in X$.

Se ocorrer (ii) tomemos $\varepsilon = 2 - \|z_0\|$, daí $B_\varepsilon(z_0) \subset X$. De fato, tomemos $z \in B_\varepsilon(z_0)$ e então,

$$\begin{aligned} z \in B_\varepsilon(z_0) &\Rightarrow |\|z\| - \|z_0\|| \leq |z - z_0| < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon + \|z_0\| < \|z\| < \|z_0\| + \varepsilon \\ &\Rightarrow 2\|z_0\| - 2 < \|z\| < 2 \end{aligned}$$

sendo $\|z_0\| > \frac{3}{2}$ temos $1 < 2\|z_0\| - 2$ donde segue $1 < \|z\| < 2$, ou seja, $z \in X$.

Se ocorrer (iii) tomemos $\varepsilon = \|z_0\| - 1$, daí $B_\varepsilon(z_0) \subset X$. De fato, tomemos $z \in B_\varepsilon(z_0)$ e então ,

$$\begin{aligned} z \in B_\varepsilon(z_0) &\Rightarrow |\|z\| - \|z_0\|| \leq |z - z_0| < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon + \|z_0\| < \|z\| < \|z_0\| + \varepsilon \\ &\Rightarrow 1 < \|z\| < 2\|z_0\| - 1 \end{aligned}$$

sendo $\|z_0\| < \frac{3}{2}$ temos $2\|z_0\| - 1 < 2$ donde segue $1 < \|z\| < 2$, ou seja, $z \in X$.

Ora, em todos os casos possíveis dado $z_0 \in X$ exibimos um $\varepsilon > 0$ tal que se $z \in B_\varepsilon(z_0)$ então, $z \in X$, isto é, $B_\varepsilon(z_0) \subset X$. Portanto, X é aberto.

Dentre alguns resultados acerca dos conjuntos abertos, destacamos a seguinte Proposição:

Proposição 4.2. *Seja τ a coleção dos abertos de um espaço métrico M. Então:*

i) $\emptyset, M \in \tau$;

ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

iii) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família de abertos de* τ *então,* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Demonstração. Para mostrar (i) suponhamos primeiro que $\emptyset$ não é aberto. Desta forma deve existir $a \in \emptyset$ e $r > 0$ de tal modo que $B_r(a) \cap \emptyset \neq \emptyset$, absurdo. Logo só resta que $\emptyset$ ser aberto. Quanto a M seja qual for $a \in M$ sempre existe $r > 0$ de modo que $B_r(a)$ é ainda um subconjunto de M, logo M é aberto. Daí segue-se que $\emptyset, M \in \tau$.

Agora mostremos (ii). Para tal tomemos $A, B \in \tau$. Sendo A e B abertos, se $A \cap B = \emptyset$ caímos no caso anterior e $A \cap B \in \tau$, caso contrário tomemos $a \in A \cap B$, dessa forma existem $r, s > 0$ tais que $B_r(a) \subset A$ e $B_s(a) \subset B$, tomemos portanto $t = \min\{r, s\}$, a bola $B_t(a)$ esta inteiramente contida em $A \cap B$. De fato, seja $x \in B_t(a)$ segue-se que $d(x, a) < t \leq \min\{r, s\}$. Não há perca de generalidade em supor $\min\{r, s\} = r$ dessa forma temos $d(x, a) < t = r < s$ e portanto $x \in B_r(a)$ e $x \in B_s(a)$, isto é, $x \in B_r(a) \cap B_s(a)$, assim $x \in A$ e $x \in B$ e portanto $x \in A \cap B$. Com isto mostramos que $A \cap B \in \tau$.

Por fim mostraremos (iii). Desse modo tomemos $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, assim deve existir $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ tal que $a \in A_{\tilde{\lambda}}$. Sendo $A_{\tilde{\lambda}}$ um aberto deve existir $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A_{\tilde{\lambda}}$, tal bola ainda está inteiramente contida em $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. De fato, tomemos $x \in B_r(a)$ então $x \in A_{\tilde{\lambda}}$, e portanto $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Com isto mostramos que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ e concluímos a prova. ■

A proposição anterior é a que de fato caracteriza um espaço métrico M como um espaço topológico. A coleção de abertos τ satisfazendo as condições da proposição chama-se uma topologia sobre M, os elementos de τ são chamados de abertos da topologia e o par (M, τ) é chamado espaço topológico. Embora que, todo espaço métrico seja um espaço topológico o conceito de espaço topológico pode ser estendido de forma ainda mais abstrata em espaços sem a noção de métrica. Para uma abordagem mais rigorosa acerca de espaços topológicos ver Lima (2009).

4.2 CONJUNTOS FECHADOS

Definição 4.3. Seja M um espaço métrico. Um conjunto F de M chama-se fechado se F^c for aberto.

Proposição 4.3. *Seja Σ a coleção dos fechados de um espaço métrico M. Então:*

i) $\emptyset, M \in \Sigma$;

ii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

iii) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família de fechados de* Σ *então,* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \Sigma$.

Demonstração. Para mostrar (i) observamos que $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$, como M e $\emptyset$ são ambos abertos, concluímos, portanto, que M e $\emptyset$ são fechados.

Para provar (ii) tomemos A e B conjuntos fechados, uma vez que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, e sendo A^c e B^c abertos, usando o fato da interseção de abertos ser aberto o resultado segue.

Por fim, para mostrar (iii), olhamos para $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$. Sendo cada F_λ fechado temos que F_λ^c é aberto, como a união de abertos é aberto o resultado segue. Com isto concluímos a prova. ■

Definição 4.4. Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ se diz aderente ao conjunto A se para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de A chama-se fecho de A e é denotado por $\overline{A}$.

Proposição 4.4. *Sejam* M *um espaço métrico,* $a \in M$ *e* $A \subset M$. *Então dist*$(a, A) = 0$ *se, e somente se,* $a \in \overline{A}$.

Demonstração. Primeiro consideremos $a \in M$, vamos supor $\text{dist}(a, A) = 0$. Dessa forma temos $\inf_{x \in A} d(a, x) = 0$. Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $b \in A$ onde $0 < d(a, b) < \varepsilon$ isto em virtude de ser $\inf_{x \in A} d(a, x) = 0$. Assim, $b \in B_\varepsilon(a)$, mas $b \in A$ e desse modo temos $b \in B_\varepsilon(a) \cap A$, logo a é ponto aderente de A e portanto $a \in \overline{A}$.

Reciprocamente consideremos $a \in \overline{A}$ e suponhamos por absurdo que $\text{dist}(a, A) = \varepsilon > 0$. Sendo a ponto aderente segue-se que $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ e então podemos escolher $b \in A$ com $d(a, b) < \varepsilon$. Daí $\varepsilon = d(a, A) \leq d(a, b) < \varepsilon$, isto é, $\varepsilon < \varepsilon$, absurdo. Absurdo em supor que $\text{dist}(a, A) > 0$, logo deve ser $\text{dist}(a, A) = 0$. Com isto concluímos a prova.

Vale salientar que ser fechado não é o contrário de ser aberto, pois existem conjuntos que não são nem fechados nem abertos, como é o caso de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ou que são fechados e abertos ao mesmo tempo, como é o caso do conjunto vazio. ■

5 FUNÇÕES CONTÍNUAS

O conceito de continuidade é um dos pontos centrais do estudo de análise. Diante disto, neste capítulo apresentaremos tal conceito e verificaremos que a noção de continuidade pode ser generalizada para espaços nos quais não necessita de uma distância definida. Para isto, observaremos caracterizações e aplicações interessantes para uma melhor fixação das ideias, como as funções lipschitizianas, visando aprimorar a compreensão e interpretação da noção de continuidade nos espaços métricos.

Definição 5.1. Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que uma função $f : M \to N$ é contínua em um ponto $a \in M$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ de forma que $d(a, x) < \delta$ acarreta $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Uma função $f : M \to N$ será dita contínua em M se for contínua em todos os pontos de M. Quando estamos interessados em estudar a continuidade de uma função em um ponto a estamos interessados apenas em observar o comportamento da função nas proximidade do ponto a. Desse modo, se $f : M \to N$ é uma função e se exibirmos uma bola B centrada em a onde a $f|_B$ é contínua em a então podemos concluir que f é contínua em a.

Podemos reescrever a definição de função contínua em termos de bolas abertas do espaço métrico M. Para tal consideramos $f : M \to N$ uma aplicação entre espaços métricos. Diremos que f é contínua em um ponto $a \in M$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$ for possível determinar $\delta > 0$ de modo que

$$f\left(B_\delta(a)\right) \subset B_\varepsilon(f(a)).$$

Ressaltamos que tanto esta caracterização quanto a primeira apresentada são equivalentes.

Modelo 5.1. Consideremos M, N dois espaços métricos, e seja $f : M \to N$ uma imersão isométrica, isto é, para quaisquer $x, y \in M$ é satisfeita a igualdade

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Deste modo, toda imersão isométrica é uma função contínua. Com efeito, consideremos $a \in M$ e para todo $\varepsilon > 0$ dado consideremos $\delta = \varepsilon$. Daí, sempre que $d(x, a) < \delta$, temos $d(f(x), f(a)) = d(x, a) < \delta = \varepsilon$, isto é, f é contínua no ponto a. Uma vez que a foi tomado arbitrariamente concluímos que f é contínua em M.

Observação 5.1. Em virtude do modelo anterior observamos que para mostrar a continuidade de uma aplicação $f : M \to N$, é suficiente mostrar que f é uma imersão isométrica de M em N.

Modelo 5.2. Sejam M, N dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se lipschitiziana se existir uma constante $k > 0$ de tal modo que seja satisfeita a condição

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Podemos observar que dado qualquer $c > k$ f ainda satisfaz a condição exposta agora para esta constante c. O conjunto $L = \{k > 0; d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)\}$ das constantes que satisfazem tal condição é limitado inferiormente por 0 e desse modo tal conjunto admite ínfimo e assim o número $c = \inf L$ é chamada constante de Lipschitiz da função f. Assim, toda função lipschitiziana é uma função contínua. Com efeito, consideremos $f : M \to N$ uma função lipschitiziana com constante de lipschitz $k > 0$ e $a \in M$. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, daí se ocorre $d(x, a) < \delta$ teremos portanto

$$d(f(x), f(a)) \leq k \cdot d(x, a) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

e, desse modo, vemos que f é contínuas em a. Como a foi tomado arbitrariamente concluímos que f é contínua em M.

Modelo 5.3. Consideremos $f : M \to N$ uma função lipschitiziana, dizemos que f é uma contração se a constante de lipschitiz k associada a f estiver entre 0 e 1, isto é, $0 < k < 1$. Desta forma, em decorrência do modelo anterior temos também que toda contração é uma função contínua.

No caso particular em que constante de lipschitiz é $k = 1$ dizemos que f é uma contração fraca, como é lipschitiziana é ainda contínua.

A critério de exemplo consideremos um espaço vetorial normado E, a norma em E é uma contração fraca e consequentemente é contínua. Com efeito, a partir da desigualdade triangular obtemos as seguintes desigualdades para vetores $u, v \in E$

$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\| \Rightarrow \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

e

$$\|v\| \leq \|v - u\| + \|u\| \Rightarrow -\|u - v\| \leq \|u\| - \|v\|$$

dessa forma concluímos que

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

ou seja, $\|.\|$ é uma contração fraca logo, contínua.

Modelo 5.4. Consideremos M um espaço métrico discreto e N um espaço métrico qualquer. Toda aplicação $f : M \to N$ é uma aplicação contínua. De fato, uma vez que todos os pontos de M são isolados sempre é possível encontrar $r > 0$ de tal forma que $B_r(a) \cap M = \{a\}$, isto para qualquer $a \in M$. Assim para todo $\varepsilon < r$ basta tomar $\delta = \varepsilon$ e com isto vemos que $d(x, a) < \varepsilon$ acarreta e $d(f(x), f(a)) = d(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

Proposição 5.1. *A composição de duas aplicações contínuas é ainda uma aplicação contínua.*

Demonstração. Sejam M, N, T espaços métricos e $f : M \to N$ e $g : N \to T$ aplicações contínuas. Dado um $a \in M$ façamos $y_0 = f(a) \in N$ e $y = f(x)$. Sendo g um a aplicação contínua, dado qualquer $\varepsilon > 0$ deve existir $\delta_1 > 0$ de tal modo que $d(y, y_0) < \delta_1$ acarreta

$d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$. Analogamente, sendo f uma aplicação contínua dado $\varepsilon > 0$ qualquer deve existir $\delta > 0$ de tal modo que $d(x, a) < \delta$ acarreta $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, isto deve ocorrer, em particular, para $\varepsilon = \delta_1$. Desse modo temos que, dado $\varepsilon > 0$ qualquer deve existir $\delta > 0$ de modo que $d(x, a) < \delta$ acarreta $d(f(x), f(a)) = d(y, y_0) < \delta_1$ e que por sua vez acarreta $d(g(y), g(y_0)) = d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$, isto é $g \circ f$ é uma aplicação contínua no ponto a. Como a foi tomado arbitrariamente concluímos que $g \circ f$ é contínua e seu domínio. ■

Proposição 5.2. *Sejam M, N_1 e N_2 espaços métricos. A função $f : M \to N_1 \times N_2$ é contínua se, e somente se, as aplicações coordenadas $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ forem ambas contínuas.*

Demonstração. No decorrer da prova usaremos em $N_1 \times N_2$ a métrica do máximo, ou seja,

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

Primeiro vamos supor que f é uma função contínua. Dessa forma, tomando $a \in M$ temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $d(x, a) < \delta$ acarreta

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &= d'((f_1(x), f_2(x)), (f_1(a), f_2(a))) \\ &= \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Não há perda de generalidade em supor,

$$\max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} = d(f_1(x), f_1(a)).$$

Daí temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que $d(x, a) < \delta$ acarreta

$$d(f(x), f(a)) = d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon.$$

e do mesmo modo

$$d(f_2(x), f_2(a)) \leq d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$$

assim, concluímos que f_1 e f_2 são contínuas no ponto a. Como a foi tomado arbitrariamente segue que f_1 e f_2 são ambas contínuas.

Reciprocamente, vamos supor f_1 e f_2 ambas contínuas. Desta forma tomemos $a \in M$, para todo $\varepsilon > 0$ dado existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de tal modo que, $d(x, a) < \delta_1$ acarreta $d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$ e $d(x, a) < \delta_2$ acarreta $d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon$. Assim tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, daí se $d(x, a) < \delta$ teremos $d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$ e $d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon$, deste modo deve ser

$$\max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon,$$

e com isto concluímos que f é contínua em a. Sendo a arbitrário, segue-se que f é contínua. Isto conclui a prova. ■

Proposição 5.3. *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g : M \to E$, $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então, são contínuas as aplicações:*

1. $f + g : M \to E$ *onde* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $\alpha \cdot f : M \to E$ *onde* $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$;
3. $\frac{1}{\beta} : M \to \mathbb{R}$ *onde* $\left(\frac{1}{\beta}\right)(x) = \frac{1}{\beta(x)}$.

Demonstração. 1. Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & M & \to & E \times E \\ & & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} s & : & E \times E & \to & E \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}.$$

E além disso consideremos em $E \times E$ a norma $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$. Em virtude da Proposição 5.2 a função ψ é contínua. Mostraremos que s é contração fraca. De fato,

$$\begin{aligned} d(s(x, y), s(a, b)) = \|s(x, y) - s(a, b)\| &= \|(x + y) - (a + b)\| \\ &\leq \|x - a\| + \|y - b\| \\ &= \|(x - a, y - b)\|_1 \\ &= \|(x, y) - (a, b)\|_1 \\ &= d((x, y), (a, b)). \end{aligned}$$

Sendo s contração fraca, concluímos que s contínua. Observando que $(s \circ \psi)(x) = f(x) + g(x)$, segue-se da Proposição 5.1 que $f + g$ é contínua.

2. Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & M & \to & E \times E \\ & & x & \mapsto & (\alpha(x), f(x)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} m & : & \mathbb{R} \times E & \to & E \\ & & (\alpha, x) & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

E além disso consideremos em $\mathbb{R} \times E$ a métrica $d'((\alpha, x), (\lambda, y)) = d(\alpha, \lambda) + d(x, y)$. Em virtude da Proposição 5.2 a função ψ é contínua. Para cada $k > 0$ consideremos o conjunto

$$X_k = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times E; |\alpha| \leq k \text{ e } \|x\| \leq k\}$$

isto é, X_k é uma parte limitada de $\mathbb{R} \times E$. Para cada $k > 0$ temos que m é lipschitiziana em X_k. De fato,

$$\begin{aligned} d(m(\alpha, x), m(\lambda, y)) &= \|m(\alpha, x) - m(\lambda, y)\| \\ &= \|\alpha x - \lambda y\| \\ &= \|\alpha x - \lambda x + \lambda x - \lambda y\| \\ &\leq \|x\| \cdot |\alpha - \lambda| + |\lambda| \cdot \|x - y\| \\ &\leq k(|\alpha - \lambda| + \|x - y\|) \\ &= k(d(\alpha, \lambda) + d(x, y)) \\ &= kd'((\alpha, x), (\lambda, y)). \end{aligned}$$

Sendo m lipschitiziana em cada X_k, como k é arbitrário, concluímos que m é contínua. Observando que $(m \circ \psi)(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$, segue-se da Proposição 5.1 que $\alpha \cdot f$ é contínua.

3. Consideremos a aplicação
$$\begin{array}{rcccl} q & : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$
Para cada $k > 0$ consideremos o conjunto
$$X_k = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; |x| \geq k\}.$$
Para cada $k > 0$ temos que q é lipschitiziana em X_k. De fato,
$$\begin{aligned} d(q(x), q(y)) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \frac{|x - y|}{|x| \cdot |y|} \\ &\leq \frac{1}{k^2} \cdot d(x, y). \end{aligned}$$
Sendo q lipschitiziana em cada X_k, como k é arbitrário, concluímos que q é contínua. Observando que $(q \circ \beta)(x) = \frac{1}{\beta(x)}$, segue-se da Proposição 5.1 que $\frac{1}{\beta}$ é contínua.

■

Agora vamos caracterizar funções contínuas entre espaços métricos em termos de conjuntos abertos. Para tal consideremos a seguinte proposição.

Proposição 5.4. *Sejam M e N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua é necessário e suficiente que a pré-imagem $f^{-1}(A')$ de qualquer subconjunto aberto $A' \subset N$ seja ainda um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Inicialmente vamos supor que f é contínua. Mostraremos que se $A' \subset N$ é um aberto de N, então $f^{-1}(A') \subset M$ é um aberto de M. Consideremos $a \in f^{-1}(A')$, sendo A' aberto, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subset A'$, como f é contínua existe $\delta > 0$ onde

$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset A'$, desta forma obtemos $B_\delta(a) \subset f^{-1}(A')$, como dado $a \in f^{-1}(A')$ exibimos $\delta > 0$ satisfazendo $B_\delta(a) \subset f^{-1}(A')$ concluímos que $f^{-1}(A')$ é um aberto de M.

Reciprocamente, vamos supor que para todo aberto $A' \subset N$ de N a pré-imagem $f^{-1}(A') \subset M$ é ainda um aberto. Mostraremos que f é contínua. Tomando $a \in M$, para todo $\varepsilon > 0$ dado temos que $B_\varepsilon(f(a))$ é um aberto de N, dessa forma $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))$ é aberto, daí existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, e assim concluímos que $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$, logo f é contínua. Isto conclui a prova. ■

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos noções básicas de Espaços Métricos, a exemplo de bolas em espaços métricos e mergulhos isométricos, assim como métricas das mais diversas. Espaços métricos é um tema muito importante nos principais estudos que envolvem a matemática pura, a definição de espaços métricos reúne os dois ingredientes básicos da análise funcional; um conceito de convergência e uma noção geométrica, esta última ainda em uma forma muito simples. Os Espaços Métricos ainda possuem uma grande área desconhecida que vem sendo estudada, acredita-se que estes estudos ajudarão nas melhorias das aplicações dos mesmos em várias áreas.

Apresentamos as principais definição acerca de espaços métricos, e tecemos demonstrações para as propriedades de cada distância citada neste trabalho. Focamos métricas usuais, como a utilizada em $\mathbb{R}^n$ e as provenientes de norma que tem grande utilidade nos ramo das equações diferenciais, também apresentamos métricas não usuais como a métrica "zero-um". A teoria dos espaços métricos oferece uma gama de propriedades úteis a diversos ramos da matemática, por exemplo, análise funcional e geometria diferencial.

Por fim, esperamos que este trabalho possa contribuir para uma melhor compreensão daqueles interessados em estudar este assunto. Ressaltamos que as referências estão organizadas de acordo com a ordem na qual foram citadas no texto, e muitos dos textos utilizados estão apenas referenciados.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introodução a Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. L. **Elementos de topológia geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. Citado na página 33.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 46.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. v. 1. Citado na página 46.

SEARCÓID, M. **Metric Spaces**. USA: Springer, 2007. Citado nas páginas 12 e 29.

APÊNDICE A – NOÇÕES BÁSICAS

A.1 UNIÃO E INTERSECÇÃO DE FAMÍLIAS

Consideremos Λ um conjunto qualquer onde seus elementos chamaremos de índices. Uma família de elementos de um conjunto X é uma aplicação $x : \Lambda \to X$ onde para cada $\lambda \in \Lambda$ escrevemos $x(\lambda) = x_\lambda$. Além disso denotamos toda a família por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ou por (x_λ) quando não houver confusão quanto ao conjunto de índices. Quando o conjunto de índices for o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, dizemos que $x : \mathbb{N} \to X$ é uma sequência de elementos de X e quando $\Lambda = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ dizemos que a família $x : \Lambda \to X$ é uma n-uppla de elementos de X e podemos escrever $(x_i)_{i\in\Lambda}$ ou podemos indicar os limites inferior e superior da seguinte maneira $(x_i)_{i=1}^n$.

Seja Λ um conjunto de índices e $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos. Definimos a união da família como sendo o seguinte conjunto

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x; \exists\lambda \in \Lambda \text{ onde } x \in A_\lambda\}.$$

Em outras palavras, a união da família é o conjunto dos x que pertencem a algum A_λ. Também definimos a intersecção da família como sendo o conjunto

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda,\ \forall\lambda \in \Lambda\}.$$

São Propriedades da união e intersecção de famílias

1. $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_{\lambda,\gamma}\right) = \bigcup_{(\lambda,\gamma)\in(\Lambda\times\Gamma)} A_{\lambda,\gamma};$
2. $\displaystyle\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda\times\Gamma} (A_\lambda \cap B_\gamma);$
3. $\displaystyle\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c;$
4. $\displaystyle\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$

Estas propriedades decorrem das propriedades da união e intersecção de conjuntos.

A.2 ESPAÇOS VETORIAIS

Consideremos um conjunto E qualquer e duas operações

$$(u, v) \in E \times E \mapsto u + v \in E$$

e

$$(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda u \in E,$$

chamadas respectivamente de adição e produto por escalar. E será chamado espaço vetorial, e seus elementos serão chamados de vetores se, para quaisquer $u, v, w \in E$ e quaisquer $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ forem satisfeitas as seguintes condições:

Comutatividade $u + v = v + u$;

Associatividade $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\lambda\gamma)u = \lambda(\gamma u)$;

Vetor nulo existe um vetor $0 \in E$, que chama-se vetor nulo ou zero de E que satisfaz, $0 + u = u + 0 = u$ para todo $u \in E$;

Inverso aditivo Para cada $u \in E$ existe um elemento $-u$, chamado inverso aditivo que satisfaz $-u + u = u + (-u) = 0$;

Distributividade $(\lambda + \gamma)u = \lambda u + \gamma u$ e $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;

Multiplicação por 1 $1v = v$.

Observação A.1. De acordo com o descrito anteriormente E chama-se espaço vetorial real, uma vez que o produto por escalar é definido sobre $\mathbb{R}$. Podemos definir um espaço vetorial de forma ainda mais geral trocando $\mathbb{R}$ por um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, e este chama-se $\mathbb{K}-$espaço vetorial.

Um subconjunto F de E chama-se subespaço vetorial de E se é parte fechada de E, isto é, dados $u, v \in F$ teremos $u + v \in F$ e ainda, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in F$ teremos $\lambda u \in F$. Desse modo F é ainda um espaço vetorial.

Consideremos E e F dois espaços vetoriais. Uma aplicação $T : E \to F$ chama-se transformação linear se $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para quaisquer $u, v \in E$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ para todo $u \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Modelo A.1. Temos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais. Dado $u \in \mathbb{R}^n$ consideremos o conjunto $X = \{v \in \mathbb{R}^n; v = \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ temos que X é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Consideremos a aplicação $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que para cada $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ associa o o vetor $\pi_i(u) = u_i \in \mathbb{R}$ é uma transformação linear.

A.3 ALGUMAS NOÇÕES DE ANÁLISE EM $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Descreveremos precisamente cada termo destes. Primeiro dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo é dizer que em $\mathbb{R}$ estão definidas duas operações $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y$ e $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x \cdot y$ chamadas respectivamente de adição e multiplicação e que satisfazem as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$

Associatividade $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

Comutatividade $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$;

Elemento neutro Em $\mathbb{R}$ existem dois elementos 0 e 1, $0 \neq 1$ que satisfazem $0 + x = x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

Inverso Todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x$ que satisfaz $-x + x = x + (-x) = 0$ e se, $x \neq 0$, x possui um inverso multiplicativo x^{-1} que satisfaz $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$;

Distributividade $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Todas as propriedades que conhecemos acerca dos números reais decorres das propriedades anteriores.

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado é dizer que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ chamado conjunto dos números reais positivos que satisfaz as seguintes propriedades

1. Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ então, $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$;
2. Dado $x \in \mathbb{R}$ vale a lei da tricotomia, isto é, uma, e apenas uma, das seguintes relações ocorre: $x \in \mathbb{R}^+$; $-x \in \mathbb{R}^+$ ou $x = 0$.

Escrevemos $\mathbb{R}^- = \{-x; x \in \mathbb{R}^+\}$ neste passo podemos escrever $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Escrevemos $x < y$ e dizemos que x é menor que y se ocorrer $x - y \in \mathbb{R}^+$. Também podemos escrever $y > x$ e dizer que y é maior que x. Quando $x > 0$ então, $x \in \mathbb{R}^+$ e então dizemos que x é positivo, caso seja $x < 0$ dizemos que $-x \in \mathbb{R}^+$ e nesse caso dizemos que x é negativo. Valem as seguintes propriedade para a relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$:

Transitividade Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

Tricotomia Dados $x, y \in \mathbb{R}$ ocorre uma, e apenas uma, das opções $x < y$, $y < x$ ou $x = y$;

Monotonicidade da adição Dados $x < y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + z < y + z$ para todo $z \in \mathbb{R}$;

Monotonicidade da adição Dados $x < y \in \mathbb{R}$ tem-se $x \cdot z < y \cdot z$ para todo $z \in \mathbb{R}^+$.

Uma demonstração pode ser vista em Lima (2018). Se dados $x, y \in \mathbb{R}$ ocorre $x < y$ ou $x = y$ dizemos que x é menor do que ou igual a y e escrevemos $x \leq y$, analogamente se dados $x, y \in \mathbb{R}$ ocorre $x > y$ ou $x = y$ dizemos que x é maior do que ou igual a y e escrevemos $x \geq y$. A partir da relação de ordem em $\mathbb{R}$ podemos definir o valor absoluto $|x|$ de um número $x \in \mathbb{R}$ pondo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Noutros termos, temos $|x| = \max\{-x, x\}$.

Proposição A.1. *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.*

Demonstração. Ver Lima (2018). ∎

Definição A.1. Um conjunto $X \in \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, b chama-se cota superior para o conjunto X. Desse modo, qualquer número $b' > b$ é ainda uma cota superior para X.

Definição A.2. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, a chama-se cota inferior para o conjunto X. Desse modo, qualquer número $a' < a$ é ainda uma cota inferior para X.

Definição A.3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado se for limitado inferiormente e superiormente.

Definição A.4. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Um número s se diz supremo do conjunto X, denotado por, $s = \sup X$, se for a menor das cotas superiores, mais precisamente

1. Para todo $x \in X$ tem-se $x \leq s$;

2. Se $c < s$ então existe $x \in X$ satisfazendo $c < x < s$.

Definição A.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Um número i se diz ínfimo do conjunto X, denotado por, $i = \inf X$, se for a maior das cotas inferiores, mais precisamente

1. Para todo $x \in X$ tem-se $i \leq x$;

2. Se $c > i$ então existe $x \in X$ satisfazendo $i < x < c$.

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo significa dizer que todo conjunto limitado de números reais possui supremo e ínfimo. O que não ocorre por exemplo em $\mathbb{Q}$, para tal ver Lima (2014).

Definição A.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N}; k \leq n\} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Proposição A.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Para $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ onde $i \in I_n$ é sempre válido a desigualdade*

$$\left(\sum_{i\in I_n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in I_n} x_i^2\right)\left(\sum_{i\in I_n} y_i^2\right)$$

Demonstração. Para tal consideremos o polinômio

$$p(\lambda) = \sum_{i\in I_n} (x_i - \lambda y_i)^2.$$

Ora, como $(x_i - \lambda y_i)^2 \geq 0$ para cada $i \in I_n$ segue que $p(\lambda) \geq 0$, e com isto temos

$$0 \leq p(\lambda) = \sum_{i\in I_n} (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i\in I_n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i\in I_n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i\in I_n} y_i^2.$$

Devemos observar que obtemos uma equação do segundo grau em λ sendo sempre maior do que ou igual a zero, deste modo devemos ter o descriminante menor do que ou igual a zero, ou seja,

$$4\left(\lambda \sum_{i\in I_n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i\in I_n} x_i^2\right)\left(\sum_{i\in I_n} y_i^2\right) \leq 0$$

o que acarreta a desigualdade desejada

$$\left(\sum_{i\in I_n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in I_n} x_i^2\right)\left(\sum_{i\in I_n} y_i^2\right).$$

■

Definição A.7. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada se existe uma constante $k > 0$ de tal modo que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$.

Proposição A.3. *A soma e o produto de funções limitadas é ainda uma função limitada.*

Demonstração. Suponha $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas, isto é, existem $k_f, k_g > 0$ que satisfazem $|f(x)| \leq k_f$ e $|g(x)| \leq k_g$ para todo $x \in X$. A soma $(f+g)(x) \mapsto f(x) + g(x)$ e o produto $(fg)(x) \mapsto f(x)g(x)$ são ambas limitadas. Com efeito, tome $k_1 = k_f + k_g$ e $k_2 = k_f k_g$ daí segue,

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_f + k_g = k_1$$

e

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq k_f k_g = k_2,$$

isso para todo $x \in X$, logo $f + g$ e fg são funções limitadas. ■