UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CAMPUS – VII PATOS-PB
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Geovani Gomes de Sousa

PROGRESSÔES E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Patos - PB

2022

Geovani Gomes de Sousa

PROGRESSÔES E MATEMÀTICA FINANCEIRA

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial a obtenção do título de graduado no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, *Campus* VII – Patos.

Orientador: José Ginaldo de Souza Farias.

Patos – PB

2022

S725p Sousa, Geovani Gomes de.
Progressões e matemática financeira [manuscrito] / Geovani Gomes de Sousa. - 2022.
39 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Progressão aritmética . 2. Progressão geométrica . 3. Sequência númerica . 4. Capitalização simples e composta. I. Título

21. ed. CDD 513.4

Elaborada por Edson M. Almeida - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

GEOVANI GOMES DE SOUSA

PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 26/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Me. Geovane de Sousa Ferreira Júnior
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho de conclusão de curso primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, dedico também aos meus pais Jose Bertino de Sousa e Dalvani Xavier Gomes, que de forma grandiosa me ensinaram a viver e proporcionaram a realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida e proteção, pela sua força e presença constante, e por me guiar à conclusão de mais uma preciosa etapa da minha vida, não sei o que seria de mim sem a fé que tenho em ti;

Aos docentes da UEPB Campus VII, em especial ao Professor José Ginaldo, que desde o primeiro dia de orientação mostrou sempre estar determinado a me ajudar, sem esquecer dos dias de professor;

Aos meus colegas que sempre me motivaram e estiveram sempre do meu lado, como também a todos que contribuíram direto ou indiretamente; muito obrigado

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. (Paulo Freire)

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos um estudo introdutório sobre sequência numérica, mais especificamente sobre as progressões aritméticas e as progressões geométricas que são extremamente utilizadas por todos os alunos em nossas escolas começando com as definições do que é uma progressão aritmética e progressão geométrica mostrando suas respectivas classificações e não menos importante o uso de suas formulas para resolver problemas complexos e seguindo com o trabalho fazemos uma correlação entre esses dois conceitos e a matemática financeira. Desta forma é possível constatar que a sequência de Montantes no regime de Capitalização Simples, é uma Progressão Aritmética pois neste os juros referentes a um único período, em qualquer época são, (por definição) calculados sobre o capital inicial C diferente da Sequência de Montantes do Regime de Capitalização composto que é uma Progressão Geométricas onde, os juros para um único período, em uma época qualquer, são (por definição), calculados sobre o montante do período imediatamente anterior à época considerada.

Palavras-chave: Sequência numérica. Progressão aritmética. Progressão geométrica. Capitalização Simples e Capitalização composta.

ABSTRACT

In this work we present an introductory study on numerical sequence, more specifically on Arithmetic progressions and Geometric progressions that are extremely used by students in our schools starting with the definitions of what is na Arithmetic progression and Geometric showing their respective classifications and not least important the use of its formulas to solve complex problems and following with the work we make a correlation between these two concepts and financial mathematics. In this way, it is possible to verify that the sequence of Amounts in the Simple Capitalization regime is an Arithmetic Progression because in this the interest referring to a single period, at any time, is (by difinition) calculated on the initial capital C diferente from the sequence of Amounts of the Compound Capitalization Regime, which is a Geometric Progression Where the interest for a single period, at any given time, is (by definition) calculated on amount of the period immediately prior to the considered period..

Keywords: Numerical sequence, Arithmetic progression, Geometric progression, Simple Capitalization and Compound Capitalization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As progressões começaram a ser estudadas desde os povos muito antigos como os babilônicos.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabelas babilônicas muito interessantes, mas a mais extraordinária foi a de Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C). A Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido na Matemática Babilônica, talvez porque a babilônia era o centro das rotas de navios e de troca de saberes.

Mas não podemos esquecer que os egípcios tiveram um papel primordial na preservação de muitos destes papiros que contribuíram para o nosso conhecimento em Matemática hoje.

Em um papiro que data de 1950 a.C., podemos encontrar problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Tem também o papiro Rhind (ou Ahmes) data aproximadamente de 1650 a.C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma de termos de uma progressão aritmética. Nele consta o seguinte problema:

"Dívida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja a soma das duas menores."

Podemos observar assim, que muitos dos exercícios contidos no papiro Rhind são exercícios para jovens estudantes.

Os babilônicos também utilizavam sequências. Foram encontrados dois problemas interessantes em uma tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C.. Os quais, um deles afirma que:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1)$$

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. - 500 a.C) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética teórica, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas e as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Friedrich Gauss (1777-1855) deu sinais de ser um grande gênio aos 3 anos de idade. Nesta época ele já havia aprendido a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente. Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então ninguém era capaz desse feito. Ele observou que se somasse o primeiro número com o último, 1 + 100, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, 2 + 99, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, 3 + 98, o resultado também era 101. Percebeu então que, na verdade, somar todos os números de 1 a 100 correspondem a somar 50 vezes o número 101, o que resulta em 5.050. E assim, ainda criança Gauss inventa a fórmula da soma de progressões aritméticas.

$$1 + 100 = 101$$
$$2 + 99 = 101$$
$$3 + 98 = 101$$
$$4 + 97 = 101$$
$$\vdots$$
$$47 + 54 = 101$$
$$48 + 53 = 101$$
$$49 + 52 = 101$$
$$50 + 51 = 101$$

Nas somas acimas, ocupando o lugar da primeira parcela temos todos os números de 1 a 50. No lugar da segunda parcela, temos todos os números de 51 a 100. São 50 somas e cada uma delas resulta sempre no mesmo número: 101. Portanto, para somar todos os números de 1 a 100 basta somar 50 vezes 101, isto é, calcular 50 x 101 = 5050.

2.SEQUÊNCIA NUMÉRICA

O estudo das sequências numéricas é de extrema importância, pois existem várias aplicações e resultados fundamentais para o cálculo matemático. Neste capítulo iremos estudar a definição de sequências, bem como algumas de suas propriedades e resultados necessários para a continuidade do trabalho.

2.1 Definição:

Chama-se **sequência finita** ou **ênupla** toda aplicação *f* do conjunto

$N_n^* = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em $\mathbb{R}$.

Assim, em toda sequência finita, a cada número natural i $(1 \leq i \leq n)$ está associado ao número real a_i.

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n)\}$

2.2 Definição

Chama-se **sequência infinita** toda aplicação f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$.

Em toda sequência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$,

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (\mathrm{i}, a_{\mathrm{I}}), \ldots\}$

Vamos, daqui em diante, indica uma sequência *f* anotando apenas a imagem de *f*:

$f = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_I, \ldots)$

em que aparecem entre parênteses ordenadamente, da esquerda para a direita, as imagens dos naturais 1, 2, 3, ..., i, ...

quando queremos indicar uma sequência *f* qualquer, escrevemos

$f(a_i)_{i \in I}$.

e lemos ''sequência f dos termos a_i em que o conjunto de índices é I''. sendo i um índice real que estar relacionado a um elemento de N(os i) ai ele vai ser um conjunto infinito porque sempre vai ter um de f associado a i.

Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3:

1^o) (1, 2, 3, 4, 6, 12) é uma sequência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.

2^o) (2, 4, 6, 8, ...,2i, ...) é uma sequência (infinita) dos números primos positivos.

3^o) (2, 3, 5, 7, 11, ...) é a sequência (infinita) dos números primos positivos.

Observando o 2^o exemplo, notamos que estão indicados entre parênteses as imagens de 1, 2, 3, ..., i, ... na aplicação f: $\mathbb{N}^* \to \mathcal{R}$ dada por $f(i) = 2i$.

2.2 Igualdades

Sabemos que duas aplicações, f e g, são iguais quando tem domínios iguais e $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio. Assim, duas sequências infinitas, $f = (a_i)_i \in \mathbb{N}^*$ e $g = (b_i)_i \in \mathbb{N}^*$, são iguais quando $f(i) = g(i)$, isto é, $a_i = b_i$ para $i \in \mathbb{N}^*$. Em símbolos:

$$f = g \leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

2.3 Lei de formação

Interessam á Matemática as sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que tem uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:

2.3.1 formula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_i) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

Exemplos 2.4 e 2.5:

1º) escrever a sequência finita *f* cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2\ e\ a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2,3,4,5,6\}$.

Temos:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$

$então\ f = (2,5,8,11,14,17)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita *g* dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1\ e\ b_n = 3 * b_{n-1,} \forall n \in \mathbb{N}\ e\ n \geq 2$.

Temos:

$n = 2 \Rightarrow b_2 = 3 * b_1 = 3 * 1 = 3$

$n = 3 \Rightarrow b_3 = 3 * b_2 = 3 * 3 = 9$

$n = 4 \Rightarrow b_4 = 3 * b_3 = 3 * 9 = 27$

$n = 5 \Rightarrow b_5 = 3 * b_4 = 3 * 27 = 81$

$então\ g = (1,3,9,27,81,\ldots)$.

2.3.2 expressando cada termo em função de sua posição

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Exemplos 2.6 e 2.7:

1^o) Escrever a sequência finita *f* cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n, n \in \{1,2,3,4\}$.

Temos:

$a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8, a_4 = 2^4 = 16$, então $f(2,4,8,16)$

2^o) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Temos:

$b_1 = 3 * 1 + 1 = 4$

$b_2 = 3 * 2 + 1 = 7$

$b_3 = 3 * 3 + 1 = 10$

$b_4 = 3 * 4 + 1 = 13$

$b_5 = 3 * 5 + 1 = 16$

então $g = (4, 7, 10, 13, 16, \dots)$.

2.3.3 propriedades dos termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplos 2.8 e 2.9:

1^o) Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Termos:

$D(1) = \{1, -1\} \Rightarrow a_1 = 2$

$D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow a_2 = 4$

$D(3) = \{1, -1, 3, -3\} \Rightarrow a_3 = 4$

$D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Rightarrow a_4 = 6$

$D(5) = \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow a_5 = 4$

$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\} \Rightarrow a_6 = 8$

então $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

2^o) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

Notemos que essa sequência não pode ser dada por formula de recorrência, bem como não existe formula para calcula o n-ésimo número primo positivo a partir de n.

3 Progressão aritmética (P.A)

Neste capitulo, inicialmente iremos definir as progressões aritméticas, e em seguida apresentar e demonstrar as formulas do termo geral e da soma dos seus termos, e dar exemplos.

3.1 Definição

Chama-se progressão aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1 = \mathrm{a} \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathrm{N}, \quad \mathrm{n} > 2 \end{cases}$$

Em que a e r são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante r dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$f_1 = (1,3,5,7,9, \dots)$ em que $a_1 = 1\ e\ r = 2$

$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$ em que $a_1 = 0\ e\ r = -2$

$f_3 = (4,4,4,4,4, \dots)$ em que $a_1 = 4\ e\ r = 0$

$f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots\right)$ em que $a_1 = \frac{1}{2}\ e\ r = 1$

$f_5 = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots)$ em que $a_1 = 4\ e\ r = -\frac{1}{3}$

As progressões aritméticas podem apresentar um número determinado de termos (P.A. finita) ou um número infinito de termos (P.A. infinita).

Para indicar que uma sequência continua indefinidamente utilizamos reticências, por exemplo:

. a sequência (4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma P.A. infinita.
. a sequência (70, 60, 50, 40, 30, 20, 10) é uma P.A. finita.

Cada termo de uma P.A. é identificado pela posição que ocupa na sequência e para representar cada termo utilizamos uma letra (normalmente a letra **a**) seguida de um número que indica sua posição na sequência.

Por exemplo, o termo a_4 na P.A (2, 4, 6, 8, 10) é o número 8, pois é o número que ocupa a 4ª posição na sequência.

3.2 Classificação de uma progressão aritmética

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

$\mathbf{1^o}$) **PA Crescente**

Uma PA é crescente quando sua **razão é positiva**, ou seja, quando $r > 0$. Pois:

$$a_n > a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \leftrightarrow \mathrm{r} > 0$$

Exemplos:

$f_1 = (1,3,5,7,9,\dots)$ em que $a_1 = 1\ e\ r = 2$

$f_4 = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\dots\right)$ em que $a_1 = \frac{1}{2}\ e\ r = 1$

$\mathbf{2^o}$) **PA Decrescente**

Uma PA é decrescente quando sua **razão é negativa**, ou seja, $r < 0$. Pois:

$$a_n < a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \leftrightarrow \mathrm{r} < 0$$

Exemplos:

$f_2 = (0,-2,-4,-6,-8,\dots)$ em que $a_1 = 0\ e\ r = -2$

$f_5 = (4,\frac{11}{3},\frac{10}{3},3,\frac{8}{3},\dots)$ em que $a_1 = 4\ e\ r = -\frac{1}{3}$

$\mathbf{3^o}$) **PA Constante**

Uma PA é constante ou estacionária, quando sua **razão é nula**, ou seja, $r = 0$. Pois:

$$a_n = a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \leftrightarrow \mathrm{r} = 0$$

Exemplo:

$f_3 = (4,4,4,4,4,\dots)$ em que $a_1 = 4\ e\ r = 0$

3.3 notações especiais

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito pratica a notação seguinte:

1^{o}) para 3 termos: $(\mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{r}, \mathrm{x} + 2\mathrm{r})$ ou $(\mathrm{x} - \mathrm{r}, \mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{r})$.

2^{o}) para 4 termos: $(\mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{r}, \mathrm{x} + 2\mathrm{r}, \mathrm{x} + 3\mathrm{r})$ou $(\mathrm{x} - 3\mathrm{y}, \mathrm{x} - \mathrm{y}, \mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{x} + 3\mathrm{y})$, em que $y = \frac{r}{2}$.

3^{o}) para 5 termos: $(\mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{r}, \mathrm{x} + 2\mathrm{r}, \mathrm{x} + 3r, x + 4r,)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

3.4 Formula do termo geral

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado temos:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando esses n – 1 igualdade, temos:

$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n - 1) * r$

se cancelam

E, então, $a_n = a_1 + (n - 1) * r$, o que sugere o seguinte:

3.1 Teorema

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é

$$a_n = a_1 + (n - 1) * r$$

Demonstração pelo princípio da indução finita:

(I) para $n = 1$, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1) * r$ (sentença verdadeira)

(II) admitamos a validade da formula para $n = p$: $a_p = a_1 + (p - 1) * r$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $n = p + 1$:

$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p - 1) * r) + r = a_1 + [(r + 1) - 1] * r$

Então $a_n = a_1 + (n - 1) * r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3.5 Interpolação aritmética

Em toda sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. Os termos a_1 e a_n são chamados **extremos** e os demais são chamados **meios**. Assim, na P.A. (0, 3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9, 12.

Interpola, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre os números a e b significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com n = k + 2 temos. Para determinar os meios dessa P.A. é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) * r \Rightarrow b = a + (k + 1) * r \Rightarrow \frac{b-a}{k+1}$$

Exemplo 3.1:

Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

vamos formar uma P.A. com 7 termos em que $a_1 = 1$ e $a_n = 2$.. Temos:

$$a_7 = a_1 + 6 * r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

Então a P.A. é $\left(1, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, 2\right)$

3.6 Soma dos termos de uma P.A

Deduzindo uma fórmula para calcula a soma S_n dos n termos iniciais de uma P.A.

3.2 teorema

A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dado por $\frac{n(n+1)}{2}$

Demonstração por indução finita

(I) para n = 1, temos: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (sentença verdadeira)

(II) Admitamos a validade da formula para n = p:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

e provemos para n = p + 1

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p + 1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p + 1) =$$

$$\frac{p(p + 1) + 2(p + 1)}{2} = \frac{p(p + 1)(p + 2)}{2}$$

Então $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exemplo 3.2:

Dada a P.A (1, 2, 3, 4), determine a soma dos seus 100 primeiros termos.

Precisaremos encontrar o termo a_{100}. Para tanto, usaremos a fórmula do termo geral de uma PA:

$$a_{100} = a_1 + (n - 1)r$$
$$= 1 + (100 - 1)1$$
$$= 1 + 99$$
$$= 100$$

Agora a fórmula para soma dos n primeiros termos:

$$\mathbf{s_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}}$$
$$= \frac{100(1 + 100)}{2}$$
$$= \frac{100(101)}{2}$$
$$= \mathbf{\frac{10100}{2}}$$
$$= 5050$$

3.3 Teorema

Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n+1)}{2} * r$

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_1 + (n - 1) * r$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = (a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + [r + 2r + \cdots + (n - 1)r] =$$

n parcelas

$$= na_1 + [1 + 2 + \cdots + (n - 1) * r.$$

Pelo Teorema 3.1:

$1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$, então:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2} * r, \text{ isto é,}$$

$$S_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2} * r$$

3.4 Teorema

Em toda P.A. tem-se:

$$\mathrm{S_n} = \frac{\mathrm{n(a_1 + a_n)}}{2}$$

3.1: Demonstração

$$\mathrm{S_n} = \mathrm{na_1} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2} * \mathrm{r}$$

$$\frac{2na_1 + n(n-1)r}{2} =$$

$$\frac{\mathrm{n[2a_1 + (n-1)r]}}{2} =$$

$$\frac{\mathrm{n[a_1 + a_1\ (n-1)r]}}{2} =$$

$$\frac{\mathrm{n(a_1 + a_n)}}{2}$$

Exemplos 3.3 e 3.4:

1º) A soma dos 15 termos iniciais da P.A. (-2, 1, 4, 7, ...) é:

$$S_{12} = 15(-12) + \frac{15*14}{2} * 3 = -30 + 315 = 285$$

2º) A soma dos múltiplos inteiros de 2 desde 4 até 100 pose ser calculada notando-se que (4, 6, 8, ... ,100) é uma P.A. de 49 termos em que $a_1 = 4$ e $a_{49} = 100$:

$$\mathrm{S_{49}} = \frac{49(4*100)}{2} = 49 * 52 = 2548$$

4. progressão geométrica

4.1 Definição

Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} * q, \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}, \mathrm{n} > 2 \end{cases}$$

que a e q são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante q dada.

Eis alguns exemplos de progressões geométricas:

$f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $q = 2$

$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$ em que $a_1 = -1$ e $q = 2$

$f_3 = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots)$ em que $a_1 = 1\ e\ q = \frac{1}{3}$

$f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \ldots)$ em que $a_1 = -54\ e\ q = \frac{1}{3}$

$f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ em que $a_1 = 7\ e\ q = 1$

$f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \ldots)$ em que $a_1 = 5\ e\ q = -1$

$f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ em que $a_1 = 3\ e\ q = 0$

4.2 Classificaçâo

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1º) **Crescentes** são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior.

Notemos que isso pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \leftrightarrow q > 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n > a_{n-1} \leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \leftrightarrow 0 < q < 1$$

Exemplos:

$f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $q = 2$

$f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \ldots)$ em que $a_1 = -54\ e\ q = \frac{1}{3}$

2º) **Constantes** são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior. Observemos que isso ocorre em duas situações:

a) P.G. com termos todos nulos

$$a_1 = 0\ e\ q\ qualque$$

b) P.G. com termos iguais e não nulos

$$a_n = a_{n-1} \leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \leftrightarrow q = 1$$

Exemplo:

$f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ em que $a_1 = 7\ e\ q = 1$

3º) **decrescentes** são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior.

Notemos que isso pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n < a_{n-1} \leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \leftrightarrow 0 < q < 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n < a_{n-1} \leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \leftrightarrow q > 1$$

Exemplos:

$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \dots)$ em que $a_1 = -1$ e $q = 2$

$f_3 = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$ em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$

4º) **alternantes** são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando $q < 0$.

Exemplo:

$f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \dots)$ em que $a_1 = 5$ e $q = -1$

5º) **estacionários** são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$. Isso ocorre quando $q = 0$

Exemplo:

$f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \dots)$ em que $a_1 = 3$ e $q = 0$

4.3 notações especiais

Para uma obtenção de uma P.G. com 3 ou 4 ou 5 termos é muito pratica a notação seguinte:

1º) para 3 termos: (x, xq, xq^2) ou $(\frac{x}{q}, x, xq)$

2º) para 4 termos: (x, xq, xq^2, xq^3) ou $(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3)$

3º) para 5 termos: $(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$ ou $(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)$

4.4 Termo geral de uma P.G.

Os termos de uma PG podem ser encontrados a partir de uma fórmula que depende somente do termo inicial e da razão. A fórmula para encontrar os termos de uma PG é:

$$\mathrm{a_n} = a_1 * q^{n-1}$$

4.1: Demonstração da fórmula:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 * q$$
$$a_3 = a_2 * q = a_1 * q * q = a_1 * q^2$$
$$a_4 = a_3 * q = a_1 * q^2 * q = a_1 * q^3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_1 * q^{n-1}$$

Exemplo 4.1: Encontre o 9º termo de uma PG que possui $a_1 = 3$ e $q = 5$.

$$\begin{aligned} \mathrm{a_n} &= \mathrm{a_1} * \mathrm{q^{n-1}} \\ &= 3 * 2^{9-1} \\ &= 3 * 2^8 \\ &= 3 * 256 \\ &= 768 \end{aligned}$$

4.5 Interpolação geométrica

Interpolar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com n = k + 2 termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim, termos:

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_1} * \mathrm{q^{n-1}} \rightarrow \mathrm{b} = \mathrm{a} * \mathrm{q^{k+1}} \rightarrow \mathrm{q} = \mathrm{k} + 1\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}$$

Exemplo 4.2:

Interpolar 8 meios geométricos (reais) entre 5 e 2560.

Formemos uma P.G. com 10 termos em que $a_1 = 5 \; e \; a_{10} = 2560$.

Termos:

$$\mathrm{a_{10}} = \mathrm{a_1} * \mathrm{q^9} \rightarrow \mathrm{q} = 9\sqrt{\frac{a_{10}}{a_1}} = 9\sqrt{\frac{2560}{5}} = \sqrt{512} = 2$$

Então a P.G. é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560).

4.6 Produto

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números em que cada termo é igual ao produto de seu antecessor com uma constante q, chamada de razão da PG. Uma das operações que envolvem esse tipo de sequência é o cálculo da soma dos termos de uma PG finita e de uma PG infinita. Também podemos calcular o produto dos termos de uma PG quando ela é finita. A fórmula usada para isso é:

$$P_n = a_1^n * q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Nessa fórmula, p_n é o resultado, ou seja, o produto dos termos da PG, a_1 é o primeiro termo, "q" é a razão da PG e "n" é seu número de termos.

4.2: Demonstração

Para mostrar que o produto dos termos de uma PG pode ser obtido pela fórmula dada, devemos rever alguns conceitos em exemplos para utilizá-los na multiplicação de uma PG de "n" termos.

Dada a PG (2, 4, 8, 16, 32, …). Perceba que cada termo dela é igual ao produto do seu antecessor com a constante 2. Assim, podemos escrever todos os termos dessa PG em função do primeiro:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4 = a_1 \cdot 2$$
$$a_3 = 8 = a_1 \cdot 2 \cdot 2$$
$$a_4 = 16 = a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$a_5 = 32 = a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$\dots$$

Essas igualdades podem ser escritas da seguinte maneira:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 \cdot 2$$
$$a_3 = a_1 \cdot 2^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot 2^3$$
$$a_5 = a_1 \cdot 2^4 \text{ ...}$$

Observe que o expoente relacionado à razão 2 sempre é uma unidade menor do que o índice do termo analisado.

Dito isso, veja como é a sequência de termos de uma PG qualquer finita, com n termos e razão q:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Sabemos que os expoentes relacionados à razão são sempre uma unidade menor do que o índice do termo analisado, por isso o expoente do último termo da PG deverá ser n – 1. Agora, confira o produto dos termos dessa PG:

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Escrevendo todos esses termos em **função** do primeiro termo (a_1), temos:

$$p_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$$

Observe que o termo a_1 aparece n vezes nessa multiplicação. Perceba também que q aparece n – 1 vezes (pois o primeiro termo não é multiplicado pela razão). Separando os termos e a propriedade da soma de potências de bases iguais, temos:

$$(1)\ p_n = a_1^n \cdot \ q^{1+2+\cdots+n-1}$$

Note que a soma dos expoentes de q formam a soma de uma PA de razão 1. A soma dos termos de uma PA finita é dada pela seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2}$$
$$S_n = \frac{\{1 + (n-1)\} \cdot (n-1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Substituindo essa soma na expressão 1, temos:

$$P_n = a_1^n * q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exemplo 4.3:

Encontre o **produto** dos **termos da PG** a seguir, sabendo que ela possui seis termos.

(3, 6, 12, …)

A **razão** dessa **PG** é 2, e o primeiro termo é 3. Sabendo que essa progressão possui seis termos, substitua esses valores na fórmula:

$$P_n = a_1^n * q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= 3^6 * 2^{\frac{6(6-1)}{2}}$$

$$= 729 * 2^{15}$$

$$= 729 * 32768$$

$$= 23887872$$

4.7 Soma dos termos de P.G. finita

Sendo dada uma P.G., isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q, procuremos uma formula para calcular a soma S_n dos termos iniciais da sequência.

Temos: $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$. (1)

Multiplicando ambos os membros por q, obtemos:

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$. (2)

Comparando os segundos membros de (1) e (2), podemos observar que a parcela a_1 só aparece em (1), a parcela a_1q^n só aparece em (2) e todas as outras parcelas são comuns às duas igualdades: então, subtraindo, temos:

$(2) - (1) \rightarrow qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1q^n - a_1$.

Supondo q ≠ 1, resulta:

$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}$

Esse resultado sugere o seguinte teorema:

4.1: Teorema

A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

4.3 Demonstração:

Demonstra-se aplicando o princípio da indução finita:

4.1: Corolário

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

4.4 Demonstração:

$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q-1} = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$

Exemplos 4.4 e 4.5:

1º) calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. (1, 3, 9, 27)

$S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q-1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3-1} = \frac{59049 - 1}{2} = 29524$

2º) calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26}.

Trata-se da P.G. $(5^2, 5^3, 5^4, \ldots, 5^{26})$.

Temos:

$S = \frac{a_1 q - a_1}{q-1} = \frac{5^{20} \cdot 5 - 5^2}{5-1} = \frac{5^{27} - 5^2}{4}$.

4.8 Limite de uma sequência

Consideremos a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$ e representamos seus 4 termos iniciais sobre a reta real

Notemos que os termos da sequência vão se aproximando de zero, isto é, para n bastante "grande" o enésimo termo da sequência $\frac{1}{2^n}$ estará tão próximo de zero quanto quisemos. Assim, desejando que a distância entre $\frac{1}{2^n}$ e 0 seja menor que $\frac{1}{1000}$, impomos:

$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \frac{1}{1000}$

Então: $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n > 9$ (pois $2^9 = 512 < 1000$)

Quer dizer que, a partir do 10º termo, os termos da sequência estarão próximos de 0, com aproximação menor que $\frac{1}{1000}$

Em geral, sendo dada uma aproximação ε > 0, é possível encontrar um número natural n_0 tal que $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ quando $n > n_0$.

Dizemos, então, que o limite de $\frac{1}{2^n}$, quando n tende a infinito, é zero e anotamos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

4.8.1 Definição

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ tem um limite L se, dado ε > 0, é possível obter um número natural n_o tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ quando $\mathrm{n} > n_o$.

Nesse caso, indica-se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ e diz-se que a sequência converge para l.

Exemplo 4.6:

Para nosso próximo assunto é importante saber que toda sequência da forma $(1, \mathrm{q}, q^2, q^3, \ \dots \ , q^n, \dots)$ Com -1 < q < 1, converge para zero.

Se -1 < q < 1, então $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Assim, tem limite nulo as sequências:

$$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \left(\frac{1}{3}\right)^n, \dots)$$

$$(1, -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots)$$

$$(1; \ 0{,}7; \ 0{,}49; \ 0{,}349; \ \dots; (0{,}7)^n, \dots)$$

4.9 Soma dos termos de P.G. infinitos

Exemplo 4.7

Consideremos a P.G. infinita , $(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots)$

Formemos a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ em que:

$$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

....

$$\mathrm{S_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{\mathrm{n}}} = \frac{2^{\mathrm{n}} - 1}{2^{\mathrm{n}}} = 1 - \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$$

....

Esta última sequência converge para 1, pois:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\} = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Que dizer que, quanto maior o número de termos somados na P.G. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ mas nos aproximamos de 1. Dizemos, então, que a soma dos infinitos termos dessa P.G. é 1.

4.9.1 Definição

Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ dizemos que $a_1 + a_2 + \cdots = S$ se, formada a sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ em que:

$\mathrm{S}_1 = \mathrm{a}_1$

$\mathrm{S}_2 = \mathrm{a}_1 + a_2$

$\mathrm{S}_3 = \mathrm{a}_1 + a_2 + a_3$

....

$\mathrm{S}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

....

Essa sequência converge para S, isto é, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$.

4.2 Teorema

Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então:

$\mathrm{S} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n} + \cdots = \frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{q}}$

4.5 Demonstração:

Vamos provar que o limite da sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1-q}$

Temos: $S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} * q^n$.

Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $-\frac{a_1}{1-q}$ é constante: lembrando que, para $-1 < q < 1$, temos $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Resulta, portanto, o seguinte:

$$\lim_{n \to +\infty} \left[S_n - \frac{a_1}{1-q}\right] = \lim_{n \to +\infty} -\frac{a_1}{1-q} * q^n = -\frac{a_1}{1-q} * \lim_{n \to +\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} * 0 = 0$$

Isto é:

$$\mathrm{S} = \lim_{\mathrm{n} \to +\infty} \mathrm{S}_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{q}}$$

Observações:

1º) se $a_1 = 0$ a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência $(S_1, S_2, S_3,)$. Nesse caso, é obvio que a P.G. é (0, 0, 0, ...) e sua soma é 0, qualquer que seja q.

2º) se $a_1 \neq 0$ e $q < -1\ ou\, q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3.)$. Não converge. Nesse caso, é impossível calcular a soma dos termos da P.G.

Exemplos 4.8 e 4.9:

1º) calcular a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$

Como $q = \frac{1}{3}$ $e - 1 < \frac{1}{3} < 1,$ decorre: $S = \frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{q}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

2º) calcular $\mathrm{S} = 3 + \frac{6}{5} + \frac{12}{25} + \frac{24}{125} + \cdots$

Como as parcelas formam uma P.G. infinita com razão $q = \frac{2}{5}$

$\mathrm{e} \ -1 < \frac{2}{5} < 1, \text{vem:}\ S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5.$

5 Progressões aritméticas e geométricas e o estudo da matemática financeira

Nesse capitulo, veremos algumas aplicações das progressões aritméticas e geométricas na matemática financeira.

5.1 Conceitos Básicos de Matemática Financeira

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Nestas operações, alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outro por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma renumeração J pelo o empréstimo. Essa renumeração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M, isto é, $M = C + J$. A razão $i = \frac{j}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação chamada de taxa de juros.

Nas definições e problemas que vamos estudar, iremos usar os seguintes símbolos:

• é o capital inicial ou (valor presente);
• j é os juros;
• C_n é o montante ou (valor futuro);
• n é o número de período de tempo;
• i é taxa de juros.

Onde a unidade de tempo n expressa em (mês, trimestre, semestre, etc). será a mesma unidade de tempo da taxa de juros i (expressa ao mês, ao trimestre, ao semestre, etc). Ou seja, necessariamente i e n devem ser expressos na mesma unidade de tempo.

Existem dois tipos de regime de capitalização: o regime de capitalização simples (juros simples) e o regime de capitalização composto (juros compostos), conforme veremos nas seções seguintes.

5.2 Matemática Financeira e Progressão Aritmética

No regime de capitalização a juros simples, os juros referentes a um único período, em qualquer época são, (por definição) calculados sobre o capital inicial C. Aplicando a fórmula dos juros simples, para 1 (um) período, obtemos:

$$\mathrm{J} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{n} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{C\,i}.$$

Isto significa que os seus valores são “fixos”, ou seja, sempre iguais. Sendo M_n o montante para um determinado período n, a soma do capital inicial e os juros auferidos nesse período, a sequência $(M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n)$ dos montantes formados, a partir da época 0 (o momento do empréstimo), é obtida, a partir do capital inicial, somando-se sempre a mesma parcela (os juros de cada período unitário), caracterizando-se assim uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = C$ e razão $r = C\,i$. Observe que esse tipo de P.A. é sempre crescente, uma vez que os valores do capital inicial e da taxa são sempre positivos, logo, o seu produto também o será.

Exemplo 5.1: Seja a aplicação a juros simples do capital R$ 200,00, à taxa de 4% ao mês, durante 5 meses. Elaborar a sequência dos montantes formados nesse período.

Temos: $C = 200, i = 0,04\; e\; n = 5$

Os juros para um período unitário são dados por $j = C\,i = 200 \cdot 0,04 = 8$. Logo, A sequência será formada, somando-se 8, a cada termo anterior, a partir do primeiro, ou seja, ao capital inicial. Dessa forma, a sequência será a seguinte:

(200, 208, 216, 224, 232, 240)

A tabela apresentada a seguir, usa o exemplo anterior para mostrar a relação entre os termos de uma P.A. e a sequência dos montantes, generalizando, para um número n de períodos:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...	a_{n-1}
200=200+0.8	208=200+1.8	216=200+2.8	224=200+3.8	232=200+4.8	...	200+8n
$\mathrm{C} = \mathrm{M}_0$	M_1	M_2	M_3	M_4	...	M_n

Tabela 1: Relação entre P.A. e montante nos juros simples.

Observe que o n-ésimo termo da sequência dos montantes corresponde ao $(n+1) - ésimo$ termo da P.A. Aplicando-se a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$$\mathrm{M_n} = \mathrm{a_{n+1}} + \mathrm{a_1}[(\mathrm{n}+1)-1] * \mathrm{r} = \mathrm{a_1} + \mathrm{nr}$$

Substituindo $\mathrm{a_1}$ por C e r por C i na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = C + C\,in = C(1+in)$$

Observe que esta é a fórmula comumente usada na Matemática Financeira para o cálculo do montante em juros simples.

Exemplo 5.2: um capital de R$ 100000,00 foi aplicado á taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o montante futuro no final dos 4 meses?

Temos: $C_0 = 100000, \mathrm{i} = 2\% \text{ ao mês e } \mathrm{n} = 4 \text{ meses}, \text{daí},$

. $2\% \; de \; R\$ \, 100000{,}00 = 0{,}02 * 100000{,}00 = R\$ \, 2000{,}00$ (juros em 1 mês)

. $4 * R\$ \, 2000{,}00 = R\$ \, 8000{,}00$ (rendimento em juros simples ao final de 4 meses)

. $C_3 = \mathrm{R\$ \, 100000{,}00} + \mathrm{R\$ \, 8000{,}00} = \mathrm{R\$ \, 108000{,}00}$

Logo, o montante após 4 meses será de R$ 108000,00

Podemos observar no problema anterior que,

. ao final do primeiro período (no caso, mês) o valor futuro ou montante acumulado é dado por:

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i)$$

. ao final do segundo período o valor futuro ou montante acumulado será:

$$C_2 = C_0(1 + i) + C_0 i = C_0(1 + i + i) = C_0(1 + 2i)$$

. ao final do terceiro período o valor futuro ou montante acumulado será:

$$C_3 = C_0(1 + 2\mathrm{i}) + C_0\mathrm{i} = C_0(1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}) = C_0(1 + 3\mathrm{i})$$

. ao final do quarto período o valor futuro ou montante acumulado será:

$$C_4 = C_0(1 + 3i) + C_0 i = C_0(1 + 3i + i) = C_0(1 + 4i)$$

Note que, no regime de juros simples, os valores acumulados ao final de cada período formam uma progressão aritmética, visto que, o montante do mês seguinte é calculado a partir do valor do montante do mês anterior mais o juro que é constante, ou seja, é o valor inicial mais a razão, que nesse caso é juro, que é dado por: $C_0 i$

Logo, a sequência $(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \dots)$ é uma P.A. de razão $C_0 i$. Assim para sabemos o montante ou valor futuro para um período n qualquer, basta usamos a formula do termo geral de uma P.A. que conforme vimos no capitulo 2, é dado por:

$$a_n = a_0 + nr,$$

Onde $a_n = C_{n,}\ a_0 = C_0\ e\ r = j = C_0 i$. Dai, podemos concluir que no final de n períodos o valor futuro será de,

$$C_n = C_0(1 + \mathrm{ni}) \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$$

Observação 5.1: poderíamos resolver este problema, usando a fórmula acima, sem precisar calcular o montante dos meses anteriores. No problema temos,

$$C_n = \text{R\$ } 100000{,}00, \mathrm{n} = 3 \text{ meses e i} = 2\% = 0{,}02 \text{ mês}$$

Daí, como $C_n = C_0(1 + ni)$, temos:

$$C_4 = 100000{,}00(1 + 4.0{,}02) \rightarrow C_3 = 108000.$$

Logo, o montante acumulado ao final de 3 meses é R$ 108000.

Definição 5.1: consideremos duas taxas de jurus arbitrárias i_1 e i_2 relacionadas respectivamente aos períodos n_1e n_2 referidos a unidade comum de tempo das taxas, estas taxas se dizem proporcionais quando:

$$\frac{\mathrm{i}_1}{\mathrm{i}_2} = \frac{\mathrm{n}_\mathrm{i}}{\mathrm{n}_2}$$

Exemplo 5,3: verifique se as taxas 12% ao ano e 1,5% ao mês são proporcionais.

Temos:

$$\frac{12}{1{,}5} = \frac{8}{1} \rightarrow 8 = 8$$

Logo, as taxas dadas são proporcionais.

Exemplo 5,4: obtenha as taxas mensal e trimestral proporcional a juros de 60% ao ano.

i) taxa mensal $\frac{60\%}{12} = 5\%$

logo, a taxa mensal proporcional é de 5% ao mês.

ii) taxa trimestral $\frac{60\%}{4} = 15\%$

logo, a taxa trimestral proporcional é de 15% ao trimestre.

Exemplo 5,5: Em 1/3/2010 uma pessoa emprestou a quantia de R$ 4.000,00 a juros simples, com a taxa de 4% ao mês. Qual era o montante da dívida em 1/7/2010?

temos, $\mathrm{C_n} = 4000.\ \mathrm{i} = 4\% \text{ ao mês e } \mathrm{n} = 5 \text{ meses, daí, como } \mathrm{C_n} = C_0(1 + \mathrm{ni})$. Obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{C_n} &= 4000(1 + 5 * 0{,}04) \\ &= 4000(1 + 0{,}20) \\ &= 4000(1{,}20) \\ &= 4800 \end{aligned}$$

Portanto, em 1/7/2010 o montante foi de R$ 4.800,00

5.3 Matemática Financeira e Progressão Geométrica

No regime de capitalização a juros compostos, os juros para um único período, em uma época qualquer, são (por definição), calculados sobre o montante do período imediatamente anterior à época considerada. Por exemplo, os juros relativos ao terceiro período é obtido multiplicando-se o montante M_2 do segundo período por i. Mas, como o montante M_3 relativo ao terceiro período é a soma do montante do período anterior com os juros relativos a esse período, temos:

$$M_3 = M_2 + M_2 * i = M_2(1 + i)$$

Generalizando essa situação, para um período n qualquer, obtemos:

$$M_n = M_{n-1}(1 + i)$$

Dessa forma, a sequência $(M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n)$ dos montantes no regime de juros compostos, é obtida a partir do capital inicial C multiplicando-se sempre (1+i) ao montante do período anterior, caracterizando uma progressão geométrica, de primeiro termo $a_1 = C$ e razão $q = 1 + i$. Observe que esse tipo de progressão geométrica será sempre crescente, uma vez que a razão é sempre maior que 1 (um) em virtude de i ser sempre positivo.

Exemplo 5.6: Escrever a sequência dos montantes M_n para uma aplicação de R$ 200,00 a juros compostos de 4% ao mês, durante 4 meses.

Temos: C = 200, i = 0, 04, 1+i = 1, 04 e n = 4

A sequência que se obtém, com valores aproximados (em alguns casos), é a seguinte:

(200; 208; 216,32; 224,97)

A tabela seguinte faz a correlação entre a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica e esta sequência:

a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-1}
200 = 200 * $1{,}04^0$	208 = 200 * $1{,}04^1$	216,32 = 200 *$1{,}04^2$	224,97 = 200 * $1{,}04^3$	...	200*$1{,}04^n$
$C = M_0$	M_1	M_2	M_3	...	M_n

Tabela 2: Relação entre P.G. e montante nos juros compostos.

Também aqui ocorre a relação $M_n = a_{n+1}$. Usando-se a fórmula do termo geral da P.G., temos:

$$M_n = a_{n+1} = a_1 * q^{[(n+1)-1]} = a_1 * q^n$$

Por outro lado, substituindo a_1 por C e q por 1+i na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = C(1 + i)^n$$

Observe que esta é a fórmula comumente usada para se calcular o montante no regime de capitalização a juros compostos.

Observação 5.2: no regime de jurus compostos, para transformar o prazo da taxa de juros, usamos a chamada taxa de equivalência.

5.4 Equivalência de capitais

Sabe-se que o valor de uma quantia depende da época a qual ela está referida. Veja que, em uma situação onde o dinheiro rende 1% ao mês, pagar R$ 100,00 hoje ou pagar R$ 101,00 daqui a um mês é equivalente.

Discutindo algumas situações com os alunos de Ensino Médio e propondo alguns exemplos percebeu-se algumas dificuldades na compreensão quanto ao fator deslocamento no tempo, evidenciando-se a necessidade de fazer algumas exposições sobre os conceitos importantes envolvidos nestas situações. Essas discussões se deram a partir dos exemplos que seguem.

Exemplo 5.7 Um indivíduo tomou um empréstimo de R$ 500,00 a juros mensais de 10%. Dois meses após, este indivíduo pagou R$ 250,00 e no mês seguinte liquidou o seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Realizou-se a análise do problema proposto com os alunos, conforme descrição que segue: de acordo com o Teorema 1, $\mathrm{M_n = M_0 \cdot (1 + i)n}$ é uma quantia relacionada ao tempo atual, ou seja, $\mathrm{M_0}$ transformar-se-á, após n períodos de tempo em $\mathrm{M_0 \cdot (1 + i)n}$, isto é, uma quantia, cujo valor atual é $\mathrm{M_0}$ equivale no futuro, depois de n períodos de tempo a $\mathrm{M_n = M_0 \cdot (1 + i)n}$. Daí pode-se concluir que para descobrir o valor futuro deve-se multiplicar por (1+i)n. Reciprocamente, para descobrir o valor atual, deve-se dividir por (1+i)n.

A partir dessa análise a resolução do problema fica da seguinte forma:

Considerando inicialmente que o valor atual do empréstimo é de R$ 500,00 equivale a um valor futuro

$$500 = \frac{250}{(1+0,1)^2} + \frac{\mathrm{p}}{(1+0,1)^3}$$

visto que foi feito um pagamento de R$ 250,00 após dois meses e um pagamento P após três meses. Segue então que P = R$ 390,50.

Exemplo 5.8 Um produto é oferecido em uma loja nas seguintes condições:

a) Á vista, com 10% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para a compra desse produto, se o dinheiro vale, para o comprador, 5 % ao mês?

Para facilitar a discussão, fixou-se, sem perda de generalidade, um preço de R$ 30,00. Para pagamento à vista rapidamente conclui-se que o valor seria de R$ 27,00. Assim, a discussão ficou em torno dos itens b e c, cujo resultado segue, comparando em cada uma das situações os valores pagos futuramente com os valores atuais, considerando uma atualização monetária de 5 % ao mês, conforme previsto no exemplo:

Analisando o item b, tem-se: $Vb\ \frac{15}{1{,}05}+\frac{15}{1{,}05^2}\approx 27{,}89$.

Analisando o item c, tem-se: $Vc = 10+\frac{10}{1{,}05}+\frac{10}{1{,}05^2}\approx 28{,}59$.

Após cada uma dessas análises, amplamente discutidas e justificadas com os alunos, conclui-se que a melhor opção é a compra à vista. Destaca-se neste caso a importância de não considerar apenas as taxas praticadas pelo mercado, mas também, o rendimento que o consumidor eventualmente pode ter ao ficar com seu dinheiro por mais tempo, no caso de uma compra à prazo. Novamente aproveitou-se o exemplo para ampliar a discussão sobre equivalência de capitais.

Exemplo 5.9 Um produto cujo preço à vista era de R$ 1.000,00 foi comprado em 6 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra. Se os juros são de 10% ao mês, determine o valor das prestações.

Usando as ideias discutidas anteriormente, estabeleceu-se a expressão que fornecesse o valor atual de cada parcela futura, de forma que a soma de todas as parcelas representasse o valor à vista do produto, conforme segue:

$$1000=\frac{\mathrm{p}}{1{,}1}+\frac{\mathrm{p}}{1{,}1^2}+\frac{\mathrm{p}}{1{,}1^3}+\frac{\mathrm{p}}{1{,}1^4}+\frac{\mathrm{p}}{1{,}1^5}+\frac{\mathrm{p}}{1{,}1^6}$$

Dessa forma, o problema ficou caracterizado como uma soma dos termos de uma PG em que seu primeiro termo é $a_1=\frac{p}{1{,}1}$ e sua razão é $q=\frac{1}{1{,}1}$. Usando os conhecimentos relativos a soma dos termos de uma PG finita, foi possível chegar ao valor de cada prestação, conforme segue:

$$1000 = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{p}{1,1}[(\frac{1}{1,1})^6 - 1]}{\frac{1}{1,1} - 1}$$

de forma que P = R$ 229,60.

Acredita-se que estas discussões são fundamentais para que os alunos não fiquem apenas fazendo contas e substituições de valores em fórmulas prontas sem estabelecer significados para o que estão fazendo, sem a devida compreensão. Estabeleceu-se na análise desse exemplo uma estreita relação entre o ensino de progressões geométricas e a compreensão de conceitos e de resultados de matemática financeira, de fundamental importância para a administração financeira de qualquer cidadão.

Após a compreensão do processo, foi proposto uma generalização para o cálculo do valor da parcela em séries de pagamentos uniformes, cujo resultado segue enunciado no Teorema 2, disponível em [4] que foi demonstrado, usando o mesmo raciocínio proposto no exemplo 4, porém de forma algébrica.

Teorema 5.1 O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é

$$P_v = P[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}]$$

sendo i a taxa de juros e Pv pagamento à vista.

Demonstração 5.1

Seguindo os argumentos utilizados no exemplo anterior, escreve-se o valor do pagamento à vista como uma soma de parcelas futuras em valores atuais, conforme segue:

$$Pv = \frac{p}{(1 + i)} + \frac{p}{(1 + i)^2} + \cdots + \frac{p}{(1 + i)^n}$$

utilizando a soma dos termos de uma PG finita obtém-se:

$$\frac{P_v}{p} = (1 + i)^{-1} * \frac{(1 + i)^{-n} - 1}{(1 + i)^{-1} - 1} = \frac{(1 + i)^{-n} - 1}{(1 + i) * \left(\frac{1}{1 + i} - 1\right)} =$$

$$\frac{(1 + i)^{-n} - 1}{\frac{(1 + i) * (1 - 1 - i)}{1 + i}} = \frac{(1 + i)^{-n} - 1}{-i}$$

de onde segue que:

$$P_v = P[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}]$$

6.CONSIDERAÇOES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados uma breve história do surgimento das progressões aritméticas e geométricas e uma revisão da literatura das progressões aritmética e geométrica, mostrando uma de suas mais importantes aplicações que é na matemática financeira.

A revisão da teoria das progressões aritméticas e geométricas, através de vários exemplos, pode assim chegar as formulas para possibilita uma maior compreensão de suas definições e formulas. Além disso, o estudo da matemática financeira, no regime de juros simples e no regime de juros compostos através dos exemplos, possibilitou um melhor entendimento sendo possível perceber sem sobras de duvidas da sua importância para o nosso cotidiano, visto que ao realizamos operações de compra e venda de produto e serviços, aplicações e empréstimo, é necessário termos conhecimento de juros simples e composto para tomamos a decisão mais adequada.

O desenvolvimento deste trabalho mostrou como aplicar as progressões aritméticas e geométricas em algumas formulas da matemática financeira. Foi a partir de exemplos que pudemos deduzir algumas formulas do regime de juros simples e composto, deixando entendido que os valores acumulados ao final de cada período, que chamamos de montante ou valor futuro, nos juros simples formam uma progressão aritmética, enquanto que nos juros compostos formam uma progressão geométrica, sendo assim para encontramos o montante ou valor futuro de um período de tempo qualquer, basta usarmos de forma correta a formula do termo geral da P.A. (juros simples) e de uma P.G. (juros compostos).

Esperamos que este trabalho possa de alguma forma contribuir para uma melhor compreensão dos estudos das progressões aritméticas e geométricas facilitando uma melhor compreensão da matemática.

REFERENCIAS

Gelson iezzi e Samuel hazzan Fundamentos da matemática elementar 8º edição são Paulo 2013

Epaminondas Alves dos Santos. A Matemática Financeira como Alternativa de Contextualização. Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE Santo Antônio da Platina-PR. outubro de 2008