UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARTA BEATRIZ MARINHO DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA PERSPECTIVA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

MONTEIRO
2022

MARTA BEATRIZ MARINHO DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA PERSPECTIVA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO
2022

M528e Melo, Marta Beatriz Marinho de.

Equações diferenciais ordinárias na perspectiva da modelagem matemática [manuscrito] / Marta Beatriz Marinho de Melo. - 2022.

125 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Modelagem Matemática. 3. Matemática aplicada. 4. Modelos. I. Título

21. ed. CDD 515.352

Elaborada por Elesbao S. Neto - CRB - 15/347 BSC5/UEPB

MARTA BEATRIZ MARINHO DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA PERSPECTIVA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Aprovado em: 12/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador

Rônero Márcio Cordeiro Domingos

Prof. Me. Rônero Márcio Cordeiro Domingos
Examinador externo (IFSertãoPE)

Prof(a). Ma. Misaelle do Nascimento Oliveira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Dedico este trabalho a minha avó materna Teresinha Marinho (In memóriam), pois, gostaria que ainda estivesse aqui entre nós e que pudesse ter acompanhado minha jornada e assim ver o ser humano que tenho buscado a cada dia me tornar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelo dom da vida, pela saúde e por guiar-me pelos caminhos certos para a realização deste sonho, não me permitido pensar em desistir por um minuto sequer. A Nossa Senhora Aparecida por sempre interceder por mim nos momentos de angústia e desespero, mantendo-me firme na busca por meus objetivos.

A minha família, meu pai Ivaldo que da sua maneira nunca mediu esforços para me apoiar e minha mãe Maria de Lourdes pelo seu cuidado e preocupação todas as orações realizadas com toda a sua fé para me guiar no caminho do bem e auxiliar a vencer todos os obstáculos dessa caminhada e minha irmã Maria Clara, sua existência sempre me impulsionou a buscar ser um alguém merecedor de admiração.

Ao professor Roger Huanca, por ter sido meu orientador e ter desempenhado tal função com tamanha dedicação, pelos seus conselhos e amizade prestados desde o primeiro período do curso.

A todos aqueles que convivi ao longo desses anos que de alguma forma contribuíram com meu processo de formação e para a realização deste trabalho. E em especial a todos que sempre acreditaram em mim.

Aos meus colegas de turma que ao longo dos anos se tornaram pessoas imensamente especiais para mim, por compartilharem momentos bons e ruins, pela força e ajuda fornecida. Estarão para sempre em meu coração.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por me proporcionar a experiência extremamente enriquecedora de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de participar do Programa de Residência Pedagógica, período impar que me forneceu aprendizado e experiência fundamentais para a minha formação.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."

(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) na perspectiva da Modelagem Matemática, tendo em vista, discutir alguns modelos e situações-problema que possam proporcionar uma aprendizagem significativa aos estudantes do curso de licenciatura em matemática. Além disso, este trabalho poderá vir a contribuir com as pesquisas sobre o estudo das EDOs por meio da Modelagem Matemática, tema este que já vem sendo debatido. O desenvolvimento desta pesquisa se deu a partir de um levantamento bibliográfico, foram utilizados como procedimentos metodológicos, leituras sobre Equações Diferenciais Ordinárias (BARREIRA & VALLS, 2012; BOYCE & DIPRIMA, 2017; FIGUEIREDO & NEVES, 2018; SOTOMAYOR, 2011) e Modelagem Matemática (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014;FRANGO, 2020; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011; REMATEC, 2014). Apresentamos um estudo das Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática tendo como principal finalidade apresentar uma pesquisa fundamentada em um aprendizado significativo, isto é, baseado em, meios que visem facilitar o entendimento deste conteúdo a partir da resolução de modelos matemáticos que descrevem problemas do mudo real, expondo as possibilidades de aplicar a Modelagem Matemática no ensino das Equações Diferenciais Ordinárias, trabalhando-se com situações-problema que levam o estudante à realizar investigações trabalhando na busca pela resolução, que não consiste unicamente em seguir um sistema mapeado por passos que determinam como encontrar a solução. Com essa pesquisa esperamos que professores possam utilizar essa metodologia nas suas aulas.

Palavras-chave: Equações Diferencias Ordinárias. Modelagem Matemática. Matemática Aplicada. Modelos.

ABSTRACT

The present Work aims to present a study of Ordinary Differential Equations (ODEs) from the perspective of Mathematical Modeling, in order to discuss some models and problem-situations that can provide meaningful learning to students of the undergraduate course in mathematics. Moreover, this work may contribute to the research on the study of ODEs through Mathematical Modeling, a theme that has already been discussed. The development of this research was based on a bibliographic survey, we used as methodological procedures, readings on Ordinary Differential Equations (BARREIRA & VALLS, 2012; BOYCE & DIPRIMA, 2017; FIGUEIREDO & NEVES, 2018; SOTOMAYOR, 2011) and Mathematical Modeling (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014;FRANGO, 2020; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011; REMATEC, 2014). We present an study of the Ordinary Diferential Equations in the context of Mathematical Modeling with the main purpose of presenting a research based on a significant learning, that is, based on means that aim to facilitate the understanding os this content from the resolution of mathematical models that describe real world problems, exposing the possibilities of applying Mathematical Modeling to the teaching of Ordinary Differential Equations, working with problem-situations that lead the student to perform investigations by working on the search for a solution, which does not consist solely of following a system mapped by steps that determine how to find the solution. With this research we hope that teachers can use this methodology in their classes.

Key-words: Ordinary Differential Equations. Mathematical Modeling. Applied Mathematics. Models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com este trabalho buscamos aprofundar nossos conhecimentos na área da matemática aplicada, pois acreditamos que o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) por meio da metodologia de Modelagem Matemática pode proporcionar um processo de ensino-aprendizagem muito mais significativo suprindo então as dificuldades encontradas pela maioria dos discentes durante a graduação, que muitas vezes surgem devido o auto nível de abstração da forma na qual este conteúdo é apresentado. Durante a participação do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) cota 2019-2020, que teve o objetivo de dar sequência aos temas já estudados nos cursos de Equações Diferenciais, e assim obter conhecimento mais profundo e geral de alguns tópicos estudados na licenciatura, sempre destacando as mais diversas aplicações da teoria, foi possível perceber que um estudo voltado para aplicações pode proporcionar um grau de aprendizagem muito mais elevado comparado ao método tradicional fundamentado no tripé conceito-exemplo-exercício que enfatiza a repetição e a mecanização.

A partir das reflexões oriundas da experiência como acadêmica do curso de EDO a nível de graduação e da participação no PIBIC, surgiu o interesse em realizar um estudo mais aprofundado sobre Equações Diferenciais, visando conhecer métodos de ensino que possam promover uma aprendizagem verdadeiramente significativa e que envolve o aluno durante o processo de ensino-aprendizagem fazendo dele construtor do próprio conhecimento. Durante a participação do Programa de Residência Pedagógica (PRP) foi possível conhecer um pouco mais sobre a metodologia de Modelagem Matemática, que já tinha sido vista durante a graduação de forma breve, daí surgiu o interesse em realizar um estudo das EDOs a partir da Modelagem Matemática.

A participação no PRP durante o período de outubro de 2020 à abril de 2022, foi de fundamental importância durante o processo de formação, pois, além de proporcionar a primeira experiência com a prática docente, também possibilitou conhecer diversas tendencias metodológicas, não apenas de forma teórica mas também na prática. O que permitiu entender melhor como funciona o ensino através da Metodologia de Modelagem Matemática, quais são as principais dificuldades encontradas e o que pode ser feito para suprir essas dificuldades, essa experiência garantiu um crescimento não apenas no processo de formação, mas também profissional imensurável, visto que na maioria dos casos passamos pela graduação conhecendo apenas a parte teórica e acreditando que tudo pode acontecer da forma que esta nos livros/textos, mas ao conhecermos a prática conseguimos perceber que cada realidade tem sua singularidade e necessário nos adaptarmos a ela, ter esse conhecimento nos proporciona um debate muito mais verdadeiro e significativo.

As ideias de Modelagem Matemática, foram propostas no Brasil inicialmente pelos professores/pesquisadores Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Bassanezi os quais deram impulso significativo para a implantação da modelagem no cenário do ensino brasileiro.

De acordo com Biembengut (2011), a expressão Modelagem Matemática surgiu durante o Renascimento, quando foram construídas as primeiras ideias da Física, apresentadas segundo linguagem e tratamentos matemáticos e, posteriormente, foi sendo utilizada em toda a ciência, contribuindo sobremaneira para a evolução do conhecimento humano seja nos fenômenos microscópicos, em tecno-biologia, seja nos macroscópicos, com a pretensão de conquistar o universo.

Assim como afirma Costa (2016),

> A Modelagem Matemática pode ser compreendida como uma estratégia de ensino que possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos a partir de fenômenos de sua realidade, com o propósito de educar matematicamente. Ao contrário de uma proposta comum de ensino, a modelagem provoca o estudante a ser o autor principal no processo de construção de sua aprendizagem, levando-o a buscar as respostas do "problema".

Fazendo então com que o aluno sinta-se instigado a participar das aulas e a aprender o conteúdo, visto que agora ele deixa de ser apenas ouvinte e passa a ser membro ativo do desenvolvimento das aulas. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), explicitam que em modelagem o sujeito do processo cognitivo é o aluno.

Modelagem matemática na visão de Bassanezi (2010. p. 45), "trata-se de um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade". Para o autor, modelo matemático consiste em um conjunto de relações matemáticas e símbolos que, de alguma maneira descrevem o objeto estudado. Ele afirma também que esses modelos matemáticos podem ser formulados conforme a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificadas de acordo com a matemática utilizada. Por meio do trabalho com a Modelagem Matemática os estudantes poderão, valendo-se dos resultados matemáticos relacionados a uma dada situação real, ter melhores condições para decidir o que fazer, uma vez que terão condições que poderão contribuir para a avaliação de aspectos qualitativos e quantitativos da situação inicial (COSTA, 2016).

De acordo com Biembengut (2014):

> Modelagem é o processo envolvido na elaboração de modelo [...]. Trata-se de um processo de pesquisa. A essência deste processo emerge na mente de uma pessoa quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam-na a encontrar uma melhor forma para alcançar uma solução, descobrir um meio para compreender, solucionar, alterar ou ainda criar ou aprimorar algo. E em especial quando a pessoa tem uma percepção que instiga sua inspiração. (BIEMBENGUT, 2014, p.21)

Madruga e Lima (2019) nos dizem que assim como Bassanezi (2010), Biembengut (2007) e Blum et Al. (2007), por exemplo, outros atores afirmam que o processo de elaboração de um modelo se dá por meio de muitas interações. Para iniciar um trabalho utilizando modelagem, é necessário dispor de uma situação-problema que para a solução não se disponha de dados suficientes para utilizar uma fórmula como caminho para resolvê-la . Assim, requer um levantamento de possíveis situações de estudo, as quais devem ser, preferencialmente abrangentes para que se possam proporcionar questionamentos em várias direções.

Podemos então perceber que a Modelagem Matemática não é uma metodologia simples de se aplicar, na verdade apresenta uma certa complexidade que exige tempo e dedicação, por parte dos professores e também dos alunos. Porém é justamente essa complexidade que torna esta metodologia tão importante para o processo de ensino aprendizagem significativo, pois, faz do aluno construtor do próprio conhecimento, e faz com que o professor saia da sua zona de conforto e torne-se cada vez mais um profissional competente e habilitado a transformar a realidade atual do ensino de matemática.

O estudo das Equações Diferenciais de acordo com Figueiredo e Neves (2018, p.1) "Começa com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII, motivados por problemas físicos. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícita". Porém não era tão simples encontrar essas soluções, foi possível obter apenas soluções parciais com o auxílio das notações simbólicas e das manipulações algébricas que facilitaram bastante este processo. No final do século XVII e início de século de XVIII novos pesquisadores passaram a aplicar esses problemas em áreas como astronomia e ciências físicas, e até os dias atuais as Equações Diferenciais são imprescindíveis não apenas para o desenvolvimento científico matemático, mas também para diversas áreas do conhecimento.

Provando então aquela típica frase que provavelmente todo estudante já ouviu "A matemática está em tudo", ao fazermos esta afirmação é necessário que também sigamos caminhos metodológicos que comprovem isto. Pois, assim como afirmam Figueiredo e Neves(2018, Prólogo),

> A grande relevância da Matemática jaz no fato de que, além de sua vida própria como ciência, com suas teorias e seus problemas, ela tem a característica ímpar de poder penetrar, como uma arma importante e, às vezes, imprescindível em muitos outros ramos do conhecimento humano. Não devemos esquecer esse fato, quando realizamos nosso trabalho, como professor ou pesquisador. Ao ensinar Matemática para alunos de outras áreas é essencial motivar, mostrando-lhes a importância do que estão aprendendo para os problemas de suas especialidades. Aos alunos de Matemática, é educativo mostrar-lhes uma Matemática rica de aplicações, contar-lhes que as raízes de tantas teorias matemáticas estão em problemas da natureza.

As Equações Diferenciais modelam inúmeros problemas das mais diversas áreas do conhecimento. Através do estudo das soluções de uma equação diferencial, tais como números e comportamentos de soluções, é possível descrever, analisar e compreender uma determinada grandeza em estudo, por este motivo a investigação de problemas desse tipo é imprescindível para o desenvolvimento não apenas da matemática, mas de muitos outros ramos do conhecimento humano, como por exemplo Biologia, Física, Engenharia, entre outros. Pois, assim como ressaltam Boyce e Diprima (1999, prefácio),

> A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas,o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos.

Desta forma, notamos a importância do estudo das Equações Diferenciais no contexto da Modelagem Matemática, pois, através dele é possível enxergar a matemática a partir de uma nova perspectiva onde esta permite que o estudante não se detenha apenas a resolver equações mas sim resolver problemas do mundo real conseguindo então obter a construção de um conhecimento verdadeiramente significativo. Evidentemente, não estamos defendendo a questão de que um curso de Equações Diferenciais deixe de ter seu enfoque em matemática pura, mas, como explicam Figueiredo e Neves (2012), tal área da Matemática surgiu para resolver problemas de outras ciências. Um exemplo clássico é o próprio Teorema Fundamental do Cálculo motivado por problemas físicos e que até hoje é necessário pesquisar os problemas provenientes dessas ciências (FIGUEIREDO; NEVES, 2012).

Procuramos então atingir o entendimento de como tornar possível que o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias "fuja"do método tradicional baseado exclusivamente em pesquisas teóricas e parta para um estudo significativo e dinâmico voltado para aplicações em modelos matemáticos a partir da Modelagem Matemática, através de uma pesquisa bibliográfica e qualitativa. Assim como veremos no decorrer.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática no Brasil teve início com nomes como Ubiratan D'Ambrósio, Aristides Barreto, Rodney Bassanezi, entre outros, nas décadas de 1970 e 1980. Mas foi ao final da década de 1990 e início dos anos 2000 que se firmou como área de interesse da Educação Matemática.

A Modelagem no cenário internacional está intimamente ligada ao ICMI – International Comission on Mathematical Education – e ao nome de Felix Klein, seu presidente à época. Foi na Europa Ocidental, que o assunto ganhou corpo, alcançando, mais adiante, os Estados Unidos da América e assim, o resto do mundo. No início da década de 1980, foi formado o ICTMA – The International Community of Teachers of Modelling and Applications, que se ocupa de promover a discução sobre Modelagem no Ensino de Matemática em âmbito internacional. Atualmente está filiado ao ICMI se reúne bi-anualmente.

Cronologicamente, a discussão a respeito da Modelagem para o ensino de Matemática já ocorria em outros países antes de ser posto em discussão no Brasil. Foi dessas discussões e de trabalhos realizados fora do Brasil que D'Ambrósio se inspirou e inspirou pesquisadores brasileiros.

O trabalho com Modelagem é caracteristicamente uma atividade para ser desenvolvida em grupo. É propício para que surja um ambiente de aprendizagem colaborativa, onde haja compartilhamento de ideias.

Quando consideramos o contexto da Educação Matemática, deparamo-nos com a presença da Modelagem Matemática em trabalhos de pesquisadores brasileiros desde a década de 1970, quando houve uma preocupação quanto ao ensino de Matemática por parte de matemáticos puros e aplicados (BIEMBEMGUT, 2009). Ao analisarmos os documentos oficiais, como as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), propostos pelo Ministério da Educação (MEC), constatamos que a Modelagem é preconizada como um caminho possível para o ensino e a aprendizagem da Matemática nas escolas da Educação Básica.

> Em anos recentes, os estudos em educação matemática também têm posto em evidência um caminho para se trabalhar a Matemática na escola, a ideia de modelagem matemática, que pode ser entendida como

> a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BRASIL, 2006, p.84, grifo dos autores).

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA - SEGUNDO ALGUNS AUTORES

Bassanezi é um dos primeiros pesquisadores em Modelagem Matemática no ensino de Matemática do Brasil. Exerceu e ainda exerce grande influência em pesquisas da área. Seu trabalho ocupava-se principalmente com a Matemática do Ensino Superior. Maria Salett Biembengut é um nome importante na Modelagem. Publicou vários trabalhos de relevância sobre Modelagem na educação básica e também no Ensino Superior. É fundadora do Centro de Referência da Modelagem Matemática no Ensino.

É importante que os professores em formação conheçam as diferentes abordagens de um trabalho com Modelagem em sala de aula nos diversos níveis de ensino. Bassanezi e Biembengut são duas grandes referências da Modelagem.

Dionísio Burak, oriundo da região sul, pesquisa Modelagem Matemática há mais de trinta anos. Para este autor a Modelagem trata-se de uma metodologia, enquanto para Barbosa, esta é um ambiente de aprendizagem.

O trabalho com Modelagem compreende vários passos. Cada um desses passos tem um objetivo bem definido.

A Modelagem Matemática é uma das tendências atuais da educação matemática, que é compreendida como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a investigar situações com referência na realidade por meio da matemática (BARBOSA, 2007). Existem diversas maneiras de compreender a Modelagem, estas foram analisadas por por Kaiser e Sriman (2006), ao proporem diferentes perspectivas de Modelagem na educação matemática: a realística, a contextual, a educacional, a socio-crítica, a epistemológica e uma meta-perspectiva a cognitiva.

No contexto educacional, "atividades de Modelagem Matemática assumem, contundentemente, diferentes formas à medida que são institucionalizadas em todo o mundo."(LINGERFJARD 2011. p. 9).

Segundo MaaB (2006), modelar matematicamente é transitar entre a realidade e a

Matemática, o processo de Modelagem começa com um problema do mundo real que é estruturado matematicamente. Do mesmo modo, Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2003), ao considerarem Modelagem enquanto arte de transformar situações da realidade em problema matemáticos, com vistas a serem compreendidas ou solucionadas, também consideram a realidade como propulsora do processo de Modelagem. De acordo com Blum e Ferri (2009, p.45) "Realidade é o resto do mundo fora da matemática, incluindo natureza, vida cotidiana e outras disciplinas científicas". E dessa forma situações da realidade dizem respeito aos problemas propostos pela vida cotidiana, excluindo-se, dessa forma, aqueles propostos pela própria matemática (CHAVES, 2014).

Na perspectiva de Bassanezi (2009, p.20) "chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de alguma forma o objeto estudado".

A Modelagem já possui tradição na área de Educação Matemática e vários autores discutem suas potencialidades e limitações enquanto estratégia pedagógica no ensino e aprendizagem na matemática. (BASSANEZI, 2009; ALMEIDA et al., 2011; BIEMBENGUT; HEIN, 2007; MEYER et al., 2011).

O conceito de Modelagem Matemática no Ensino é encontrado em publicações científicas, diversas concepções, com diferentes propostas de abordagens pedagógicas. Bassanezi afirma que:

> Modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (2002, p. 24).

Em relação ao ensino, o autor afirma:

> A modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente, sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador.(...) A utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do cursista, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicações dos mesmos, a partir da realidade de seu ambiente (2002, p. 207).

De acordo com Bassanezi (2002, p. 36) “o desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabam conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade”.

O esquema: “enunciado-demonstração-aplicação”, representa claramente essa estrutura tradicional de ensino, entretanto, a construção dessa ordem, segundo esse autor, deveria ser invertida, isto é, partir de sua motivação (externa ou não a matemática), ocorre-se a formulação de hipótese, permeando entre suas validações e de novos questionamentos, chegando finalmente em seu enunciado (BASSANEZI, 2002). Assim, por esse novo fio condutor, é que o processo da Modelagem aconteceria e juntamente com ele, o ensino e aprendizagem.

Barbosa (2001, 2009) apresentou Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem, ressaltando o trabalho no âmbito dela como um convite aos alunos. A matemática foi vista por Barbosa (2001, 2008, 2009) como um meio para indagar/investigar situações que fossem de áreas distintas à matemática. Também, segundo ele, a Modelagem Matemática tem como objetivo oportunizar a observação/exploração/reflexão/discussão do papel da matemática (e de modelos matemáticos) na sociedade e nas ciências. Na concepção do referido autor, não há garantia da presença de modelos matemáticos no sentido formal (BARBOSA, 2001) esses são entendidos como qualquer representação ou registro matemático, como os que empregam símbolos, conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos e, como instrumentos de poder, a serem analisados, problematizados e discutidos criticamente (BARBOSA, 2008, 2009).

Sobre etapas, Barbosa (2001) não as define previamente, nem aponta uma sequência de procedimentos a serem seguidos. No entanto, podemos relacionar etapas, na concepção desse pesquisador, à descrição de Casos (BARBOSA, 2001, 2009) e discussões (BARBOSA, 2008). Sant’ Ana, Sant’Ana e Serpa (2020, p. 80) explicaram que os referidos Casos são "enumerados de 1 a 3, de acordo com a divisão de tarefas entre professores e alunos, de modo que, quanto mais autonomia for delegada aos alunos, maior o número atribuído". Essas "tarefas"são elaboração da situação-problema, simplificação, coleta de dados e resolução. Consideramos que elas podem ser relacionadas a etapas, no ambiente de Modelagem Matemática baseado na concepção de Barbosa (2001, 2009).

Bassanezi (2002) caracterizou Modelagem Matemática como um processo de obtenção e validação de modelos matemáticos, como arte de transformar problemas da "realidade"em problemas matemáticos. Segundo Bassanezi (2002), o trabalho com Modelagem Matemática na Educação tem como objetivos mostrar (aos alunos) aplicações e a criação da matemática, o desenvolvimento (pelos alunos) de habilidades como modeladores; e, ser uma estratégia de aprendizagem, na qual se valoriza o processo. Para Bassanezi (2002), a obtenção de modelos faz parte da caracterização de Modelagem Matemática, dessa forma, é garantida ao se trabalhar no âmbito da concepção dele. Os modelos matemáticos consistem em um conjunto de símbolos e relações matemáticas utilizados na tentativa de explicar, entender, ou agir de maneira clara e sem ambiguidades obre uma "porção da realidade"(BASSANEZI, 2002) Ainda, para o mencionado pesquisador, a Modelagem Matemática deve-se seguir etapas. As cinco descritas por ele dizem respeito a coleta de dados, seleção de variáveis e, formulação de problemas hipóteses, obtenção do modelo, teste do modelo, e, modificação (se necessária) do modelo.

Burak (2017) trouxe Modelagem Matemática como um conjunto de procedimentos de acordo com ele, a matemática é utilizada para tentar explicar fenômenos cotidianos, ajudar a fazer predições e tomar decisões. Observamos que, para Burak (2004, 2017), o trabalho com Modelagem Matemática tem como objetivos propiciar a ação do estudante maior interesse, interação, atenção, sensibilidade, criatividade e critica dos estudantes, uma nova postura do professor, como mediador e, maior significado ao conteúdo matemático. Burak (2010) entendeu modelo como representação e citou lista de supermercado e planta de uma casa como exemplos desse. Para ele, o trabalho com modelos matemáticos (se forem considerados como formulas, matematizações e abstrações) não é prioridade na Modelagem Matemática no entanto, Burak (2010) destacou uma relação entre modelos e a fase de escolarização dos estudantes, ao se trabalhar com Modelagem Matemática na Educação Básica Burak (2010, 2017) não considerou etapas rígidas mas, a partir de experiências vividas em cursos com professores, as sugeriu como encaminhamento das atividades de Modelagem Matemática. As etapas sugeridas por ele foram: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento do(s) problema(s), resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento de conteúdos matemáticos e analise crítica da(s) solução(ões).

2.2 DA MATEMÁTICA À MODELAGEM MATEMÁTICA

A Licenciatura em Matemática nos faz passear por diversas tendências e concepções metodológicas. Acreditamos ser importante contextualizar a Matemática para poder falar sobre seu ensino e sua aprendizagem, sem desconectar uma coisa da outra. Nesse cenário, o tempo também tem que ser considerado.

Nesse sentido, a Matemática é considerada estigma, ou seja, ao mesmo tempo em que boa parte da sociedade tem medo da Matemática que nós criamos, também acontece o contrário, da mesma maneira que ouvimos dizer que, se alguém é bom em Matemática, é bom em tudo, também existem muitas pessoas que consideram ser a Matemática inútil. A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos.

Na Modelagem, esse sistema tem de ser mudado. Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulálos, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. Passamos de objetos que o professor ensina para objetos que o aluno aprende.

A nossa sociedade coloca a Matemática como um objeto que se ensina, e o sujeito do processo é o professor, é preciso deixar claro que essa não é uma critica ao professor, e sim uma constatação de que o modelo que tem sido observado e enfatizado nas questões históricas e filosóficas.

Em Modelagem não é assim. O sujeito do processo cognitivo é o aluno. Cada pessoa constrói o seu conhecimento, o sujeito atribui significados pelos próprios meios.

E o que queremos? Queremos, como professores, usar ferramentas matemáticas, cujo manejo e domínio estejam disponíveis para o aluno a fim de que ele possa estudar, entender, formular, resolver e, principalmente, decidir. O que queremos dos nossos alunos? Crítica, raciocínio, curiosidade, independência, autonomia, responsabilidade. No fundo, o que queremos é a mesma coisa que o professor de Português, Química, Educação Física, Ciências, Biologia - todos nós, como professores de qualquer disciplina, queremos o quê? Vamos tentar dar uma resposta.

Já ouvimos (e também repetimos) o seguinte: "temos que devolver o cotidiano do aluno quando ele entra na sala de aula". Mas quem nos deu o direito de tirar o cotidiano dos alunos para depois devolver isso a ele? Não é que nós não possamos devolver, é muito mais: nunca conseguiremos tirar- lhes esse cotidiano; quando eles vêm para a escola, o cotidiano deles vem junto com eles, ou seja, o que eles são, foram, gostam ou não, do que eles têm medo, tudo está ali na hora de se dar o aprendizado, junto com eles na aula de Matemática.

De acordo com Bassanezi (2002), quando não sabemos, devemos medir e fazer contas, ou seja, matematizar a situação.

Como é que podemos confrontar o mundo real com o universo da Matemática? Uma das maneiras é através da Modelagem.

Nomeado um problema, no momento seguinte a Modelagem exige hipóteses de simplificação, ou seja, devemos conhecer o problema e simplificá-lo.

Todo problema tem de ser tratado com passo de simplificação, e, às vezes, a simplificação que fazemos é para facilitar a resolução matemática. Outras vezes simplificamos para colocar o problema no nível dos nossos alunos. Não simplificamos o problema real, e sim introduzimos hipóteses que simplificam sua abordagem. O aluno tem o direito de ver o problema na importância que ele tem para a sociedade. Em seguida, vamos adequar o problema à ferramenta matemática ao alcance da aprendizagem do aluno e, assim, transformar isso num problema matemático. E isso se constitui em traduzir o problema para uma linguagem do universo matemático.

Simplificando, temos cinco momentos para o processo de Modelagem: 1) determinar a situação; 2) simplificar as hipóteses dessa situação; 3) resolver o problema matemático decorrente; 4) validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real e, finalmente, 5) definir a tomada de decisão com base nos resultados.

Os problemas apresentados na escola, muitas vezes, não chegam nem na validação porque, em geral, muito pouco tem a ver com a realidade. Muitos problemas, aliás, nem tocam em algum cotidiano, isto é, o livro-texto ou o professor dão a equação e mandam os alunos resolverem-na, ou seja, estamos muito acostumados a trabalhar os problemas na categoria de exercícios de reconhecimento, de repetição, de algoritmo e, eventualmente, problemas de aplicação. Quando trabalhamos não só com problemas matemáticos, mas com a Modelagem, em que o aluno é o sujeito do processo cognitivo, esse, com certeza, vai poder enxergar além. E não apenas quanto ao conteúdo matemático, mas poderá ver como esse conteúdo matemático é importante nos processos decisórios em sociedade. As vezes chegamos a acreditar e pior, a convencer disso os alunos que na Modelagem uma condição imprescindível é a de um contexto matemático altamente sofisticado, elaborado, isso não é verdade, visto que a Matemática deve ser aquela que possibilita o início da resolução do problema em questão, permitindo que a Modelagem possa continuar em sua espiral, na qual o modelo matemático produz novas ideias, que, por sua vez, afetam as hipóteses de simplificação ou que permitem negar uma hipótese.

Ao referir-se sobre "Modelagem Matemática" destaca-se o processo de pesquisa e soluções possíveis para problemas simples e complexos da sociedade; o método alternativo para o ensino da matemática, que visa possibilitar a aprendizagem em sala de aula, estimulando a curiosidade, a criatividade e a análise crítica de procedimentos utilizados (ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN, 2011; BARBOSA, 2001; BASSANEZI, 2002, BIEMBENGUT, 2014; MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011; SCHEFFER, 1999).

Demonstrar aos alunos que a matemática é utilizada por todas as pessoas por diferentes razões e propósitos e ajudar a fornecer significado e interpretações para problemas reais que utilizam a matemática são concepções da Modelagem Matemática. O currículo de matemática deve levar em consideração uma abordagem a fim de proporcionar ao aluno a visualização da aplicação dos conteúdos matemáticos em situações da história ou do cotidiano, dentro e fora da escola.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA - FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

Os professores deveriam valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento, seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, estimulante e por ser fonte de prazer. Nessa forma de encarar a matemática, a modelagem que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino–aprendizagem tem se mostrado muito eficaz.

Uma das características mais importantes da modelagem é que pressupõe multidisciplinaridade, no setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E, mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmicas. Acreditamos que os professores de matemática, considerados paramatemáticos, têm a obrigação de mostrar aos alunos as duas possibilidades que na verdade se completam: tirar de um "jogo" resultados significativos – matemática aplicada; montar um "jogo" com regras fornecidas por alguma realidade externa – criação de matemática.

A modelagem fomenta essas possibilidades num processo de ensino-aprendizagem em que a Matemática pode ser encarada como um jogo maior em que os perdedores são aqueles que não conseguem se divertir jogando.

Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. A aplicação correta da matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. Este procedimento construtivo conduz ao que se convencionou chamar de Matemática Aplicada, e teve seu início declarado apenas no começo do século XX.

A busca do conhecimento científico, em qualquer campo, deve consistir, essencialmente, em: Aceitar somente aquilo que seja tão claro em nossa mente que exclua qualquer dúvida; dividir os grandes problemas em problemas menores; argumentar, partindo do simples para o complexo; verificar o resultado final.

O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem matemática.

Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, em um sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo.

Chamaremos de Modelo Matemático a um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um objeto estudado. Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada.

A modelagem geométrica relaciona geometria e computação, consistindo de um conjunto de métodos que visam descrever a forma e as características geométricas de um objeto. Ela prevê uma descrição ou modelo muito mais analítico e matemático que o real.

No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, tem sido defendida por vários profissionais envolvidos com o ensino de matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional.

Apesar de todos esses argumentos favoráveis ao uso da modelagem matemática, muitos colocam obstáculos a ela, principalmente quando aplicada em cursos regulares: obstáculos instrucionais, obstáculos para os estudantes e obstáculos para os professores.

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, e o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural.

A maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional, em que o objeto de estudo apresenta-se quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina. Na modelagem, o início é apenas o tema de estudo escolhido quando ainda não se tem idéia do conteúdo matemático que será utilizado. Nesse estágio, colocamos para os iniciantes que, quando não se tem nenhuma idéia do que fazer, comece "contando" ou "medindo" – com esse procedimento, é natural aparecer uma tabela de dados e isso pode ser o começo da modelagem. O aprendizado de modelagem não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais tal como um protocolo cirúrgico.

O início de uma modelagem se faz com a escolha de temas. Faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções. É muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos que, desta forma, se sentirão co-responsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva. Tanto no caso onde haja apenas um tema escolhido como quando os temas são diversificados, os alunos devem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos do tema comum de cada grupo.

Uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas ao assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas: Através de entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória; Através de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas; Através de experiências programadas pelos próprios alunos.

Buscar um modelo matemático que expresse a relação entre as variáveis é, efetivamente, o que se convencionou chamar de modelagem matemática. Muitas vezes, tais modelos são dados pela solução de sistemas variacionais. Dessa forma, é sempre conveniente entender como é a variação das variáveis envolvidas no fenômeno analisado.

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Numa perspectiva mais ampliada do que a de ser apenas um método para se ensinar a Matemática, tendo como base o curriculo posto, ou seja, ensinar Matemática por meio de uma ordem canônica: um currículo homogêneo e padronizado (CORDEIRO, 2007; PIRES, 2000a). A Modelagem, a nosso ver, vai tentar resgatar pouco a pouco outras formas de se trabalhar com a Matemática e vai se aproximar daquilo que tem sido chamado de "Programa Etnomatemática"(D'AMBROSIO, 2001), já que sempre se vai trabalhar com problemas da realidade, sendo essa, a nosso ver, sua característica primordial. Nessa concepção, a Modelagem não trabalha com problemas inventados, mas com problemas reais. Essa é uma das características que diferencia essa postura, por exemplo, daquelas que se pode construir um problema para atender a um determinado conhecimento matemático. A Modelagem vai por um caminho inverso, ou seja, ao invés de se dar uma pergunta para o aluno, em que ele vai ter de usar predeterminada ferramenta matemática para garantir a obtenção da resposta certa, o alunos faz a pergunta para si e para os outros, junto com o professor e os outros alunos, ele vai aprender (e usar) as ferramentas matemáticas já existentes para entender o fenômeno escolhido e, eventualmente, levar à sala de aula conhecimentos já produzidos pela cultura local para responder a questões relevantes, muitas vezes, até de forma aproximada.

Deve sempre existir a consciência de que há ali alunos que precisam aprender Matemática para viver, e é necessário saber o que esse aluno precisa saber de Matemática, vai chegar para que precisará dela e como essa Matemática até ele. Nesse contexto é que se insere a questão do currículo.

A Modelagem é uma perspectiva de educar matematicamente, que vai problematizar também o currículo e usar as ferramentas matemáticas para aquele tipo de problema específico, que está sendo investigado naquele momento.

O papel do professor, não é simplesmente colocar a Matemática neutra do currículo para os estudantes, mas fazer com que eles também tragam situações de fora para dentro da escola. Nesse cenário, a escola vai oferecer e ensinar a Matemática necessária para melhorar a compreensão daquelas situações, sempre levando em consideração também ferramentas que eles possam trazer de suas experiências externas ao contexto educacional.

Um dos aspectos que se torna recorrente nos debates acerca da presença da Modelagem em sala de aula refere-se à insegurança que ela pode proporcionar ao professor. Vamos retomar a seção anterior, na qual descrevemos sobre a escolha do tema. Terminada essa etapa de discussão e elaboração do tema a ser trabalhado, o professor precisa programar alguma atividade para as aulas seguintes. Nesse momento, usualmente os professores se sentem desestabilizados, por não terem mais o apoio e o conforto de um livro didático para seguir. Não tem mais a lista de conteúdos a ser trabalhados de acordo com a sequência que aparece no programa adotado. Não há mais um cronograma de atividades a ser seguido, previamente estabelecido. Oliveira e Barbosa (2011, p. 267-268) nos alertam que

> A presença da modelagem na escola representa desafios para os professores, pois as aulas de Matemática apresentam uma dinâmica diferente, já que acontecerão diversos caminhos propostos pelos alunos para a resolução do problema. Com isso, não há a previsibilidade do que ocorrerá nas aulas na utilização deste ambiente de aprendizagem movendo os professores para uma zona de risco.

E isso de fato desestabiliza o professor, visto que, com base no tema escolhido, vai começar a ser produzido um planejamento, já com as aulas em andamento, e o que será produzido na sala de aula vai depender, quase exclusivamente, da participação dos alunos.

Em nossa concepção de Modelagem, desde a escolha do tema, passando pela formulação, pela consciência do "precisar aprender"e mesmo na critica aos resultados obtidos, o sujeito do processo é o aluno.

Há outro aspecto paradigmático que podemos destacar algo de novo pode (e deve) ser feito, como conceitos que podem ser "novos"ou também "velhos", na matematização, mede-se, efetuam-se operações, avalia-se, compara-se, estimativas são feitas: há a necessidade de decidir *per se*.

Esses são de fato novos paradigmas? conceitos matemáticos podem ser totalmente novos, e pode ser total novidade sua presença em aspectos da vida de alunos e de comunidades, pode ser nova a maneira de abordar o problema no processo de matematização, mas é ainda a velha prática de usar o que se aprende para construir conhecimentos na vida, para a melhoria da qualidade de vida, para mudar a história. Um passo essencial na transformação da educação escolar em sabedoria social.

Esses alunos não conseguiam eleger um assunto que, de fato, fosse importante para eles. A preocupação maior era com a nota, com o "agradar"o professor. E por quê? Porque aprenderam, desde sempre, que os problemas lhes são apresentados, e que eles devem "apenas"utilizar a Matemática para resolvê-los, sem questionar, sem pensar muito sobre o porquê estão fazendo aquilo, de fato, apenas com o objetivo de responder corretamente, e se não fosse possível tal feito, apenas desistem. E como "quebrar"esse paradigma, construído e reforçado ao longo de muitos anos de escola? Sobre essas questões, Hermínio (2009) discute em seu trabalho as dimensões acerca da escolha de temas de projetos de Modelagem, em um determinado contexto. A saber: a dimensão pessoal, ou seja, o interesse, dimensão socio critica, a dimensão matemática e a dimensão palavra do professor. Sobre esta última, Hermínio destaca que a escolha do tema é influenciada, ainda que de forma inconsciente e desproposital, pela palavra do professor.

> Esse tipo de comportamento dos alunos se dá devido ao contrato didático e ao currículo oculto estabelecido com eles durante a sua vida escolar, pois eles vêm de uma cultura escolar na qual as atividades são, em sua maioria, atividades fechadas, com perguntas e respostas, com direcionamento claro do que eles devem fazer e o que o professor espera que esses alunos façam (HERMÍNIO, 2009, p. 82).

Muito daquilo que se lê nas diretrizes elaboradas pelo Ministério da Educação (MEC), entre as quais os Parâmetros Curriculares Nacionais, destaca a formação do aluno crítico, reflexivo, capaz de resolver problemas, e reforça que o ensino da Matemática deve estar a favor do exercício da cidadania. E como alcançar tais objetivos? Para nós, a Modelagem é um dos caminhos, mas, para isso, é necessário que os professores de Matemática sejam formados para que possam levar isso para as salas de aula. Assim, para que a postura dos estudantes e dos professores mude, é preciso que esses paradigmas educacionais cheguem de fato às salas de aula.

Evidentemente que, para que esses novos paradigmas possam ser implementados, é preciso refletir um pouco sobre a formação de professores de Matemática. Os programas das Licenciaturas em Matemática, em sua maioria, estão ainda relacionados às amarras do cientificismo em que se focalizam, de maneira geral, nas práticas educacionais vigentes, ancoragem no paradigma da ciência moderna, vinculada ao Iluminismo do século XVIII. Embora existam mudanças de legislação e de postura em alguns contextos, na prática, o que vemos ainda é um modelo pautado na separação entre os conhecimentos matemáticos e pedagógicos.

Nessa direção, a formação de professores, tendo como pressupostos básicos os fundamentos epistemológicos que sustentam uma pedagogia que tem como um dos focos a Modelagem, vai se dar na tentativa de superar tal neutralidade e apontar para novas linguagens, como, por exemplo, as noções de sujeito, identidade, razão e evolução/progresso, desarmando, assim, tais princípios, eminentemente cientificistas e acadêmicos (COSTA, 2002).

Tal postura deverá formar um professor que, em vez de pensar uma prática educacional com base em objetos a ela relacionados, como, por exemplo, "o aluno", "o professor", "um método de ensino", terá de pensar na constituição dos objetos com base nessas práticas. O que passa a existir, nessa postura de educação, são relações de toda ordem, múltiplas e diferenciadas, vigentes em determinado contexto, em determinado momento histórico.

Formar professores valendo-se das ideias apresentadas consiste em desmontar uma estrutura em que o importante é somente a transmissão de conhecimentos sistematizados ao longo do processo de educação. Pelo contrário, tal proposta visa pôr em evidência, ou tornar visíveis, saberes e conhecimentos mais amplos do que os somente contemplados pela Universidade, ou seja, ampliar o seu campo de ação e redimensionar o seu trabalho e de outros espaços do saber, privilegiando outra ética para os processos educacionais, em que cada um dos membros de determinado grupo inscreva-se e localize-se em um espaço de conhecimento efetivamente democrático (AUTHIER; LEVY, 1993). É nessa perspectiva de formação de professores que entendemos que a Modelagem possa ser incorporada nos cursos de Licenciatura.

Na perspectiva da Modelagem, faz-se necessária uma formação em que o foco central seja fazer com que o futuro professor perceba que as regras e convenções estabelecidas daquilo que denominamos de "Matemática"ganhe significado nas aplicações que fazemos delas no contexto em que tais regras estão sendo aplicadas, e não somente na transmissão de conteúdos já sedimentados descontextualizados. Os futuros professores deverão ser preparados para que eles, junto com os seus alunos, atuem como pesquisadores de sua vivência que são cotidiana e, a partir delas, possam buscar os sentidos produzidos nas regras e convenções que fazemos para entender e compreender tal vivência. Eles deverão ser formados a buscar os problemas para pesquisar, os quais deverão vir de situações reais. Nesse processo, a curiosidade e o desafio servirão de motivação para sua formação.

Assim se faz também necessário mudar a dinâmica das salas de aula dos cursos de Licenciatura em Matemática. Além dos trabalhos individuais, grupos tornam-se necessários para uma dinâmica mais participativa, por meio da qual ele, como futuro professor, passe da passividade das aulas expositivas e explicativas, em que é um mero expectador e depositário de informações, para uma dinâmica integrativa e criativa. Dessa maneira, tal formação terá de deixar claro aos futuros professores que sua principal função na escola será a de orientar, propor trabalhos e possíveis caminhos a partir dos quais os alunos serão capazes de gerar problemas do seu cotidiano para, posteriormente, ser resolvidos numa dimensão quantitativa, produzindo aí oportunidade a fim de que o aluno possa fazer usos da Matemática para entender e compreender tais situações.

“A modelagem oferece uma maneira de colocar a aplicabilidade da matemática em situações do cotidiano, no currículo escolar em conjunto com o tratamento formal que é predominante no modelo tradicional. Esta ligação da matemática escolar com a matemática da vida cotidiana do aluno faz um papel importante no processo de escolarização do indivíduo, pois dá sentido ao conteúdo estudado, facilitando sua aprendizagem e tornando-a mais significativa”. (JÚNIOR e SANTO, 2004, p.2)

Em experiências de ensino-aprendizagem envolvendo a Modelagem Matemática é impossível que o professor passe imune por ela, ou seja, algo certamente ele aprende daí surge o seguinte questionamento "Esses saberes, desenvolvidos a partir dos fazeres em Modelagem, repercutem na prática docente, isto é, no fazer e no saber-fazer do professor?".

Em situações-problema resolvíveis via aritmética, tem-se a Modelagem organizando a situação matematicamente, fazendo aparecer situações matemáticas: e, em situações resolvíveis via álgebra e geometria, tem-se a Modelagem traduzindo a situação para linguagem matemática, fazendo aparecer modelos matemáticos, tais como equações, gráficos, figuras planas ou espaciais. Observando, ou seja organizando, o objetivo do processo é compreender ou solucionar um determinado problema real (CHAVES, 2014).

A Modelagem Matemática assim como diversos processos ocorre por meio de etapas, sendo elas: interação, levantamento de hipóteses e conjecturas, seleção de variáveis, tradução ou organização da situação-problema em símbolos ou relações matemáticas e validação.

Na interação, identifica-se ou constrói-se um problema a ser estudado, e a partir daí faz-se o levantamento de dados qualitativos e quantitativos por meio de pesquisa. Onde através de tais dados , faz-se um levantamento de hipóteses e conjecturas que geram então uma seleção de variáveis que poderão ser utilizadas na escrita ou "tradução"da situação-problema para a linguagem matemática. Chegando-se a um modelo matemático ou a uma organização matemática do problema, resta dessa forma a validação que irá comprovar se o modelo encontrado é verdadeiramente adequado.

Desta forma, de acordo com Chaves (2014), na sala de aula, fazer Modelagem significa implementar esse processo, que traduz ou organiza matematicamente uma situação real, no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Para traduzir ou organizar situações-problema provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem matemática com suas regras, propriedades e conceitos, é preciso relacionar a matemática pertinente ao problema, com a que já se conhece, de modo a migrar com a situação para o âmbito da Matemática, em que estabeleço outras situações no sentido de compreender, ou resolver a situação-problema em questão, por meio da Modelagem.

No processo de Modelagem, é a partir de um problema relacionado com uma situação com referência na realidade, que se buscam dados para organizar ou traduzir a situação que se quer compreender ou estudar e, dessa forma, o problema gera uma motivação, um envolvimento que conduz à solução e a consequente apreensão dos saberes correlacionadas.

No contexto da experiência de Modelagem matematizar diz respeito a utilizar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para organizar ou traduzir uma situação real, segundo tabelas, gráficos, operações aritméticas ou algébricas, equações ou funções matemáticas. Nesses termos, matematizar se constitui em um processo que parte do "mundo real"para o "mundo matemático".

Matematizar resumi e qualifica ações dos professores relacionadas com o desenvolvimento de algoritmos, em parceria com o aluno, por meio das interações que promovem, o motivo é levar o aluno a construir conceitos, partindo da matemática que já sabe, presente nos exemplos de situações do dia a dia, apresentados pelo professor.

A compreensão de que por meio da pesquisa o aluno começa a envolver-se com a situação problema proposta, de que por meio desta o aluno toma para se o problema em pauta, constitui os motivos porque dos professores ao incorporarem a pesquisa e suas ações docentes, tendo em vista os seus motivos para enriquecer as relações matemáticas que se afigurem, desenvolver no aluno autonomia para os cara elementos que resolvam seus problemas, bem como criticar os resultados que obtém.

Em atividades de modelagem, professor perde o caráter de detentor e transmissor do saber, para ser entendido como aquele que está na condução ou mediação das atividades, em uma posição de parceiro do aluno. Atuar como mediador, é fazer com que os próprios alunos desenvolvam as situações problemas a partir da elaboração e testagem de hipóteses próprias, bem como descobrir seus erros e acertos.

Segundo Toma (2002, p.187), os professores em suas aulas, após envolvimento com experiência de modelagem, "trazem para dentro da escola realidade do educando, a sua vivência o seu dia a dia, interligando essa realidade aos conteúdos escolares".

Apesar da diversidade de perspectivas que esta tendência metodológica apresenta, uma característica permeia quase todas, a saber: a elaboração por parte do estudante, de um modelo matemático para resolver/analisar/apresentar determinada situação problema oriunda de um tema relacionado ao cotidiano do estudante e/ou de sua comunidade ou relacionado há outras áreas científicas.

O debate sobre a importância de romper a encapsulação presente na educação matemática. Autores com D' Ambrósio (2005), por exemplo, destacam as limitações de um conhecimento disciplinar para o entendimento da realidade complexa em que vivemos e que, atualmente, apresenta a sofisticação e renovação constante de instrumentos e da tecnologia. Esse entendimento também perpassa discurso da Modelagem Matemática, a qual é sugerida como uma abordagem pedagógica com potencial para formentar a participação ativa dos estudantes, a reflexão crítica (BARBOSA, 2001; JACOBINI, 2004; ARAÚJO, 2002; BORBA; MENEGUETTI; HERMINI, 1997).

Situações-problema frágeis em contexto podem ser entendidas como exercícios com referência à semi-realidade, isto é, exercícios que se baseiam em situações que envolvem elementos "reais", porém não se preocupam com sua veracidade ou factibilidade; são situações fictícias em que os dados fornecidos pelo problema são considerados suficientes e exatos e quaisquer outras informações são irrelevantes (SKOVSMOSE, 2000). O foco principal, em geral, é exercitar as técnicas referentes a determinado conteúdo matemático. Quer dizer, não se está interessado em uma reflexão mais profunda sobre o conteúdo matemático e sua relação com o contexto do problema, mas apenas no raciocínio matemático "puro".

Além disso, autores como Souto (2013) atestam que o processo de aprendizagem da Matemática, em geral, segue uma organização didática compartimentalizada e hierarquizada. Isso pode levar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a uma mera aplicação e "decoreba" de fórmulas e regras que muitas vezes não fazem sentido para os alunos. Engeström (2002), assim como nós, não considera apropriado esse modo de "apresentar" os conteúdos aos alunos. Ele sugere que se estimule em sala de aula o exercício de análises críticas, para que o trabalho escolar não seja realizado em "cápsulas".

Numa perspectiva sociocultural, a aprendizagem escolar da matemática pode ser entendida como o processo de participação em práticas partilhadas na sala de aula. Para Lave e Wenger (1991), a aprendizagem dos sujeitos se dá pelo seu envolvimento e participação em práticas que se desenvolvem em contextos específicos, denominados de Comunidades de Prática (CoP). Particularmente na sala de aula tais práticas desenvolvem-se de forma mais delimitada, em decorrência das próprias particularidades deste ambiente. Nesse sentido, na sala de aula, Winbourne e Watson (1998) intitulam tais CoP's de Comunidades de Prática Locais (LCoP) e descrevem características a serem analisadas a fim de afirmar a sua constituição na aula de matemática.

De acordo com Blum (1993), podem-se ressaltar argumentos para o uso da Modelagem na escola com base em objetivos de formação geral e para o ensino, tais como motivação, desenvolvimento de habilidades de investigação, facilitação da aprendizagem, uso da matemática escolar em outros contextos e a reflexão sobre o papel sociocultural da matemática.

Diversamente ao que ocorre no âmbito da Matemática Aplicada, no campo da Educação Matemática a Modelagem concebe diferentes compreensões. No entanto, em relação à sua prática na sala de aula Hermínio e Borba (2010), por exemplo, afirmam que as diversas concepções da Modelagem têm em comum a noção de que o aluno precisa atuar concomitantemente ao professor, participando dos processos de escolha do tema e definição do problema a ser estudado (HERMÍNIO; BORBA, 2010).

Particularmente a escolha do tema em atividades de Modelagem Matemática é uma questão que vem sendo discutida há algum tempo articuladamente ao interesse do aluno pela atividade desenvolvida (JACOBINI, 2004; BASSANEZI, 2002; BURAK, 2004; HERMÍNIO, 2009; HERMÍNIO, BORBA, 2010; SOARES, BORBA, 2012). A Modelagem tal como sugerida por Barbosa (2001, 2003, 2007) que a compreende como "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (2001, p. 6).

As discussões a que os autores se referem são as caracterizadas por Barbosa (2007) para identificar as rotas de Modelagem dos alunos. O conceito de rota de Modelagem é usado para denotar os processos empreendidos pelos alunos no ambiente da Modelagem. Barbosa e Santos (2007) distinguem quatro tipos de discussões identificadas neste ambiente: técnicas, matemáticas, reflexivas e paralelas. As três primeiras são aquelas relacionadas à construção de um modelo matemático. Entendendo como modelo matemático qualquer representação matemática da situação de estudo.

Hermínio (2009) discute algumas consequências negativas do trabalho em grupo em atividades de Modelagem apontando que, em alguns grupos, a vontade de determinado aluno pode se sobressair e influenciar o restante, deixando todo o trabalho com quem "teve a idéia do tema" (HERMÍNIO, 2009, p. 60).

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) nasceram praticamente com o Cálculo Diferencial e Integral. Atribui-se a Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 - 1716) a primeira formulação e solução de EDO, e a Isaac Newton (1643 - 1727) a primeira classificação e início de estudos mais aprofundados.

Newton propôs que as equações diferenciais poderiam ser agrupadas em três tipos

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{3.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u(x, y) \tag{3.3}$$

Nota-se claramente que as duas primeiras equações (3.1) e (3.2) fazem referência à EDO, enquanto a última é uma classe de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

Mesmo cabendo a Newton a primazia no estudo das EDOs, coube definitivamente aos matemáticos ligados a Leibniz o desenvolvimento virtuoso das Equações Diferenciais, alçando-as ao estrelato como ferramenta matemática. Leibniz havia se graduado em Leipzig, e já gozava de grande e notória reputação quando era professor na universidade de Hanover e orientou o doutoramento, por correspondência, do jovem Jakob Bernoulli (1654 - 1705), que se tornou o primeiro grande matemático da ilustre família Bernoulli.

Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a aplicar as equações diferenciais em diversos problemas, solucionando-os. Resolveu o problema dos isoperímetros, e resolveu a Equação Diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{3.4}$$

Através de manipulação e substituição algébricas, Jakob Bernoulli linearizou e resolveu a equação acima. Já como professor titular da universidade da Basiléia, Jakob Bernoulli orientou seu irmão mais novo Johann Bernoulli (1667 - 1748) e conduziu-o nos caminhos das Equações Diferenciais Parciais. Johann resolveu, usando Equações Diferenciais, dois dos mais famosos problemas da época: o problema da braquistócrona e da catenária. Johann Bernoulli estava, assim, aplicando sistematicamente as EDOs para solucionar problemas físicos reais, presentes no cotidiano de algumas pessoas. Ele também foi o descobridor da técnica de separação de variáveis para solução de Equações diferenciais.

Apesar de ter se graduado na universidade da Basiléia, Johann não encontrou lá espaço acadêmico, já que seu irmão Jakob ocupava a cátedra de matemática nesta universidade. Porém, com a morte de Jakob em 1705, Johann assume o posto que era de seu irmão, e passa a ser o professor de cálculo e de Equações Diferenciais desta instituição.

Por volta de 1723, Johann Bernoulli recebe como aluno de doutoramento o jovem Leonhard Euler (1707 - 1783), então com dezesseis anos de idade. Em três anos Euler conclui seu doutorado e inicia seus estudos em praticamente todos os ramos da matemática, física e engenharia. Estima-se que Euler tenha escrito mais de oitocentos artigos científicos, diversos deles dedicados à solução de problemas de cunho prático. Uma das maiores contribuições de Euler para as engenharias é a dedução da equação da viga elástica, também chamada de viga de Euler-Bernoulli, ver na Figura 1.

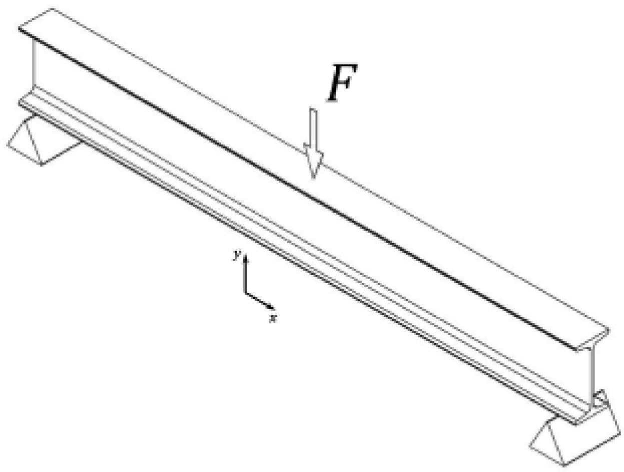


Figura 1 – Viga de Euler-Bernoulli

Euler deduziu que a equação que governa esta viga é da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{3.5}$$

em que y é a flecha da viga (maior deslocamento vertical da linha neutra da viga forçada), x é o eixo da viga, $M(x) = Fx$ é o momento fletor, e é o módulo de elasticidade do material da viga e I o momento de inércia de área da sua seção transversal.

Esta singela equação abriu caminho para o cálculo de praticamente todas as estruturas ligadas às engenharias mecânica, naval, aeronáutica e civil. A figura 2 traz um exemplo da engenharia aeronáutica, no qual a longarina principal da asa de uma aeronave é modelada como a viga previamente citada. A partir deste momento, as equações diferenciais já estavam com seu lugar garantido nos livros das mais diversas ciências, sendo usadas inclusive para descrever sistemas biológicos, como é o caso das equações de Lotka-Volterra para o estudo ecológico de populações de predadores e presas.

Euler faleceu em 1783, mas deixou discípulos, bem como a família Bernoulli. Estes matemáticos desenvolveram a teoria das EDOs, além de terem apresentado tratados volumosos acerca das soluções de tais equações. Isto abriu o caminho para que a engenharia e a física pudessem andar a passos largos no século XIX, sustentando a revolução industrial com projetos de máquinas, guerras com cálculos balísticos de projéteis de canhão e, marcando, de forma indelével, a sociedade ocidental como a conhecemos hoje.

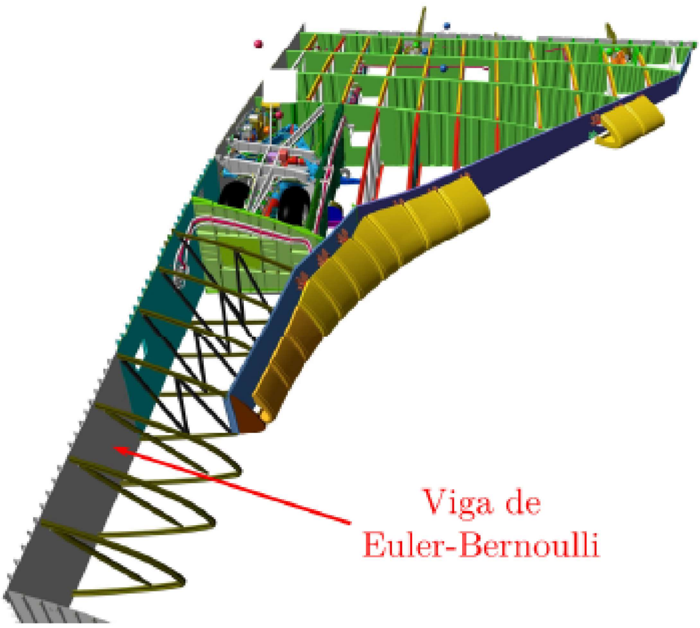


Figura 2 – Indicação gráfica da longarina modelada como uma viga de Euler-Bernoulli

Incidentalmente, estes trabalhos da época estimularam o aumento do interesse durante o século XVII na fatoração e resolução de equações polinomiais de graus elevados. Cauchy (1789 - 1857) definiu a integral de qualquer função contínua no intervalo $[a, b]$ como sendo o limite da soma das áreas de retângulos finos. Inicialmente provou que este limite existia para todas as funções continuas sobre o intervalo dado.

Infelizmente, embora Cauchy tenha usado o Teorema do Valor Intermediário, não conseguiu seu objetivo porque não observou fatos teóricos sutis, mas cruciais. Ele não tinha noção das falhas lógicas no seu argumento e prosseguiu para justificar o Teorema do Valor Médio para Integrais e para provar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas. Niels Henrik Abel (1802 - 1829) também apontou certos erros delicados ao usar a integral de Cauchy para integrar todo termo de uma série infinita de funções. Partindo das ideias de Newton e Leibniz, o Cálculo Diferencial foi desenvolvido pelos constantes aperfeiçoamentos que recebeu dos matemáticos que os precederam, como cita Stochiero (2007, p. 2):

> Nos últimos trezentos anos, muitos matemáticos trabalharam e vêm trabalhando no aprimoramento da estruturação teórica do Cálculo, perseguindo sempre os atalhos inteligentes da sistematização. As brilhantes contribuições de Leonhard Euler (1707 - 1783), Jean Lê Rond d'Alembert (1717 - 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), Nikolai Ivanovitch Lobatchevski(1793 - 1856), Bernard Riemann (1826 - 1866), Richard Dedekind (1831 - 1916), Oliver Heaviside (1850 - 1925), bem como as de vários outros luminares, vêm promovendo esse ordenamento sistêmico tão importante para o desenvolvimento desse campo científico e suas ressonâncias em todas as ramificações das atividades tecnológicas e social.

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Neste item apresentaremos os conceitos essenciais da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, inicialmente discutimos as preliminares, em seguida apresentamos o problema de Cauchy, e finalmente discutimos o Teorema Picard e de Peano.

3.2.1 Preliminares

Seja Ω um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano n-dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x), $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ em $\mathbb{E}$; salvo menção em contrário, adotaremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ a norma: $|(t, x)| =$

$max\{|t|, |x|\}$, onde $|x|$ denota uma norma em $\mathbb{E}$, por exemplo $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ ou $|x| = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ ou ainda $|x| = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado na reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser fechado, aberto, semiaberto, limitado ou não.

Definição 3.1. Uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{E}$ chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3.6}$$

no intervalo I se:

i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e

ii) $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação (3.6) chama-se *Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem* e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x).$$

Sejam $f_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ as componentes de $f; \varphi = (\varphi, ..., \varphi_n)$ com $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de (3.6) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I, $(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\varphi_1}{dt}(t) & = & f_1(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt}(t) & = & f_2(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \\ \quad\vdots & & \\ \dfrac{d\varphi_n}{dt}(t) & = & f_n(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \end{array}\right. \tag{3.7}$$

para todo $t \in I$.

Por esta razão diz-se que a equação diferencial "vetorial"(3.6) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

3.2.2 O problema de Cauchy

consideremos inicialmente dois exemplos.

1. $\Omega = I \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = g(t)$, onde g é uma função contínua no intervalo I; φ é uma solução de $x' = g(t)$ em I se, e somente se, $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} g(s)ds$ onde $t_0 \in I$ e c é uma constante.

2. $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = 3x^{2/3}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da equação $x' = 3x^{2/3}$ em $I = \mathbb{R}$, como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) da definição 3.1.

Mas a função constante $\varphi = 0$ também é solução desta equação. Estes exemplos ilustram o fato de que as equações diferenciais possuem em geral uma infinidade de soluções. Porém, no exemplo 1, por cada ponto de Ω passa uma única solução; isto é, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

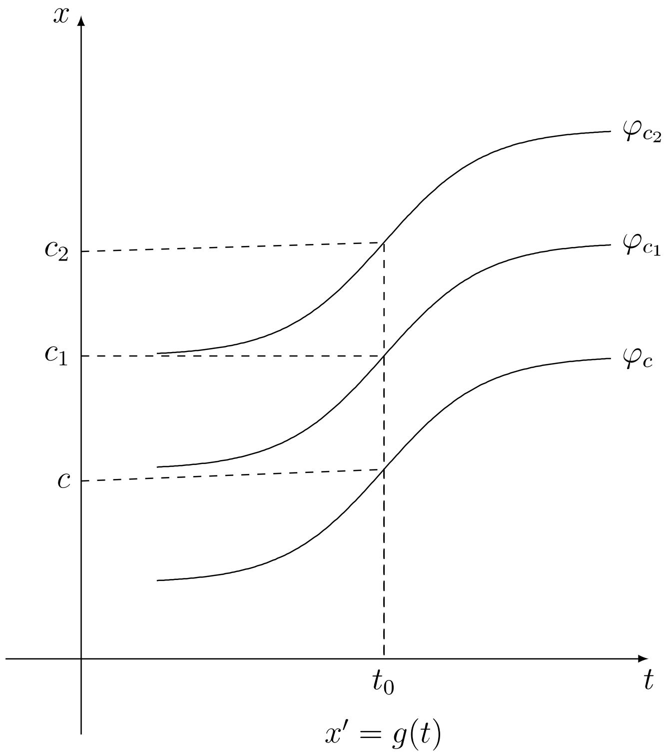
O mesmo não acontece no exemplo 2; neste caso para cada ponto da forma $(t_0, 0)$ existe uma infinidade de soluções passando por ele. Sob hipóteses bem gerais sobre f - por exemplo, se f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em Ω - existe uma, e só uma, solução de (3.7) num intervalo que contém t_0 e tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Uma tal φ será chamada de *solução do problema com dados iniciais* (t_0, x_0) para a equação (3.7). Este problema é também conhecido como problema de Cauchy e será denotado abreviadamente por

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 \tag{3.9}$$

Observação 3.1. A equação (3.9) é equivalente à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3.10}$$

Isto é, se $t_0 \in I$, é uma função contínua $\varphi : I \to \mathbb{E}$ cujo gráfico está contido em Ω é solução de (3.10) se, e somente se, é solução de (3.9). Isto decorre do Teorema fundamental do cálculo.



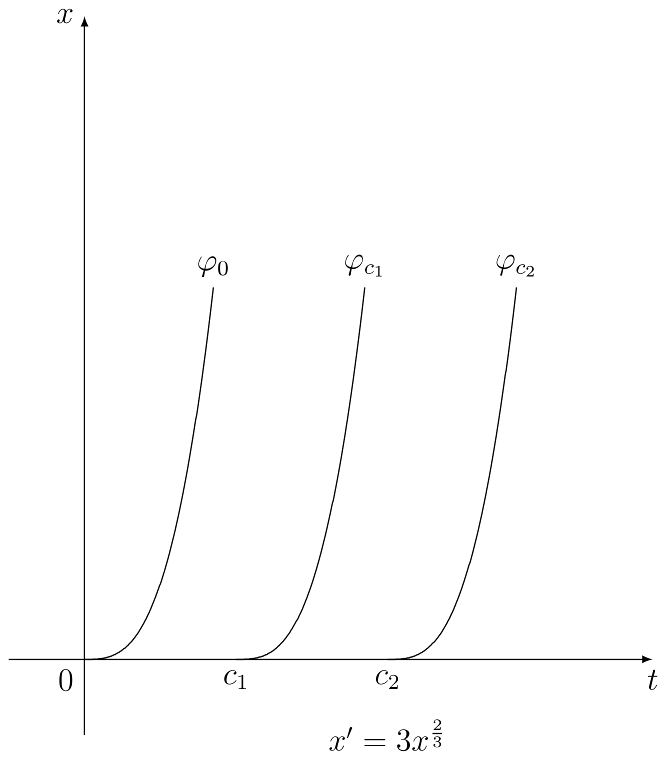


Figura 3 – Exemplos: (1) e (2) respectivamente

A equação (3.7) (ou (3.9)) admite a interpretação geométrica da figura (4).

A função f define em Ω um campo de direções. Isto é, associa cada ponto (t, x) à reta

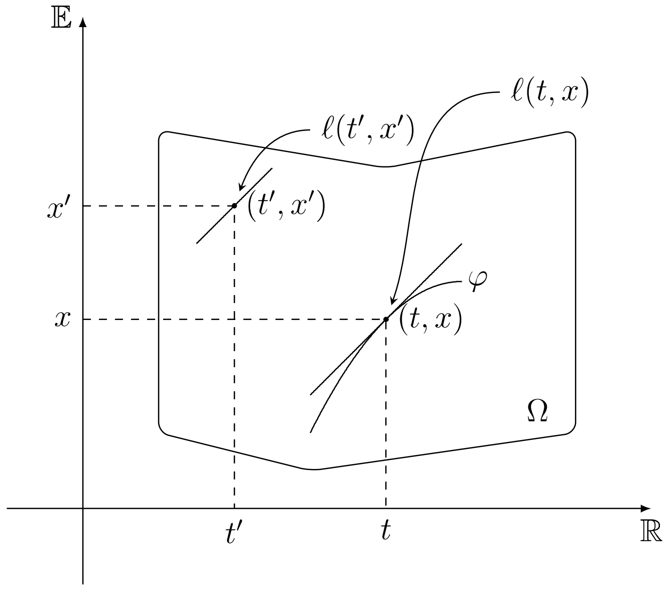


Figura 4 – Interpretação geométrica

$$l(t,x) : \xi - x = f(t,x)(\tau - t)$$

de "declividade"$f(t,x)$ que passa por (t,x). A equação (3.7) (ou(3.9)) coloca o problema de achar (se existirem) as curvas passando por (t_0, x_0), cujas retas tangentes em cada ponto coincidem com as dadas pelo campo de direções.

Modelos

Discutimos a seguir quatro exemplos elementares de existência e unicidade de soluções para cada problema de Cauchy que admitem um tratamento direto.

Modelo 3.1. Equações autônomas

Seja $\Omega = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$ e $f(t,x) = f(x)$. Supomos que f é contínua e não se anula em (a_1, a_2). Dados $x_0 \in (a_1, a_2)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, calculemos a solução para o problema de Cauchy

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0 \tag{3.11}$$

se φ é uma solução de (3.11), então

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{e} \quad \varphi(t_0) = x_0, \tag{3.12}$$

donde segue-se

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1. \tag{3.13}$$

Se $F : (a_1, a_2) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)},$$

vê-se que $F'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \neq 0$ em (a_1, a_2), provando que F é inversível e aplica (a_1, a_2) num intervalo (b_1, b_2) onde F^{-1} está definida.

De (3.12) e (3.13) resulta que

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = F'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

ou seja,

$$(F \circ \varphi)'(t) = 1.$$

Integrando ambos os lado entre t_0 e t obtemos

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0$$

e como $F(\varphi(t_0)) = 0$,

$$F(\varphi(t)) = t - t_0.$$

Logo, a solução de (3.9) é dada por

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0), \quad t \in (t_0 + b_1, t_0 + b_2).$$

vê-se facilmente que esta é a única solução.

Modelo 3.2. Equações de variáveis separáveis

Consideremos o problema de Cauchy

$$x' = g(t)f(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.14}$$

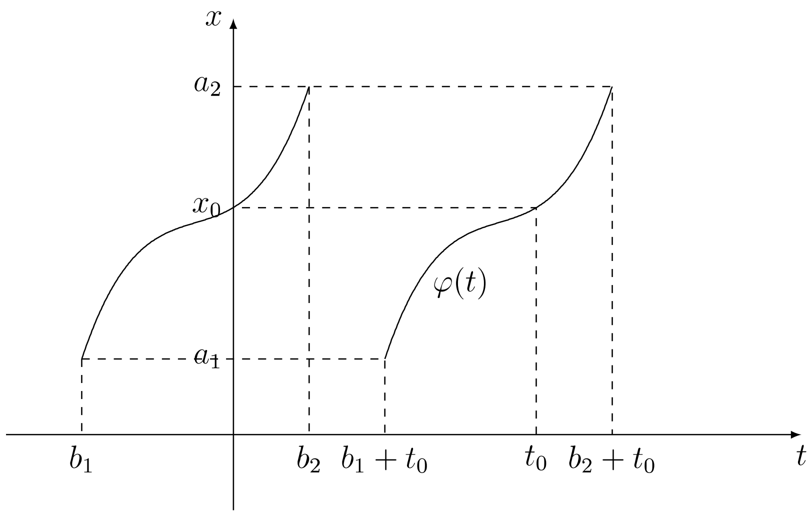


Figura 5 – Ilustração do modelo (3.1)

onde g e f são contínuas em intervalos abertos (t_1, t_2) e (a_1, a_2), respectivamente, e f não se anula em (a_1, a_2).

Procedendo como no exemplo anterior (que é o caso particular em que $g(t) \equiv 1$), se φ é solução de (3.14) obtemos

$$\varphi'(t) = g(t)f(\varphi(t)),$$

ou seja, definindo $F(x) = \int_{x_0}^{x} d\xi / f(\xi)$ obtemos,

$$g(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t).$$

Integrando ambos os lados entre t_0 e t resulta

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau = F(\varphi(t))$$

e daí, no intervalo I contendo t_0 tal que $t \in I$ implica $b_1 < \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau < b_2$, a solução é $\varphi(t) = F^{-1}(\int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau)$.

O leitor deve verificar que está é a única solução de (3.14).

Observe que a solução obtida é dada implicitamente, para constantes de integração apropriadas, pela relação

$$\int g(t)dt = \int \frac{dx}{f(x)}$$

entre as integrais definidas.

Modelo 3.3. Equações lineares

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas em (t_1, t_2) e consideramos o problema de Cauchy

$$x' = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.15}$$

Se $b \equiv 0$ esta equação chama-se homogênea e é do tipo de variáveis separáveis, vistas no exemplo anterior. Os casos $x < 0$ e $x > 0$ poderiam então ser analisados à luz do exemplo anterior. Preferimos porém seguir o método clássico de "variação de parâmetros", que é aplicável mesmo no caso não homogêneo.

Este método consiste em fazer a mudança de variáveis

$$x = c \exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right], \tag{3.16}$$

que transforma (3.15) no problema

$$c' = b(t)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right],\ c(t_0) = x_0 \tag{3.17}$$

cuja conclusão única é

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right]ds$$

Logo, o problema de Cauchy (3.15) admite como única solução

$$\varphi(t) = \gamma(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right],\ t \in (t_1, t_2).$$

Para ver qual é a mudança de variáveis que transforma (3.15) em (3.17) basta derivar (3.16) e substituir em $x' = a(t)x + b(t)$.

Obtemos então

$$c'\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right] = ca(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right] = ca(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right] + b(t),$$

isto é,

$$c' = b(t)exp\left[-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \right],$$

o termo "variação de parâmetros"deriva do fato de $c(t) \equiv x_0$ no caso homogêneo.

Modelo 3.4. Redução a uma equação linear complexa.

Consideremos agora um sistema de duas equações lineares e o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \alpha(t)x - \beta(t)y + \delta(t) \\ y' = \beta(t)x + \alpha(t)y + \eta(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

onde $\alpha, \beta, \delta\, e\, \eta$ são funções contínuas num intervalo (t_1, t_2) que contém o ponto t_0.

Este problema não difere seu tratamento formal do exemplo anterior. Introduzindo notação complexa, $z = x + iy$, $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)\, \mathrm{e}\, b(t) = \delta(t) = i\eta(t)$, vemos que (3.18) se escreve

$$z' = a(t)z + b(t),\ z(t_0) = z_0,$$

cuja única solução é, para $t \in (t_1, t_2)$,

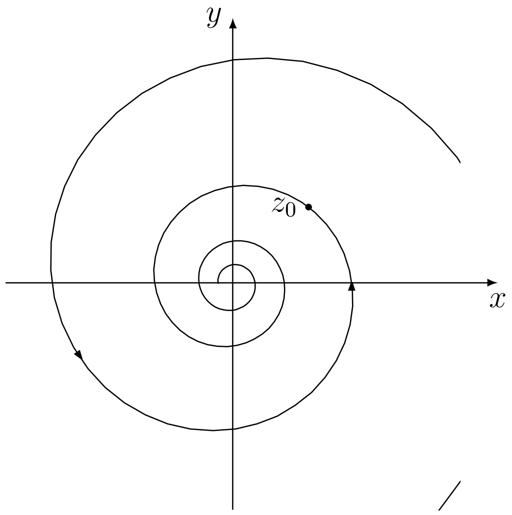


Figura 6 – Ilustração do modelo(3.4) onde: $\beta > 0, \alpha < 0$

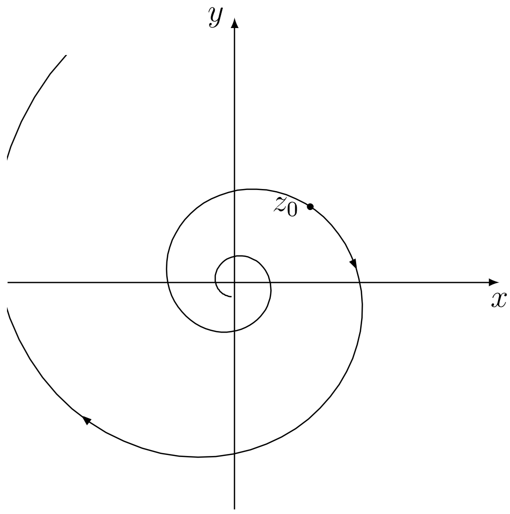


Figura 7 – Ilustração do modelo(3.4) onde: $\beta < 0, \alpha > 0$

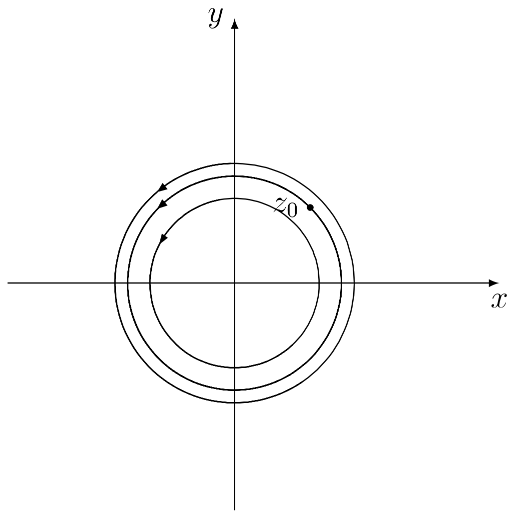


Figura 8 – Ilustração do modelo(3.4) onde:$\beta > 0, \alpha = 0$

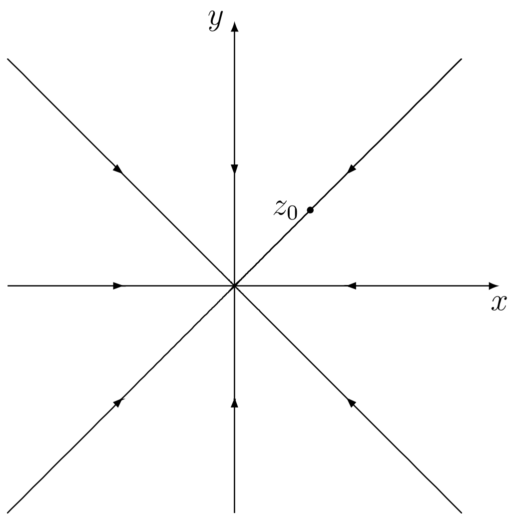


Figura 9 – Ilustração do modelo(3.4) onde:$\beta = 0, \alpha < 0$

$$\varphi(t) = \gamma(t)exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right],$$

onde $\gamma(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)exp\left[- \int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right]ds.$

Ilustremos o caso homogêneo ($\delta \equiv \eta \equiv 0$), com coeficientes constantes ($\alpha(t) \equiv \alpha$) e ($\beta(t) \equiv \beta$) e com t_0. Neste caso, $\varphi(t) = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$. As figuras (6), (7), (8) e (9) dão uma ideia das possibilidades para vários valores de α e β.

3.2.3 Teoremas de Picard e de Peano

Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama-se *Lipschitziana em* Ω *relativamente à segunda variável* ou, simplismente, *Lipschitziana,* se existe uma constante K tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t,x),(t,y) \in \Omega$. Uma K nessas condições chama-se de constante de Lipschitz de f.

Por exemplo, se f admite derivada parcial com relação à segunda variável, $D_2 f$, com $||D_2 f|| \leq K$ em Ω e $\Omega_t = z\{x;(t,x) \in \Omega\}$ é um conjunto convexo para todo t, então f é Lipschitziana em Ω e K é sua constante de Lipschitz.

De fato, pelo teorema do valor médio,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \{\sup_{0<\theta<1} |D_2 f(t, \theta x + (1-\theta)y)|\}|x - y| \leq K|x - y|.$$

A aplicação f diz-se localmente Lipschitiziana em Ω se cada (t_0, x_0) tem uma vizinhança $V = V(t_0, x_0)$ tal que $f|V$ é Lipschitziana em V. Por exemplo, se f admite derivada parcial em relação a segunda variável, $D_2 f$, contínua em Ω. Isto resulta de se aplicar o argumento anterior a vizinhanças convexas V onde $D_2 f$ é limitada.

Lembramos a seguir o Lema da contração e, principalmente, um corolário deste que será usado na demonstração do Teorema de Picard.

Lema 3.0.1. *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e* $F : X \to X$ *uma contração, isto é,* $d(F(x),F(y)) \leq Kd(x,y), 0 \leq K < 1$. *Existe um único ponto fixo* p, *para* F, *isto é,*

$F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Demonstração. Unicidade: sejam p e p_1 dois pontos fixos

$$d(p, p_1) = d(F(p), F(p_1)) \leq Kd(p_1, p),$$

o que implica que $d(0p, p_1) = 0$, donde $p_1 = p$.

Existência: sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x)$. Provaremos que x_n é uma sequência de Cauchy. Realmente, $d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n d(x, x_r)$ e

$$\begin{aligned} d(x, x_r) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \cdots + d(f^{r-1}(x), f^r(x)) \\ &\leq (1, K, K^2, + \cdots + K^{r-1}) d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Portanto, $d(x_{n+r}, x_n) \leq \dfrac{K^n}{1-K} d(x, F(x))$. Logo, $\{x_n\}$ é convergente. Provemos que $\lim x_n = p$ é ponto fixo de F. De fato:

$$F(p) = F(\lim x_n) = limF(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

■

Corolário 3.1. Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e, para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo para F. Mais ainda, p é um atrator de F.

Demonstração. Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado pelo lema da contração (Lema 3.0.1). Seja $n = mk + l$ com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, como p é atrator de F^m, temos (já que $\{F^l(x)\}, 0 \leq l < m$, é finito) $[f^m]^k(F^l(x)) \to p$, quando $k \to \infty$. Da relação $F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$ e do fato que quando $n \to \infty$ tem-se $k \to \infty$ segue-se que, $F^n(x) \to p$, quando $n \to \infty$, isto é, p é um atrator de F. Provaremos agora que $F(p) = p$. Com efeito,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p)$$

■

Teorema 3.1. ***Teorema de Picard*** *Seja f contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}, B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω, existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x)$$

em I_a, onde $\alpha = \min a, b/M$.

Demonstração. Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \to \mathbb{E}$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, t \in I_\alpha.$$

Assim a correspondência $\varphi \to F(\varphi)$ define uma função F com as seguintes propriedades:

1. $F(X) \subset X$;
2. F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Ou seja, $F : X \to X$ é uma função tal que F^n é uma contração.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto prova (1). Quanto a (2), para todo par φ_1, $\varphi_2 \in X$ e todo $n \leq 0$,

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), t \in I_\alpha, \tag{3.19}$$

onde K é uma constante de Lipschitz de f. Verificamos esta desigualdade por indução em n. Para $n = 0$ ela é óbvia. Suponhamos que é válida para k. Então,

$$\begin{aligned}
|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} K|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \\
\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{K^k(s-t_0)^k}{k!} d(\varphi_1,\varphi_2) ds \right| &= \frac{k^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1,\varphi_2).
\end{aligned}$$

Portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \dfrac{k^n\alpha^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2)$ e, para n grande, $K^n\alpha^n/n! < 1$, pois este é o termo geral de uma série cuja soma é $e^{K\alpha}$, donde F^n é uma contração em X. Pelo corolário do Lema de contração, existe uma única $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. De fato, o ponto fixo φ é de classe C^1 e isto prova o teorema de Picard.

■

Corolário 3.2. Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{E}$ contínua com $D_2 f$ também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$, tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico desta solução está contido em V.

Demonstração. Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f|U$ é Lipschitziana e $|f| \leq M$ em U. Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno para que $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$, onde $b = \alpha$. Conclui-se o argumento aplicando o teorema 3.1 ■

Proposição 3.1. *Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = [a,b] \times \mathbb{E}$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de () em $I = [a,b]$*

Demonstração. Considerar $x = \mathcal{C}(I, \mathbb{E})$ e $F : X \to X$ definida como na demonstração do teorema 3.1

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds.$$

F tem um único ponto fixo pois, para n grande, F^n é uma contação. Basta observar que a desigualdade (3.19) da demonstração do teorema 3.1 é verificada.

■

Corolário 3.3. Equações lineares

Sejam $A(t)$ e $b(t)$ respectivamente matrizes $n \times n$ e $n \times 1$ de funções contínuas num intervalo I. Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução de $x' = A(t)x + b(t), x(t_0)$ definida em I.

Demonstração. Seja $I = U_n I_n$, onde $I_n \subset I_{n+1}$ são intervalos compactos que contém $t_0 \cdot f(t,x) = A(t)x + b(t)$ satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1 em cada intervalo I_n. Seja φ_n a única solução neste intervalo passando por (t_0, x_0). É claro que $\varphi_{n+1}|I_n = \varphi_n$. Logo, $\varphi(t) = \varphi_n(t), t \in I_n$ está bem definida em I. É claro também que φ é a única solução em I passando por (t_0, x_0).

■

Se retirarmos a hipótese de f ser Lipschitziana, ainda temos existência de soluções. Antes de provar este fato, lembramos o Teorema de Arzelá.

Teorema 3.2. ***Teorema de Arzelá***

Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Seja F uma família equicontínua de funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ então $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ para todo $\varphi \in F$. Se F é uniformemente limitada (isto é, existe $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$ para todo $\varphi \in F$), então toda sequência $\{\varphi_n\}$ de elementos de F tem uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ uniformemente convergente em X.

Teorema 3.3. ***Teorema de Peano***

Seja f contínua em $\Omega = I_\alpha \times B_b$ como no Teorema 3.1. Se $|f| < M$ em Ω, () tem pelo menos uma solução em I_α, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração. Pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, existe uma sequência f_n de funções, cujas componentes são polinômios, que converge para f, uniformemente em Ω. Para n grande, f_n satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1. Seja φ_n solução de $x' = f_n(t,x), x(t_0) = x_0$ em I_α, cuja existência e unicidade decorrem do Teorema 3.1. A família $\{\varphi_n\}$ é equicontínua e uniformemente limitada, pois

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| = \left| \int_t^{t'} f_n(s, \varphi_n(s))ds \right| \leq M|t - t'|$$

e $|\varphi_n - x_0| \leq b$, para todo n suficientemente grande. Pelo Teorema de Arzelá existe uma subsequência, que denotaremos também por $\{\varphi_n\}$, tal que φ_n converge uniformemente em I_α para uma função φ. Provaremos que φ é solução de (). Aplicando a desigualdade triangular a $f_n(s, \varphi_n(s)), f(s, \varphi_n(s))$ e $f(s, \varphi(s))$ resulta que $f_n(s, \varphi_n(s))$ converge uniformemente em I_α para $f(s, \varphi(s))$. Portanto, fazendo n tender a ∞ em ambos os menbros de $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi_n(s))ds$, temos, para todo $t \in I_\alpha, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds$.

■

Observação 3.2. É possível aproximar f contínua em Ω por f_n de Lipschitz com relação a x em Ω de modo que neste domínio $\sup |f_n| \leq \sup |f|$. Assim o Teorema de Peano, podemos tomar α igual ao fornecido pelo Teorema de Picard.

Corolário 3.4. Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ e $f : \Omega \to \mathbb{E}$ contínua. Se $C \subset \Omega$ é um conjunto tal que $|f| < M$ em Ω_0, onde $\Omega \supseteq \Omega_0 \supseteq C$ com $dist(C, \Omega - \Omega_0) > 0$, então existe $\alpha > 0$ tal que, para todo ponto $(t_0, x_0) \in C$, existe uma solução de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ em $I_\alpha(t_0) = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \alpha\}$.

Demonstração. Seja $0 < a < dist(C, \Omega, \Omega_0)$. Tomar $\alpha = \min\{a, a/M\}$ e aplicar o Teorema 3.3 a $I_\alpha(t_0) \times B_a(x_0) \subseteq \Omega_0$.

■

Observação 3.3. Se C é compacto contido no interior de um outro compacto Ω_0 as hipóteses deste corolário são satisfeitas para $M > \sup |f|$ em Ω.

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

3.3.1 Introdução às Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é a seguinte:

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{3.20}$$

onde $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $q : (a, b) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas definidas em um intervalo aberto (a, b). Uma função $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ é solução de (3.20) se ela for diferenciável e satisfizer a equação.

Usamos a notação $y' = \dfrac{dy}{dx}$ para denotar a derivada de y com relação à sua variável independente x.

No estudo da equação (3.20) aparecem dois problemas básicos:

1. Obter a solução geral da equação;

2. Obter a solução geral do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

onde $x_0 \in (a, b)$ e y_0 são os dados iniciais.

3.3.1.1 Equações em que p(x)=0:

Se a função p(x)=0 a equação (3.20) torna-se

$$\frac{dy}{dx} = q(x) \tag{3.22}$$

que é de fácil resolução, onde integrando-se os dois lados da equação obtém-se sua solução geral, dada por

$$y(x) = \int q(x)dx + c.$$

3.3.1.2 Equações Lineares - caso geral

Considerando equações do tipo (3.20), vamos definir uma função auxiliar, $\mu(x)$, de forma que ao multiplicarmos a equação (3.20) por esta função a equação obtida é linear com $p(x) = 0$, ou seja, do tipo (3.22). Uma função com essa propriedade é chamada fator integrante da equação linear.

Seja

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

vamos mostrar agora que $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ é um fator integrante da equação (3.20).

Note que

$$\frac{d\mu}{dx} = e^{\int p(x)dx} \frac{d}{dx}\left(\int p(x)dx\right) = e^{p(x)dx} p(x) = \mu(x)p(x) \tag{3.23}$$

assim multiplicando-se (3.20) por $\mu(x)$, obtemos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \tag{3.24}$$

sendo $\mu(x)p(x) = \dfrac{d\mu}{dx}$, então (3.24) pode ser reescrita como

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)q(x) \tag{3.25}$$

observe que o lado esquerdo dessa equação é a derivada do produto: $\mu(x)y(x)$, o que faz com que ela possa ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \mu(x)q(x) \tag{3.26}$$

a equação (3.26) é uma equação do tipo (3.22), logo, integrando de ambos os lados temos:

$$\int \frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \int \mu(x)q(x)dx$$

assim, a solução geral de (3.26) é dada por

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)dx + c$$

como $\mu(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(x)$ obtemos que a solução geral de (3.20) é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + c\right).$$

3.3.1.3 Como chegar ao fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

Mostraremos como chegar ao fator integrante $\mu(x) = e^{\int e^{p(x)dx}}$, comparando as equações (3.24) e (3.25). É possível notar que o fator integrante $\mu(x)$ deve ser uma equação que satisfaça a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu(x)$$

esta é também uma equação linear, mas com $q(x) = 0$. Supondo-se $\mu(x) \neq 0$, vamos multiplicar esta equação por $\dfrac{1}{\mu(x)}$ obtendo a equação

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} = p(x).$$

como $\dfrac{1}{\mu(x)} = \dfrac{d}{d\mu}(ln|\mu(x)|)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\mu}(ln|\mu(x)|)\frac{d\mu}{dx} = p(x)$$

mas pela regra da cadeia esta equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(ln|\mu(x)|) = p(x)$$

que é uma equação do tipo (3.22) que pode ser resolvida facilmente integrando-se ambos os membros obtendo

$$ln|\mu(x)| = \int p(x)dx + c$$

aplicando-se a exponencial á ambos os membros

$$e^{ln|\mu(x)|} = e^{\int p(x)dx + c} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx}e^{c}$$

($e^c = k$, k= constante)

portanto,

$$\mu(x) = ke^{\int p(x)dx}$$

como estamos interessados em apenas um fator integrante podemos tomar $k = 1$ e obtemos

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Situação problema:

1. Resolva o problema de valor inicial:

a) $\begin{cases} y' + (1+2x)y = xe^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Solução:

Pela equação $y' + (1+2x)y = xe^{x^2}$, temos que $p(x) = 1 - 2x$, logo o fator integrante da equação é:

$$\mu(x) = e^{\int(1-2x)dx} = e^{\int dx - \int 2xdx} = e^{x-x^2}$$

multiplicando-se a equação inicial por $\mu(x)$, temos:

$$e^{x-x^2}\frac{dy}{dx} + e^{x-x^2}(1-2x)y = xe^{x^2}e^{x-x^2}$$

o lado esquerdo da equação é igual a derivada do produto de $\mu(x)y(x)$, logo a equação acima é equivalente á

$$\frac{d}{dx}(e^{x-x^2}y(x)) = xe^x$$

Integrando de ambos os lados, obtemos:

$$e^{x-x^2}y(x) = \int xe^x dx \Rightarrow y(x) = \frac{1}{e^{x-x^2}}\int xe^x dx$$

utilizando a integração por partes temos que

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

logo,

$$y(x) = \frac{1}{e^{x-x^2}}(xe^x - e^x + c)$$

De acordo com a condição inicial temos que $y(0) = 2$, sendo assim:

$$\frac{1}{e^{0-0}}(0e^0 - e^0 + c) = 2 \Rightarrow -1 + c = 2 \Rightarrow c = 3$$

portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = \frac{1}{e^{x-x^2}}(xe^x - e^x + 3).$$

3.3.2 Equações separáveis

Equações diferenciais da forma:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{3.27}$$

com $g(y) \neq 0$, são chamadas equações separáveis. Faz-se a hipótese que f e g sejam funções contínuas em intervalos $f : (a, b) \to \mathbb{R}, g : (c, d) \to \mathbb{R}$. A equação (3.27) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{3.28}$$

Uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ de classe c^1(dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ $\exists$ para todo $x \in$ D e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$) é uma solução de (3.27) se $(\alpha, \beta) \subset (a, b), y((\alpha, \beta)) \subset (c, d)$, $g(y(x)) \neq 0$ e satisfaz (3.27) para todo $x \in (\alpha, \beta)$. A equação (3.27) não é linear.

Se $y(x)$ é uma solução da equação, então

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

agora, se G é uma primitiva de g, temos que

$$G' = g$$

daí, usando regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = G'(y(x))y'(x)$$

como $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ e $G'(y) = g(y)$, temos que

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))\frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

com isso, temos

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x)$$

ou seja,

$$G(y(x)) = F(x) + c \tag{3.29}$$

onde F é uma primitiva de f. A constante c pode ser determinada usando o fato que

$y(x_0) = y_0$ onde $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e $y_0 \in (c, d)$. Com efeito, de (3.29) segue que

$$c = G(y(x_0)) - F(x_0) = G(y_0) - F(x_0) \Rightarrow c = G(y_0) - F(x_0)$$

reescrevendo (3.29), obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + c = F(x) + G(y_0) - F(x_0) \Rightarrow G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

agora, como G e F são primitivas de g e f, respectivamente,temos

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Situação prblema:

1. Resolva a equação:

a) $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

Solução:

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{(1 + x^2)}dx$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{(1-x^2)}dx \Rightarrow ln|y| = \frac{1}{2}ln|1+x^2|+c \Rightarrow ln|y|-ln|\sqrt{1+x^2}| = c \Rightarrow ln\left|\frac{|y|}{\sqrt{2+x^2}}\right| = c$$

elevando a exponencial:

$$e^{ln\left|\frac{|y|}{\sqrt{2+x^2}}\right|} = e^c \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = e^c$$

($e^c = k$, $k =$ constante)

então

$$y(x) = k\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

é solução da equação.

3.3.3 Equações Exatas

As equações do tipo:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{3.30}$$

em que as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.31}$$

em um retângulo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < x < \beta, \gamma < y < \theta\}$$

em que $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas, são chamadas equações exatas.

Nestas condições, obtemos uma função $f(x,y)$ (que mostraremos sua existência depois), tal que

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x} \quad e \quad N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.32}$$

Substituindo-se estes valores de $M(x,y)$ e de $N(x,y)$ em (3.29) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \tag{3.33}$$

Mas, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(f(x,y(x)))=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Então (3.33) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(f(x,y(x)))=0. \tag{3.34}$$

A equação (3.34) é do tipo (3.22), ou seja,

$$\frac{dy}{dx}=q(x)$$

em que $y(x)=f(x,y(x))$ e $q(x)=0$. Assim a solução geral de (3.34) e portanto de (3.30) é dada por

$$f(x,y(x))=c. \tag{3.35}$$

Veremos agora como encontrar a função $f(x,y)$. Integrando-se $M(x,y)$ com relação a x e somando uma função $h(y)$ que será determinada posteriormente, obtemos

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y) \tag{3.36}$$

Substituindo-se a função $f(x,y)$ encontrada em (3.36) em $N(x,y)$ obtemos

$$N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(\int M(x,y)dx)}{\partial y}+\frac{dh}{dy}=\int\frac{\partial M}{\partial y}dx+\frac{dh}{dy}$$

Daí,

$$\frac{dh}{dy}=N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx \tag{3.37}$$

Integrando-se (3.37) com relação a y e substituindo o resultado em (3.36), obtemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = c.$$

Situação problema:

1. Determine a solução da equação abaixo:

a) $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

Solução:

Veja que se $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2 - 1$, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

logo, a equação é exata. Sabendo que existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad e \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Integraremos então $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e somaremos uma função $h(y)$, logo

$$f(x,y) = \int 2xydx + h(y) = x^2 y + h(y)$$

Agora derivando com relação a y, temos

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{dh}{dy} \Rightarrow x^2 + \frac{dh}{dy} = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{dh}{dy} = -1$$

integrando ambos os lados da equação, temos:

$$\int dh = \int -1dy \Rightarrow h(y) = -y.$$

portanto $x^2 y - y = c$ é a família a um parâmetro de soluções para a equação.

3.3.4 Substituições em Equações de Primeira Ordem

As substituições estudadas a seguir são utilizadas para transformar algumas equações diferenciais em equações do tipo que já foram estudadas anteriormente.

3.3.4.1 Equações Homogêneas de Primeira Ordem

As Equações Homogêneas de Primeira Ordem são equações que podem ser escritas na seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.38}$$

ou seja, a derivada de y em relação a x resulta em uma função que depende do quociente de y por x.

Se fizermos

$$v = \frac{y}{x}$$

temos

$$y = xv$$

e derivando o produto vx em relação a x obtemos, pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

substituindo os valores encontrados pra y' e $\dfrac{y}{x} = v$ na equação (3.38) obtemos, a nova equação

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

ou ainda

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{F(v) - v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{3.39}$$

Determina-se v, pelo método das Equações Separáveis visto na seção 3.3.2, e então, usando a relação $y = vx$, chegamos ao valor buscado de y.

Situação problema:

1. Resolva a equação Homogênea de Primeira Ordem:

a) (x+y)dx+xdy=0

Solução:

Temos que

$$(x+y)dx + xdy = 0 \Rightarrow xdy = -(x+y)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(x+y)}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$$

seja $v = \dfrac{y}{x}$. Então $y = vx$ e derivando o produto vx em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

substituindo na equação os valores de $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{y}{x}$, obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = -1 - v$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$x\frac{dv}{dx} = -1 - 2v \Rightarrow \frac{dv}{-1-2v} = \frac{dx}{x}$$

agora podemos resolver utilizando método das variáveis separáveis. Integrando ambos os lados temos

$$\int \frac{dv}{-1-2v} = \int \frac{dx}{x}$$

logo,

$$-\frac{1}{2}ln|-1-2v| = ln|x| \Rightarrow ln\left|\frac{1}{\sqrt{-1-2v}}\right| = ln|x|$$

então a equação diferencial tem como solução

$$ln\left|\frac{1}{\sqrt{-1-2v}}\right| = ln|x| + c$$

ou ainda

$$ln\left|\frac{1}{\sqrt{-1-2v}}\right| - ln|x| = c$$

3.3.4.2 Equações de Bernoulli

As equações de Bernoulli são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{3.40}$$

em que n é um número real qualquer. Para $n = 0$ e $n = 1$ esta equação é linear. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$, fazemos a mudança de variáveis $v = y^{1-n}$.

Multiplicando-se a equação de Bernoulli (3.40) por y^{-n} obtemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{3.41}$$

Derivando $v = y^{1-n}$ em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}.$$

Fazendo as substituições dos valores obtidos em (3.41) obtemos

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x),$$

que é uma Equação Linear, com isso podemos resolvê-la conforme foi visto na seção (3.3.1). Depois de encontrada a solução geral desta equação, devemos substituir

$$v = y^{1-n}$$

para encontrar a solução geral de (3.40).

Situação problema:

1. Encontre a solução geral da equação

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = -xy^3$

Solução:

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-2} = -x$$

fazendo a mudança de variáveis $v = y^{-2}$.

Se $v = y^{-2}$, então

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

fazendo agora as substituições dos valores obtidos,

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -x$$

multiplicando essa equação por -2 obtemos

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 2x$$

que é uma equação linear, ou seja,

sendo $p(x) = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2ln|x|} = x^{-2}$

logo

$$x^{-2}\frac{dv}{dx} - 2x^{-3}v = 2x^{-1} \Rightarrow \frac{d(x^{-2}v)}{dx} = 2x^{-1}$$

integrando ambos os lados, obtemos

$$\int d(x^{-2}v) = \int 2x^{-1}dx \Rightarrow x^{-2}v = 2ln|x| + c$$

portanto

$$v = x^2 2ln|x| + x^2 c$$

sendo $v = y^{-2}$, então a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 2ln|x| + x^2 c}}$$

3.3.4.3 Equações de Ricatti

As equações de Ricatti são da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2. \tag{3.42}$$

Conhecendo-se uma solução particular $y_1(x)$ de (3.42), a equação de Ricatti pode ser resolvida fazendo-se a substituição

$$y(x) = y_1(x) + w(x) \tag{3.43}$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dw}{dx} \tag{3.44}$$

substituindo-se (3.43) e (3.44) em (3.42) obtemos

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dw}{dx} = p(x) + q(x)(y_1 + w(x)) + r(x)(y_1(x) + w(x))^2$$

então

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dw}{dx} = p(x) + q(x)y_1(x) + q(x)w(x) + r(x)y_1^2(x) + r(x)2y_1(x)w(x) + r(x)w^2(x)$$

sabendo que y_1 é solução da equação então

$$\frac{dy_1}{dx} = p(x) + q(x)y_1(x) + r(x)y_1^2(x)$$

portanto

$$\frac{dw}{dx} = q(x)w(x) + r(x)2y_1(x)w(x) + r(x)w^2(x)$$

sendo assim

$$\frac{dw}{dx} - q(x)w(x) + r(x)2y_1(x)w(x) = r(x)w^2(x)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dw}{dx} + (-q(x) + 2r(x)y_1(x))w(x) = r(x)w^2(x)$$

que é uma equação de Bernoulli, logo pode ser resolvida de acordo com o que foi visto na seção anterior.

Situação problema:

1. Resolva a Equação, sabendo que $y_1 = 2x$ é uma solução particular dela

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2,$

   Solução:

   Temos que $p(x) = 2$, $q(x) = -2x$ e $r(x) = 1$, e sendo $y_1(x) = 2x$ então $y(x) = 2x + w(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{dw}{dx}$. Substituindo os valores obtidos na equação inicial, obtemos

$$2 + \frac{dw}{dx} = 2 - 2x(2x + w) + (2x + w)^2 = 2x \Rightarrow 2 + \frac{dw}{dx} = 2 - 4x^2 - 2xw + 4x^2 + 4xw + w^2$$

   podemos então reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{dw}{dx} - 2xw = w^2$$

   chegamos então a uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Resolvendo temos

$$w^{-2}\frac{dw}{dx} - 2xw^{-1} = 1$$

   seja $w^{-1} = v$ então $-\dfrac{dv}{dx} = w^{-2}\dfrac{dw}{dx}$. Substituindo os valores encontrados na equação, obtemos

$$-\frac{dv}{dx} - 2xv = 1$$

multiplicando a equação por -1, ficamos com

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = -1$$

chegamos então a uma equação linear, com $p(x) = 2x$. Note que o fator integrante, desta última equação, é

$$\mu(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}.$$

Logo,

$$\frac{d(e^{x^2 v})}{dx} = -e^{x2}$$

integrando ambos os lados desta igualdade, encontramos

$$\int d(e^{x^2}v) = \int -e^{x2}dx \Rightarrow v = \frac{1}{e^{x^2}} \int -e^{x2}dx + c$$

sendo

$$v = w^{-1} \Rightarrow w = \frac{1}{v}.$$

Portanto a solução da equação é dada por

$$w = \frac{1}{e^{x^2} \int -e^{x2}dx + c}.$$

3.3.5 Aplicações De Equações Diferenciais de Primeira Ordem

3.3.5.1 Dinâmica populacional

Crescimento Exponencial

O modelo mais simples do crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população é $\dfrac{dy}{dx}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(x)$. Podemos descrever o problema de encontrar $y(x)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0. \tag{3.45}$$

determinando o fator integrante, obtemos

$$\mu(x) = e^{\int -kdx} = e^{-kx}.$$

Multiplicando-se a equação (3.45) pelo fator integrante encontrado, obtemos

$$\frac{d(e^{-kx}y)}{dx} = 0$$

integrando ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\int d(e^{-kx}y) = \int 0dx \Rightarrow e^{-kx}y = c$$

ou seja

$$y = e^{kx}c.$$

Substituindo-se os valores de $x = 0$ e $y = y_0$, obtemos

$$y_0 = ce^{k0} = c$$

logo a solução do problema de valor inicial é dada por

$$y(x) = y_0 e^{kx}.$$

Situação Problema

1. Em uma cultura há inicialmente y_0 bactérias, uma hora depois, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}y_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

   Solução:

Sendo $y(x) = y_0 e^{kx}$, logo no instante $x = 1$, temos:

$$y(1) = \frac{3}{2}y_0 \Rightarrow \frac{3}{2}y_0 = y_0 e^{k \cdot 1} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^k$$

aplicando a exponencial em ambos os termos:

$$ln\left(\frac{3}{2}\right) = ln(e^k) \Rightarrow k = ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Portanto para $y(x) = 3y_0$, temos

$$3y_0 = y_0 e^{ln\left(\frac{3}{2}\right)x} \Rightarrow 3 = e^{ln\frac{3}{2}x} \Rightarrow 3 = e^{0,4054x}$$

aplicando o ln, temos

$$ln(3) = 0,4054 \Rightarrow x = \frac{ln(3)}{0,4054} \approx 2,70$$

realizando a conversão de horas para minutos concluímos que são necessárias 2 horas e 42 minutos para que o número de bactérias triplique.

Crescimento Logístico

Um modelo mais sofisticado do crescimento populacional leva em consideração que a população $y(x)$ tem um valor máximo sustentável y_m podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também a diferença y_m e a população presente. Neste caso a população como função do tempo, $y(x)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ky(y_m - y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Temos então uma equação separável que podemos reescrever da seguinte forma

$$\frac{1}{y(y_m - y)}y' = k$$

integrando em relação a x, obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_m - y)} y' dx = \int k dx + c_1$$

seja $y'dx = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_m - y)} dy = \int k dx + c_1$$

logo

$$\frac{1}{y_m} ln|y| - \frac{1}{y_m} ln|y_m - y| = kx + c_1 \Rightarrow ln|y| - ln|y_m - y| = kxy_m + c_1$$

usando propriedades de logaritmos podemos reescrever como

$$ln\left|\frac{y}{y_m - y}\right| = kxy_m + c_1$$

aplicando a exponencial em ambos os lados da igualdade chegamos á

$$\frac{y}{y_m - y} = e^{kxy_m} e^{c_1}$$

onde $e^{c_1} = c$, $c =$ constante. Substituindo-se também os valores $x = x_0$ e $y = y_0$ na equação acima obtemos

$$c = \frac{y_0}{y_m - y_0} e^{-kx_0 y_m}.$$

Explicitando $y(x)$

$$y = c(y_m - y)e^{kxy_m} = cy_m e^{kxy_m} - cye^{kxy_m} \Rightarrow y + cye^{kxy_m} = cy_m e^{kxy_m}$$

$$\Rightarrow y = \frac{cy_m e^{kxy_m}}{1 + ce^{kxy_m}} = \frac{\dfrac{y_0 y_m}{y_m - y_0} e^{y_m k(x - x_0)}}{1 + \dfrac{y_0}{y_m - y_0} e^{y_m k(x - x_0)}} = \frac{y_0 y_m e^{y_m k(x - x_0)}}{y_m - y_0 + y_0 e^{y_m k(x - x_0)}}$$

dividindo se numerador e denominador por $e^{y_m kx}$ obtemos

$$y(x) \frac{y_0 y_m}{y_0 + (y_m - y_0)e^{-y_m k(x - x_0)}}.$$

Observe que

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = y_m$$

Situação Problema

1. Consideremos uma situação formada por uma população de organismos zoo-planctônicos. São colocadas em um béquer 2 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que essa população atinge o máximo de 650 indivíduos e que em 5 dias havia 150 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional tanto a população atual quanto a diferença entre a população máxima e a população atual (crescimento logístico).

   Solução:

   A população como função do tempo, $y(x)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ky(650-y) \\ y(0) = 2, \quad y(5) = 150 \end{cases}$$

   A equação é separável. Podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{1}{y(650-y)}y' = k$$

   integrando ambos os lados da equação em relação a x obtemos

$$\int \frac{1}{y(650-y)}y'dx = \int kdx + c$$

   fazendo-se a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(650-y)}dy = \int kdx + c \Rightarrow \frac{1}{650}ln|y| - \frac{1}{250}ln|650-y| = kx + c_1$$
$$\Rightarrow ln|y| - ln|650-y| = 650kx + c_1$$

   usando as propriedades de logaritmos podemos reescrever como

$$ln\left|\frac{y}{650-y}\right| = c_1 + 650kx$$

aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{650-y} = e^{c_1}e^{650kx} = ce^{650kx}$$

($e^{c_1} = c$, c =constante). Substituindo-se $x = 0$ e $y = 2$ na equação acima obtemos

$$c = \frac{2}{650-2} = \frac{2}{648} = \frac{1}{324}.$$

Vamos explicitar $y(x)$.

$$y = (659-y)ce^{650kx} \Rightarrow y + ce^{650kx} = 650ce^{650kx}$$

portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = \frac{650ce^{650kx}}{1+ce^{650kx}} = \frac{650e^{650kx}}{\frac{1}{c}+e^{650kx}} = \frac{650e^{650kx}}{324+e^{650kx}} = \frac{650}{324e^{-650kx}+1}$$

para determinar o valor de k vamos usar o fato de que em 5 dias havia 150 indivíduos. Substituindo-se $x = 5$ e $y = 150$ obtemos

$$150 = \frac{650}{324e^{-3250k}+1} \Rightarrow 324e^{-3250k} = \frac{650}{150} - 1 = \frac{10}{3} \Rightarrow e^{-3250k} = \frac{10}{972} =$$

aplicando o ln, chegamos á

$$-650k = -\frac{1}{5}ln\left|\frac{10}{972}\right|.$$

Logo substituindo-se o valor de $-650k$ obtido acima na solução PVI, obtemos que a população de cladóceros em função do tempo é dada por

$$y(x) = \frac{650}{324\left(\frac{10}{972}\right)^{\frac{x}{5}}+1}.$$

3.3.5.2 Datação por carbono 14

A proporção do carbono 14(radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar quantidade de carbono 14 em função do tempo $Q(x)$, como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = -kQ \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

A equação é a mesma do crescimento exponencial, mas vamos resolver, agora, como uma equação separável, ou seja, a equação é equivalente a

$$\frac{1}{Q}Q' = k.$$

Integrando-se com relação a x, sendo $Q'dx = dQ$, obtemos

$$ln|Q| = kx + c_1.$$

Aplicando-se a exponencial, obtemos

$$Q = e^{kx}e^{c_1} = ce^{kx}.$$

Substituindo-se $x = 0$ e $Q = Q_0$, obtemos $c = Q_0$. Logo a solução do PVI é

$$Q(x) = Q_0e^{kx}$$

Situação Problema

1. Em um tronco de árvore é encontrado $\frac{1}{250}$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono 14 transformou-se em carbono 12. Determine a idade deste tronco de árvore.

   Solução:

   Esta situação pode ser descrita pelo problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

   que tem solução

$$y(x) = y_0e^{kx}$$

   substituindo-se $x = 5600$ e $y = \frac{y_0}{2}$(meia vida) obtemos

$$\frac{y_0}{2} = y_0e^{5600k} \Rightarrow k = -\frac{ln|2|}{5600}$$

Agora substituindo-se $y = \dfrac{y_0}{250}$ obtemos

$$\frac{y_0}{250} = y_0 e^{kx} \Rightarrow x = -\frac{ln|250|}{k} = \frac{5600 ln|250|}{ln|2|} = \frac{5600 \cdot 5,521446}{0,693147} \approx 44608$$

Concluímos então que este tronco tem aproximadamente 44608 anos.

3.3.5.3 Misturas

Vamos supor que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial de V_0 litros e Q_0 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de T_e litros por minuto possuindo uma concentração de C_e gramas de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de T_s litros por minuto.

A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

A taxa com que entra sal no tanque é igual a taxa com que entra mistura, T_e, vezes a concentração de entrada, C_e. E a taxa com que sai sal do tanque é igual a taxa com que sai a mistura do tanque, T_s, vezes a concentração de sal que sai do tanque, C_s. Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$C_s(x) = \frac{Q(x)}{V(x)}.$$

Como o volume no tanque, $V(x)$, é igual ao volume inicial, V_0, somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(x) = V_0 + T_e x - T_s x = V_0 + (T_e - T_s)x.$$

Assim, a quantidade de sal no tanque, $Q(x)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = T_e C_e - T_s \dfrac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)x} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

Situação Problema

1. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água e 100 gramas de sal. Então uma mistura de água e sal na concentração de 5 gramas de sal por litro é bombeada para o tanque a uma taxa de 4 litros por minuto. Simultaneamente a solução (bem misturada) é retirada do tanque na mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante x, onde x é contado a partir do início do processo.

   Solução:

   A situação acima pode ser descrita pelo problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = 20 - \dfrac{Q}{25}. \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

   A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{Q}{25} = 20$$

   para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{25} dx} = e^{\frac{1}{25}x}$$

   multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(x)$, obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^{\frac{1}{25}x}Q) = 20e^{\frac{1}{25}x}$$

   integrando ambos os membros, encontramos

$$e^{\frac{1}{25}x}Q = 500e^{\frac{1}{25}x} + c \Rightarrow Q(x) = 500 + ce^{-\frac{1}{25}x}$$

   substituindo-se $x = 0$ e $Q = 100$, temos

$$100 = 500 + c \Rightarrow c = -400.$$

   Logo a solução do problema de valor inicial é

$$Q(x) = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}x}.$$

3.3.5.4 Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura $T(x)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre temperatura atual do corpo

$T(x)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$|T - T_m| = t_0 e^{kx}$$

Situação Problema

1. Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F, três minutos depois, sua temperatura passa pra 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 80°F, se a temperatura do ambiente em que foi colocado é de 70°F?

Solução

Temos os seguintes dados iniciais $T(3) = 200$; $T(0) = 300$; $T_m = 70$. Sendo $|T - T_m| = x_0 e^{kx}$, então em $x = 0$

$$300 - 70 = x_0 e^0 \Rightarrow y_0 = 230.$$

Agora, em $x = 3$

$$200 - 70 = 230^{3k} \Rightarrow 130 = 230e^{3k} \Rightarrow \frac{130}{230} = e^{3k}$$

aplicando o ln

$$ln\left(\frac{130}{230}\right) = 3k \Rightarrow -0,570545 = 3k \Rightarrow k = \frac{-0,570545}{3} = 0,19$$

assim

$$80 - 70 = 230e^{-0,19x} \Rightarrow \frac{10}{230} = e^{-0,19x}$$

aplicando novamente o ln

$$ln\left(\frac{10}{230}\right) = -0,19x \Rightarrow -3,13549 = -0,19x \Rightarrow x = \frac{-3,13549}{-0,19} \approx 16,50min.$$

3.3.5.5 Lei de Torricelli

A lei de Torricelli diz que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$. Ou seja,

$$\frac{dV}{dx} = k\sqrt{h}.$$

Existe uma relação entre V e h, $V = V(h)$, que depende da forma do tanque. Como

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dx},$$

então a altura, $h(x)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{k\sqrt{h}}{\dfrac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Situação Problema

1. Um tambor cônico com vértice para baixo, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a altura da coluna de água cair pela metade, determine a altura h em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia. A lei de Torricelli diz que a taxa com que o litro escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$.

   Solução:

   Para o cone temos que

   $$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{hR}{h}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 h^2$$

   então o problema pode ser modelado por

   $$\begin{cases} \dfrac{dh}{dx} = kh^{-\frac{3}{2}} \\ h(0) = 2, h(30) = 1 \end{cases}$$

   podemos reescrever a equação como

   $$h^{\frac{3}{2}}\frac{dh}{dx} = k \Rightarrow \frac{d}{dh}\left(\frac{3}{2}h^{\frac{5}{2}}\right)\frac{dh}{dx} = k$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}h^{\frac{5}{2}}\right) = k$$

integrando-se ambos os lados

$$\frac{3}{2}h^{\frac{5}{2}} = kx + c \Rightarrow h(x) = \frac{3}{2}(kx+c)^{\frac{2}{5}}$$

substituindo $x = 0$ e $h = 2$, temos

$$2 = \frac{3}{2}c^{\frac{2}{5}} \Rightarrow c = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 2,0528$$

substituindo-se $x = 30$ e $h = 1$, encontramos

$$1 = \frac{3}{2}(30k + 2,0528)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow 30k = \frac{3}{2} - 2,0528 \Rightarrow k = \frac{\frac{3}{2} - 2,0528}{30}$$

portanto a função que descreve como a altura varia com o tempo é dada por

$$h(x) = \frac{3}{2}(kx+c)^{\frac{2}{5}} = \left(2,0528 + \frac{\frac{3}{2} - 2,0528}{30}x\right)^{\frac{2}{5}}$$

substituindo-se $h = 0$, temos que

$$x = -\frac{c}{k} = -\frac{2,0528}{\frac{\frac{3}{2} - 2,0528}{30}} \approx 111,04$$

3.3.5.6 Juros

Vamos supor que façamos uma aplicação de uma quantia S_0 em um banco e que a taxa de variação do investimento $\dfrac{dS}{dx}$ é proporcional ao saldo em cada instante $S(x)$. Podemos descrever o problema de encontrar $S(x)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dx} = rS \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

este problema já resolvemos antes e tem solução

$$S(x) = S_0 e^{rx}. \tag{3.46}$$

Pode parecer que esse modelo não seja muito realista, pois normalmente os juros são creditados em períodos inteiros igualmente espaçados. Ou seja, se j é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então o saldo após n unidades de tempo $S(n)$ é dado por

$$\begin{aligned} S(1) &= S_0 + S_0 j = S_0(1+j) \\ S(2) &= S(1)(1+j) = S_0(1+j)^2 \\ \vdots \quad & \vdots \qquad \vdots \\ S(n) &= S(n-1)(1+j) = S_0(1+j)^n. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Substituindo-se x por n na solução do problema de valor inicial obtida (3.46) e comparando com (3.47) obtemos que

$$S_0 e^{rn} = S_0(1+j)^n$$

ou seja,

$$1 + j = e^r \Rightarrow r = ln(1+j). \tag{3.48}$$

Assim a hipótese inicial de que os juros são creditados continuamente é realista desde que a constante de proporcionalidade na equação diferencial r e a taxa de juros j estejam relacionados por (3.48). Para pequenas taxas de juros os dois valores são muito próximos. Por exemplo, $j = 4\%$ corresponde a $r = 3,9\%$ e $j = 1\%$ corresponde a $r \approx 1\%$.

Situação Problema

1. Com o objetivo de fazer uma previdência particular uma pessoa deposita uma quantia de R$ 100,00 por mês durante 20 anos (suponha que o depósito é feito continuamente a uma taxa de R$ 100,00 por mês). Supondo que neste período a taxa de juros seja de 1% ao mês(contínua), qual o valor que esta pessoa iria ter ao fim deste período?

Solução:

Podemos descrever o problema de encontrar $s(x)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dx} = \dfrac{1}{100}S + d. \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dx} - \frac{1}{100}S = d.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{100}dx} = e^{-\frac{1}{100}x}$$

multiplicando a equação diferencial por $\mu(x)$, obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^{-\frac{1}{100}x}S) = de^{-\frac{1}{100}x}$$

integrando-se ambos os membros, chegamos á

$$S = e^{\frac{1}{100}x}\int de^{-\frac{1}{100}}dx = -e^{\frac{1}{100}x}100de^{-\frac{1}{100}x} + e^{\frac{1}{100}x}c = -100d + ce^{\frac{1}{100}x}$$

substituindo-se $x = 0$ e $s = 0$, obtemos

$$0 = -100d + c \Rightarrow c = 100d.$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$S(x) = 100d(e^{\frac{1}{100}x} - 1).$$

Substituindo-se $d = 100$, $x = 20 \cdot 12 = 240$, temos

$$S(240) = 10000(e^{2,4} - 1) \approx 100231,00.$$

3.3.6 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Para as Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem é válido um resultado semelhante ao que é válido para as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem com relação a Existência e Unicidade de soluções. Sua demonstração será apresentada posteriormente.

Teorema 3.4. *Existência e Unicidade*

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

para $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ funções contínuas em um intervalo I contendo x_0, existe uma única solução neste intervalo.

3.3.7 Equações Homogêneas - Parte I

Uma Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem escrita da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.49}$$

é dita homogênea. Para equações lineares homogêneas é válido o princípio da superposição.

Teorema 3.5. *(Superposição)*

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação homogênea (3.49), então

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3.50}$$

para c_1 e c_2 constantes também o é.

Demonstração. Vamos verificar que realmente $y(x)$ dado por (3.50) é solução de (3.49).

Seja,

$$\begin{aligned}
&y'' + p(x)y' + q(x)y\\
&= (c_1y_1(x) + c_2y_2(x))'' + p(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' + q(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))\\
&= cy_1'' + c_2y_2'' + p(x)c_1y_1' + p(x)c_2y_2' + q(x)c_1y_1 + q(x)c_2y_2\\
&= c_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0}\\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

pois y_1 e y_2 são soluções de (3.49). ■

3.3.7.1 Soluções Fundamentais

Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{3.51}$$

em que y_0 e y_0' são condições iniciais dadas no problema.

Vamos determinar condições sobre duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (3.49) para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ seja solução do problema de valor inicial (3.51).

Substituindo-se $x = x_0$ na solução $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ e na derivada de $y(x)$, $y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)$ obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema A é invertível, então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o sistema tem uma única solução (c_1, c_2) (a solução é $X = A^{-1}B$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é solução do problema de valor inicial (3.51).

Se além disso as soluções y_1 e y_2 estão definidas num intervalo I, onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas, então pelo teorema (3.4) de Existência e Unicidade,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é a única solução do PVI no intervalo I e assim temos o resultado a seguir.

Teorema 3.6. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação (3.49) em um intervalo I aberto, onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas, tais que, em um ponto $x_0 \in I$,*

$$det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') *existe constantes* (c_1, c_2) *tais que* $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

tem como única solução no intervalo I

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Definição 3.2. a) O determinante

$$W[y_1, y_2](x_0) = det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}$$

é chamado Wronskiano das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em x_0.

b) Se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (3.49), em um intervalo aberto I onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas, tais que o seu Wronskiano é diferente zero em um ponto $x_0 \in I$ dizemos que elas são soluções fundamentais no intervalo I da equação diferencial (3.49).

Teorema 3.7. *Se* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *são soluções fundamentais de (3.49) em um intervalo aberto* I*, então a família de soluções*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3.52}$$

para constantes c_1 *e* c_2 *arbitrárias é a solução geral de (3.49) em* I*.*

Demonstração. Seja $z(x)$ uma solução qualquer (3.49) no intervalo I. Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais em I, existe um ponto $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$. Considere o PVI formado por (3.49) e as condições iniciais $y(x_0) = z(x_0)$ e $y'(x_0) = z'(x_0)$, então pelo Teorema(3.6) existem constante c_1 e c_2 tais que $z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Assim para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem (3.49) em um intervalo I, precisamos encontrar duas soluções fundamentais da equação (3.49), ou seja, duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tais que em um ponto $x_0 \in I$

$$det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}.$$

∎

3.3.7.2 Dependência Linear

Dizemos que duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes (L.D) em um intervalo I, se uma das funções é um múltiplo escalar de outra, ou seja, se

$$y_1(x) = \alpha y_2(x)$$

ou

$$y_2(x) = \alpha y_1(x),$$

para todo $x \in I$. Caso contrário dizemos que elas são linearmente independentes (L.I). Se duas funções são L.D em um intervalo I, então

$$W[y_1, y_2](x) = det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = 0,$$

para todo $x \in I$. Uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.8. *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](x_0) = det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

para algum $x_0 \in I$, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes (LI) em I.

Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que duas soluções fundamentais formam uma base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea (3.49), pois elas são LI e geram um subespaço. O Wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.

Situação problema:

1. Seja b um número real não nulo. Prove que $y_1(x) = \cos(bx)$ e $y_2(x) = \text{sen}(bx)$ são soluções fundamentais da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

Solução:

Calculando as derivadas primeira e segunda de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, obtemos

$$y_1'(x) = -b\,\mathrm{sen}(bx) \Rightarrow y_1''(x) = -b^2\cos(bx)$$

e

$$y_2'(x) = b\cos(bx) \Rightarrow y_2''(x) = -b^2\,\mathrm{sen}(bx)$$

então

$$y_1'' + b^2 y_1 = -b^2\cos(bx) + b^2\cos(bx) = 0$$

e

$$y_2'' + b^2 y_2 = -b^2\,\mathrm{sen}(bx) + b^2\,\mathrm{sen}(bx) = 0.$$

Portanto temos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação diferencial $y'' + b^2 y = 0$. Além disso

$$det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos(bx) & \mathrm{sen}(bx) \\ -b\,\mathrm{sen}(bx) & b\cos(bx) \end{bmatrix} = b(\cos^2(bx) + \mathrm{sen}^2(bx)) = b$$

sendo $b \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, $y_1(x) = \cos(bx)$ e $y_2(x) = \mathrm{sen}(bx)$ são soluções fundamentais da equação $y'' + b^2 y = 0$ e a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y(x) = c_1\cos(bx) + c_2\,\mathrm{sen}(bx).$$

3.3.7.3 Fórmula de Euler

Queremos definir a função exponencial e^{rx} para os números complexos $x = a + ib$ de forma que satisfaça as propriedades

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} \tag{3.53}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \tag{3.54}$$

observamos que a função $z(x) = e^{ibx}$ é solução da equação $y'' + b^2 y = 0$. Pois pela propriedade (3.54)

$$z'(x) = ibe^{ibx}, \quad z''(x) = -b^2 e^{ibx} = -b^2 z(x)$$

e assim

$$z''(x) + b^2 z(x) = 0.$$

Assim $z(x) = e^{ibx}$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + b^2 y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = ib \end{cases}$$

sabendo que $y_1(x) = \cos(bx)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(bx)$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2 y = 0$, então pelo teorema (3.6) existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$z(x) = e^{ibx} = c_1 \cos(bx) + c_2 \operatorname{sen}(bx). \tag{3.55}$$

Vamos determinar estas constantes c_1 e c_2. Substituindo-se $x = 0$ na equação (3.55) obtemos $c_1 = 1$. Derivando a equação (3.55) em relação a x obtemos

$$ibe^{ibx} = -c_1 b \operatorname{sen}(bx) + c_2 b \cos(bx). \tag{3.56}$$

substituindo-se $x = 0$ na equação (3.56) obtemos $c_2 = i$. Assim substituindo-se $c_1 = 1$ e $c_2 = i$ já obtidos na equação (3.55), obtemos

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx).$$

Portanto, pela propriedade (3.53)

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)) \tag{3.57}$$

tomando $x = 1$ temos

$$e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)).$$

Esta equação é conhecida como fórmula de Euler.

Situação problema:

1. As equações de Euler são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0, \tag{3.58}$$

em que $b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que existem valores de r tais que $y(x) = x^r$ é uma solução da equação (3.58), além disso mostre que $y(x) = x^r$ é solução de (3.58), se, e somente se,

$$r^2 + (b - 1)r + c = 0, \tag{3.59}$$

esta equação é chamada equação indicial da equação (3.58).

Solução:

Fazendo $y(x) = x^r$, então

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}.$$

Agora substituindo os resultados encontrados, na equação (3.58), obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0 \Rightarrow (r^2 + (b-1)r + c) = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação (3.58) se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

2. Mostre que a equação indicial (3.59) tem duas soluções distintas, r_1 e r_2, então

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (3.58) e portanto

$$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

é solução geral de (3.58), para $x > 0$.

Solução:

Calculando o determinante da equação, obtemos

$$det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1-1} & r_2x^{r_2-1} \end{bmatrix}$$

$$= r_1x^{r_1-1}r_2x^{r_2-1} det \begin{bmatrix} x & x \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = (r_1 - r_2)x^{r_1+r_2} \neq 0,$$

para todo $x > 0$.

3.3.8 Equações Homogêneas - Parte II

3.3.8.1 Obtendo-se uma Segunda solução

Considere uma equação linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.60}$$

Seja $y_1(x)$ uma solução conhecida da equação acima num intervalo I onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas e tal que $y_1(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Vamos procurar uma segunda solução da equação (3.60) da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando esta expressão obtemos

$$y'(x) = vy_1' + v'y_1 \Rightarrow y''(x) = vy_1'' + v'y_1' + v' + y_1' + v''y_1 \Rightarrow y''(x) = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1.$$

Substituindo-se $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ na equação (3.60), chegamos a

$$(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) + p(x)(vy_1' + v'y_1) + q(x)(vy_1) = 0$$

então

$$vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1 + p(x)vy_1' + p(x)v'y_1 + q(x)vy_1 = 0$$

agora colocando em evidência v'', v' e v obtemos

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p(x)y_1) + v(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) = 0$$

sabendo que $y_1(x)$ é solução da equação (3.60), então $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, portanto

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0. \tag{3.61}$$

Fazendo a mudança de variável $w(x) = v'(x)$ na equação (3.61), temos agora que

$$y_1w' + w(2y_1' + p(x)y_1) = 0$$

esta é uma equação de primeira ordem separável, logo pode ser reescrita como

$$\frac{w'}{w} = -\frac{(2y_1' + p(x)y_1)}{y_1} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p(x)$$

integrando-se ambos os lados da equação obtemos

$$ln|w| = -2ln|y_1| - \int p(x)dx + c$$

utilizando as propriedades de logaritmos podemos reescrever como

$$ln|wy_1^2| = -\int p(x)dx + c$$

aplicando a exponencial para explicitarmos $w(x)$ obtemos

$$w = \frac{1}{y_1^2}(e^{-\int p(x)dx}e^c) = \frac{1}{y_1^2}(c_1e^{-\int p(x)dx})$$

($e^c = c_1$, c_1 =constante). Sendo $w(x) = v'(x)$, então

$$v(x) = \int w(x)dx = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx + c_2 \tag{3.62}$$

tomando-se $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ obtemos

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx.$$

Substituindo $v(x)$ em $y(x) = y_1(x)v(x)$ encontramos uma segunda solução da equação (3.60)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx \tag{3.63}$$

verifiquemos agora se $y_1(x)$ dada e $y_2(x)$ obtida por (3.63) são soluções da equação (3.60)

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x_0) &= det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \\ &= det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx + \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)}dx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$= e^{-\int p(x)dx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim se y_1 dada e y_2 obtida são soluções fundamentais da equação (3.60) então

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$$

é solução geral da equação (3.60).

Situação problema:

1. Mostre que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0.$$

Encontre uma função $v(x)$ tal que $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que y_1 e y_2 são soluções fundamentais.

Solução:

Substituindo-se $y_1(x) = x^3$ na equação temos que

$$2x^2y_1'' - xy_1' - 9y_1 = 2x^2(6x) - x(3x^2) - 9x^3 = 12x^2 - 3x^3 - 9x^3 = 0$$

logo, $y_1(x) = x^3$ é solução da equação. Seja $y_1(x) = x^3$. Vamos procurar uma segunda solução da equação dada da forma

$$y(x) = y_1(x)v(x) = x^3v(x).$$

Derivando esta expressão obtemos

$$y'(x) = 3x^2v + x^3v' \Rightarrow y''(x) = 6xv + 3x^2v' + 3x^2v' + x^3v'' = x^3v'' + 6x^2v' + 6xv,$$

substituindo-se $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ na equação, encontramos

$$2x^2(x^3v'' + 6x^2v' + 6xv) - x(3x^2v + x^3v') - 9(x^3v) = 0$$

então

$$2x^5v'' + 12x^4v' + 12x^3v - 3x^v - x^4v' - 9x^3v = 0$$

agora evidenciando v'', v' e v, obtemos

$$2x^5v + v'(12x^4 - x^4) + v(12x^3 - 3x^3 - 9x^3) = 0 \Rightarrow 2x^5v'' + 11x^4v' = 0$$

fazendo a mudança de variável $v'(x) = w(x)$, temos agora

$$2x^5w' + 11x^4w = 0.$$

esta é uma equação de primeira ordem separável, logo pode ser reescrita como

$$2\frac{w'}{w} = -\frac{11}{x}$$

integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$2ln|w| = -11ln|x| + c$$

utilizando as propriedades de logaritmos podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$ln|w^2x^{11}| = c$$

aplicando a exponencial para assim explicitarmos $w(x)$ chegamos a

$$w^2 = \frac{1}{x^{11}}(e^c) = \frac{c_1}{x^{11}} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{c_1}{x^{11}}}$$

($e^c = c_1$, $c_1 =$ constante)

então

$$w = \frac{\sqrt{c_1}}{x^{\frac{11}{2}}} = kx^{-\frac{11}{2}}$$

($\sqrt{c_1} = k$, $k =$ constante). Sendo $v'(x) = w(x)$, então

$$v(x) = \int w(x) = k \int x^{-\frac{11}{2}} dx + c_2 = -\frac{2}{9} x^{-\frac{9}{2}} + c_2.$$

Tomando $k = -\dfrac{2}{9}$ e $c_2 = 0$ obtemos

$$v(x) = x^{-\frac{9}{2}}$$

temos então que uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = x^3 x^{-\frac{9}{2}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

vamos verificar se $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ são soluções fundamentais da equação.

$$W[y_1, y_2](x_0) = det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x^3 & x^{-\frac{3}{2}} \\ 3x^2 & -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \end{bmatrix} = -\frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} \neq 0,$$

para todo $x \neq 0$.

3.3.8.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos estudar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.64}$$

para a, b e $c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Vamos mostrar que para esta equação existem valores constantes de r tais que $y(x) = e^{rx}$ é uma solução.

Substituindo-se $y(x) = e^{rx} \Rightarrow y'(x) = re^{rx} \Rightarrow y''(x) = r^2 e^{rx}$ na equação (3.64) obtemos

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Como $e^{rx} \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ então $y(x) = e^{rx}$ é solução de (3.64) se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{3.65}$$

que é chamada equação característica de (3.64). Como uma equação de 2° grau pode ter duas raízes reais, somente uma raiz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos chegar a três situações distintas.

A Equação Característica Tem Duas Raízes Reais

Se $\Delta = b^2 - 4a > 0$, então a equação característica de (3.64) tem duas raízes reais distintas, r_1 e r_2. Neste caso

$$y_1(x) = e^{r_1 x}$$

e

$$y_2(x) = e^{r_2 x}$$

são soluções fundamentais, pois o Wronskiano de $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ é

$$W[y_1, y_2](x_0) = det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{bmatrix}$$
$$= e^{r_1 x} e^{r_2 x} det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0,$$

para todo $x \neq 0$. Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2,

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

é solução geral de (3.64).

Situação problema:

1. Seja z um número real positivo. Determine a solução geral da equação

$$y'' - z^2 y = 0.$$

Solução:

Substituindo-se $y(x) = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2 e^{rx}$, na equação acima obtemos

$$r^2 e^{rx} - z^2 e^{rx} = 0$$

sendo $e^{rx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$r^2 - z^2 = 0$$

é a equação característica da equação diferencial inicial, que tem como raízes $r_1 = z$ e $r_2 = -z$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(x) = c_1 e^{zx} + c_2 e^{-zx}.$$

A Equação Característica Tem Somente uma Raiz Real

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a equação característica (3.65) tem somente uma raiz real $r = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso,

$$y_1(x) = e^{rx} = e^{-\frac{b}{2a}x}$$

é solução da equação diferencial (3.64). Conhecendo-se $y_1(x)$ para encontrarmos $y_2(x)$ devemos seguir como mostra-se em (3.3.8.1). Logo temos $y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$. Portanto $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = xe^{rx}$, em que $r = -\dfrac{b}{2a}$ são soluções fundamentais de (3.64), pois o seu Wronskiano é

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x_0) &= det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1+rx)e^{rx} \end{bmatrix} \\ &= e^{2rx} det \begin{bmatrix} 1 & x \\ r & (1+rx) \end{bmatrix} = e^{-\frac{b}{2a}x} \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim no caso em que a equação característica tem somente uma raiz real $r = -\dfrac{b}{2a}$,

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

é solução geral da equação (3.64).

Situação problema:

1. Determine a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Solução:

Substituindo-se $y(x) = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2 e^{rx}$, na equação acima obtemos

$$r^2 e^{rx} + 2re^{rx} + e^{rx} = 0$$

sendo $e^{rx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

é a equação característica da equação diferencial inicial, que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

A Equação Característica Tem Duas Raízes Complexas

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a equação característica (3.65) tem duas raízes complexas, que são conjugadas, ou seja, se $r_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz de (3.65) então a outra raiz é $r_2 = \alpha - i\beta$. Neste caso, pela fórmula Euler vista seção (3.3.7.3), temos

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

e

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\,\mathrm{sen}(-\beta x)) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\,\mathrm{sen}(\beta x)).$$

Pela análise feita no início dessa seção sabemos que $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ são soluções complexas da equação diferencial (3.64). Além disso, assim como r_1 e r_2 são reais, o Wronskiano

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x_0) &= det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 x} e^{r_2 x} det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)x} = -2i\beta e^{2\alpha x} \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais de (3.64). Assim no caso em que uma equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

c_1 e $c_2 \in \mathbb{C}$, é a solução geral de (3.64). Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. A solução complexa pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = c_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\,\mathrm{sen}(\beta x)) + c_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\,\mathrm{sen}(\beta x)) \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Tomando $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ em (3.66), temos a solução real $u(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$. Tomando $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$, temos a solução imaginária $v(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$.

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então $u(x)$ e $v(x)$ são soluções fundamentais de (3.64).

$$W[u,v](x) = det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\,\text{sen}bx) & e^{\alpha x}(\alpha\,\text{sen}\beta x + \beta\cos\beta x) \end{bmatrix}$$

$$= e^{\alpha x}\left(\alpha\, det \begin{bmatrix} \cos\beta x & \text{sen}\beta x \\ \cos\beta x & \text{sen}\beta x \end{bmatrix} + \beta\, det \begin{bmatrix} \cos\beta x & \text{sen}\beta x \\ -\text{sen}\beta x & \cos\beta x \end{bmatrix}\right) = \beta\alpha^{2\alpha x} \neq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + ib$ e $r_2 = \alpha - ib$,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos bx + c_2 e^{\alpha x}\,\text{sen}bx$$

é a solução geral de (3.64).

Situação problema:

1. Seja z um número real positivo. Determine a solução geral da equação

$$y'' + z^2 y = 0.$$

Solução:

Substituindo-se $y(x) = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2 e^{rx}$, na equação acima obtemos

$$r^2 e^{rx} + z^2 e^{rx} = 0$$

sendo $e^{rx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$r^2 + z^2 = 0$$

é a equação característica da equação diferencial inicial, que tem como raízes $r_1 = iz$ e $r_2 = -iz$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(x) = c_1\cos bx + c_2\,\text{sen}bx.$$

Resumo

Para resolver a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

para a, b, e $c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Encontramos a equação característica

$$ar^2 + br + c = 0.$$

a) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

em que

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

c) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos bx + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} bx,$$

em que

$$\alpha = \frac{-b}{2a},\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

3.3.9 Equações Não Homogêneas

Uma equação diferencial de segunda ordem escrita da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.67}$$

com $f(x)$ uma função não-nula, é dita não homogênea.

Teorema 3.9. *Seja $y_p(x)$ uma solução particular da equação (3.67). Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (3.67) é*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x).$$

Ou seja, a solução geral da equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, com uma solução particular da equação diferencial não homogênea, $y_p(x)$.

Demonstração. Seja $y(x)$ uma solução qualquer de (3.67) e $y_p(x)$ uma solução particular de (3.67). Vamos mostrar que $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.68}$$

$$Y''(x) + p(x)Y'(x) + q(x)Y(x) = (y(x) - y_p(x))'' + p(x)(y(x) - y_p(x))' + q(x)(y(x) - y_p(x))$$
$$= \underbrace{(y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x))}_{=f(x)} - \underbrace{(y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x))}_{=f(x)}$$
$$= f(x) - f(x) = 0.$$

Assim se $y_1(x)$ e y_2 são soluções fundamentais da equação homogênea associada (3.67), existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$Y(x) = y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

ou seja, se $y(x)$ é uma solução qualquer de (3.67) e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (3.68), então

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x). \tag{3.69}$$

Portanto para obter a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea precisamos encontrar uma solução particular e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

■

Teorema 3.10. *(Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas)*

Se $y_p^{(1)}(x)$ *é uma solução de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

e $y_p^{(2)}(x)$ *é uma solução de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

então $y_p(x) = y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x)$ *é solução de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x) = \\
& = (y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x))'' + p(x)(y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x))' + q(x)(y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x)) = \\
& = \underbrace{y_p^{(1)}(x)'' + p(x)y_p^{(1)}(x)' + q(x)y_p^{(1)}(x)}_{=f_1(x)} + \underbrace{y_p^{(2)}(x)'' + p(x)y_p^{(2)}(x)' + q(x)y_p^{(1)}(x)}_{=f_2(x)} = \\
& = f_1(x) + f_2(x),
\end{aligned}$$

pois $y_p^{(1)}(x)$ é solução da equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

e $y_p^{(2)}(x)$, da equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x).$$

■

3.3.9.1 Método de Variação dos Parâmetros

Este método funciona para qualquer equação linear de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

para qual se conheça duas soluções fundamentais $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação homogênea correspondente em um intervalo I, onde o Wronskiano $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Lembramos que neste caso a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a fórma da solução geral da equação homogênea, mas substituindo os parâmetros (constantes) c_1 e c_2 por funções a determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$, respectivamente, ou seja, da forma

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3.70}$$

derivando (3.70), obtemos

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)$$

para que possamos encontrar as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ é necessário que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{3.71}$$

logo,

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

Assim

$$y''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

substituindo-se $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ na equação obtemos

$$\begin{aligned}
&u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x) + \\
&+p(x)(u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)) + q(x)(u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)) = \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

agrupando os termos que contém $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ obtemos a equação diferencial de primeira ordem para $u_1(x)$ e $u_2(x)$

$$\begin{aligned}
&u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_1(x)\underbrace{(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x))}_{=0} \\
&u_2(x)\underbrace{(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x))}_{=0} = f(x)
\end{aligned}$$

portanto $u_1(x)$ e $u_2(x)$ satisfazem além da equação (3.71) a equação

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{3.72}$$

Assim juntando as equações (3.71) e (3.72) obtemos o sistema de equações lineares para $u_(' x)$ e $u_2'(x)$

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} u_1'(X) \\ u_2'(X) \end{bmatrix} \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

que tem solução

$$\begin{bmatrix} u_1'(X) \\ u_2'(X) \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} B$$

$$= \frac{1}{W[y_1,y_2](x)} \begin{bmatrix} y_2'(X) & -y_2(X) \\ -y_1'(X) & y_1(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1,y_2](x)} \begin{bmatrix} -y_2(X)f(x) \\ y_1(X)f(x) \end{bmatrix}$$

obtemos assim equações diferenciais de primeira ordem

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

que podem ser resolvidas integrando-se

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx$$

substituindo-se $u_1(x)$ e $u_2(x)$ na equação (3.70) obtemos uma solução particular

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

Situação problema:

1. Encontre uma solução particular para a equação abaixo

$$y'' + 4y = 3\csc x.$$

Solução:

Inicialmente devemos encontrar as soluções da equação homogênea correspondente: $y'' + 4y = 0$. Temos a equação característica

$$r^2 + 4 = 0$$

então

$$r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow r = \pm 2i$$

logo,

$$y_1(x) = c_1 \cos(2x)$$

$$y_2(x) = c_2 \operatorname{sen}(2x)$$

são as soluções da equação homogênea correspondente, daí

$$y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$$

é a solução geral da equação homogênea correspondente. Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a fórmula da geral da equação homogênea, mas substituindo os parâmetros (constantes) c_1 e c_2 por funções a determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$, respectivamente, ou seja, da forma

$$y_p(x) = u_1(x) \cos(2x) + u_2(x) \operatorname{sen}(2x)$$

derivando $y_p(x)$, obtemos

$$y_p' = u_1' \cos(2x) - 2u_1 \operatorname{sen}(2x) + u_2' \operatorname{sen}(2x) + 2u_2 \cos(2x)$$

queremos que

$$u_1' \cos(2x) + u_2' \operatorname{sen}(2x) = 0 \Rightarrow u_2' = -\frac{u_1' \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$$

logo, ficamos com

$$y_p'(x) = -2u_1 \operatorname{sen}(2x) + 2u_2 \cos(2x)$$

então

$$y_p''(x) = -2u_1' \operatorname{sen}(2x) - 4u_1 \cos(2x) + 2u_2' \cos(2x) - 4u_2 \operatorname{sen}(2x)$$

substituindo y_p'', y_p' e y_p na equação inicial obtemos

$$-2u_1' \operatorname{sen}(2x) - 4u_1 \cos(2x) + 2u_2' \cos(2x) - 4u_2 \operatorname{sen}(2x) + 4(u_1(x) \cos(2x) +$$
$$+ u_2(x) \operatorname{sen}(2x)) = 3 \csc x$$

então

$$-2u_1' \operatorname{sen}(2x) + 2u_2' \cos(2x) = 3 \csc x$$

substituindo o valor encontrado para u_2' na equação acima, obtemos

$$-2u_1' \operatorname{sen}(2x) - \frac{u_1' \cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} = 3 \csc x$$

efetuando os cálculos necessários chegamos a

$$u_1' = -3 \cos x \Rightarrow u_1 = -3 \operatorname{sen} x + c$$

substituindo agora o valor encontrado de u_1' em u_2', encontramos

$$u_2' = 3\cos x \frac{\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}$$

efetuando os cálculos necessários chegamos a

$$u_2' = \frac{3}{2}\csc x - 3\,\text{sen}x \Rightarrow u_2 = -\frac{3}{2}ln|\csc x - \cot x| + \cos x + c'$$

portanto

$$y_p(x) = (-3\,\text{sen}x + c)\cos(2x) + \left(-\frac{3}{2}ln|\csc x - \cot x| + \cos x + c'\right)\text{sen}(2x)$$

é solução particular da equação não homogênea.

3.3.9.2 Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos estudar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.73}$$

em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$. Este método funciona quando a função $f(x)$ tem uma das seguintes formas:

1. $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, em que $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma
$$y_p(x) = x^s(A_0 + \cdots + A_n x^n),$$
em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \cdots, A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(x)$ na equação (3.73).

Situação problema:

a) Encontre a solução geral da equação não homogênea abaixo:

$$y'' + y' = x^2 + 3.$$

Solução:

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + y' = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + r = 0$$

que tem como raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea associada $y'' + y' = 0$ é

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Agora vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^1(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$$

o valor de $s = 1$ pois para $s = 0$, a parcela A_0 é solução da equação homogênea ($c_2 = 0$ e $c_1 = 0$).

$$y_p'(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 \Rightarrow y'' = 2A_1 + 6A_2 x$$

substituindo-se $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação $y'' + y' = x^2 + 3$, obtemos

$$2A_1 + 6A_2 x + A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 = (A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)x + 3A_2 x^2 = x^2 + 3$$

comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_0 & + & 2A_1 & & & = & 3 \\ & & 2A_1 & + & 6A_2 & = & 0 \\ & & & & 3A_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $A_0 = 5$, $A_1 = -1$ e $A_2 = \frac{1}{3}$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = 5x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + 4x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

2. $f(x) = (a_0 + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha x}$, em que $a_0, \cdots, a_n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s(A_0 + \cdots + A_n x^n)e^{\alpha x},$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, ..., A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(x)$ na equação (3.73).

Situação problema:

a) Encontre a solução geral da equação não homogênea abaixo:

$$y'' + 2y' + 4y = 3e^{-x}.$$

Solução:

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea associada $y'' + 2y' + y = 0$ é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}.$$

Agora vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^2(A_0 + A_1x)e^{-x} = (A_0x^2 + A_1x^3)e^{-x}$$

o valor de $s = 2$ pois para $s = 0$, a parcela A_0e^{-x} e A_1xe^{-x} são soluções da equação homogênea ($c_1 = A_0, c_2 = 0, c_1 = 0$ e $c - 2 = A_1$) e para $s = 1$ a parcela A_0xe^{-x} é solução da equação homogênea ($c_1 = 0$ e $c_2 = 0$).

$$\begin{aligned} &y_p'(x) = (2A_0x + (3A_1 - A_0)x^2 - A_1x^3)e^{-x} \\ &\Rightarrow y'' = (2A_0 + (6A_1 - 4A_0)x + (A_0 - 6A_1)x^2 + A_1x^3)e^{-x}. \end{aligned}$$

substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$, obtemos

$$\begin{aligned} &(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)x + (A_0 - 6A_1)x^2 + A_1x^3)e^{-x}+ \\ &+2((2A_0x + (3A_1 - A_0)x^2 - A_1x^3)e^{-x}) \\ &+(A_0x^2 + A_1x^3)e^{-x} = 3e^{-x} \end{aligned}$$

simplificando o primeiro membro obtemos

$$(2A_0 + 6A_1x)e^{-x} = 3e^{-x} \Rightarrow 2A_0 + 6A_1x = 3$$

comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2A_0 & = 3 \\ \quad 2A_1 & = 0 \end{cases}$$

que tem solução $A_0 = \dfrac{3}{2}$, $A_1 = 0$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2e^{-x}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{3}{2}x^2e^{-x}.$$

3. $f(x) = (a_0 + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $f(x) = (a_0 + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$, em que $a_0, \cdots, a_n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s[(A_0 + \cdots + A_nx^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (B_0 + \cdots + B_nx^n)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)],$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, ..., A_n$, $B_0, ..., B_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(x)$ na equação (3.73).

Situação problema:

a) Encontre a solução geral da equação não homogênea abaixo:

$$y'' + 2y' + 2y = 3e^x\operatorname{sen}(x).$$

Solução:

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Assim a solução geral da equação homogênea associada $y'' + 2y' + 2y = 0$ é

$$y(x) = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\operatorname{sen}(x).$$

Agora vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^0(Ae^x\cos(x) + Be^x\,\mathrm{sen}(x)) = Ae^x\cos(x) + Be^x\,\mathrm{sen}(x)$$

o valor de $s = 0$ pois nenhuma parcela de $y_p(x)$ é solução da equação homogênea.

$y_p'(x) = A(e^x\cos(x) - e^x\,\mathrm{sen}(x)) + B(e^x\cos(x) + e^x\,\mathrm{sen}(x)) = (A+B)e^x\cos(x)+$
$+(B-A)e^x\,\mathrm{sen}(x) \Rightarrow y'' = 2Be^x\cos(x) - 2Ae^x\,\mathrm{sen}(x).$

substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}&2Be^x\cos x - 2Ae^x\,\mathrm{sen}x + 2((A+B)e^x\cos x + (B-A)e^x\,\mathrm{sen}x)+\\&+2(Ae^x\cos x + Be^x\,\mathrm{sen}x) = 3e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)\end{aligned}$$

simplificando o primeiro membro obtemos

$$(4A+4B)e^x\cos x + (-4A+4B)e^x\,\mathrm{sen}x = 3e^x\,\mathrm{sen}x$$

substituindo-se $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ -4A + 4B = 3 \end{cases}$$

que tem solução $A = -\dfrac{3}{8}$, $B = \dfrac{3}{8}$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = -\frac{3}{8}e^x\cos x + \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}x$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = c_1e^x\cos x + c_2xe^x\,\mathrm{sen}x - \frac{3}{8}e^x\cos x + \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}x.$$

3.3.10 Aplicações De Equações Diferenciais Ordinárias De Segunda Ordem

3.3.10.1 Circuitos Elétricos

Considere um circuito formado por um capacitor, um resistor e um indutor ligados em série a um gerador. A queda de potencial num resistor de resistência R é igual a RI, num capacitor de capacitância C é igual a $\dfrac{Q}{C}$ e em um indutor de indutância L é igual a $L\dfrac{dI}{dx}$. Pela segunda lei de Kirchhoff (Lei das malhas) a soma das forças eletromotrizes (neste caso apenas V(x)) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso RI na resistência, $\dfrac{Q}{C}$ no capacitor e $L\dfrac{dI}{dx}$ no indutor), ou seja,

$$L\frac{dI}{dx} + RI + \frac{1}{C}Q = V(x) \tag{3.74}$$

substituindo-se $I = \dfrac{dQ}{dx}$ obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para a carga elétrica no capacitor.

$$L\frac{d^2Q}{dx^2} + R\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{C}Q = V(x) \tag{3.75}$$

com condições iniciais $Q(0) = Q_0$ e $Q'(0) = I_0$. Uma equação diferencial de segunda ordem para a corrente elétrica no circuito pode ser obtida derivando-se a equação (3.74), ou seja,

$$L\frac{d^2I}{dx^2} + R\frac{dI}{dx} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dx} = \frac{dV}{dx}(x)$$

substituindo-se $I = \dfrac{dQ}{dx}$

$$L\frac{d^2I}{dx^2} + R\frac{dI}{dx} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dx}(x)$$

com condições iniciais $I(0) = I_0$ e $I'(0) = \dfrac{V(0) - RI_0 - Q_0/C}{L}$.

Situação Problema

1. Um circuito possui um capacitor de $0,625 \times 10^{-1}F$, um resistor de 20Ω e um indutor de $4H$, em série. O capacitor encontra-se descarregado. No instante $x = 0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $8e^{-\frac{x}{4}}V$, e o circuito é fechado. Determinar a carga no capacitor em qualquer instante $x > 0$.

   Solução:

   A equação diferencial para a carga no capacitor é

   $$4Q'' + 20Q' + \frac{1}{0,625 \times 10^{-1}}Q = 10e^{-\frac{x}{4}}.$$

   Dividindo-se por 4 obtemos a equação

   $$Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-\frac{x}{4}}.$$

   Que tem como equação característica

   $$r^2 + 5r + 4 = 0$$

cujas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$. Assim a solução geral da equação homogênea é

$$Q(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}.$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma $Q_p(x) = A_0 e^{-\frac{x}{4}}$, temos que

$$Q'(x) = -\frac{1}{4} A_0 e^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow Q''(x) = \frac{1}{16} A_0 e^{-\frac{x}{4}}$$

substituindo-se $Q_p(x)$, $Q_p'(x)$ e $Q_p''(x)$ obtemos

$$\frac{1}{16} A_0 e^{-\frac{x}{4}} - \frac{5}{4} A_0 e^{-\frac{x}{4}} + 4 A_0 e^{-\frac{x}{4}} = 2 e^{-\frac{x}{4}}$$

sendo $e^{-\frac{x}{4}} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos dividir a equação por $e^{-\frac{x}{4}}$, obtendo

$$\frac{45}{16} A_0 = 2 \Rightarrow A_0 = \frac{32}{45}.$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é

$$Q(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + \frac{32}{45} e^{-\frac{x}{4}}.$$

Derivando a solução geral chegamos a

$$Q'(x) = -c_1 e^{-x} - 4 c_2 e^{-4x} - \frac{8}{45} e^{-\dfrac{x}{4}}$$

substituindo-se $x = 0$, $Q = 0$, e $Q' = 0$ obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{32}{45} = 0 \\ -c_1 - 4c_2 - \dfrac{8}{45} = 0 \end{cases}, \begin{cases} c_1 = -\dfrac{8}{9} \\ c_2 = \dfrac{8}{45} \end{cases}$$

portanto a solução do PVI formado pela equação diferencial e $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$ é

$$Q(x) = -\frac{8}{9} e^{-x} + \frac{8}{45} e^{-4x} + \frac{32}{45} e^{-\frac{x}{4}}.$$

Observe que

$$\lim_{x \to \infty} Q(x) = 0.$$

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS - MODELOS QUALITATIVOS

4.1 NOÇÃO DE FLUXO

Agora iremos considerar o caso particular das Equações Diferenciais Ordinárias que não dependem explicitamente do tempo, que conduzem de forma natural ao conceito de fluxo.

Definição 4.1. Uma equação autônoma toma a forma

$$x' = f(x),$$

onde $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Introduzimos de seguida a noção de fluxo e mostramos que uma larga classe de equações autônomas dá origem a fluxos.

Definição 4.2. Chamamos fluxo a qualquer família de transformações $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_0 = Id$ e

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \,\text{para}\, t, s \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Um modelo simples é o seguinte

Modelo 4.1. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, a família de transformações $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\varphi_t(x) = x + ty, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

é um fluxo, como podemos comprovar facilmente.

Mostraremos agora que uma larga classe de equações autônomas dá origem a fluxos

Proposição 4.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e cada problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' &= f(x), \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

tem uma solução única $x(t, x_0)$ que está definida para $t \in \mathbb{R}$, então a família de transformação definidas por

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \tag{4.3}$$

é um fluxo.

Demonstração. Dado $s \in \mathbb{R}$, consideramos a função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$y(t) = x(t + s, x_0).$$

Notamos que $y(0) = x(s, x_0)$ e temos

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t))$$

para $t \in \mathbb{R}$. Assim, a função $y(t)$ é também uma solução. Como por hipótese cada problema de valor inicial (4.2) tem solução única, obtemos

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0)),$$

ou seja,

$$x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0)) \tag{4.4}$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Usando as transformações φ_t em (4.3), podemos escrever (4.4) na forma

$$\varphi_{t+s}(x_0) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0).$$

Por outro lado, temos $\varphi_0(x_0) = x(0, x_0) = x_0$, pela definição da solução $x(t, x_0)$. Concluímos assim que a família de transformações φ_t é um fluxo. ■

4.1.1 Propriedades adicionais

Estudamos nesta secção várias propriedades adicionais das soluções de uma Equação Diferencial Ordinária, designadamente a forma como as soluções dependem das condições iniciais e o que sucede quando uma solução não pode prolongar-se a um intervalo aberto maior que aquele onde está definida.

4.1.1.1 Dependência Lipschitz nas condições iniciais

Em seguida descreveremos a forma como as soluções dependem das condições iniciais para funções contínuas f que são localmente Lipschitz.

Estabelecemos primeiro o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 4.2. *(Lema de Gronwall) Sejam* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas com* $v \geq 0$ *e seja* $c \in \mathbb{R}$. *Se*

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds \tag{4.5}$$

para qualquer $t \in [a, b]$, *então*

$$u(t) \leq c exp \int_a^t v(s)ds$$

para qualquer $t \in [a, b]$.

Demonstração. Consideramos as funções

$$R(t) = \int_a^t u(s)v(s)ds$$

e

$$V(t) = \int_a^t v(s)ds.$$

Notamos que $R(a) = 0$ e que por hipótese temos

$$R'(t) = u(t)v(t) \leq (c + R(t))v(t).$$

Logo,

$$R'(t) - v(t)R(t) \leq cv(t)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-V(t)}R(t)) &= e^{-V(t)}(R'(t) - v(t)R(t)) \\ &\leq cv(t)e^{-V(t)}. \end{aligned}$$

Como $R(a) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} e^{-V(t)}R(t) &\leq \int_a^t cv(\tau)e^{-V(\tau)}d\tau \\ &= -ce^{-V(\tau)}\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = c(1-e^{-V(t)}) \end{aligned}$$

e portanto

$$R(t) \leq ce^{V(t)} - c.$$

Resulta então de (4.5) que

$$u(t) \leq c + R(t) \leq ce^{V(t)}$$

para qualquer $t \in [a, b]$, como queríamos mostrar.

∎

Teorema 4.1. *Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e localmente Lipschitz em x num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dado $(t_0,\ x_1) \in D$, existem constantes $\beta, C > 0$ e um intervalo aberto I contendo t_0 tais que para cada $x_2 \in \mathbb{R}^n$ com $||x_1 - x_2|| < \beta$ as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente dos problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_1 \end{cases} \quad e \begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_2 \end{cases} \tag{4.6}$$

satisfazem

$$||x_1(t) - x_2(t)|| \leq C||x_1 - x_2|| \,\text{para}\, t \in I. \tag{4.7}$$

Demonstração. Pelo teorema de Picard - Lindelof, os problemas de valor inicial em (4.6) têm soluções únicas, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em algum intervalo aberto I contendo t_0, (que podemos supor o mesmo). Além disso, temos

$$x_2(t) = x_1 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)ds) \tag{4.8}$$

para $t \in I$ e $i = 1, 2$. Para simplicidade da exposição, consideramos em seguida apenas o caso em que $t \geq t_0$. Podemos considerar de forma análoga o caso em que $t \leq t_0$. Definimos uma função $y : I \to \mathbb{R}^n$ por

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

Para $t \geq t_0$, resulta de (4.8) que

$$\begin{array}{rcl} |y(t)| & \leq & |x_1 - x_2| \quad + \quad \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \\ & \leq & |x_1 - x_2| \quad + \quad L \int_{T_0}^{t} |y(s)| ds \end{array}$$

para alguma constante L (uma vez que f é localmente Lipschitz em x). Tomando

$$u(t) = |y(t)|, v(t) = Lec = |x_1 - x_2|,$$

resulta no Lema de Gronwall (Proposição 4.2) que

$$u(t) \leq cexp \int_{t_0}^{t} v(s) ds = |x_1 - x_2| e^{L(t-t_0)}$$

para $t \in I \cap [t_0, +\infty[$, o que estabelece a propriedade (4.7) para estes valores de t. ■

4.1.1.2 Dependência C^1 nas condições iniciais

Consideremos em seguida funções de classe C^1 e mostramos que neste caso as soluções são de classe C^1 nas condições iniciais.

Proposição 4.3. *Se uma sucessão $f_n : U \to \mathbb{R}^n$ de funções diferenciais num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é (pontualmente) convergente e a sucessão df_n das suas derivadas é uniformemente convergente, então o limite da sucessão f_n é diferenciável em U e a sua derivada é o limite da sucessão df_n em U.*

Demonstração. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to M_n$ respectivamente os limites das sucessões f_n e df_n, onde M_n é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Observamos primeiro que dados $x, h \in \mathbb{R}^n$ tais que o seguimento entre x e $x + h$ está contido em U, temos

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_n(x+th) dt = \int_0^1 d_{x+th} f_n h dt \tag{4.9}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como a secessão df_n converge uniformemente, dado $\delta > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$sup\{||d_y f_n - d_y f_m|| : y \in U\} < \delta$$

para $m, n > p$. Resulta então de (4.9) que

$$\begin{array}{rcl} ||(f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_m(x+h) - f_m(x))|| & = & || \int_0^1 (d_{x+th}f_n - d_{x+th}f_m)hdt|| \\ & \leq & \int_0^1 (d_{x+th}f_n - d_{x+th}f_m)||dt||h|| \\ & \leq & \delta||h|| \end{array}$$

para $m, n > p$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$||(f_n(x+h) - f_n(x)) - (f(x+h) - f(x))|| \leq \delta||h|| \tag{4.10}$$

para qualquer $n > p$.

Agora iremos mostrar que f é diferenciável. Dados $x, h \in \mathbb{R}^n$ como anteriormente e $\varepsilon \in (0, 1)$, temos

$$\begin{array}{rcl} \left|\left|\dfrac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} - g(x)h\right|\right| & \leq & \left|\left|\dfrac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} - \dfrac{f_n(x+\varepsilon h) - f_n(x)}{\varepsilon}\right|\right| \\ & + & \left|\left|\dfrac{f_n(x+\varepsilon h) - f_n(x)}{\varepsilon} - d_x f_n h\right|\right| \\ & + & ||d_x f_n h - g(x)||. \end{array} \tag{4.11}$$

Notamos agora que como g é o limite da sucessão df_n, dado $\delta > o$ exite $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$sup\{||d_y f_n - g(y)|| : y \in U\} < \delta \tag{4.12}$$

para $n > q$. Tomamos então $n > max\{p, q\}$ e observemos que como f_n é diferenciável, para ε suficientemente pequeno temos

$$\left|\left|\frac{f_n(x+\varepsilon h) - f_n(x)}{\varepsilon} - d_x f_n h\right|\right| < \delta||h|| \tag{4.13}$$

Resulta de (4.11) usando (4.10), (4.12) e (4.13) que

$$\left|\left|\frac{f_n(x+\varepsilon h) - f_n(x)}{\varepsilon} - g(x)h\right|\right| \leq 3\delta||h||.$$

Isto mostra que a função f é diferenciável em x, com $d_x f h = g(x)h$ para cada $h \in \mathbb{R}^n$. Portanto $df = g$. ■

Estabelecemos agora a dependência C^1 das soluções nas condições iniciais.

Teorema 4.2. *Se $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(x_0, t_0) \in D$ a função $(t, x) \longmapsto \varphi(t, x)$,.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em passos.

Passo 1. Construção de um espaço métrico. Dado $t_0, x_0 \in D$, consideramos constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$S := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0, 2\beta) \subset D}. \tag{4.14}$$

Notamos que o conjunto S é compacto. Como f é contínua, temos então

$$K := max||f(t, x)|| : (t, x) \in S < +\infty$$

(uma vez que as funções contínuas com valores em $\mathbb{R}$ têm máximo em cada compacto). Se necessário, tomamos $\alpha > 0$ mais pequeno tal que $\alpha K \leq \beta$ e consideramos o conjunto X das funções contínuas $\varphi : U \to B(x_0, 2\beta)$ no aberto

$$U =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(x_0, \beta), \tag{4.15}$$

com a distância

$$d(\varphi, \psi) = sup\{||\varphi(t, x) - \psi(t, x)|| : (t, x) \in U\}.$$

Utilizando o teorema de Pircard-Lindelof é possível verificar facilmente que X é um espaço métrico completo.

Passo 2. Construção de uma contracção em X. Definimos agora uma transformação T em X por

$$T(\varphi)(t, x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, x))ds.$$

Mostramos primeiro que $T(\varphi)$ é uma função contínua. Claramente, $t \longmapsto T(\varphi)(t, x)$ é contínua para cada $x \in B(x_0, \beta)$. Dado $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, mostramos agora que a função $x \longmapsto T(\varphi)(t, x)$ é também contínua. Dados $x, y \in B(x_0, \beta)$, temos

$$\begin{aligned} ||T(\varphi)(t,x) - T(\varphi)(t,y)|| &\leq ||x-y|| + \left| \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi(s,x)) - f(s,\varphi(s,y))||ds \right| \\ &\leq ||x-y|| + L\left| \int_{t_0}^{t} ||\varphi(s,x) - \varphi(s,y)||ds \right|, \end{aligned} \tag{4.16}$$

para alguma constante L. De facto, a função f é localmente Lipschitz em x, pelo que podemos tomar a constante L associada ao compacto S em (4.14). Notamos agora que cada função $\varepsilon \in X$ é uniformemente contínua no conjunto

$$\overline{U} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0, \beta)},$$

uma vez que φ é contínua e $\overline{U}$ é compacto. Logo, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$||\varphi(s,x) - \varphi(s,y)|| < \delta$$

para $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e $||x - y|| < \varepsilon$. Sem perda de generalidade podemos tomar $\varepsilon < \delta$. Resulta então de (4.16) que

$$||T(\varphi)(t,x) - T(\varphi)(t,y)|| < \varepsilon + L|t - t_0|\delta < \delta(1 + L\alpha)$$

sempre que $||x - y|| < \varepsilon$, o que mostra que a função $x \longmapsto T(\varphi)(t,x)$ é contínua. Por outro lado,

$$\begin{aligned} ||T(\varphi)(t,x) - x_0|| &\leq ||x - x_0|| + \left| \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi(s,x))||ds \right| \\ &\leq ||x - x_0|| + \alpha K < \beta + \beta = 2\beta \end{aligned}$$

e portanto $T(X) \subset X$. Verificamos de seguida que T é uma contracção. De fato

$$\begin{aligned} ||T(\varphi)(t,x) - T(\psi)(t,x)|| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi(s,x)) - f(s,\psi(s,x))||ds \right| \\ &\leq L\alpha d(\varphi,\psi), \end{aligned} \tag{4.17}$$

com a mesma constante L que anteriormente. Isto mostra que

$$d(T(\varphi), T(\psi)) \leq L\alpha d(\varphi, \psi).$$

Para α suficientemente pequeno temos $L\alpha < 1$, além de $\alpha K \leq \beta$, e portanto T é uma contracção. Concluímos que T tem um e um só ponto fixo $\varphi_0 \in X$, que satisfaz portanto a identidade

$$\varphi](t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,x))ds \tag{4.18}$$

para $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ e $x \in B(x_0, \beta)$. Resulta de (4.18) que a função $t \longmapsto \varphi(t, x_0)$ é de classe C^1. Resta então mostrar que φ_0 é de classe C^1 em x.

Passo 3. Construção de uma contracção em fibras. Seja M_n o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Seja ainda Y o conjunto das funções contínuas $\Phi : U \to M_n$, onde U é o aberto em (4.15), tais que

$$sup\{||\Phi(t,x)|| : (t,x) \in U\} < +\infty.$$

Y é uma espaço métrico completo com a distância

$$d(\Phi, \Psi) = sup\{|\Phi(t,x) - \Psi(t,x)| : (t,x) \in U\}.$$

Definimos agora uma transformação A em $X \times Y$ por

$$A(\varphi, \Phi)(t,x) = Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s,x))\Phi(s,x)ds$$

onde Id é a matriz identidade. Consideramos também a transformação S, isto é

$$S(\varphi, \Phi) = (T(\varphi), A(\varphi, \Phi)).$$

Verificamos de seguida que S é contínua. Observamos primeiro que por (4.17) a transformação T é contínua. Além disso,

$$|A(\varphi, \Phi)(t,x) - A(\psi, \Psi)(t,x)|$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,x))\Phi(s,x)ds - \int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,\psi(s,x))\Psi(s,x)ds\right| \\
\leq & \quad \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,x))[\Phi(s,x)ds - \Psi(s,x)]ds\right| \\
+ & \quad \left|\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,\psi(s,x))\right)\Psi(s,x)ds\right| \\
\leq & \quad \alpha M d(\Phi,\Psi) + \left|\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,\psi(s,x))\right| - |\Psi(s,x)|ds\right|
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

onde

$$M := max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x)\right| : (t,x) \in \overline{U} < +\infty.\right\}$$

Fazendo $\varphi = \psi$ obtemos

$$d(A(\varphi,\Phi), A(\varphi,\Psi)) \leq \alpha M d(\Phi,\Psi) \tag{4.20}$$

e portanto a função $\Phi \longmapsto A(\varphi,\Phi)$ é contínua para cada $\varphi \in X$. Notamos agora que, sendo contínua, a função $\partial f/\partial x$ é uniformemente contínua no compacto $\overline{U}$. Logo, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\right|\delta$$

para $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e $|x - y| < \varepsilon$. Assim, se $d(\varphi,\psi) < \varepsilon$, então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,\psi(s,x))\right| < \delta$$

para $s \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ e $x \in B(x_0,\beta)$. Resulta de (4.19) com $\Phi = \Psi$ que

$$||A(\varphi,\Phi)(t,x) - A(\psi,\Phi)(t,x)|| \leq \alpha\delta sup\{||\Phi(t,x)|| : (t,x) \in U\}$$

e portanto

$$d(A(\varphi,\Phi), A(\psi,\Phi)) \leq \alpha\delta sup\{||\Phi(t,x)|| : (t,x) \in U\}$$

sempre que $d(\varphi,\psi) < \varepsilon$. Isto mostra que a função $\varphi \longmapsto A(\varphi,\Phi)$ é contínua para cada $\Phi \in Y$. Concluímos assim que $A(X \times Y) \subset Y$. Para α suficientemente pequeno temos

$\alpha M < 1$, pelo que resulta de (4.20) que a transformação contínua S é uma contracção em fibras.

Passo 4. Convergência uniforme e regularidade C^1. Pelo Teorema de contracção em fibras , dado φ, Φ, a sucessão $S^n(\varphi, \Phi)$ converge para (φ_0, Φ_0) no espaço métrico completo Y. Por outras palavras, a sucessão de funções $S^n(\varphi, \Phi)$ converge uniformemente para a função contínua (φ_0, Φ_0) no aberto U quando $u \to \infty$.

Uma vez que a função Φ_0 é contínua, se mostrarmos que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(t, x) = \Phi_0(t, x), \tag{4.21}$$

concluímos que φ é de classe C^1 em x e portanto é de classe C^1. Para o efeito, consideramos as funções φ_1 e Φ_1 dadas por $\varphi_1(t, x) = x$ e $\Phi_1 = (t, x) = Id$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o par de funções

$$(\varphi_n, \Phi_n) = S^{n-1}(\varphi_1, \Phi_1),$$

que podemos obter recursivamente por

$$\varphi_{n+1}(t, x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s, x))ds \tag{4.22}$$

e

$$\Phi_{n+1}(t, x) = Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s, x))\Phi_n(s, x)ds. \tag{4.23}$$

Podemos verificar por indução que as funções φ_n são de classe C^1 em x para cada $n \in \mathbb{N}$, com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s, x))ds \right) \\ &= Id \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s, x))\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(s, x)ds \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para o efeito, basta observar que se φ_n é de classe C^1 em x, então a função $(s, x) \longmapsto f(s, \varphi_n(s, x))$ é também de classe C^1, pelo que podemos usar (4.22) e a regra de Leibniz para obter a diferenciabilidade de φ_{n+1} e identidade (4.24), de onde resulta que φ_{n+1} é de classe C^1. Mostraremos agora que

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(t,x) = \Phi(t,x) \tag{4.25}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) = Id = \Phi(t,x).$$

No sentido de proceder por indução, assumimos que (4.25) é satisfeita para um dado n. Resulta então de (4.24) e (4.23) que

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x}(t,x) = Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s,x))\Phi(s,x)ds = \Phi_{n+1}(t,x),$$

como queríamos provar.

Dado $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, consideramos a sucessão de funções $f_n(x) = \varphi_n(t,x)$. Notamos que por (4.25) temos $d_x f_n = \Phi_n(t,x)$. Por outro lado, como já observamos anteriormente, telo Teorema de contracção em fibras as sucessões f_n e df_n convergem uniformemente respectivamente para $\varphi_0(t,\cdot)$ e $\Phi(T,\cdot)$. Resulta então que a derivada $(\partial\varphi_0/\partial x)(t,x)$ existe e satisfaz(4.22), como queríamos mostrar.

■

5 CONCLUSÃO

Para iniciar nossas considerações finais, somos levados a retomar o objetivo da nossa pesquisa, qual seja, apresentar um estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) por meio da Modelagem Matemática, tendo em vista, discutir alguns modelos e situações-problema que possam proporcionar uma aprendizagem significativa aos estudantes do curso de licenciatura em matemática. Esperamos que os estudos aqui apresentados possam contribuir com a ampliação dos conhecimentos dos alunos do curso de licenciatura em Matemática, pois aqui não focamos apenas nos conteúdos vistos durante o curso da graduação, mas também em tópicos inovadores como por exemplo o estudo da Teoria qualitativa e os conceitos essenciais da teoria das EDOs analisados por Jorge Sotomayor. Ao desenvolver as Equações Diferenciais Ordinárias e seus modelos e aplicações como mostra na Apêndice deste trabalho, entendemos que auxiliamos os alunos do curso de licenciatura em Matemática a prosperar na perspectiva da Modelagem Matemática, tornando menos difícil o aprendizado das Equações Diferenciais Ordinárias, e assim sobrando um pouco mais de tempo para que dedique a compreensão dos fenômenos que nos cercam e que se deseja entender e modelar. Este trabalho foi de grande importância, em razão de ter proporcionado a oportunidade de desenvolver um estudo acerca de determinado tema que traz inquietações a acadêmica do curso de licenciatura em Matemática desde o seu primeiro contato com a Modelagem Matemática que se tornou mais evidente após o conhecimento de aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias. A conclusão deste trabalho de pesquisa pode significar o ponto de partida para outras investigações, com outras perspectivas, com outros desdobramentos e aplicações e assim gerando novos caminhos de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.; ROCHA, A. P.; MARTINS, D. Papel da matemática (ou de modelos matemáticos) em ambientes de modelagem: a proposta de rafael. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 5–23, 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2013.

BERTONE, A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. **Modelagem Matemática**. Uberlândia: UFU, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

BRAZ, B.; KATO, L. O sucesso de uma atividade de modelagem matemática, segundo as diferentes formas de participação dos alunos. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 77–108, 2014.

CHAVES, M. I. Repercussões de experiências com modelagem matemática em ações docentes. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 24–45, 2014.

COSTA, F. Ensino matemática por meio da modelagem matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 3, n. 1, p. 58–69, 2016.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

HERMINIO, M. H. G.; BORBA, M. C. A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, n. 1, p. 111–127, 2010.

KRIPKA, R. et al. Mapeamento do uso de tecnologias e de modelagem matemática no ensino. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 109–134, 2014.

LITOLDO, B.; LAZARI, H. Uma análise do uso da criptografia nos livros didáticos de matemática do ensino médio. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 135–156, 2014.

LOPES, A. Modelagem matemática e equações diferenciais: um mapeamento das pesquisas em educação matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1–25, 2021.

MADRUGA, Z. E. F.; LIMA, V. M. R. Aprender com modelagem: Relações entre modelagem (matemática) e processos criativos. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 12, n. 2, p. 241–266, 2019.

MEYER, J.; CALDEIRA, A.; MALHEIROS, A. P. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

SOARES, D.; SOUTO, D. Tensões no processo de análise de modelos em um curso de cálculo diferencial e integral. **Revista de Matemática, Ensino e Ciências**, n. 17, p. 46–76, 2014.

SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

STOCHIERO, A. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Belo Horizonte: PUC - MG, 2007.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson, 2001.