



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**ARTUR NÓBREGA DA SILVA**

**UM ANTIGO TEOREMA JAPONÊS**

**PATOS  
2022**

ARTUR NÓBREGA DA SILVA

**UM ANTIGO TEOREMA JAPONÊS**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

**PATOS**  
**2022**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586a Silva, Artur Nobrega da.  
Um antigo teorema japonês [manuscrito] / Artur Nobrega da Silva. - 2022.  
26 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Geometria plana. 2. Teorema japonês. 3. Triangulação.  
I. Título

21. ed. CDD 516.22

ARTUR NÓBREGA DA SILVA

UM ANTIGO TEOREMA JAPONÊS

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

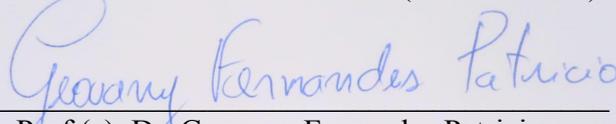
Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 02/08/22

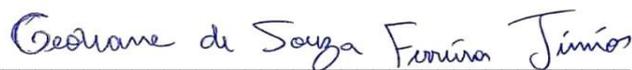
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)



Prof.(a) Dr. Geovany Fernandes Patricio  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)



Prof.(a) Me. Geovane de Souza Ferreira Júnior  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

*Dedico este trabalho a minha mãe, Josineide Beatriz, pai, Luiz Carlos, e minhas irmãs, Monalysa e Hellen Crys que, à maneira deles, puderam me apoiar na minha jornada acadêmica. Também dedico aos meus amigos Itallo, Adriano, Arthur, Camila, Joabis que estiveram junto de mim por esses longos 4 anos e sempre pude contar com aqueles para tudo, inclusive para tirar dúvidas ou compartilhar algum pensamento matemático, possíveis deduções, além de dar suportes pessoais. Além disso, dedico a minha avó, Beatriz Maria, que tinha o desejo de me ver formado e estava sempre me apoiando, porém faleceu sem que seu desejo fosse realizado. Desejo que saibam que todos vocês, à sua maneira, apoiaram-me para que concluísse este trabalho e ciclo de minha vida.*

“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.”

Albert Einstein

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>MISCELÂNEA GEOMÉTRICA</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2.1</b>	Identities trigonométricas e uma relação métrica . . . . .	8
<b>2.2</b>	Geometria de polígonos inscritos e circunscritos . . . . .	13
<b>3</b>	<b>QUATRO PROVAS E UMA GENERALIZAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>3.1</b>	Caso dos quadriláteros inscritos . . . . .	18
<b>3.2</b>	Caso poligonal . . . . .	22
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>24</b>

## UM ANTIGO TEOREMA JAPONÊS

ARTUR NÓBREGA DA SILVA \*

### RESUMO

No presente artigo, apresentamos um antigo teorema japonês, que demorou muito tempo para se tornar conhecido, por ser oriundo de uma sociedade fechada, mas que é um belo resultado matemático, provado por vários matemáticos. Este teorema afirma que, não importa como se triangule um polígono cíclico por diagonais que não se intersectem, a soma dos raios dos círculos inscritos nos triângulos da triangulação será sempre a mesma. Para a demonstração, seguimos Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (A) e (B)) e dividimos nosso trabalho em dois casos: no caso dos quadriláteros, apresentamos provas de alguns matemáticos japoneses, todas baseadas em resultados de Geometria plana aqui demonstrados ou citados; no outro caso, damos uma generalização para um polígono cíclico qualquer, provada por indução sobre o número  $n$  de lados.

**Palavras-chave:** Geometria Plana. Teorema Japonês. Triangulação.

### ABSTRACT

In this article, we present an old Japanese theorem, which took a long time to become known, as it comes from a closed society, but which is a beautiful mathematical result, proved by many mathematicians. This theorem states that, no matter how a cyclic polygon is triangulated by diagonals that do not intersect, the sum of the radii of the circles inscribed in the triangles of the triangulation will always be the same. For the proof, we followed Ahuja, Uegaki and Matsushita (2004 (A) and (B)) and divided our work into two cases: in the case of quadrilaterals, we present proofs by some Japanese mathematicians, all based on the results of plane geometry shown or mentioned here; in the other case, we give a generalization to an  $n$ -gon, proved by induction on the number  $n$  of sides.

**Keywords:** Plane Geometry. Theorem Japanese. Triangulation.

---

\*Aluno de graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII – Governador Antônio Mariz (Patos–PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: arturns994@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

# 1 INTRODUÇÃO

Em 1800, um problema de Geometria foi inscrito em uma tábua de madeira, conhecida como *sangaku*, que significa “tábua matemática”, e R. Maruyama pendurou-o num santuário na então província de Uzen, na parte norte da ilha japonesa de Honshu. O que hoje é algo não costumeiro, para aquela época era muito comum, era uma tradição presentear os deuses xintoístas e budistas e seria a única forma de compartilhar suas ideias com visitantes e desafiá-los. Richeson (2013) diz que, entre 1603 e 1868, denominado como período Edo, o Japão era uma sociedade totalmente fechada para o exterior; em particular, não havia troca de conhecimentos matemáticos com outros países, não é de surpreender que nem mesmo ideias matemáticas como o cálculo de Newton, Leibniz e Euler chegaram até os matemáticos japoneses. Mesmo assim, os japoneses continuavam a estudar Matemática, ou *wasan*, como era chamada.

De acordo com Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (A)), o mais simples do teorema que aqui vamos estudar (caso de um quadrilátero cíclico) tem origem chinesa e, mesmo após ser generalizado por Mikami, continuou conhecido como “Teorema Chinês”, passando a se chamar “Teorema Japonês”, deduzem os autores, após ser citado em um artigo de título “A Matemática Japonesa”. O presente trabalho é uma exposição deste teorema, que afirma que, “ao triangular um polígono cíclico com linhas traçadas a partir de um vértice qualquer, a soma dos raios não se altera, independente do vértice escolhido” (AHUJA; UEGAKI; MATSUSHITA, 2004 (A), p. 72).

Richeson (2013) enuncia o teorema da seguinte forma: “triangule um polígono cíclico convexo usando diagonais que não se intersectem. A soma dos raios dos círculos inscritos nos triângulos da triangulação é independente da escolha da triangulação”. Mas, o que seria um polígono cíclico e triangular um polígono? Bem, um polígono cíclico é todo aquele polígono

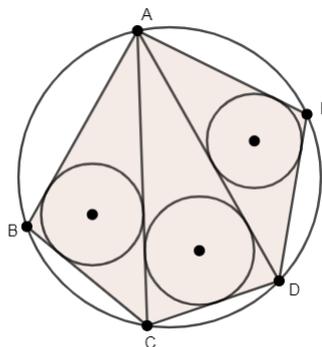


Figura 1: Triangulação partindo de A

que possui todos seus vértices numa circunferência, ou seja, é todo polígono que pode ser inscrito num círculo. Para Barbosa (1994), isso ocorre quando seus ângulos internos opostos são suplementares, assim, podemos definir que um polígono é cíclico se, e somente se, seus ângulos internos opostos são suplementares. Além disso, os enunciados nos fala de triangular o polígono, o que seria triangular um polígono? Bem, triangular um polígono é seccioná-lo em

triângulos. Há as seguintes possibilidades: pode-se triangular sem necessariamente utilizar as diagonais do polígono ou triangular utilizando somente as diagonais do polígono, mas somente as que não se interceptam; em ambos os casos, desejamos que os triângulos não se sobreponham. Nas condições do nosso teorema, estamos interessados no segundo tipo de triangulação. Porém, surge outra pergunta: como garantir que as diagonais usadas não se interceptam?

O enunciado do teorema em Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (A)) nos diz que as diagonais partem de um vértice qualquer pré-escolhido. Nas Figuras 1 e 2, por exemplo, vemos algumas das triangulações possíveis de um polígono  $ABCDE$ . Pensar nas triangulações que nos interessam como aquelas partindo de um único vértice é, sem dúvida, uma forma mais didática de apresentar essa configuração, de modo que é com ela que escolhemos trabalhar.

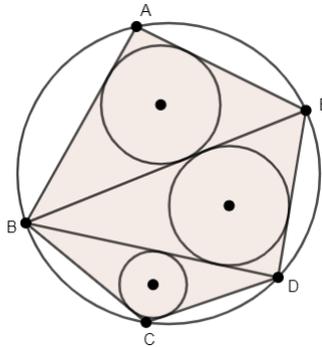


Figura 2: Triangulação partindo de  $B$

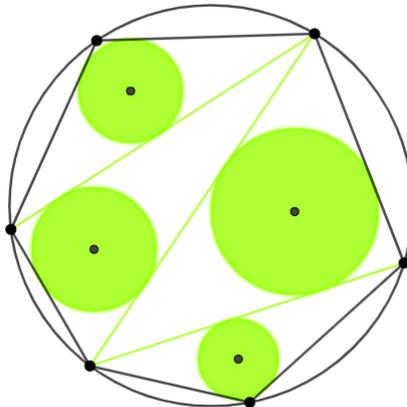


Figura 3: Tipo de triangulação feita por Richeson (2013)

Este artigo está organizado como segue. Na Seção 2, dividida em duas subseções, provamos algumas identidades trigonométricas e, em seguida, alguns resultados de Geometria Euclidiana plana, os quais servirão de base para as demonstrações do resultado principal. Na Seção 3, seguimos Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (A) e (B)) e dividimos nosso trabalho em dois casos: no caso dos quadriláteros, apresentamos provas de alguns matemáticos japoneses, todas baseadas em resultados de Geometria plana aqui demonstrados ou citados; no outro caso, utilizando o princípio de indução finita, damos uma generalização para um polígono cíclico qualquer.

## 2 MISCELÂNEA GEOMÉTRICA

Nesta seção, inicialmente provamos algumas identidades trigonométricas e, em seguida, alguns resultados de Geometria Euclidiana plana, os quais servirão de base para as demonstrações do resultado principal deste trabalho. O leitor pode consultar Barbosa (1994) para detalhes.

### 2.1 Identidades trigonométricas e uma relação métrica

(IT1) São válidas as seguintes identidades trigonométricas:

$$1. \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin(A)$$

$$2. \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos(A)$$

$$3. \cos(A) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$4. \cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$5. 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$6. \cos(\pi - A) = -\cos(A)$$

*Demonstração.* Em um triângulo  $ABC$  qualquer, onde o ângulo  $A$  e  $B$  são internos ao triângulo, utilizando das fórmulas do cosseno e seno da soma e diferença de dois arcos, temos:

- Seja o ângulo  $A$  interno de um triângulo  $ABC$ , então

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(A) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(A) = \sin(A)$$

- Seja o ângulo  $A$  interno de um triângulo  $ABC$ , então

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(A) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(A) = \cos(A)$$

- Sejam os ângulos  $A$  e  $B$  internos de um triângulo  $ABC$ , então  $\cos(A) = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) =$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right), \text{ pois } \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1, \text{ ou seja,}$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

- Façamos  $A = x + y$  e  $B = x - y$ , ou seja,  $A + B = 2x$  e  $A - B = 2y$ , daí  $x = \frac{A + B}{2}$  e  $y = \frac{A - B}{2}$ . Logo,  $\cos(A) + \cos(B) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$  e

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ &= \cos(x)\cos(y) + \cos(x)\cos(y) \\ &= 2\cos(x)\cos(y) \\ &= 2\cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned}$$

- Sejam  $A$  e  $B$  ângulos internos de um triângulo  $ABC$  qualquer, tem-se

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) &= \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right) \end{aligned}$$

- Seja  $A$  ângulo interno de um triângulo  $ABC$  qualquer, tem-se

$$\begin{aligned} \cos(\pi - A) &= \cos(\pi)\cos(A) + \sin(\pi)\sin(A) \\ &= -\cos(A) \end{aligned}$$

□

**(IT2)** Em um triângulo  $ABC$  qualquer, temos:

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) = 1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

*Demonstração.* Dado um triângulo  $ABC$  sabe-se que  $A + B + C = \pi$ , então, usando os itens 1, 2 e 4 de (IT1), obtemos

$$\begin{aligned}
(\cos(A) + \cos(B)) + \cos(C) &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos(C) \\
&= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) \\
&= 1 + 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\left(\frac{C}{2}\right) \right] \\
&= 1 + 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) \right] \\
&= 1 + 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] \\
&= 1 + 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \left[ 2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \right] \\
&= 1 + 4 \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

□

**(IT3)** Se as cordas  $AB$  e  $CD$  de um círculo se intersectam em um ponto  $P$ , então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

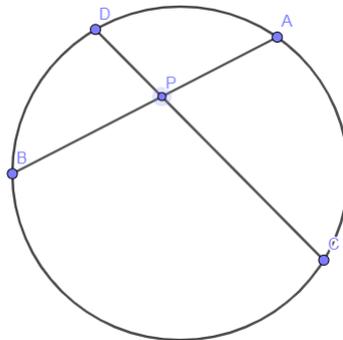


Figura 4: Ilustração do (IT3)

*Demonstração.* Observe que nos triângulos  $CPB$  e  $DAP$  temos:  $\angle CPB = \angle APD$ , por serem opostos pelo vértice, e  $\angle CBP = \angle ADP$ , por estarem subtendendo o mesmo arco. Logo esses triângulos são semelhantes, donde  $\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$ . O resultado segue-se. □

**(IT4)** No triângulo  $ABC$  seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ , então

$$(\overline{AM})^2 = \frac{2 \cdot (\overline{AB})^2 + 2 \cdot (\overline{AC})^2 - (\overline{BC})^2}{4}$$

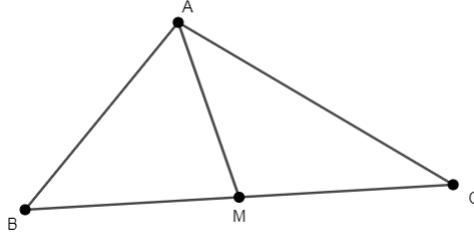


Figura 5: Ilustração do (IT4)

*Demonstração.* Faça  $\angle CMA = \theta$ ,  $\angle AMB = \beta$ . Ao aplicar a lei dos cossenos<sup>1</sup> em  $MCA$ , obtemos

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{CM})^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{CM} \cdot \cos(\theta) \quad (1)$$

Ao aplicar a lei dos cossenos em  $MAB$ , obtemos

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{BM})^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} \cdot \cos(\beta) \quad (2)$$

Mas,  $\theta + \beta = \pi$ , ou seja,  $\theta = \pi - \beta$ , donde  $\cos(\theta) = -\cos(\beta)$ ; ademais,  $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\overline{BC}}{2}$ ; daí substituindo a eq.(2) na eq.(1), obtemos

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{BM})^2 + 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{CM} \cdot \cos(\beta) \quad (3)$$

Somando as equações (2) e (3), encontramos

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 &= 2 \cdot (\overline{AM})^2 + 2 \cdot (\overline{BM})^2 \\ \implies (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 &= 2 \cdot (\overline{AM})^2 + \frac{(\overline{BC})^2}{2} \\ \implies 2 \cdot (\overline{AB})^2 + 2 \cdot (\overline{AC})^2 - (\overline{BC})^2 &= 4 \cdot (\overline{AM})^2 \\ \implies (\overline{AM})^2 &= \frac{2 \cdot (\overline{AB})^2 + 2 \cdot (\overline{AC})^2 - (\overline{BC})^2}{4} \end{aligned}$$

□

**(IT5)** Seja  $ABC$  um triângulo inscrito em um círculo  $C_1$  de centro  $O$  e raio  $R$  e circunscrevendo um círculo  $C_2$  de centro  $I$  e raio  $r$ . Então  $r = 4R \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

*Demonstração.* Ponha  $a = \overline{BC}$ , e seja  $M$  o ponto de tangência de  $C_2$  no segmento  $BC$ , então  $IM \perp BC$ . Daí, como  $\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{r}{\overline{BM}}$ , i.e.,  $\overline{BM} = r \cdot \cot\left(\frac{B}{2}\right)$ .

Analogamente,  $\overline{CM} = r \cdot \cot\left(\frac{C}{2}\right)$ , logo,  $a = r \left[ \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right) \right]$ . Ou seja,

<sup>1</sup>**Teorema 9.7** de Barbosa (1994): *Qualquer que seja o triângulo  $ABC$  tem-se:*

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cot \overline{BC} \cdot \cos \hat{C}.$$

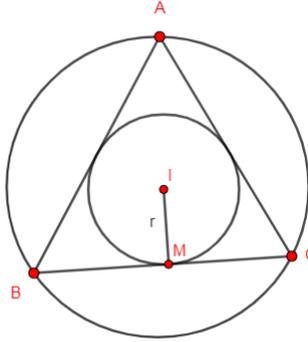


Figura 6: Ilustração do (IT5)

$$\begin{aligned}
 a &= r \left[ \frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \\
 &= r \left[ \frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \\
 &= r \left[ \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

Sabe-se que  $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ , logo, pelo item 2 de (IT1), temos  $\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$ .

Segue-se que

$$\begin{aligned}
 a &= r \left[ \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \\
 &= r \left[ \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \\
 \implies r &= a \left[ \frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

Mas, pela lei dos senos<sup>2</sup>, sabe-se que  $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$ ; daí,  $a = 2R \sin(A) = 2R \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right)$ ,

ou seja,  $a = 4R \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)$ .

Portanto,

<sup>2</sup>**Teorema 9.8** de Barbosa (1994): *Qualquer que seja o triângulo ABC tem-se:*

$$\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB} = \frac{1}{2R}.$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{4R \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \\
&= 4R \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Geometria de polígonos inscritos e circunscritos

Nas demonstrações seguintes, para um triângulo  $ABC$  sejam  $O$  e  $R$ , respectivamente, o centro e o raio da circunferência  $C_1$  na qual  $ABC$  está inscrito e  $I$  e  $r$ , respectivamente, o centro e o raio da circunferência  $C_2$  que está inscrita em  $ABC$ .

**(GP1)** Dado triângulo  $ABC$  inscrito em  $C_1$  e que possui  $C_2$  nele circunscrito, prolongue  $AI$  até interceptar  $C_1$  em  $F$ . Então  $\overline{FB}$ ,  $\overline{FC}$  e  $\overline{FI}$  são iguais, ou seja,  $B, C, I$  estão em uma circunferência de centro  $F$ .

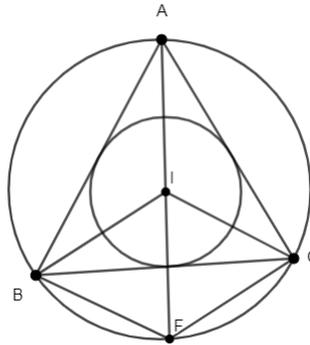


Figura 7: Ilustração do (GP1)

*Demonstração.* Como  $\angle BIF$  é externo a  $\angle AIB$ , então  $\angle BIF = \angle IBA + \angle BAI = \frac{B}{2} + \frac{A}{2}$ , também  $\angle FBI = \angle CBI + \angle FBC = \frac{B}{2} + \frac{A}{2}$ , pois subtende o mesmo arco de um ângulo que tem medida  $\frac{A}{2}$ , ou seja,  $\angle BIF = \angle FBI$ . Logo,  $FBI$  é isósceles de base  $BI$  e  $\overline{FB} = \overline{FI}$ .

Além disso, como  $\angle FIC$  é externo a  $\angle CIA$ , então  $\angle FIC = \angle ACI + \angle IAC = \frac{C}{2} + \frac{A}{2}$ . E,  $\angle ICF = \angle ICB + \angle BCF = \frac{C}{2} + \frac{A}{2}$ , por  $\angle BCF$  subtender o mesmo arco de um ângulo que mede  $\frac{A}{2}$ , ou seja,  $\angle ICF = \angle FIC$ , daí conclui-se  $\overline{FC} = \overline{FI}$ . Portanto,  $\overline{FB} = \overline{FC} = \overline{FI}$ . □

**(GP2) Teorema de Chapple:** Temos  $R^2 - 2Rr = \overline{OI}^2$ .

*Demonstração.* Prolongue  $AI$  até interceptar a circunferência no ponto  $F$ . Prolongue o segmento  $FO$  até que intercepte a circunferência  $C_1$  em  $G$  e prolongue o segmento  $OI$  até que intercepte a circunferência  $C_1$  em  $L$  e  $K$ . Marca-se o ponto  $J$ , ponto de tangência a  $C_2$  e  $AB$ .

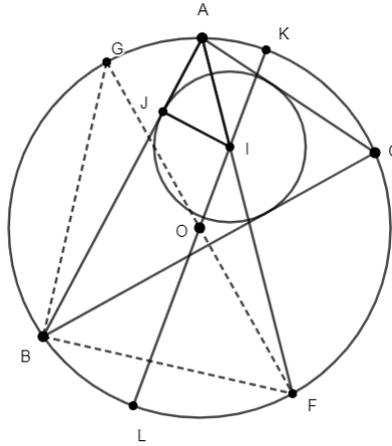


Figura 8: Ilustração do (GP2)

Como pode ser facilmente observado,  $\angle BGF = \angle BAF$ , pois subtendem o mesmo arco, e  $\angle IJA = \angle FBA = \frac{\pi}{2}$ , então  $GBF$  e  $AJI$  são semelhantes. Daí,  $\frac{r}{BF} = \frac{AI}{2R}$ , ou seja,  $2Rr = \overline{BF} \cdot \overline{AI}$ , por (GP1),  $\overline{BF} = \overline{IF}$ , logo,  $2Rr = \overline{IF} \cdot \overline{AI}$ . Além disso, por (IT3),  $\overline{IF} \cdot \overline{AI} = \overline{LI} \cdot \overline{IK}$ , mas  $\overline{LI} = R + \overline{OI}$  e  $\overline{IK} = R - \overline{OI}$ . Portanto,  $2Rr = R^2 - (\overline{OI})^2$ , logo,  $R^2 - 2Rr = \overline{OI}^2$ .  $\square$

**(GP3) Teorema de Carnot:** Num triângulo  $ABC$  inscrito em  $C_1$ , denote por  $a_1, b_1, c_1$  os comprimentos dos segmentos tendo como origem  $O$  e perpendiculares a  $BC, AC, AB$ , respectivamente (Veja as figuras 9 e 10). Então  $R + r = b_1 + c_1 \pm a_1$  a depender se  $O$  é interior ou exterior a  $ABC$ , respectivamente.

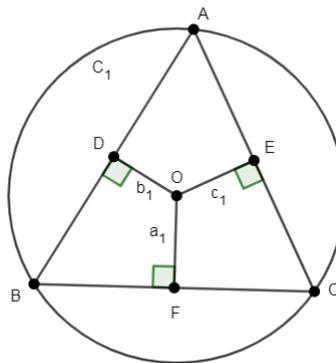


Figura 9: Ilustração (A) do (GP3)

*Demonstração.* Quando  $O$  é interior ao triângulo  $ABC$ , como mostrado na Figura 9, observa-se que o triângulo  $OBC$  é isósceles de base  $BC$ ,  $OF \perp BC$ , que tem medida  $a_1$ , por construção, ou seja, no triângulo  $OBC$ ,  $OF$  é a altura relativa a  $BC$ . Mas, a altura relativa a base de um isósceles também é a bissetriz do ângulo oposto à base, logo  $OF$  é bissetriz de  $\angle BOC$ . Ainda assim,  $\angle BOC = 2 \cdot \angle A$ , pois é correspondente de  $A$ , que está inscrito em  $C_1$ . Então,  $\angle BOF = \angle A$ , daí,  $\cos(A) = \frac{a_1}{R}$ , ou seja,  $a_1 = R \cos(A)$ .



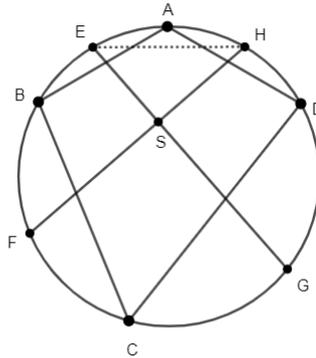


Figura 11: Ilustração do (GP4)

é correspondente a  $\angle EHF$ , obtemos  $\angle EHF = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$ . Ademais,  $\widehat{GDH} = \gamma + \theta$  e, como ele é correspondente a  $\angle GEH$ , obtemos  $\angle GEH = \frac{1}{2} \cdot (\gamma + \theta)$ .

Se  $EG$  e  $FH$  se interceptarem em  $S$ , então a soma dos ângulos  $\angle SEH$  e  $\angle EHS$  do triângulo  $SHE$  é igual  $\frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \theta) = \frac{\pi}{2}$ , donde o terceiro ângulo  $\angle HSE$  é reto, ou seja,  $EG \perp FH$ .  $\square$

**(GP5)** Seja  $ABCD$  um retângulo cujas diagonais interceptam-se em  $S$ , e um ponto  $P$  qualquer do plano. Então  $(\overline{PA})^2 + (\overline{PC})^2 = (\overline{PB})^2 + (\overline{PD})^2 = 2 \cdot (\overline{PS})^2 + 2 \cdot (\overline{AS})^2$ .

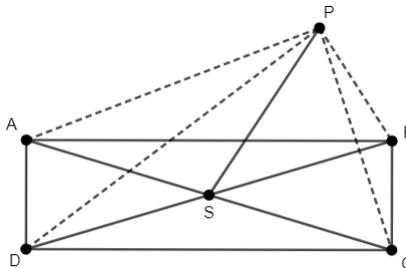


Figura 12: Ilustração do (GP5)

*Demonstração.* Como  $PS$  é a mediana do triângulo  $APC$ , por (IT4),

$$(\overline{PS})^2 = \frac{2 \cdot (\overline{PA})^2 + 2 \cdot (\overline{PC})^2 - (\overline{AC})^2}{4},$$

logo,  $4 \cdot (\overline{PS})^2 = 2 \cdot (\overline{PA})^2 + 2 \cdot (\overline{PC})^2 - 4 \cdot (\overline{AS})^2$ , daí  $(\overline{PA})^2 + (\overline{PC})^2 = 2 \cdot (\overline{PS})^2 + 2 \cdot (\overline{AS})^2$ . Analogamente, visto que  $PS$  é mediana do triângulo  $PBD$  em relação ao lado  $BD$ , então aplicando-se (IT4), encontramos  $(\overline{PB})^2 + (\overline{PD})^2 = 2 \cdot (\overline{PS})^2 + 2 \cdot (\overline{AS})^2$ , logo, obtemos a igualdade:  $(\overline{PA})^2 + (\overline{PC})^2 = (\overline{PB})^2 + (\overline{PD})^2 = 2 \cdot (\overline{PS})^2 + 2 \cdot (\overline{AS})^2$ .  $\square$

**(GP6)** Seja  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  os incentros dos triângulos  $ABC, BCD, CDA$  e  $ADB$ , respectivamente, então  $I_1I_2I_3I_4$  é um retângulo.

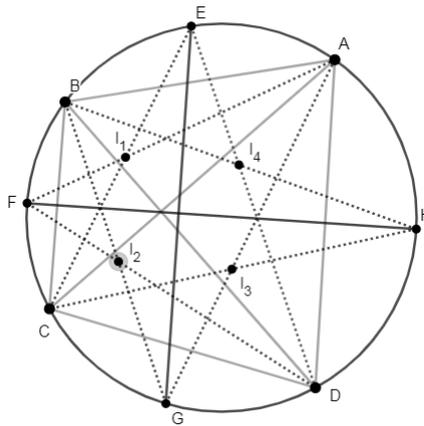


Figura 13: Ilustração do (GP6)

*Demonstração.* Sejam  $E, F, G, H$  os pontos médios dos arcos  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ , respectivamente. Observa-se que  $E$  está na bissetriz dos ângulos  $ACB, ADB$ , da mesma forma, os pontos  $F, G, H$  estão nas bissetrizes de dois ângulos.  $AF$  e  $CE$  se interceptam em  $I_1$  e o mesmo vale para  $I_2, I_3$  e  $I_4$ . Observa-se que  $FH$  é bissetriz de  $\angle AFD$ , pois  $\angle HFA$  e  $\angle DFH$  estão inscritos em arcos que são iguais entre si. Da mesma forma,  $FH$  é bissetriz de  $BHC$ , pois  $\angle BHF$  e  $\angle FHC$  estão inscritos em arcos que são iguais entre si. Além disso, observa-se que  $EG$  é bissetriz de  $\angle CED$ , pois  $\angle CEG$  e  $\angle GED$  estão inscritos em arcos que são iguais entre si. Da mesma forma,  $EG$  é bissetriz do triângulo  $\angle AGB$ , pois  $\angle BGE$  e  $\angle AGE$  estão inscritos em arcos que são iguais entre si. Sendo  $I_1, I_2$  a interseção das bissetrizes nos triângulos  $ABC$  e  $DBC$ , respectivamente, então  $I_1, I_2$  é centro do círculo inscrito nos triângulos  $ABC$  e  $DBC$ , respectivamente, sendo assim, aplicando (GP1) em  $ABC$  e  $DBC$ , encontra-se que  $\overline{FB} = \overline{FI_1} = \overline{FC}$  e  $\overline{FB} = \overline{FI_2} = \overline{FC}$ , ou seja,  $\overline{FI_1} = \overline{FI_2}$ . Logo,  $FH \perp I_1I_2$ , pois  $FI_2I_1$  é isósceles e  $FH$  é bissetriz de  $\angle I_2FI_1$ , ou seja,  $FH$  também é altura relativa à base  $I_1I_2$ , por isso, é perpendicular a  $I_1I_2$ . Além disso, de maneira análoga, aplicando (GP1) nos triângulos  $BDA$  e  $CDA$ , levando em conta que  $I_4$  e  $I_3$  são centros dos círculos inscritos nos triângulos  $BDA$  e  $CDA$ , respectivamente, encontra-se  $\overline{FI_3} = \overline{FI_4}$ , ou seja,  $I_3I_4 \perp FH$ , pois o triângulo  $HI_4I_3$  é isósceles e  $FH$  é bissetriz de  $\angle I_4HI_3$ , ou seja,  $FH$  também é altura relativa à base  $I_4I_3$ , por isso, é perpendicular a  $I_4I_3$ . Logo, tendo em vista que  $I_1I_2$  e  $I_3I_4$  são perpendiculares ao mesmo segmento  $FH$ , então  $I_1I_2 // I_3I_4$ .

Analogamente, aplicando (GP1) no triângulo  $DAB$ , encontra-se que  $\overline{EB} = \overline{EI_4} = \overline{EA}$ , e em  $CAB$ , encontra-se que  $\overline{EB} = \overline{EI_1} = \overline{EA}$ , ou seja,  $\overline{EI_4} = \overline{EI_1}$ . Logo,  $EG \perp I_1I_4$ , pois o triângulo  $EI_1I_4$  é isósceles de bissetriz  $EG$ . De maneira análoga, aplicando (GP1) em  $BCD$  e  $ACD$ , encontra-se que  $GI_2 = GI_3$ , ou seja,  $I_2I_3 \perp EG$ , pois o triângulo  $GI_2I_3$  é isósceles de bissetriz  $EG$ . Como  $I_1I_4$  e  $I_2I_3$  são perpendiculares a  $EG$ , logo,  $I_2I_3 // I_1I_4$ . Daí, como os lados opostos de  $I_1I_2I_3I_4$  são paralelos, então, ele é um paralelogramo. Ademais, por (GP4),  $EG \perp FH$ , e levando em conta que  $FH // I_2I_3$  e  $FH \perp I_1I_2$ , daí, como  $I_2I_3 // I_1I_4$ ,

então  $I_1I_4 \perp I_1I_2$ , ou seja,  $\angle I_3I_2I_1$  e  $\angle I_2I_1I_4$  são retos. Além disso, como  $I_1I_2I_3I_4$  é paralelogramo, seus ângulos opostos são iguais, daí todos os ângulos de  $I_1I_2I_3I_4$  são retos, assim, conclui-se que  $I_1I_2I_3I_4$  é um retângulo.  $\square$

### 3 QUATRO PROVAS E UMA GENERALIZAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL

Nesta seção, oferecemos algumas abordagens do assim chamado teorema japonês, começando pelo caso dos quadriláteros inscritos e avançando para polígonos com  $n$  lados inscritos.

#### 3.1 Caso dos quadriláteros inscritos

A primeira das demonstrações, Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (a)) atribuem-na a T. Yoshida, que a teria publicado em um livro falando sobre o *Wasan* (denominação para a Matemática japonesa). A demonstração que se segue é uma demonstração muito elegante e interessante, pois faz uso somente da relação entre segmentos tangentes a um círculo inscrito num triângulo e a relação entre ângulos opostos ao mesmo arco.

**Teorema Japonês (caso dos quadriláteros inscritos):** *Sejam  $ABCD$  um quadrilátero inscrito num círculo e  $r_1, r_2, r_3, r_4$  os raios dos círculos  $C_1, C_2, C_3, C_4$  inscritos nos triângulos  $ABC, BCD, ACD, ABD$ , respectivamente. Então,  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .*

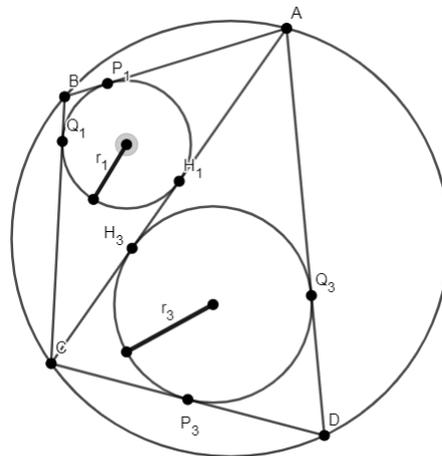


Figura 14: Ilustração (A) do caso quadrilateral

*Demonstração.* Tomando  $P_i, Q_i, H_i$  como os pontos onde o círculo  $C_i$  intercepta os lados como mostrado nas Figuras 14 e 15. Primeiramente será mostrado que  $H_1H_3 = H_2H_4$ .

Tome  $\rho = \overline{AD} + \overline{BC} - \overline{AB} - \overline{CD}$ . Na Figura 14, temos  $\rho = \overline{AQ_3} + \overline{DQ_3} + \overline{BQ_1} + \overline{CQ_1} - (\overline{AP_1} + \overline{BP_1}) - (\overline{CP_3} + \overline{DP_3})$ . Como,  $\overline{AQ_3} = \overline{AH_3}$ ,  $\overline{AP_1} = \overline{AH_1}$ ,  $\overline{BQ_1} = \overline{BP_1}$ ,  $\overline{CH_3} = \overline{CP_3}$

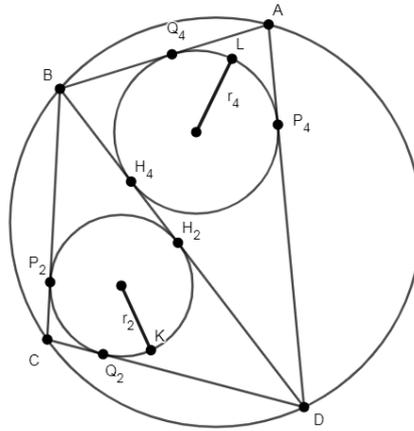


Figura 15: Ilustração (B) do caso quadrilateral

e  $\overline{DQ_3} = \overline{DP_3}$ .<sup>4</sup> Assim,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \overline{AH_3} + \overline{DP_3} + \overline{BP_1} + \overline{CH_1} - \overline{AH_1} - \overline{BP_1} - \overline{CH_3} - \overline{DP_3} \\
 &= \overline{AH_3} + \overline{CH_1} - \overline{AH_1} - \overline{CH_3} \\
 &= \overline{AH_3} - \overline{AH_1} + \overline{CH_1} - \overline{CH_3} \\
 &= H_1H_3 + H_1H_3 \\
 &= 2 \cdot H_1H_3
 \end{aligned}$$

Na Figura 15,  $\rho = \overline{AP_4} + \overline{DP_4} + \overline{BP_2} + \overline{CP_2} - (\overline{AQ_4} + \overline{BQ_4}) - (\overline{CQ_2} + \overline{DQ_2})$ . E,  $\overline{AP_4} = \overline{AQ_4}$ ,  $\overline{BQ_4} = \overline{BH_4}$ ,  $\overline{BP_2} = \overline{BH_2}$ ,  $\overline{CP_2} = \overline{CQ_2}$ ,  $\overline{DQ_2} = \overline{DH_2}$ ,  $\overline{DP_4} = \overline{DH_4}$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \overline{AQ_4} + \overline{DH_4} + \overline{BH_2} + \overline{CQ_2} - \overline{AQ_4} - \overline{BH_4} - \overline{CQ_2} - \overline{DH_2} \\
 &= \overline{DH_4} - \overline{DH_2} + \overline{BH_2} - \overline{BH_4} \\
 &= H_2H_4 + H_2H_4 \\
 &= 2 \cdot H_2H_4
 \end{aligned}$$

Assim,  $H_1H_3 = H_2H_4$ . Agora, sejam os arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DA}$  iguais a  $4\alpha$ ,  $4\beta$ ,  $4\gamma$ ,  $4\theta$ , respectivamente, então,  $\angle ADB = \angle ACB = 2\alpha$ ,  $\angle BAC = \angle BDC = 2\beta$ ,  $\angle CBD = \angle CAD = 2\gamma$ ,  $\angle DCA = \angle DBA = 2\theta$ .

Na Figura 14, temos, no triângulo  $ABC$ , que  $\tan(\alpha) = \frac{r_1}{\overline{CH_1}}$ ,  $\tan(\beta) = \frac{r_1}{\overline{AH_1}}$ . Ademais, no triângulo  $ACD$ ,  $\tan(\gamma) = \frac{r_3}{\overline{AH_3}}$ ,  $\tan(\theta) = \frac{r_3}{\overline{CH_3}}$ .

Na Figura 15, temos no triângulo  $ABD$  que  $\tan(\alpha) = \frac{r_4}{\overline{DH_4}}$ ,  $\tan(\theta) = \frac{r_4}{\overline{BH_4}}$ . Além disso, temos, no triângulo  $BCD$ ,  $\tan(\beta) = \frac{r_2}{\overline{DH_2}}$ ,  $\tan(\gamma) = \frac{r_2}{\overline{BH_2}}$ .

$$\text{Logo, } \frac{r_1}{\overline{CH_1}} = \frac{r_4}{\overline{DH_4}}, \quad \frac{r_1}{\overline{AH_1}} = \frac{r_2}{\overline{DH_2}}, \quad \frac{r_3}{\overline{AH_3}} = \frac{r_2}{\overline{BH_2}} \text{ e } \frac{r_3}{\overline{CH_3}} = \frac{r_4}{\overline{BH_4}}.$$

<sup>4</sup>Essas relações são devidas ao item (b) da **Proposição 8.8** de Barbosa (1994).

Logo, temos

$$r_1 \cdot \overline{DH_4} - r_4 \cdot \overline{CH_1} = 0 \quad (4)$$

$$r_1 \cdot \overline{DH_2} - r_2 \cdot \overline{AH_1} = 0 \quad (5)$$

$$r_3 \cdot \overline{BH_2} - r_2 \cdot \overline{AH_3} = 0 \quad (6)$$

$$r_3 \cdot \overline{BH_4} - r_4 \cdot \overline{CH_3} = 0 \quad (7)$$

Fazendo a diferença das equações (4) e (5), temos

$$r_1 \cdot (\overline{DH_4} - \overline{DH_2}) - r_4 \cdot \overline{CH_1} + r_2 \cdot \overline{AH_1} = 0 \quad (8)$$

Fazendo a diferença das equações (8) e (7), temos

$$r_1 \cdot (\overline{H_2H_4}) + r_4 \cdot (\overline{CH_3} - \overline{CH_1}) - r_3 \cdot \overline{BH_4} + r_2 \cdot \overline{AH_1} = 0 \quad (9)$$

Somando as equações (9) e (6), temos

$$r_1 \cdot (\overline{H_2H_4}) - r_4 \cdot (\overline{H_1H_3}) + r_3 \cdot (\overline{BH_2} - \overline{BH_4}) + r_2 \cdot (\overline{AH_1} - \overline{AH_3}) = 0 \quad (10)$$

Portanto, da eq.(10), nota-se que  $r_1 \cdot (\overline{H_2H_4}) - r_4 \cdot (\overline{H_1H_3}) + r_3 \cdot (\overline{H_4H_2}) - r_2 \cdot (\overline{H_1H_3}) = 0$ . Mas, como provamos que  $H_1H_3 = H_2H_4$ , então  $r_1 + r_3 - (r_2 + r_4) = 0$ . Assim, concluí-se que  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .  $\square$

Em meados do século XX, a Matemática japonesa floresceu bastante, chegando a haver diversos trabalhos de matemáticos japoneses em revistas do Ocidente. Neste período, Ahuja, Uegaki e Matsushita (2004 (B)) destacam que foi publicado um artigo na revista *Mathesis*, no qual o Prof. T. Hayashi apresentou algumas demonstrações bem sofisticadas do caso quadrilateral do teorema japonês aqui apresentado, incluindo as devidas aos matemáticos Kamenosuke Nagasawa, Yuzaburo Sawayama e Tsunezo Nozaki que serão detalhadas a seguir.

A segunda prova que daremos do caso quadrilateral será de Nagasawa, que usa apenas a relação dos segmentos perpendiculares aos lados do quadrilátero  $ABCD$  partindo de  $O$ , centro de  $C_1$ , onde  $ABCD$  está inscrito.

### Prova de Nagasawa:

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c, d, e, f$  os comprimentos das perpendiculares de origem  $O$  até as cordas  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$ , respectivamente. Observe que no triângulo  $ABC$ ,  $O$  é exterior a ele e, em  $CDA$ ,  $O$  é interior ao triângulo  $CDA$ . Assim, aplicando (GP3) em  $ABC$  e  $CDA$ , obtemos  $R + r_1 = a + b - e$  e  $R + r_3 = c + d + e$ , respectivamente, ou seja,  $2R + r_1 + r_3 = a + b + c + d$ .

Além disso, de maneira análoga, aplicando (GP3) nos triângulos  $BCD$  e  $ABD$ , temos  $R + r_2 = b + c - f$  e  $R + r_4 = a + d + f$ , respectivamente, ou seja,  $2R + r_2 + r_4 = a + b + c + d$ . Portanto,  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .  $\square$

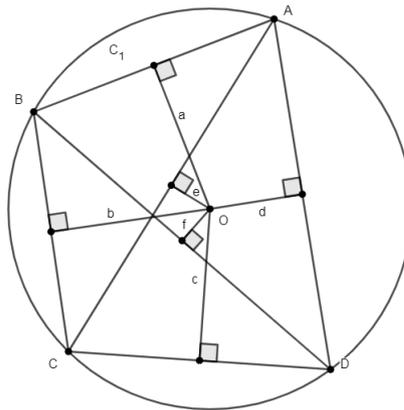


Figura 16: Ilustração da prova de Nagasawa

Agora será apresentada a prova de Sawayama, semelhante à de Nagasawa, usando a mesma relação usada por ele, porém levando agora em conta o fato de que cada perpendicular é bissetriz do ângulo central correspondente, então, ao prolongá-las, elas interceptarão  $C_1$  em pontos médios dos arcos correspondentes.

**Prova de Sawayama :**

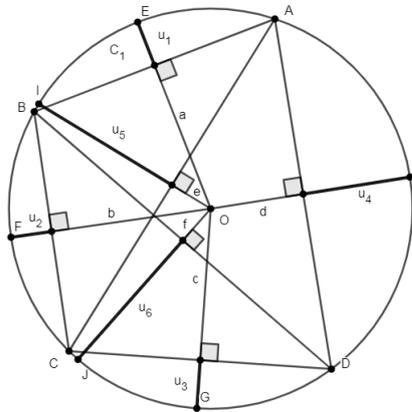


Figura 17: Ilustração da prova de Sawayama

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c, d, e, f$  os comprimentos das perpendiculares de origem  $O$  até as cordas  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$ , respectivamente. Considerando  $u_1$  o comprimento do ponto médio de  $AB$  até o ponto médio do arco  $\widehat{AB}$ , e  $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  são definidos semelhantemente para os arcos  $\widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}, \widehat{AC}, \widehat{BD}$ , respectivamente.

Observe que  $u_1 = R - a$ ,  $u_2 = R - b$ ,  $u_3 = R - c$ ,  $u_4 = R - d$ ,  $u_5 = R - e$  e  $u_6 = R - f$ . Do triângulo  $ABC$ ,  $u_1 + u_2 + 2R - u_5 = (R - a) + (R - b) + (R + e)$ , então  $u_1 + u_2 + 2R - u_5 = 3R - (a + b - e)$ , como, no triângulo  $ABC$ ,  $O$  é exterior então, ao aplicar (GP3), temos,  $u_1 + u_2 + 2R - u_5 = 3R - (R + r_1) = 2R - r_1$ . No triângulo  $CDA$ ,  $u_3 + u_4 + u_5 = (R - c) + (R - d) + (R - e) = 3R - (c + d + e)$ , como, no triângulo  $CDA$ ,

$O$  é interior então, ao aplicar (GP3), temos,  $u_3 + u_4 + u_5 = 3R - R - r_3 = 2R - r_3$ , assim, ao somarmos as duas expressões, temos  $u_1 + u_2 + 2R + u_3 + u_4 = 4R - (r_1 + r_3)$ , ou seja,  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2R - (r_1 + r_3)$ .

Analogamente, no triângulo  $ABD$ , encontra-se que  $u_2 + u_3 + u_6 = 3R - (b + c + f)$ , de maneira análoga, por (GP3), é igual a  $2R - r_2$ . E, no triângulo  $BCD$ ,  $u_1 + u_4 + 2R - u_6 = 3R - (a + d - f)$ , por (GP3), é igual a  $2R - r_4$ . Somando ambos, temos  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2R - (r_2 + r_4)$ . Logo,  $2R - (r_1 + r_3) = 2R - (r_2 + r_4)$ , portanto,  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .  $\square$

A seguir, será apresentada a prova de Tsunezo Nozaki, que leva em conta principalmente que  $I_1I_2I_3I_4$  é um retângulo.

### Prova de Nozaki :

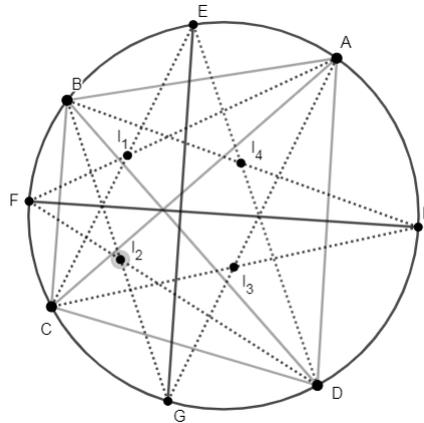


Figura 18: Ilustração da prova de Nozaki

*Demonstração.* Sejam  $I_1, I_2, I_3, I_4$  os incentros dos triângulos  $ABC, BCD, CDA$  e  $ADB$ , respectivamente, então por (GP6),  $I_1I_2I_3I_4$  é um retângulo. Assim, aplicando (GP5) no retângulo  $I_1I_2I_3I_4$ , como mostra a Figura 18, temos  $(\overline{OI_1})^2 + (\overline{OI_3})^2 = (\overline{OI_2})^2 + (\overline{OI_4})^2$ . Para todo  $i$ , por (GP2),  $R^2 - 2Rr_i = (\overline{OI_i})^2$ . Ou seja,  $R^2 - 2Rr_1 + R^2 - 2Rr_3 = R^2 - 2Rr_2 + R^2 - 2Rr_4$ , logo, concluí-se que  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .  $\square$

## 3.2 Caso poligonal

Y. Mikami que provou o teorema japonês, que até então ainda era tido como “teorema chinês”, introduzindo uma sua generalização para qualquer polígono cíclico.

**O teorema japonês para polígonos.** *Ao triangular um polígono cíclico com linhas traçadas a partir de um vértice qualquer, a soma dos raios não se altera independente do vértice escolhido.*

*Demonstração.* Seja  $P$  um polígono com  $n$  vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e  $P'$  um polígono com  $n + 1$  vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ . Denotando por  $S_1(P)$  a soma dos raios dos círculos inscritos

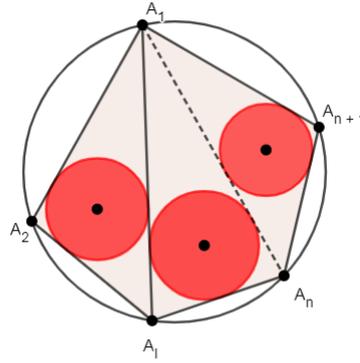


Figura 19: Ilustração (A) do caso poligonal

nos triângulos da triangulação partindo do vértice  $A_1$  e por  $r[ABC]$  o raio do círculo inscrito no triângulo  $ABC$ , sendo escolhida a triangulação partindo do vértice  $A_1$ , como mostra a figura 19, nela é facilmente observado que para chegar em  $S_1(P')$  partindo de  $S_1(P)$ , vamos ter  $S_1(P') = S_1(P) + r[A_n A_{n+1} A_1]$ . Mas, e se caso for escolhido o vértice  $A_l$ ?

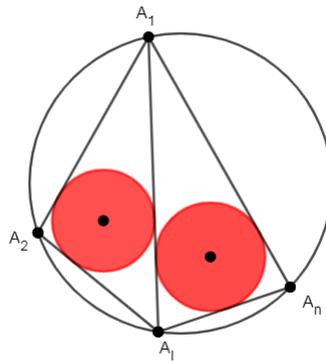


Figura 20: Ilustração (B) do caso poligonal

Pelas Figuras 20 e 21, observa-se que para partir do polígono  $P$  e chegar no polígono  $P'$  sendo escolhido o vértice  $A_l$ , temos  $S_l(P') = S_l(P) - r[A_l A_n A_1] + r[A_l A_n A_{n+1}] + r[A_l A_{n+1} A_1]$ , mas para o quadrilátero  $A_l A_l A_n A_{n+1}$ , aplicando o teorema japonês para quadriláteros, temos  $r[A_l A_n A_1] + r[A_n A_{n+1} A_1] = r[A_l A_n A_{n+1}] + r[A_l A_{n+1} A_1]$ , ou seja,  $r[A_n A_{n+1} A_1] = r[A_l A_n A_{n+1}] + r[A_l A_{n+1} A_1] - r[A_l A_n A_1]$ . Logo, conclui-se que  $S_l(P') = S_l(P) + r[A_n A_{n+1} A_1]$ .

Assim, como base de indução, já sabemos que, para um quadrilátero, a afirmação do teorema é verdadeira. Desse modo, como hipótese de indução, suponhamos que seja verdadeira a afirmação de que, no polígono  $P$ , a soma dos raios dos círculos inscritos nos triângulos da triangulação partindo dum vértice  $A_l$  seja igual à soma análoga a partir dum vértice  $A_k$ , i.e.,  $S_l(P) = S_k(P)$ . Somando  $r[A_n A_{n+1} A_1]$  a ambos lados da igualdade, temos  $S_l(P) + r[A_n A_{n+1} A_1] = S_k(P) + r[A_n A_{n+1} A_1]$ , daí,  $S_l(P') = S_k(P')$ . Portanto, pela argumentação do parágrafo precedente, segue-se do princípio de indução que o teorema é válido para qualquer polígono cíclico de  $n$  lados.  $\square$

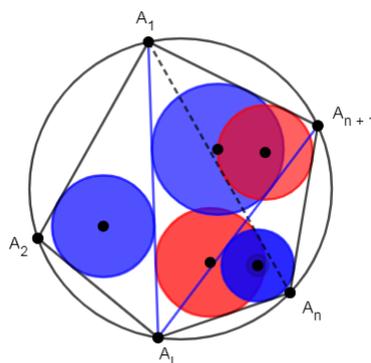


Figura 21: Ilustração (C) do caso poligonal

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se o polígono não é cíclico, então a soma dos raios não é independente da triangulação. Em 1994, Lambert provou que a maior de tais somas é obtida pela triangulação de Delaunay, que é o dual plano do diagrama de Voronoi; veja Richeson (2013).

Apesar de ser um teorema antigo, vindo de uma época na qual não era possível compartilhar o conhecimento matemático produzido no Japão com estudiosos de fora do país, era se esperar que esse resultado não fosse tão conhecido nem tivesse despertado a atenção de vários estudiosos. Foi motivo de grande surpresa encontrar tantas, tão belas e tão sofisticadas demonstrações dele. Isso deixa claro que, para um dado problema matemático, pode haver uma multiplicidade de caminhos para chegar a uma solução.

Não se pode deixar de notar também como a Geometria plana é profícua, com resultados belos e elegantes. O teorema por nós abordado revela uma concepção da Matemática, a formalista, segundo a qual a Matemática é feita para si mesma, ou seja, ao validar um resultado não se busca uma utilidade cotidiana. Sua origem, contudo, remonta a antigos problemas da assim chamada geometria sagrada dos templos japoneses. Essa relação orgânica entre realidade não-matemática e potencial matemática de abstração marca diversos episódios da história da Matemática.

Esperamos que o presente trabalho dê motivação para que nossos colegas, licenciandos ou professores de Matemática, aprofundem-se em estudos relativos à geometria plana.

## REFERÊNCIAS

AHUJA, Mangho; UEGAKI, Wataru; MATSUSHITA, Kayo. Japanese theorem: A little known theorem with many proofs-part I. **Missouri Journal of Mathematical Sciences**, v. 16, n. 2, p. 72-81, 2004 (A).

AHUJA, Mangho; UEGAKI, Wataru; MATSUSHITA, Kayo. Japanese Theorem: A Little Known Theorem With Many Proofs-Part II. **Missouri Journal of Mathematical Sciences**, v.

16, n. 3, p. 149-158, 2004 (B).

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 4a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1994.

RICHESON, David. The Japanese theorem for nonconvex polygons. **Convergence** (December 2013).

Disponível em:

<<https://www.maa.org/press/periodicals/loci/the-japanese-theorem-for-nonconvex-polygons-the-japanese-theorem-for-polygons>>. Acessado em: 23 jul. 2022.

BARALDI, Ivete Maria. Refletindo sobre as concepções matemáticas e suas implicações para o ensino diante do ponto de vista dos alunos. **Mimesis**, Bauru, v. 20, n. 1, p. 07-18, 1999.