



UEPB

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA**

RITA DE CÁSSIA ANDRADE MATOS

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM AUXÍLIO
DO APLICATIVO GEOGEBRA 2D: DEDUZINDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS**

**CAMPINA GRANDE
2022**

RITA DE CÁSSIA ANDRADE MATOS

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM AUXÍLIO
DO APLICATIVO GEOGEBRA 2D: DEDUZINDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros.

**CAMPINA GRANDE
2022**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M425i Matos, Rita de Cássia Andrade.

Investigações geométricas no triângulo retângulo com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D [manuscrito] : deduzindo as relações métricas / Rita de Cássia Andrade Matos. - 2022.
80 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros , Departamento de Matemática - CCT."

1. Investigações Geométricas. 2. GeoGebra. 3. Educação Matemática. I. Título

21. ed. CDD 516

RITA DE CÁSSIA ANDRADE MATOS

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM
AUXÍLIO DO APLICATIVO GEOGEBRA 2D: DEDUZINDO AS RELAÇÕES
MÉTRICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Programa de Pós-
Graduação em Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba,
como requisito parcial à obtenção do
título de Licenciatura em
Matemática.

Área de concentração: Educação
Matemática.

Aprovada em: 04/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Prof.^a. Dr.^a. Kátia Maria de Medeiros (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Ginaldo de Souza Farias

Prof.^o. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Andréa de Andrade Moura

Prof.^a. Ma. Andréa de Andrade Moura
EREM João XXIII-SEEPE

Dedico este trabalho ao meu pai Jailton Matos, por todo apoio e incentivo que sempre teve para comigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter conduzido a minha caminhada até aqui, por ter me capacitado ao longo de todo trajeto percorrido nos últimos anos, por ser meu sinônimo de força e coragem, me sustentando na fé nos momentos em que fraquejei e pensei que não iria conseguir.

Aos meus pais Jailton e Keila que sempre acreditaram no poder transformador da educação e nunca mediram esforços ou recursos durante a minha formação na educação básica e acadêmica.

Aos familiares, em especial, aos meus avós Hernandes, Maria Júnia e Alzira (*in memorium*); às minhas tias Cláudia e Patrícia que sempre torceram por mim e acompanharam toda luta travada até aqui.

Ao meu namorado, Danilo, por todo apoio e incentivo ofertado até aqui.

Aos amigos que conheci na UEPB, pelos momentos de amizade e apoio.

À Prof^a Dr^a Kátia Maria de Medeiros por todos os ensinamentos ao longo de minha graduação e por todo apoio oferecido durante o desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Aos professores Andréa Moura e Ginaldo Farias por terem aceitado o convite para fazer parte da Banca Examinadora.

Aos meus ex-alunos da Escola Municipal de Ensino Fundamental Maria Lúcia de Albuquerque, na qual, tive a oportunidade de lecionar pela primeira vez e recebi aprendizagens significativas que, sem dúvidas, levarei comigo por toda vida.

“Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção.”
Paulo Freire

RESUMO

A Matemática é uma disciplina que com frequência vem a ser caracterizada pelos estudantes como difícil. Vários fatores contribuem para o agravamento desta realidade, principalmente o fato de os estudantes estarem submetidos a metodologias de ensino tradicionais, que pouco favorecem a aquisição dos conteúdos estudados. Com base nesse cenário, é de suma importância o desenvolvimento metodologias de ensino capazes de atrair e motivar os estudantes durante as aulas de Matemática. O objetivo geral de nossa pesquisa foi observar como os estudantes realizam Investigações Geométricas a partir da exploração das relações métricas no triângulo retângulo com o auxílio do aplicativo GeoGebra 2D. Esta pesquisa teve como objetivos específicos: identificar os conhecimentos prévios que os estudantes adquiriram sobre os triângulos; apresentar e analisar o aplicativo GeoGebra 2D e suas funcionalidades no ensino de Geometria; desenvolver investigações das relações métricas no triângulo retângulo utilizando o aplicativo GeoGebra 2D; identificar o impacto da utilização do GeoGebra 2D na compreensão das relações métricas no triângulo retângulo. A metodologia deste trabalho leva em consideração o aspecto qualitativo desenvolvida por meio da aplicação de questionários e atividades de investigação geométrica utilizando o aplicativo GeoGebra 2D. Esta pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 9º ano da E.E.E.F.M Major José Barbosa localizada na cidade de Aroeiras, no estado da Paraíba. As análises aqui descritas apontam para avanços significativos em relação às aprendizagens das Relações Métricas no Triângulo Retângulo com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D bem como, um maior engajamento dos estudantes no seu processo de aprendizagem mostrando que é possível promover o ensino da Matemática de forma inovadora e atraente ao estudante.

Palavras-Chave: Investigações Geométricas; GeoGebra; Relações métricas no triângulo retângulo; Matemática; Educação Matemática.

ABSTRACT

Mathematics is a subject that often comes to be characterized by students as difficult. Several factors contribute to the worsening of this reality, mainly the fact that students are submitted to traditional teaching methodologies, which do not favor the acquisition of the studied contents. Based on this scenario, the development of teaching methodologies capable of attracting and motivating students during Mathematics classes is of paramount importance. The general objective of our research was to observe how students carry out Geometric Investigations from the exploration of metric relations in the right triangle with the help of the GeoGebra 2D application. This research had as specific objectives: to identify the previous knowledge that the students acquired about triangles; present and analyze the GeoGebra 2D application and its features in the teaching of Geometry; develop investigations of the metric relations in the right triangle using the GeoGebra 2D application; to identify the impact of using GeoGebra 2D in understanding the metric relationships in the right triangle. The methodology of this work takes into account the qualitative aspect developed through the application of questionnaires and geometric investigation activities using the GeoGebra 2D application. This research was developed in a 9th grade class of E.E.E.F.M Major José Barbosa located in the city of Aroeiras, in the state of Paraíba. The analyzes described here point to significant advances in relation to the learning of Metric Relations in the Rectangle Triangle with the help of the GeoGebra 2D application, as well as a greater engagement of students in their learning process, showing that it is possible to promote the teaching of Mathematics in an innovative and attractive to the student.

Keywords: Geometric Investigations; GeoGebra; Metric relations in the triangle Rectangles; Math; Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Representação do triângulo retângulo quando traçada a sua altura...	33
Figura 2 –	Interface do GeoGebra 2D.....	36
Figura 3 –	Barra de Ferramenta do GeoGebra 2D.....	36
Figura 4 –	Campo de entrada do GeoGebra.....	41
Figura 5 –	Janela de visualização do GeoGebra.....	41
Figura 6 –	Janela de Álgebra do GeoGebra.....	42
Figura 7 –	Barra de Menu.....	42
Figura 8 –	Algumas respostas da primeira questão do questionário inicial.....	46
Figura 9 –	Algumas respostas da segunda questão do questionário inicial.....	46
Figura 10 –	Algumas respostas da terceira questão do questionário inicial.....	47
Figura 11 –	Algumas respostas da quarta questão do questionário inicial.....	48
Figura 12 –	Algumas respostas da quinta questão do questionário inicial.....	48
Figura 13 –	Algumas respostas da sexta questão do questionário inicial.....	49
Figura 14 –	Construção do ponto pelos grupos A e B.....	51
Figura 15 –	Construção do ponto pelos grupos C e D.....	51
Figura 16 –	Construção da reta perpendicular pelos grupos A e B.....	52
Figura 17 –	Construção da reta perpendicular pelos grupos D e C.....	52
Figura 18 –	Construção de um polígono de três lados pelos grupos A e B.....	53
Figura 19 –	Construção de um polígono de três lados pelos grupos C e D.....	53
Figura 20 –	Construção de um polígono de outro polígono pelos grupos A e B....	54
Figura 21 –	Construção de um polígono de outro polígono pelos grupos C e D....	54
Figura 22 –	Desenho livre do grupo A e B.....	55
Figura 23 –	Desenho livre dos grupos C e D.....	55
Figura 24 –	Respostas do grupo A.....	59
Figura 25 –	Respostas do grupo B.....	59
Figura 26 –	Respostas do grupo C.....	60
Figura 27 –	Respostas do grupo D.....	61
Figura 28 –	Representação da atividade 2.....	62
Figura 29 –	Construção da atividade 2 pelos grupos A e B	62
Figura 30 –	Construção da atividade 2 pelos grupos C e D	63
Figura 31 –	Observações do grupo A.....	64
Figura 32 –	Observações do grupo B.....	66

Figura 33	Observações do grupo C.....	67
Figura 34	Observações do grupo D.....	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relações Métricas	34
Tabela 2 – Funções da barra de ferramentas.....	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

TCC Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	15
2.1	Objetivo geral.....	15
2.2	Objetivos específicos	15
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
3.1	Investigações geométricas e trigonometria.....	22
3.1.1	<i>As relações métricas no triângulo retângulo</i>	32
3.2	O GeoGebra 2D e possibilidades para o ensino de Matemática.....	34
3.2.1	<i>A barra de ferramentas do GeoGebra</i>	35
3.2.2	<i>O campo de entrada do GeoGebra</i>	40
3.2.3	<i>Janela de visualização</i>	40
3.2.4	<i>Janela de álgebra</i>	41
3.2.5	<i>Barra de Menu</i>	41
4	METODOLOGIA	44
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	46
5.1	O questionário inicial.....	46
5.2	Primeiro encontro.....	49
5.3	Segundo encontro.....	56
5.4	Terceiro encontro.....	61
5.5	Quarto e último encontro.....	70
5.6	O questionário final.....	71
6	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – INSTRUMENTO DE PRODUÇÃO DE DADOS 1.....	78
	APÊNDICE B – INSTRUMENTO DE PRODUÇÃO DE DADOS 2.....	79
	ANEXO A – DOCUMENTOS COMPROBATÓRIOS	80

1 INTRODUÇÃO

O ensino-aprendizagem da Matemática vem passando por diversas mudanças ao longo do tempo, tal característica decorre do fato de que a Matemática, assim como outras ciências, constitui-se não apenas de situações prontas e acabadas, mas sim de elementos que acompanham as transformações sociais, que ocorrem constantemente no meio em que vivemos.

Segundo Costa, Pequeno e Pereira (2019), esse cenário implica diretamente no contexto da sala de aula e, principalmente, das práticas pedagógicas aplicadas, uma vez que, o estudante passa a ser visto como um ser crítico-pensante que necessita desenvolver habilidades para decifrar as mais diversas situações do cotidiano.

A Matemática tende a ser considerada pelos estudantes como uma disciplina difícil e desestimulante que, na maioria das vezes, ocorre pelo simples fato de estarem inseridos em uma realidade de ensino tipicamente tradicional, caracterizado pelo papel do professor de preparar, expor e avaliar os conteúdos, bem como o papel dos estudantes de simplesmente resolver exercícios, em sua maioria, marcados por processos repetitivos, visando apenas à memorização dos conteúdos estudados.

Analisando mais a fundo esse cenário, observa-se que os estudantes apresentam grandes dificuldades nos conteúdos que abrangem a disciplina de Matemática, particularmente nos conteúdos de Trigonometria, motivados, em sua maioria, por alguns fatores, entre eles cabe citar: pouca compreensão dos conteúdos básicos do conteúdo; a linguagem utilizada pelos professores que termina não sendo acessível para os estudantes; a abordagem expressa nos livros didáticos que pouco enriquece a aquisição de conhecimento; entre outros fatores.

Evidencia-se assim, que para um melhor desenvolvimento do ensino-aprendizagem da Matemática devemos considerar diversos aspectos que permeiam desde a construção dos conhecimentos até a discussão do seu produto e, conseqüentemente, o seu aproveitamento nas mais diversas situações do cotidiano.

Considerando estes pontos, destaca-se, segundo a perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) a atividade de investigação matemática aliada à utilização de recursos tecnológicos como uma alternativa para tentar solucionar algumas das principais dificuldades dos estudantes na aquisição de conhecimentos matemáticos,

sobretudo os que abrangem os conteúdos de Trigonometria, bem como, uma proposta metodológica a ser utilizada pelos professores, na tentativa de dinamizar o ensino e conseqüentemente, trazer rupturas no modelo tradicional da aula de Matemática.

Dessa forma, o presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como foco a aula de investigação, considerando a perspectiva das dificuldades dos estudantes em Matemática, principalmente, nos conteúdos de Trigonometria, refletindo sobre a importância encontrar meios que auxiliem a aprendizagem dos estudantes em Trigonometria, com base em uma metodologia de ensino-aprendizagem capaz de promover o desenvolvimento das habilidades necessárias para que sejam hábeis em resolver algumas das mais variadas situações do cotidiano.

Por consequência, torna-se de extrema importância o desenvolvimento de pesquisas com a metodologia das investigações matemáticas, como forma de trazer maiores benefícios ao contexto da sala de aula de Matemática.

Retratamos, a seguir, a estrutura deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Inicialmente, determinaremos o nosso objetivo geral e específico, a seguir apresentaremos a fundamentação teórica deste trabalho, na qual, iremos discorrer sobre as dificuldades dos estudantes em Matemática, evidenciando o ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria; uma explanação sobre as investigações geométricas e a aprendizagem matemática de acordo com a perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2020); a seguir, faremos uma discussão sobre o uso de aplicativos no ensino de Matemática com ênfase no aplicativo GeoGebra 2D; em seguida descreveremos as aulas de investigações geométricas no triângulo retângulo com o auxílio do aplicativo GeoGebra 2D; posteriormente, faremos a análise e discussão dos dados e, por fim, apresentaremos a conclusão da pesquisa.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Observar como os estudantes realizam Investigações Geométricas a partir da exploração das relações métricas no triângulo retângulo com o auxílio do aplicativo GeoGebra 2D.

2.2 Objetivos específicos

- Identificar os conhecimentos prévios que os estudantes adquiriram sobre os triângulos;
- Apresentar o aplicativo GeoGebra 2D e suas funcionalidades ao ensino de Geometria;
- Analisar como os estudantes desenvolvem a construção de figuras planas no aplicativo Geogebra 2D;
- Desenvolver investigações das relações métricas no triângulo retângulo utilizando o aplicativo GeoGebra 2D;
- Identificar o impacto da utilização do GeoGebra 2D na compreensão das relações métricas no triângulo retângulo.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ensinar e aprender Matemática vem se tornando um desafio ao longo do tempo, isso acontece em virtude das mudanças que afetam diretamente a sociedade e, como consequência, a dinâmica da sala de aula. Nesse contexto, o modelo tradicional de aula cuja exposição e representação dos conteúdos baseiam-se no protótipo quadro/caderno, bem como, a prática de exercícios repetitivos visando apenas à memorização dos conteúdos estudados, não mais vem se mostrando suficientes para promover o desenvolvimento das habilidades necessárias aos alunos na disciplina.

Somam-se a isso, as dificuldades que os alunos vêm apresentando em relação à disciplina representadas nos altos índices de repetência e de baixa aprovação em exames nacionais e internacionais. De acordo com Costa, Pequeno e Pereira citado por (Fonseca, 2010), "a disciplina Matemática, em especial, tem sido marcada pelos altos índices de evasão e repetência, e isso compõe o cenário dos maiores entraves da educação matemática". Tal fato ilustra a aversão de muitos alunos em relação à disciplina que, por vezes, vem a ser caracterizada como difícil. Além disso, muitos professores insistem em não fazer uso de novas metodologias, ficando presos ao modelo de ensino tradicional e pouco atraente ao aluno. Segundo Santos, França e Santos citados por Sadovsky (2007):

O baixo desempenho dos alunos em matemática é uma realidade em muitos países, não só no Brasil. Hoje o ensino de Matemática se resume em regras mecânicas oferecidas pela escola, que ninguém sabe onde utilizar. Falta formação aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, aqueles que possibilitam considerar os conhecimentos prévios dos alunos, as situações e os novos saberes a construir (Sadovsky, 2007, p.15).

Essas dificuldades são expressas nos mais variados conteúdos da disciplina principalmente nos conteúdos que envolvem Trigonometria, um conteúdo que possui diversas aplicações em nosso cotidiano. As contribuições referentes ao conteúdo de trigonometria abrangem desde elementos de cunho científico até mesmo elementos de cunho tecnológico, envolvendo em seu contexto diversas situações que, quando devidamente aplicadas, podem promover o desenvolvimento de competências e habilidades.

De acordo com Feijó (2018) alguns fatores tornaram-se essenciais para entendermos algumas das dificuldades dos estudantes em trigonometria, entre eles cabe citar: as dificuldades dos estudantes em relacionar os conteúdos com a sua representação geométrica; a forma como os conteúdos foram ensinados e aprendidos, muitos professores recém-licenciados não possuem conhecimento suficiente para fazer a mediação entre o conteúdo, o pensamento e a realidade dos estudantes; o modelo de apresentação do conteúdo adotado pelo professor também pode influenciar diretamente a aprendizagem dos estudantes; a Trigonometria mostra-se por natureza como um conteúdo difícil de compreender e embasa-se em diversos ramos que, na maioria das vezes, são apresentados de modo desconexo; a forma como o conteúdo costuma ser exposto aparenta uma realidade distante entre a teoria e a prática.

Considerando tais características torna-se necessário que o professor, como principal incentivador da aprendizagem, busque meios para dinamizar o ensino. Segundo Freire (1996, p. 39) “É pensando criticamente na prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática.” Por esta razão, o professor precisa ser um sujeito crítico reflexivo, pensante, que incentive os estudantes a buscarem meios atrativos para solucionar os problemas propostos em sala de aula.

Pensando nesses aspectos, destacamos a aula de investigação como uma alternativa metodológica, que pode ser desenvolvida, na tentativa de solucionar alguns dos problemas referentes ao ensino-aprendizagem da Matemática, bem como, dos conteúdos básicos associados à Trigonometria.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), a palavra investigação pode ter vários significados e ser utilizada em diversos contextos. Busca-se com a investigação encontrar respostas para situações nas quais não se tem conhecimento. Nesse contexto a palavra “investigação” pode dar sentido a uma investigação científica, jornalística, criminal, e até mesmo investigar no sentido de buscar uma informação, ou seja, uma simples pesquisa.

No tocante à Matemática, salientam, a investigação apresenta como característica a busca por relações entre os elementos na tentativa de identificar as suas propriedades. Essas investigações, geralmente desenvolvem-se em torno de problemas, uma vez que, o pontapé inicial de uma investigação ocorre pela identificação de um problema a se resolver.

É importante destacar que, na tentativa de se resolver um problema pode-se fazer outras descobertas que podem revelar-se tão importantes quanto a sua solução, por isso, o trabalho de resolver problemas não deixa de valer a pena mesmo quando não se consegue resolver o problema.

De acordo com os autores, dentro da investigação matemática podemos destacar quatro momentos principais. *O primeiro momento é a exploração e formulação de questões*, no qual se busca reconhecer uma situação problemática, explorar tal situação e formular questões a partir delas. *O segundo momento é a formulação de conjecturas* na qual se organizam dados e a formulam-se conjecturas fazendo afirmações sobre ela. *O terceiro momento são os testes e reformulações* na qual se realizam testes e desenvolve-se o refinamento de uma conjectura. Por fim o quarto momento que é *a justificação e avaliação* na qual se justifica a conjectura e se avalia o raciocínio ou o resultado do raciocínio. Nesses momentos pode-se verificar interação por parte dos envolvidos, interação oportuna principalmente para a divulgação e confirmação dos resultados. Esses momentos podem ser amplamente experimentados por estudantes em uma sala de aula trazendo-lhes um pouco do processo dedutivo da matemática fazendo-os perceber o ideal matemático e sua utilidade no mundo em que vivemos.

Os autores afirmam que, quando trabalhadas em sala de aula as investigações matemáticas caracterizam-se como atividades que se assemelham com a resolução de problemas, no entanto é importante destacar que existe uma diferença entre a atividade de investigação, a resolução de problemas, e os exercícios, que consiste basicamente no método e na solução do problema. Ao resolver um problema não se sabe qual método deve-se usar para encontrar uma solução, diferente dos exercícios que possuem um método definido para se chegar à solução, mais distante ainda da investigação a qual se desconhece o método e a solução.

É importante destacar, sublinham os autores, que o trabalho com investigação em sala de aula pode trazer outro impacto de aprendizagem ao estudante, o espírito da atividade matemática genuína, no qual ele age como um matemático nos vários momentos da investigação favorecendo o seu envolvimento na aprendizagem.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula constitui uma rica experiência que todos os estudantes podem e devem usufruir. Durante a atividade de investigação o estudante atua como

um ser autônomo, capaz de pensar e refletir sobre as mais variadas estratégias utilizadas na construção de sua aprendizagem. Além disso, os estudantes podem atuar como sujeitos participativos e críticos, pois ao realizarem atividades investigativas, os estudantes têm a oportunidade de expressarem diferentes opiniões e ideias para explorar uma situação, articular a formulação de conjecturas, e conseqüentemente atingir o resultado da situação proposta. Desse modo, a realização de atividades investigativas, pelos estudantes, pode contribuir de modo significativo para o desenvolvimento de sua aprendizagem e a sua percepção em relação à disciplina.

As investigações matemáticas em sala de aula se desenvolvem em três fases: *introdução da tarefa, realização da investigação e discussão dos resultados*.

O *arranque da aula* é uma fase curta, afirmam os autores, porém crítica, pois nela o professor precisa garantir que os estudantes entendam o sentido da atividade proposta e o que se espera deles, ou seja, dessa fase depende todo restante da atividade. É importante destacar que essa fase é essencial principalmente quando se trata de turmas que nunca trabalharam com atividades de investigação, pois ela permite um melhor entendimento da natureza da atividade proposta. Outro ponto muito importante em relação à introdução da tarefa é que o estudante esteja inserido em um ambiente que o motive a prosperar na investigação, portanto, essa fase de arranque precisa ser bem breve.

Na fase de *desenvolvimento da atividade*, de acordo com os autores, o professor assume a postura de retaguarda passando a observar como os estudantes irão se debruçar sobre a questão e como eles desenvolvem os processos que caracterizam uma atividade de investigação, tais como: exploração e formulação de questões, formulação de conjecturas, teste e reformulação de conjecturas, justificção de conjecturas e avaliação do trabalho.

Na exploração, os estudantes levam mais tempo, buscam regularidades, dados, traçam caminhos para dar sentido à tarefa e chegar a um resultado. Em seguida formulam conjecturas. As conjecturas podem surgir pela manipulação de dados, observação direta ou analogia com outras conjecturas.

Após a formulação de conjecturas, o estudante deve testá-la. O teste de conjecturas pode se confundir com o próprio processo indutivo, ou seja, a manipulação dos dados leva ao caminho de uma conjectura que em seguida pode ser refutada por ela mesma. Nesse momento, salientam os autores, é importante

que se utilizem registros escritos para que os estudantes anotem seus resultados, e em seguida justifiquem essa conjectura. A justificação das conjecturas comumente confunde-se com as conclusões. Essa etapa é a que introduz a ideia de prova matemática e traz validação às conjecturas que resistiram a sucessivos testes, nesse momento o estudante além de justificar, desenvolve a sistematização das suas ideias.

Por fim, tem-se a *fase de discussão e avaliação da investigação*, momento no qual os estudantes põem em confronto suas estratégias, conjecturas, justificação e sistematização das principais ideias sobre o trabalho realizado, essas etapas são fundamentais para que os estudantes entendam os resultados e o sentido da investigação. Podemos nos deparar com dois episódios que ilustram essa fase de discussão e avaliação. O primeiro é quando um grupo acrescenta uma propriedade a uma conjectura de outro grupo, conhecido como: aprofundando uma conjectura. O segundo é quando as conjecturas se relacionam entre os grupos, conhecido como: conclusão por maioria de razão.

A aula de investigação surge como uma proposta metodológica que visa um maior engajamento dos estudantes nas atividades de Matemática. Nelas, os estudantes podem formular suas conjecturas, hipóteses, deduções, fazer teses e discutir suas conclusões com os colegas e com o professor.

Na aula de investigação a interação professor-estudante tende a ser valorizada e os estudantes tornam-se mais participativos, além disso, desenvolvem as capacidades de comunicar e argumentar matematicamente. Além disso, a aula de investigação traz rupturas, sobretudo em relação ao modelo tradicional de ensino, principalmente em relação aos sujeitos envolvidos no processo. O professor deixa de ser o único representante do conhecimento e passa a ser um mediador entre o conhecimento, o pensamento, e a realidade a qual o aluno está inserido.

A atividade de investigação no ensino de Trigonometria pode ser uma alternativa que irá permitir ao professor trazer uma nova realidade ao ensino-aprendizagem do conteúdo em questão. Tal fato caracteriza-se no desenvolvimento de situações que desafiam os estudantes e promovam uma maior aproximação entre os conteúdos estudados e a realidade na qual estão inseridos.

Problematizar uma situação cotidiana que envolva Trigonometria pode estimular os estudantes a explorarem uma dada situação e, com base em conhecimentos prévios, permitir que aos mesmos sejam capazes de atribuir

significado a uma situação desconhecida ou simplesmente caracterizada como difícil, além de promover o um maior engajamento e participação no contexto da sala de aula.

Além disso, a proposta pode trazer uma ruptura no modelo tradicional de ensino, uma vez que, o estudante torna-se o elemento chave de sua própria aprendizagem.

O professor, por sua vez, tem papel significativo na forma como irá guiar a atividade, mas não mais será tido como o único e principal detentor do conhecimento.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), o papel do professor em uma atividade de investigação é bem diferente daquele desenvolvido em uma aula tradicional. A aula de investigação traz uma dificuldade a mais na prática do professor, mas também pode proporcionar um momento de realização profissional.

Na aula de investigação, salientam, o professor precisa equilibrar-se sob dois polos. O primeiro consiste em dar autonomia aos estudantes, e o segundo consiste em garantir que o trabalho dos estudantes se desenvolva de acordo com os objetivos da disciplina. Para atender esse equilíbrio o professor precisa interagir com os estudantes e desempenhar alguns papéis, tais como: desafiar os estudantes e apoiar o trabalho deles.

Na fase inicial da investigação, segundo os autores, é de suma importância que o professor escolha questões ou situações que desafiem os estudantes. É importante que os estudantes se sintam desafiados para que eles desenvolvam um espírito interrogativo e busquem respostas para as questões colocadas pelo professor. É de suma importância que, mesmo após o arranque da aula, o professor continue a desafiar os estudantes para que a atividade avance naturalmente e que ele esteja atento ao trabalho que os estudantes estão desenvolvendo.

Para os autores, ao avaliar o progresso dos estudantes o professor obtém informações sobre o progresso da investigação, averigua o caminho percorrido por cada estudante ou grupo de estudantes e faz intervenções quando necessário. Nesse momento o professor pode tomar decisões em relação ao desenrolar da aula tais como: conceder mais tempo à investigação, realizar uma discussão intermediária ou passar à discussão final.

Ao longo da investigação, o estudante pode se confrontar com situações que nem mesmo o professor poderia ter pensado é importante nesse momento que o

professor expresse aos estudantes o seu raciocínio matemático e estabeleça conexões com outros conceitos promovendo a aprendizagem e oportunizando momentos para que o professor discuta o teste de conjecturas e dê evidência do que significa raciocinar matematicamente.

O professor precisa apoiar o trabalho dos estudantes averiguando como estão sendo desenvolvidos os passos da investigação. Para isso, o apoio oferecido pelo professor pode ser feito da seguinte forma: colocar questões mais ou menos diretas, fornecer informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão dos alunos, relembrar conceitos já estudados, promover a reflexão do seu trabalho destacando avanços e recuos.

Portanto, para desenvolver uma atividade de investigação o professor precisa conhecer bem os seus estudantes e desenvolver um bom ambiente de aprendizagem para garantir sucesso nas investigações e, principalmente, flexibilidade para lidar com situações que poderão surgir.

Assim, a atividade de investigação como uma poderosa ferramenta no tocante à construção do conhecimento, pode oportunizar aos estudantes o desenvolvimento de um rico ambiente de aprendizagem, no qual, ele se sente confiante e percebe a Matemática no seu aspecto construtivo, e não mais na perspectiva de um conhecimento pronto e acabado. Ou seja, o estudante concebe a matemática em suas diversas formas de aprendizagem.

Desse modo, entender a metodologia de uma atividade investigativa constitui um importante instrumento a ser utilizado pelos professores e futuros professores de Matemática na tentativa de dinamizar o ensino- aprendizagem e trazer melhorias ao contexto da sala de aula, principalmente no que diz respeito à visão dos estudantes em relação à disciplina.

3.1 Investigações Geométricas e Trigonometria

A Geometria é, sem dúvida, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), um ramo da Matemática que possibilita a exploração e o desenvolvimento de investigações, contribuindo no aprofundamento de relações e compreensão de fatos. As investigações geométricas auxiliam no entendimento da atividade matemática, entre algumas delas cabe citar: formulação e teste de conjecturas, demonstração, estabelecimento de relações entre situações da realidade e situações matemáticas,

bem como, o desenvolvimento de habilidades de visualização e distintas representações.

Segundo Pavanello (1993), nas últimas décadas o Brasil vem apresentando um relevante abandono do ensino de Geometria evidenciado principalmente nas escolas públicas após a promulgação da lei 5962/71. Essa lei dava a escola poderes quanto aos programas das diferentes disciplinas e como muitos professores sentiam-se inseguros em trabalhar com a geometria optaram por retirá-la dos programas ou reservar a sua abordagem apenas para o final do ano letivo. Essa insegurança em ensinar geometria pode ser evidenciada pela procura, entre os professores de matemática, de cursos de geometria oferecidos pelas universidades.

Para a autora, esse cenário causou divergências quanto ao papel da Geometria, seja do ponto de vista da pesquisa, como da Educação Matemática. A primeira acredita que ela deve ceder espaço a outros ramos com mais evidência na pesquisa matemática e a segunda defende as relações que a Geometria mantém com estes ramos e suas contribuições para o conhecimento matemático. No entanto, é válido ressaltar que esses motivos não foram os principais responsáveis pelo abandono do ensino da Geometria. Para entender os motivos do abandono do ensino de geometria no Brasil é necessário compreender as mudanças sociais, políticas e históricas que ocorreram a partir do século XX.

Segundo a autora, no início do século XX o ensino de Matemática no Brasil era essencialmente utilitário e destinava-se a desenvolver as técnicas de operações básicas à vida e ao comércio e com essa mesma ideia trabalhavam-se algumas noções de geometria. O ensino era dividido entre as elites e os conteúdos eram ensinados separadamente, por diferentes professores, sem aplicações práticas, os livros didáticos não apresentavam relações entre os diferentes ramos da matemática e os professores eram autodidatas, engenheiros civis ou militares.

Após a Primeira Guerra Mundial, salienta a autora, a Crise de 1929, Segunda Guerra mundial, e as décadas de 1930, 1940, 1950 e 1960 ocorreram mudanças no ambiente escolar, sobretudo no tocante do combate ao analfabetismo, expansão, reformas, organizações e melhorias na formação de professores. Essas mudanças afetaram diretamente o ensino de Matemática e conseqüentemente da Geometria.

Lorenzato (1995), discorre sobre os motivos de omissão do ensino de Geometria no Brasil, destacando como causas o fato de que muitos professores não possuem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas

práticas pedagógicas e a forma como a Geometria aparece nos livros didáticos que comumente está associada a definições, propriedades, nomes e fórmulas desconsiderando suas aplicações, natureza histórica ou lógica.

O artigo descreve alguns dos motivos evidenciados pelos professores para justificarem a falta de estudos em relação à geometria nos diferentes níveis de ensino e cita alguns exemplos para promover uma reflexão sobre a tendência que a nossa Educação impõe aos estudantes: a arimetização do raciocínio. Tal fato alerta para a busca de uma maior percepção geométrica, raciocínio geométrico, e linguagem geométrica.

É de suma importância destacar que a aprendizagem geométrica é essencial ao estudante para promover o desenvolvimento do pensar geométrico, para desenvolver a habilidade do raciocínio visual, para resolver situações do cotidiano, desenvolver a compreensão e conseguir resolver questões de outras áreas do conhecimento humano. Além disso, salienta a importância da aprendizagem geométrica para as crianças, destacando a sua percepção espacial, bem como a leitura e escrita.

A Geometria possibilita o processo de construção do conhecimento e por meio dela é possível desenvolver atividades de investigação, por meio de momentos que oportunizem a descoberta, desenvolvimento de conjecturas e a prática da experimentação. Além disso, proporciona um excelente apoio a outras disciplinas em questões de interpretação de gráficos, criações artísticas, científicas e matemáticas no tocante a situações abstratas.

A seguir, o autor apresenta uma série de tendências e sugestões para a prática de ensino de Geometria nos diferentes níveis considerando os aspectos essenciais a serem trabalhados pelos professores com os estudantes de modo a desenvolver as habilidades e aprendizagens necessárias ao seu desenvolvimento contribuindo assim para melhorar o processo de aprendizagem.

Segundo Lorenzato (2012), os desafios para a Educação Matemática brasileira são muitos e, comumente associados a falsas crenças, que perseguiram a Matemática ao longo dos tempos. Nesse contexto, podemos destacar a visão que muitas pessoas têm em relação à Matemática considerando-a como uma disciplina constituída apenas de números e contas, como a disciplina mais difícil do currículo, como uma disciplina detentora de total neutralidade, e desnecessária para muitas profissões. Quando voltamos o nosso olhar para o campo profissional e educacional

observamos que esse fator também pode trazer malefícios que são comumente observados no nosso cotidiano.

No campo profissional, de acordo com o autor, é notório que, cada vez mais, os estudantes buscam cursos e profissões como uma mera fuga da Matemática por considerá-la difícil. Além disso, a Matemática aparece como uma disciplina que pode promover a exclusão, uma vez que, em algumas situações, a disciplina costuma ser utilizada como instrumento de classificação dos candidatos a concursos. Tal fato, é importante para mostrar que por momentos a Matemática pode ser vista em um seu sentido negativo e controverso.

No campo educacional a situação não é muito diferente, salienta. A Matemática desenvolvida na escola promove uma falsa concepção que distancia o estudante do seu real significado. Segundo o autor a sala de aula de matemática tende a ser um ambiente com conteúdo excessivamente aritmetizado que não atende às demandas sociais dos estudantes em estabelecer uma relação prática com o que está sendo estudado. Desse modo, observamos que esses fatores acabam contribuindo para que estudantes desenvolvam sentimentos de aversão em relação à disciplina.

Pensando nessa situação, segundo o autor, nas últimas décadas, foram desenvolvidos programas que influenciaram decisivamente o desenvolvimento do ensino de Matemática desde o âmbito da escola e da sociedade, até o âmbito das universidades. No entanto, é importante salientar que ainda existem muitos desafios e questões a serem respondidas no tocante à formação de professores, a compreensão dos conteúdos, a utilização de mídias e recursos digitais que apoiem a ação pedagógica dos professores, os problemas relacionados ao Ensino Médio, o ensino superior, e a pesquisa.

O autor destaca ainda três questões que estão diretamente associadas aos desafios da Educação Matemática, entre eles cabe citar: formação continuada do professor, o que ensinar no primeiro ano do Ensino Fundamental e o ensino de Geometria. Em relação à formação continuada do professor, destaca as mudanças de metodologias do ensino de matemática, haja vista que os fatores sociais contribuem decisivamente na proposta metodológica a ser oferecida na sala de aula de matemática, além disso, questiona formação continuada dos professores mostrando que há contradições que podem torná-la ineficaz em alguns casos.

Em relação ao primeiro ano do ensino fundamental questiona as mudanças curriculares, a formação dos professores e a forma como os conteúdos são apresentados aos estudantes. E por fim, o ensino de Geometria, salientando a forma como é comumente apresentado nos livros didáticos, a aquisição de conhecimentos pelos professores, bem como, a forma como costuma ser apresentado aos estudantes pelo professor.

Atualmente, nas diversas partes do mundo se observam recomendações curriculares em relação ao ensino de Geometria. Nesse contexto, é importante destacar que se desenvolveram convergências em relação à utilização da Geometria como objeto de compreensão do espaço e a percepção da atividade matemática. De posse dessas convergências e da importância das investigações geométricas é válido ressaltar que o estudo do ponto de vista experimental e indutivo da Geometria aplicadas a situações da vida real, ou seja, o lado investigativo da Geometria que pode proporcionar interessantes experiências de aprendizagem.

Um exemplo de opção curricular é a utilização de programas de Geometria dinâmica que possibilita o desenho, a construção e a manipulação de objetos geométricos. Além disso, os momentos do processo de investigação, como desenvolvimento e exploração de conjecturas, coleta de dados e testes de conjectura, podem permitir ao estudante o desenvolvimento de explorações mais completas e organizadas.

Outra recomendação curricular é a utilização de material manipulável que possibilita o estudo de vários conceitos e relações geométricas, tais como: simetrias e cortes em poliedros. Tal material pode ser uma importante fonte de exploração por parte do aluno por ser atrativo, possibilitando a obtenção de dados e a formulação de conjecturas.

Além dessas opções Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), ainda destacam a ideia de investigação de Freudenthal, matemático e educador matemático holandês, salientando que, ao invés de apresentar os conceitos formais de Geometria, os estudantes podem ser submetidos a experiências nas quais sejam induzidos a buscarem conjecturas formuladas por eles. Essas ideias foram desenvolvidas buscando o trabalho com investigações geométricas seguindo recomendações curriculares, possibilitando oportunidades ao estudante para desenvolver suas atividades.

No Brasil, A BNCC (BRASIL, 2018) aborda a Geometria sob a perspectiva de resolver situações do cotidiano e de outras áreas. Ela apresenta um conjunto de procedimentos e conceitos que são indispensáveis no desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante dando-lhe oportunidade para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos. Além disso, a BNCC traz em seu contexto o aspecto funcional da Geometria, as transformações geométricas e as ideias matemáticas associadas a ela, principalmente a construção, a representação e a interdependência.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2018, p.227).

No Ensino Fundamental Anos Iniciais se espera que a Geometria seja trabalhada do ponto de vista referencial: localização, deslocamento e representações. Além disso, espera-se que os estudantes tenham conhecimento sobre figuras bidimensionais e tridimensionais, que saibam nomear e identificar polígonos, que reconheçam as figuras espaciais e suas planificações e que façam a manipulação de figuras geométricas reconhecendo seus lados, vértices e ângulos. Esses aspectos são fundamentais para nomear e comparar polígonos, bem como, para representá-los, posteriormente em malhas quadriculadas ou recursos de aplicativos de Geometria dinâmica.

Ao realizar atividades de investigações geométricas os estudantes podem encontrar um caminho para tentar desenvolver as habilidades descritas acima, uma vez que, durante a atividade de investigação, o estudante fica frente a situações do cotidiano ou situações de outras áreas e, por meio da exploração, construção de conjecturas, testes e justificativas torna-se capaz de desenvolver suas próprias teorias e assim, construir a sua aprendizagem.

Além disso, as investigações geométricas possibilitam aos estudantes a construção e manipulação das mais variadas figuras geométricas, essas

construções podem ser desenvolvidas a partir do uso de materiais manipuláveis ou de recursos tecnológicos diversos. Ambos os instrumentos são ferramentas que muito tem contribuído para o ensino- aprendizagem da matemática e, conseqüentemente, para a construção do conhecimento matemático.

No Ensino Fundamental Anos Finais se devem ampliar as aprendizagens realizadas nos Anos Iniciais e trazer tarefas que busquem desenvolver os conceitos de congruência e semelhança com base em transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas e usem desses conceitos para ter condições de obter triângulos congruentes ou semelhantes e realizar demonstrações simples desenvolvendo assim o raciocínio hipotético dedutivo. Além disso, espera-se a aproximação com a Álgebra, por meio da Geometria Analítica representada nos sistemas de equação do 1º grau, conteúdo amplamente articulado com a ideia de coordenadas, conjuntos e representações na reta.

Esse aspecto pode ser amplamente observado quando se realizam atividades de investigação geométrica em sala de aula, dado que, ao longo da exploração da situação problemática proposta, o estudante não sabe ao certo qual o caminho ele deve percorrer para chegar à solução. Para isso, ele cria várias conjecturas, essas conjecturas são estruturadas de acordo com seus conhecimentos prévios, e nesse ponto, o estudante faz um apanhado de todas as aprendizagens adquiridas até aquele momento. Além disso, o estudante vai poder manipular aquela situação, fazer associações com as mais variadas áreas do conhecimento e identificar se aquela conjectura é adequada para a situação proposta.

Assim, fica evidente que a Geometria não pode ficar resumida apenas ao cálculo de áreas e volumes, ou aplicações de teoremas envolvendo proporcionalidade, mas sim, para um amplo conjunto de situações que contribuem para a compreensão de características e propriedades de figuras, uso de materiais manipuláveis e tecnologia, suas construções e aplicações. Esse cenário favorece a construção de uma aprendizagem significativa e que desenvolva uma proximidade com a realidade do estudante.

Desse modo, evidenciamos que ao trabalhar os conteúdos de Geometria em sala de aula, o professor precisa abdicar do modelo de aula tradicional, focado no caráter dedutivo e axiomático da Geometria, e adotar metodologias dinâmicas que estimulem desenvolvimento dos aspectos ligados à observação, experimentação e construção do pensamento. Tais aspectos, contribuem para que o estudante consiga

ampliar a sua capacidade de raciocínio, de atribuir novos significados ao conteúdo estudado, desenvolver a sua criatividade e criticidade, bem como, desenvolver habilidades de comunicação e autonomia, como visto, esses aspectos são amplamente trabalhados nas atividades de investigação geométricas.

A BNCC da Paraíba (PARAÍBA, 2018), por sua vez, traz uma série de orientações curriculares em relação ao ensino de Geometria verificadas nos estudos de posição e deslocamento, bem como, formas e relações entre figuras planas e espaciais buscando com esses conhecimentos investigar propriedades, desenvolver conjecturas, argumentos geométricos e ideias matemáticas fundamentais tais como: construção, representação e interdependência.

No Ensino fundamental Anos Iniciais espera que os estudantes desenvolvam o conhecimento de localização, que descreva a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, que relacione figuras geométricas planas e espaciais, construção de plantas simples com base em roteiros a ser seguidos, que se identifique congruência de figuras por meio de características comuns, que se observem e descrevam característica de algumas figuras espaciais, que se façam comparações entre figuras planas em relação aos ângulos, simetrias, coordenadas cartesianas, ampliação e redução de figuras na malha quadriculada.

No Ensino Fundamental Anos Finais se espera que os estudantes aprofundem os conhecimentos adquiridos nos Anos Iniciais ao identificar características do plano cartesiano associando pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano, além de reconhecer características dos prismas e polígonos por meio de relações entre o número de vértices, faces e arestas de em função do seu polígono da base e assim poder nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos. Espera-se também que o estudante reconheça e construa figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão fazendo uso de instrumentos de desenho ou utilizando softwares de Geometria dinâmica, que se verifique a relação entre ângulos, triângulos, corpos redondos, relações métricas no triângulo retângulo e figuras espaciais.

Observa-se que as recomendações curriculares da Paraíba (PARAÍBA, 2018) também estimulam o desenvolvimento do caráter construtivo do pensamento matemático, comprovando que o trabalho desenvolvido ao longo das atividades de investigações geométricas possibilita ao professor atender uma recomendação

curricular amplamente aceita e permitir ao estudante o desenvolvimento de suas experiências e ideias no meio social no qual está inserido.

É válido destacar que o ensino de Geometria continua a ser desenvolvido nas escolas particulares, trabalhadas em diversas perspectivas e os professores não podem deixar de trabalhá-la mesmo que a sua formação seja deficiente e o prive de desenvolver uma aula de qualidade. Nesse contexto, o Pavanello (1993) retrata sobre a dualidade entre a escola da elite e a escola do povo, associando-a com a escola que ensina Geometria e a escola que não ensina Geometria.

Segundo Pavanello (1993), os professores observam que a ênfase no ensino da álgebra pode estar causando prejuízos aos estudantes, pois impede o desenvolvimento do pensamento necessário para a resolução de problemas. Além disso, ressalta que o estudo de Geometria traz importantes contribuições na análise de fatos e relações, bem como, no desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo que não pode ser deixado de lado.

A Trigonometria como parte integrante da Geometria, segundo Solera (2022), tem a sua origem entre os gregos e egípcios e está diretamente relacionada às necessidades de mensurar objetos, tais como: a altura das pirâmides, a largura dos rios, a altura das montanhas, bem como, aos estudos de astronomia. Além disso, Solera (2022) destaca que sua origem também remete a estudos de outros povos, como os babilônicos, conforme observou-se em estudos rudimentares de Trigonometria utilizados para solucionar problemas práticos da época, principalmente os problemas relacionados à navegação e agrimensura, por esta razão, fica claro que a trigonometria não é fruto de um povo só.

De acordo com Solera (2022), a Trigonometria é a parte da Matemática que estabelece relações entre as medidas dos elementos de um triângulo. Seu nome é constituído por três radicais oriundos do grego que estão diretamente associados à esta definição: tri= três, gonos= ângulos e metron= medir. Por estar diretamente associada ao estabelecimento de relações entre as medidas dos elementos dos triângulos, a trigonometria foi considerada como uma extensão da Geometria.

Solera (2022) ressalta que Hiparco (190 a.C. – 125 a.C.) é considerado o pai da Trigonometria, por ser o primeiro a observar as relações existentes entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo. Hiparco também se destaca por ser um dos maiores astrônomos da época trazendo contribuições importantíssimas para os estudos da Trigonometria esférica ao adotar o sistema sexagesimal desenvolvido

pelos babilônicos para dividir o círculo em 360° . Além disso, Hiparco também se destacou por construir uma tabela de cordas de arcos da circunferência. Tal tabela é considerada uma das precursoras das tábuas trigonométricas modernas como destaca (GARBI, 2010).

Outro nome de destaque na Trigonometria, de acordo com Solera (2022), é Ptolomeu, que assim como Hiparco também era um astrônomo da época e trouxe contribuições significativas a este ramo da Matemática principalmente a criação do documento mais antigo sobre a Trigonometria baseado nas ideias de Hiparco: o Almagesto. A obra desenvolvida por Ptolomeu, segundo (Garbi, 2010) possuía um excepcional talento didático- expositivo e foi considerada por muitos estudiosos da época como uma criação que superava as obras escritas em épocas remotas à sua criação elevando a astronomia e a matemática à níveis nunca alcançados.

Segundo Garbi (2010), Ptolomeu também trouxe contribuições significativas para a Geometria ao criar uma excelente tábua de cordas para ângulos variando de zero a 180° com intervalo de $1/2^\circ$, considerando os números expressos sempre na base sexagesimal dos babilônicos. A criação dessa tábua foi explicada em sua obra Almagesto. Além disso, salienta também que Ptolomeu tentou provar o postulado das paralelas a partir de outros axiomas, motivando outros geômetras a se debruçarem sobre a questão.

É importante destacar que os povos Hindus também tiveram contribuições importantíssimas para o desenvolvimento da Trigonometria. Durante séculos a obra O Almagesto era a maior fonte de pesquisa para os astrônomos da época, e graças às pesquisas de alguns cientistas do século VIII, descobriu-se que os hindus também haviam desenvolvido obras trigonométricas. Essas obras eram chamadas Siddhanta e apresentavam a Trigonometria diferente daquela apresentada por Ptolomeu, conforme destaca (SOLERA, 2022, p. 11).

Os matemáticos e astrônomos ficaram surpresos quando se depararam pela primeira vez com o Siddhanta. Em vez de seguir o caminho do Almagesto de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, os matemáticos hindus apresentavam uma Trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e metade do ângulo central.

Segundo Solera (2022), durante muito tempo os árabes oscilaram seus estudos entre o Almagesto e a Trigonometria de Jiva (como era chamada a trigonometria desenvolvida pelos povos hindus) até que o matemático al-Battani

inova a trigonometria Jiva introduzindo o círculo de raio unitário. A trigonometria que estudamos hoje, segundo o autor, está baseada nos trabalhos dos povos hindus.

Várias traduções foram feitas e contribuíram decisivamente para o desenvolvimento da Matemática na Europa principalmente no início do século XII. Em uma dessas traduções, observou-se a relação entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo era chamada de sinus, por esta razão, tal relação passou a ser chamada de seno, como conhecemos hoje, ao longo do tempo, outras relações foram surgindo como o cosseno e a tangente.

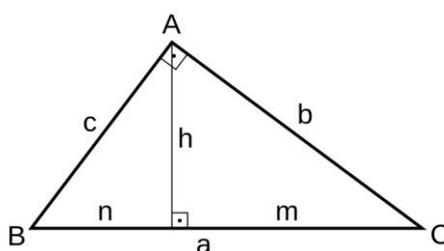
Na contemporaneidade sabemos que a Trigonometria não mais se restringe ao estudo de triângulos. Atualmente a Trigonometria possui aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento e, principalmente, nas ciências. A Trigonometria está presente em áreas como: Mecânica, Acústica, Música, Eletricidade, Topologia, Engenharia Civil etc. Por esta razão, é imprescindível que o estudante tenha uma boa compreensão dos conteúdos referentes a este ramo da Matemática.

3.1.1 As relações métricas no triângulo retângulo

O estudo das relações métricas no triângulo retângulo está associado à parte da Geometria plana e tem como objetivo analisar como podemos estabelecer relações entre as medidas correspondentes do triângulo retângulo. Por meio dela podemos obter expressões que nos levam a encontrar medidas não conhecidas de um triângulo. Dessa forma, é possível identificar as medidas dos principais elementos do triângulo retângulo (catetos, altura e hipotenusa).

O triângulo retângulo é constituído por um ângulo interno de 90° e os outros dois menores que somados formam 90° . Os dois ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares e formam juntos também 90° , conforme veremos na Figura 1 abaixo:

Figura 1- Representação do triângulo retângulo quando traçada a sua altura



Fonte: Wikipédia, 2022.

Os elementos de um triângulo retângulo são:

- a: hipotenusa;
- b: cateto;
- h: altura relativa à hipotenusa
- c: cateto;
- n: projeção do cateto c sobre a hipotenusa;
- m: projeção do cateto b sobre a hipotenusa;

Ao relacionarmos os elementos do triângulo retângulo podemos obter cinco relações métricas que descreveremos a seguir:

Na *primeira relação métrica*, também conhecida como *Teorema de Pitágoras*, tem-se que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. Ele é válido para todos os triângulos retângulos. A *segunda relação métrica* nos diz que a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma das projeções de seus catetos sobre a hipotenusa. A *terceira relação métrica* diz que o quadrado da altura de um triângulo retângulo é igual ao produto das projeções de seus catetos sobre a hipotenusa. A *quarta relação métrica* nos permite identificar a medida dos catetos ao quadrado, quando encontramos o produto da altura pela medida de suas projeções em relação à hipotenusa. Por fim, a *quinta relação métrica* que nos permite identificar que o produto entre a hipotenusa e a altura de um triângulo retângulo é igual ao produto dos seus catetos. Na tabela 1 a seguir mostraremos as relações métricas e suas fórmulas.

Tabela 1: Relações métricas

Relação Métrica	Fórmula
Primeira Relação Métrica	$a^2 = b^2 + c^2$
Segunda Relação Métrica	$a \cdot h = b \cdot c$
Terceira Relação Métrica	$b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$
Quarta Relação Métrica	$h^2 = m \cdot n$

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

É de suma importância que o estudante adquira os conhecimentos e habilidades necessárias em relação ao estudo de relações métricas no triângulo retângulo, uma vez que, por meio delas, é possível que o estudante consiga identificar algumas das principais características referentes ao estudo de triângulos e estabelecer associações com possíveis situações do cotidiano. Além disso, é importante destacar que o estudo das relações métricas no triângulo retângulo pode ser feito através de um aplicativo de geometria dinâmica, possibilitando que o estudante tenha uma melhor percepção visual e consiga estabelecer relações importantes referentes ao conteúdo.

3.2 o GeoGebra 2D e possibilidades para o ensino de Matemática

O GeoGebra 2D é um aplicativo de Matemática dinâmico, no qual, podem ser trabalhados conteúdos de álgebra e Geometria. Tal característica é responsável pela nomenclatura do aplicativo que consiste em uma junção dos termos: **Geometria** e **Álgebra**. O aplicativo foi desenvolvido por Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado no ano de 2001, na Universidade de Salzburgo (Áustria). Atualmente o aplicativo está disponível nas mais variadas plataformas e é acessado por pessoas nos diferentes lugares do mundo.

Segundo Nóbriga e Araújo (2010), o GeoGebra apresenta alguns diferenciais em relação a outros aplicativos de Geometria dinâmica. Um dos diferenciais do GeoGebra é a possibilidade de ter acesso às funções tanto pelo campo de entrada como pela barra de ferramentas, além de poder alterar as propriedades dos objetos que são construídos na janela de Álgebra e, também é possível modificar tais propriedades através das ferramentas obtidas clicando o botão direito do mouse.

O GeoGebra 2D representa uma plataforma de extrema importância para o ambiente da sala de aula de matemática, uma vez que, possibilita a representação de pontos, retas, planos, expressões, equações, entre outras utilidades, caracterizando-se como um recurso tecnológico que traz contribuições importantíssimas para o estudo e desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, conforme destaca Lamas e Mendes (2017):

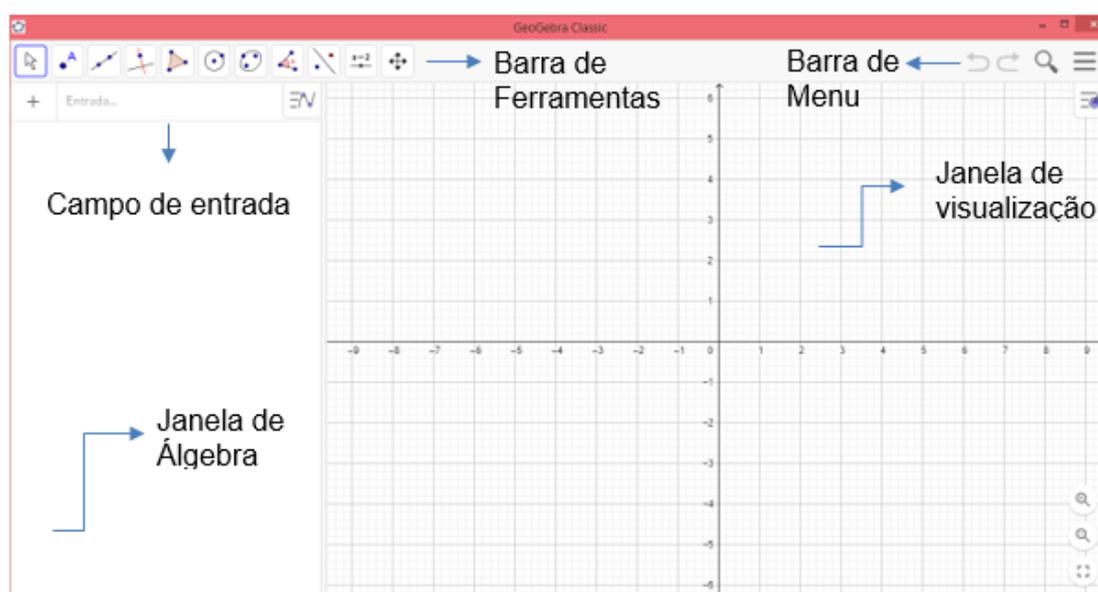
[...]desfrutando da tecnologia para abordar os conteúdos matemáticos, especialmente relacionados à Geometria, criam-se oportunidades de dinamizar o ensino. Dessa forma, ao mesmo tempo em que se ensinam

conteúdos básicos de matemática, é possível que o aluno aprenda tais conteúdos básicos de matemática, é possível que o aluno aprenda tais conteúdos de forma prazerosa e diferente da convencional (Lamas e Mendes, 2017, p.18).

Destacamos nessa pesquisa o uso do aplicativo GeoGebra, de caráter investigativo, para abordarmos questões relacionadas à Geometria criando oportunidades e caminhos para dinamizar o ensino e fazer com que os estudantes aprendam os conteúdos abordados de forma dinâmica e diferente da convencional.

As atividades desenvolvidas no GeoGebra podem trazer, segundo Lamas e Mendes (2017), reflexões sobre propriedades e conceitos amplamente estudados na escola básica. Tal característica pode ser trabalhada a partir de atividades de investigação que estimulem a exploração de questões que motivem a formulação e teste de conjecturas, validação e avaliação de resultados. Tais elementos devem ser estudados a partir da manipulação das ferramentas disponíveis na interface do aplicativo que será apresentada na Figura 2.

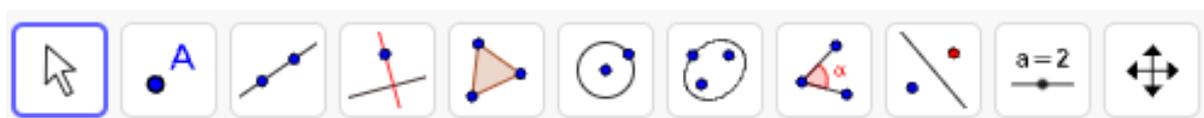
Figura 2- Interface do GeoGebra 2D



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.2.1 A barra de ferramentas do GeoGebra

A barra de ferramentas do aplicativo GeoGebra possui 11 janelas, nas quais, encontramos diversas possibilidades de ferramentas. Na Figura 3 apresentaremos a barra de ferramentas do aplicativo GeoGebra.

Figura 3– Barra de ferramentas do GeoGebra

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Na tabela 2 abaixo, destacamos algumas funções da barra de ferramentas:

Tabela 2 – Funções da barra de ferramentas

Ícone	Função
	 Mover  Função à Mão Livre  Caneta
	 Ponto  Ponto em Objeto  Vincular / Desvincular Ponto  Interseção de Dois Objetos  Ponto Médio ou Centro  Número Complexo  Otimização  Raízes

	<ul style="list-style-type: none">  Reta  Segmento  Segmento com Comprimento Fixo  Semirreta  Caminho Poligonal  Vetor  Vetor a Partir de um Ponto
	<ul style="list-style-type: none">  Reta Perpendicular  Reta Paralela  Mediatriz  Bissetriz  Reta Tangente  Reta Polar ou Diametral  Reta de Regressão Linear  Lugar Geométrico
	<ul style="list-style-type: none">  Polígono  Polígono Regular  Polígono Rígido  Polígono Semideformável

	<ul style="list-style-type: none">  Círculo dados Centro e Um de seus Pontos  Círculo: Centro & Raio  Compasso  Círculo definido por Três Pontos  Semicírculo  Arco Circular  Arco Circuncircular  Setor Circular  Setor Circuncircular
	<ul style="list-style-type: none">  Elipse  Hipérbole  Parábola  Cônica por Cinco Pontos
	<ul style="list-style-type: none">  Ângulo  Ângulo com Amplitude Fixa  cm Distância, Comprimento ou Perímetro  cm^2 Área  Inclinação  {1,2} Lista  $a = b$ Relação  Inspetor de Funções

	<ul style="list-style-type: none">  Reflexão em Relação a uma Reta  Reflexão em Relação a um Ponto  Inversão  Rotação em Torno de um Ponto  Translação por um Vetor  Homotetia
	<ul style="list-style-type: none">  $a=2$ Controle Deslizante ABC Texto  Inserir Imagem  Botão <input checked="" type="checkbox"/>  Caixa para Exibir / Esconder Objetos $a=1$  Campo de Entrada
	<ul style="list-style-type: none">  Mover Janela de Visualização  Ampliar  Reduzir  Exibir / Esconder Objeto AA Exibir / Esconder Rótulo  Copiar Estilo Visual  Apagar

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.2.2 O campo de entrada do GeoGebra

O campo de entrada do GeoGebra fica localizado na parte inferior da barra de ferramentas e por meio deste, é possível operar com o GeoGebra através de comandos escritos. Nesta barra, o usuário do aplicativo pode inserir fórmulas matemáticas e funções. A figura 4 mostra o campo de entrada do GeoGebra 2D:

Figura 4 – Campo de entrada do GeoGebra

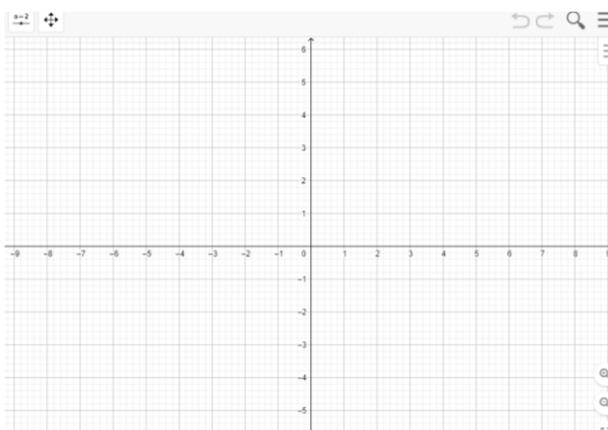


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.2.3 Janela de visualização

Comumente a janela de visualização possui o plano cartesiano, no qual podemos visualizar os objetos que podem ser construídos pelo campo de entrada ou pela barra de ferramentas. Na figura 5 a seguir apresentaremos a janela de visualização do GeoGebra.

Figura 5 – Janela de visualização do GeoGebra

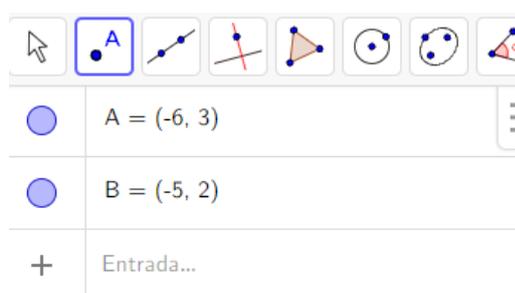


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.2.4 Janela de álgebra

A janela de álgebra tem como função exibir as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização. A janela algébrica fica localizada na parte superior do campo de entrada. A Figura 6 a seguir mostra a representação dos pontos A e B na Janela de álgebra do GeoGebra.

Figura 6– Janela de álgebra do GeoGebra

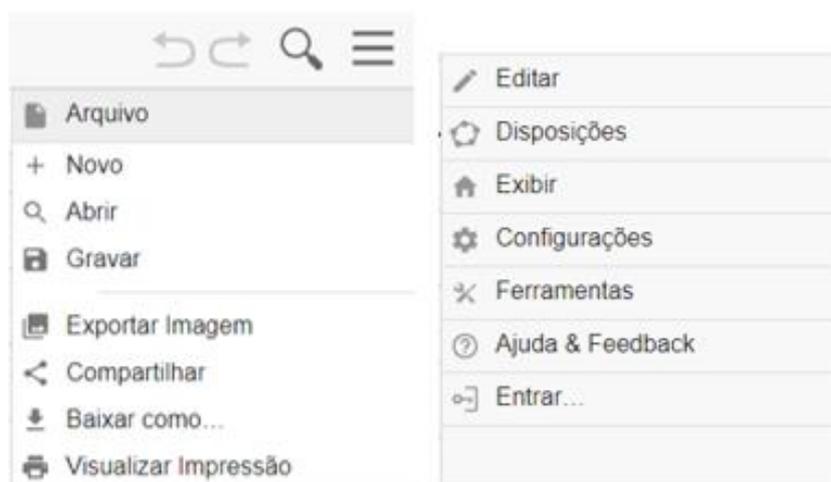


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.2.5 Barra de Menu

A barra de Menu apresenta algumas funcionalidades de apresentação do aplicativo, entre elas os comandos contidos na Barra de Ferramentas, além de outros comandos que podem ser percebidos na imagem abaixo:

Figura 7 –Barra de menu do GeoGebra



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Abar (2012) apresenta uma proposta que contém algumas estratégias pedagógicas para o ensino de Matemática e tem como foco principal o uso do aplicativo GeoGebra, considerando os benefícios que o uso de softwares tem promovido ao ensino-aprendizagem de matemática considerando principalmente a questão da interação.

Ao longo do artigo foram destacadas algumas das principais características do aplicativo GeoGebra, ressaltando sua importância para o ensino de matemática, considerando os vários recursos disponíveis ao ensino de álgebra e Geometria. Tal recurso foi caracterizado como um recurso de Geometria dinâmica que pode ser utilizado nos mais variados níveis de ensino. A seguir a autora destaca algumas das pesquisas que foram desenvolvidas e analisadas considerando seus aportes teóricos e as diferentes metodologias a serem utilizadas na sala de aula de Matemática.

O primeiro trabalho a ser analisado considera a argumentação como método de ensino na compreensão dos conteúdos de área e perímetro. O segundo trabalho foi desenvolvido por alunos de licenciatura em matemática e considerava a utilização de ambientes de Geometria dinâmica na construção de argumentações. O terceiro trabalho considera como a Educação Matemática pode contribuir para o ensino aprendizagem de funções trigonométricas permitindo a construção de um ambiente favorável as aprendizagens do conteúdo em questão. O quarto trabalho tinha como objetivo o aprendizado dos educandos considerando o uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência. O quinto trabalho tem como objetivo abordar aspectos menos discutidos no currículo relacionados ao conteúdo de seções cônicas considerando como base o currículo do estado de São Paulo.

O sexto trabalho promove uma atividade investigativa que possibilita aos estudantes observar transformações isométricas no aplicativo GeoGebra por meio de movimentos de rotação, translação e reflexão. O sétimo trabalho faz uma abordagem em relação ao uso de metodologias computacionais no aplicativo GeoGebra com o objetivo de potencializar as aprendizagens dos estudantes. O oitavo trabalho tinha como objetivo mostrar as ideias fundamentais do cálculo diferencial e integral e suas aplicações na resolução de problemas utilizando o aplicativo GeoGebra e o nono trabalho que tinha como objetivo as dificuldades e

possibilidades dos professores de Matemática possuem na utilização do GeoGebra considerando o ensino do Teorema de Tales.

Ambos os trabalhos mostraram a importância do desenvolvimento da interação, autonomia na comunicação e desenvolvimento de ideias e o desenvolvimento de aprendizagens em relação a linguagens e símbolos específicos da Matemática, além disso, o desenvolvimento de um raciocínio geométrico, observação, mobilização de conhecimentos prévios, conexões com os temas a serem estudados, aumento na capacidade de interpretação e resolução de problemas.

4 METODOLOGIA

Com o intuito de atender aos objetivos gerais e específicos, a proposta metodológica desenvolvida segue a técnica de pesquisa, segundo (Mazucato, 2018, p.60) de abordagem qualitativa, uma vez que, segundo o autor, “ela não emprega instrumentos estatísticos como base para a análise e leva em consideração os componentes de uma situação, suas interações e influências recíprocas”.

Ao longo da pesquisa, observamos como os estudantes desenvolvem a construção e o estudo das relações métricas a partir de uma atividade de investigação com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D. Ela foi aplicada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Major José Barbosa localizada na cidade de Aroeiras. Os dados da pesquisa foram coletados a partir de questionários respondidos pelos estudantes. Para atendermos aos objetivos geral e específico deste trabalho foram necessários quatro encontros de duas aulas cada (90 minutos) e a turma foi dividida em quatro grupos de cinco e seis pessoas.

Para atingirmos o primeiro objetivo específico de nossa pesquisa, fez-se necessário identificar e analisar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao estudo de triângulos, sua perspectiva em relação ao conteúdo de Trigonometria e a sua concepção em relação ao uso de tecnologias em sala e aula. Nesse contexto, para facilitar o levantamento de informações, elaboramos um questionário, com seis questões, para serem respondidas virtualmente pelos estudantes.

A escolha do questionário ocorreu devido ao seu elevado potencial como instrumento de coleta de dados e, desenvolvê-lo na modalidade virtual, nos possibilitou uma maior comunicação e participação dos estudantes, uma vez que, na atualidade, é comum o desenvolvimento de pesquisas realizadas de modo virtual, conforme destaca Mazucato (2018).

Na atualidade, observamos que muitas pesquisas podem ser feitas virtualmente por meio de questionários digitais – enviados através de links – que são respondidos de maneira online (o Google possui, por exemplo, versões gratuitas de programas que gerenciam questionários virtuais que após serem desenvolvidos, enviados e respondidos, sistematizam automaticamente os dados levantados e fazem, inclusive, alguns tipos mais simples tratamentos/cruzamentos estatísticos) (Mazucato, 2018, p 73).

O questionário foi estruturado no programa Google Forms e as questões estão descritas no apêndice A.

O primeiro encontro foi realizado no dia 03 de junho de 2022 e foi destinado a exploração das principais características da interface do GeoGebra 2D e exploração dos principais comandos necessários para a realização do trabalho. Abordou-se sobre a história do GeoGebra 2D, suas funcionalidades, e a exploração de alguns exemplos utilizando alguns dos comandos necessários para a realização da atividade. A seguir, deixamos os estudantes livres para que pudessem explorar o aplicativo e reproduzir algumas figuras geométricas.

Estavam presentes na sala dezenove estudantes, dos quais, treze haviam respondido ao questionário inicial. Como a escola em que a pesquisa foi desenvolvida não dispõe de laboratório de informática, foi solicitado aos estudantes que instalassem o aplicativo GeoGebra 2D nos seus celulares. Dos dezenove estudantes presentes, apenas um deles não possuía celular e, para que todos pudessem participar das atividades, optamos então por dividir a turma em quatro grupos contendo entre quatro e seis estudantes. Os grupos foram nomeados em ordem alfabética: grupo A, grupo B, grupo C e grupo D.

Para facilitar o desenvolvimento de nossas atividades, os estudantes foram levados para uma sala próximo à secretaria da escola para que todos tivessem acesso à rede de internet. A comunicação com os estudantes deu-se através da oralidade e por slides desenvolvidos no aplicativo Power Point, apresentados à turma no aparelho de TV da própria escola. As interações ocorriam em um grupo da rede social Whatsapp, no qual, os estudantes enviavam imagens contendo suas construções e representações.

Inicialmente, tivemos o cuidado de averiguar se todos os grupos já haviam instalado corretamente o aplicativo GeoGebra no aparelho celular. Para facilitar a instalação, foi apresentada uma sessão no Power Point contendo todo o passo a passo para a devida instalação do aplicativo.

No segundo encontro ocorreu no dia 09 de junho de 2022 e teve como objetivo a aplicação de uma atividade de investigação geométrica na qual os estudantes trabalharam com algumas características dos triângulos e observaram algumas de suas relações métricas. Por meio de slides, os estudantes foram instruídos a construir um triângulo retângulo e três triângulos em cada lado do triângulo. Em seguida, os estudantes responderam a alguns questionamentos

referentes à representação feita, analisando o que ocorria com as áreas dos quadrados quando manipulávamos o tamanho dos lados do triângulo.

Estavam presente na sala de aula dezoito estudantes. Para facilitar o desenvolvimento das atividades de investigação, os estudantes foram novamente deslocados para uma sala próxima à secretaria da escola para que pudessem ter acesso à rede de internet e foram organizados em quatro grupos, os mesmos da aula anterior. O encontro foi dividido em duas aulas de quarenta e cinco minutos cada.

Inicialmente foi dado um tempo de 10 minutos para que os estudantes pudessem se organizar e instalar o aplicativo, haja vista que alguns haviam removido o aplicativo do aparelho celular. Após a organização da turma foi aberta uma nova sessão de slides no aplicativo Power Point, apresentados aos estudantes pelo aparelho de TV da própria escola.

Essa nova sessão do Power Point foi estruturada de acordo com as dificuldades apresentadas pelos estudantes no questionário inicial da pesquisa e, foi organizada de modo a trazer contribuições significativas aos conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conteúdo: triângulos.

No terceiro encontro ocorreu no dia 10 de junho de 2022 e teve como objetivo a entrega de uma nova atividade aos estudantes na qual eles fizeram a construção e exploração, no GeoGebra 2D de algumas situações envolvendo o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Estavam presente na sala de aula dezesseis estudantes. Para facilitar o desenvolvimento das atividades de investigação, os estudantes foram novamente deslocados para uma sala próxima à secretaria da escola para que pudessem ter acesso à rede de internet e foram organizados em quatro grupos, os mesmos da aula anterior, fazendo apenas algumas substituições devido ao número de estudantes. O encontro foi dividido em duas aulas de quarenta e cinco minutos cada. Após a organização da turma foi aberta uma sessão de slides no aplicativo Power Point, apresentados aos estudantes pelo aparelho de TV da própria escola.

No quarto e último encontro ocorreu no dia 12 de julho de 2022 e teve como objetivo promover a discussão dos resultados obtidos pelos estudantes nas atividades propostas e a sistematização de ideias. Além disso, foi enviado um novo questionário, no qual, observamos a opinião dos estudantes em relação às atividades desenvolvidas, bem como, identificamos os impactos que as

investigações com auxílio do aplicativo Geogebra 2D trouxeram para a aprendizagem do conteúdo Relações Métricas no triângulo retângulo.

Estavam presente na sala de aula dezoito estudantes. Para facilitar o desenvolvimento das atividades de investigação, os estudantes foram novamente deslocados para uma sala próxima à secretaria da escola para que pudessem ter acesso à rede de internet e foram organizados em quatro grupos, os mesmos dos encontros passados. O encontro foi dividido em duas aulas de quarenta e cinco minutos cada.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 O Questionário Inicial

A primeira questão referente ao questionário inicial teve como objetivo identificar o conhecimento e a familiaridade dos estudantes com o conteúdo: triângulos. Identificamos, de maneira geral, que a maioria dos estudantes possuía conhecimento sobre o conteúdo conseguindo caracterizar os triângulos como figuras geométricas que possuem três lados, três ângulos e três vértices. Apenas um estudante alegou ter pouco conhecimento sobre o conteúdo. Na figura 8 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes a escolha das respostas abaixo deu-se devido ao caráter repetitivo das demais:

Figura 8 – Algumas respostas da primeira questão do questionário inicial



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A segunda questão teve como objetivo observar se os estudantes conseguem evidenciar algumas das principais características dos triângulos e destacar algumas de suas propriedades. Ao analisarmos o questionário é possível identificar que, alguns estudantes tiveram dificuldade em relacionar os lados, os ângulos e os vértices dos triângulos, alguns alegaram não ter conhecimento sobre o conteúdo, outros optaram por não responder à pergunta ou respondê-la de modo equivocado, relacionando-a com conteúdos de outras disciplinas.

No entanto, é importante evidenciar que, em sua maioria, a turma conseguiu identificar as relações entre os lados, ângulos e vértices dos triângulos e destacar algumas de suas características e propriedades. Na figura 9 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes. A escolha das respostas abaixo se deu devido ao caráter repetitivo das demais:

Figura 9- Algumas respostas da segunda questão do questionário inicial

Figura 1: possui três lados com medidas iguais.

Figura 2: possui dois lados com medidas iguais.

Figura 3: possui todos os lados com medidas diferentes.

O lado menor é sempre oposto ao menor ângulo interior; o lado maior é sempre oposto ao maior ângulo interior; a soma dos ângulos internos é 180° ; a soma dos ângulos externos é 360° .

As propriedades da matéria são as características físicas ou químicas que nela existem e servem para diferenciar os materiais.

Não tem conhecimento sobre o assunto.

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A terceira questão teve como objetivo identificar se o estudante possui conhecimento sobre as classificações dos triângulos. Para isso, a questão foi estruturada de modo que o estudante observasse as ilustrações da questão anterior (questão 2) e, expressasse a sua perspectiva em relação à classificação dos triângulos. Identificamos que apenas cinco estudantes conseguiram classificar corretamente os triângulos expressos no enunciado da questão.

O restante dos estudantes possuía pouco ou nenhum conhecimento em relação ao conteúdo, tal fato pode ser evidenciado pela ausência de respostas ao questionário, ou as respostas que foram dadas de forma incompleta. Na figura 10 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes. A escolha das respostas abaixo deu-se devido ao caráter repetitivo das demais:

Figura 10 – Algumas respostas da terceira questão do questionário inicial

Triângulo, retângulo e obtusângulo

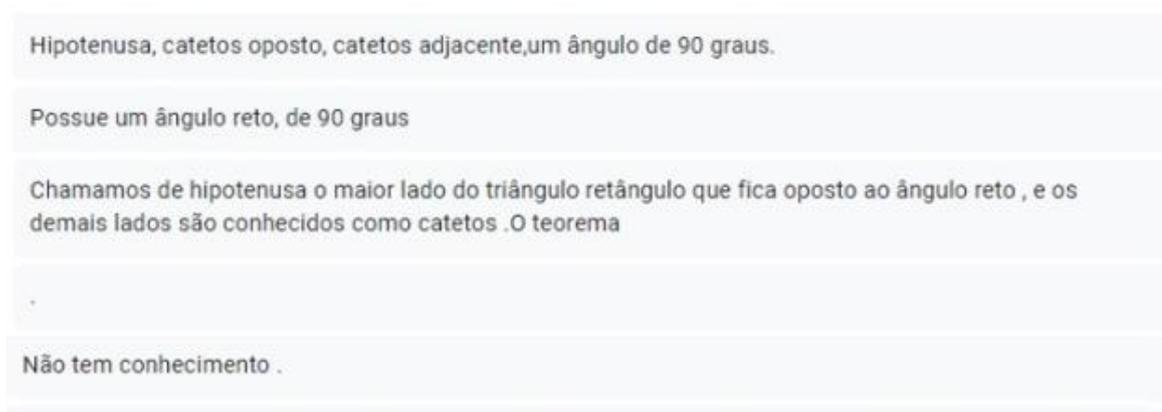
Equilátero(possui todos os lados iguais), escaleno(nenhum dos lados são iguais), retângulo(o qual se tem um ângulo de 90 graus.

Os triângulos são figuras geométricas que podem ser classificadas de acordo com as medidas de seus lados e seus ângulos.

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A quarta questão tinha como objetivo observar os conhecimentos dos estudantes em relação ao triângulo retângulo e suas características. Ao observarmos o questionário, notamos que, em sua maioria, a turma possuía conhecimento sobre o triângulo retângulo e evidenciaram algumas de suas características como a definição de hipotenusa e catetos, bem como, a identificação do ângulo de noventa graus. Apenas um estudante afirmou não ter conhecimento sobre o conteúdo. Na figura 11 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes. A escolha das respostas abaixo deu-se devido ao caráter repetitivo das demais:

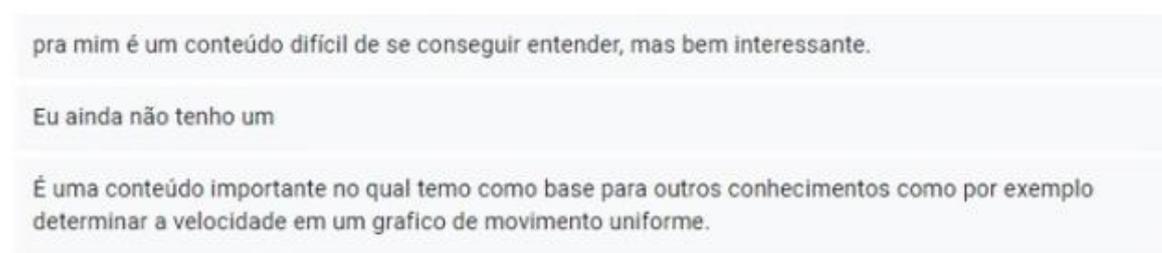
Figura 11- Algumas respostas da quarta questão do questionário inicial



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A quinta questão teve como objetivo identificar se os estudantes já tiveram contato com o conteúdo de Trigonometria. A análise das respostas nos permitiu observar que alguns estudantes alegaram não ter muito conhecimento sobre o conteúdo, mas a maioria dos estudantes conseguiu trazer uma definição convincente da sua perspectiva em relação ao conteúdo: Trigonometria. Na figura 12 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes. A escolha das respostas abaixo deu-se devido ao caráter repetitivo das demais:

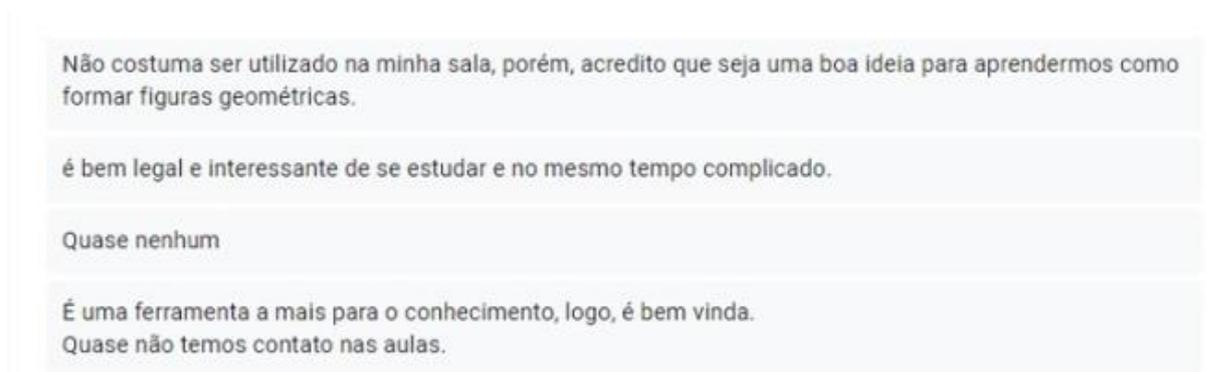
Figura 12 – Algumas respostas da quinta questão do questionário inicial



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A sexta e última questão tinha como objetivo detectar a perspectiva dos estudantes em relação ao uso de recursos digitais e aplicativos em sala de aula, bem como, fazer uma sondagem em relação à frequência com que os estudantes têm contato com esses recursos. Os estudantes destacaram que: o uso dos recursos digitais em sala de aula desperta o interesse dos estudantes, uma vez que, estão presentes nas mais diversas situações do seu cotidiano; uso de recursos digitais pode melhorar a representação de figuras geométricas nas aulas de Matemática; os recursos digitais podem proporcionar o desenvolvimento de aulas mais participativas e dinâmicas e facilitam o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, a maioria dos estudantes alegou que o uso de tais recursos nas aulas de Matemática ocorre com pouca ou nenhuma frequência. Na figura 13 a seguir, destacamos algumas das respostas dos estudantes. A escolha das respostas abaixo deu-se devido ao caráter repetitivo das demais:

Figura 13 – Algumas respostas da sexta questão do questionário inicial



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

5.2 O primeiro encontro

Observou-se que, durante o primeiro encontro, os estudantes ficaram curiosos com o aplicativo e, antes mesmo de começarmos nosso trabalho, notamos que, alguns estudantes, já estavam explorando algumas funções do aplicativo e questionando suas possíveis utilidades no cotidiano e, também, no contexto da sala de aula.

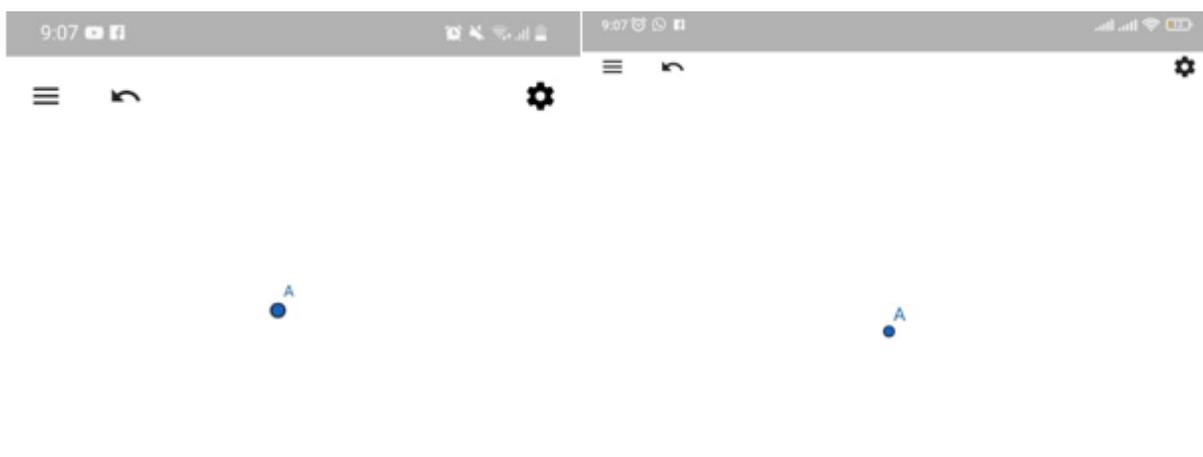
Ao averiguarmos que a instalação foi concluída com sucesso por todos os grupos, iniciamos uma discussão sobre o aplicativo GeoGebra. Evidenciamos que nenhum dos estudantes que estavam presente na sala de aula tinham conhecimento sobre o aplicativo. Então, apresentamos uma nova sessão de slides aos estudantes, na qual, discutimos um pouco sobre o contexto histórico de criação do GeoGebra e expomos algumas de suas aplicações no estudo de conteúdos de Álgebra e Geometria.

A seguir, apresentamos uma outra sessão de slides aos estudantes, na qual, mostramos as principais características da interface do aplicativo GeoGebra, tais como: janela de álgebra, barra de ferramentas, área de desenhos, entrada de comandos e o menu principal. Além disso, explicamos um pouco sobre a funcionalidade de cada um dos botões presentes na barra de ferramentas do aplicativo, ilustrando-as com algumas situações bem simples.

Para garantirmos uma melhor familiarização dos estudantes com o aplicativo, após a apresentação do contexto histórico, aplicações e interface do GeoGebra, solicitamos aos estudantes que realizassem algumas construções específicas utilizando o aplicativo. Essas construções foram elaboradas estrategicamente de modo a auxiliar os estudantes nas futuras representações que serão solicitadas nas atividades de investigações geométricas.

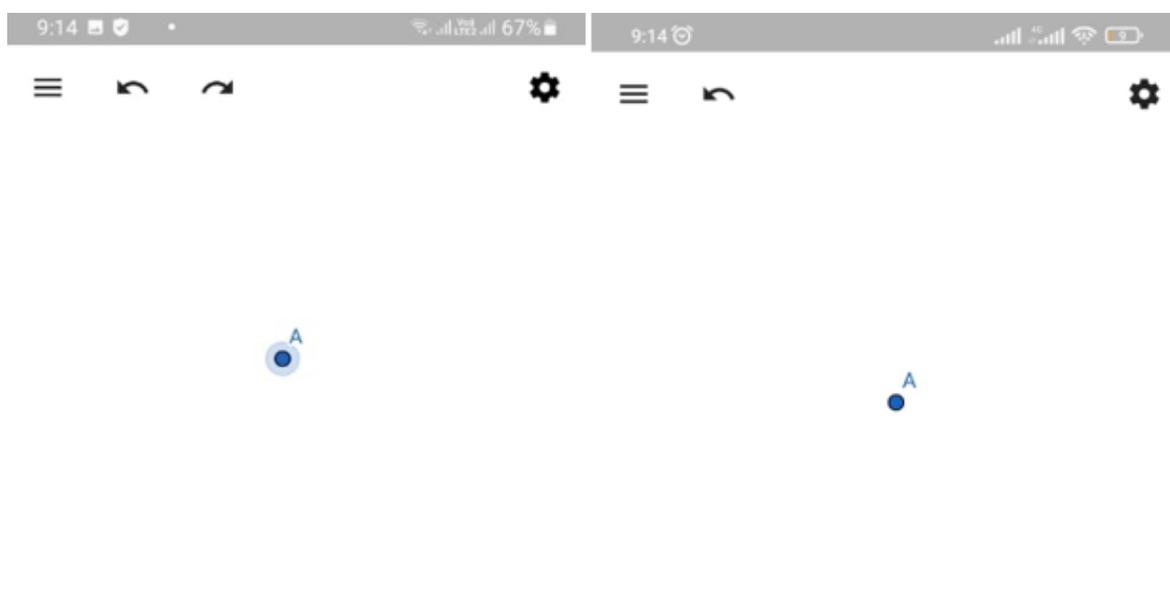
Inicialmente solicitamos aos estudantes que construíssem um ponto A na janela de desenhos, os passos para a construção do ponto no aplicativo GeoGebra são: Clique na janela 1 “Novo ponto” e em seguida, clique em alguma parte da janela de visualização. Observamos que os grupos facilmente conseguiram construir um ponto na área de desenho do aplicativo, haja vista que rapidamente enviaram as imagens com as suas representações no grupo de Whatsapp, bem como a falta de questionamentos e inquietações durante a construção. Nas figuras 14 e 15 a seguir apresentaremos algumas das construções realizadas pelos estudantes:

Figura 14 - Construção do ponto pelos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Figura 15 - Construção do ponto pelos grupos C e D

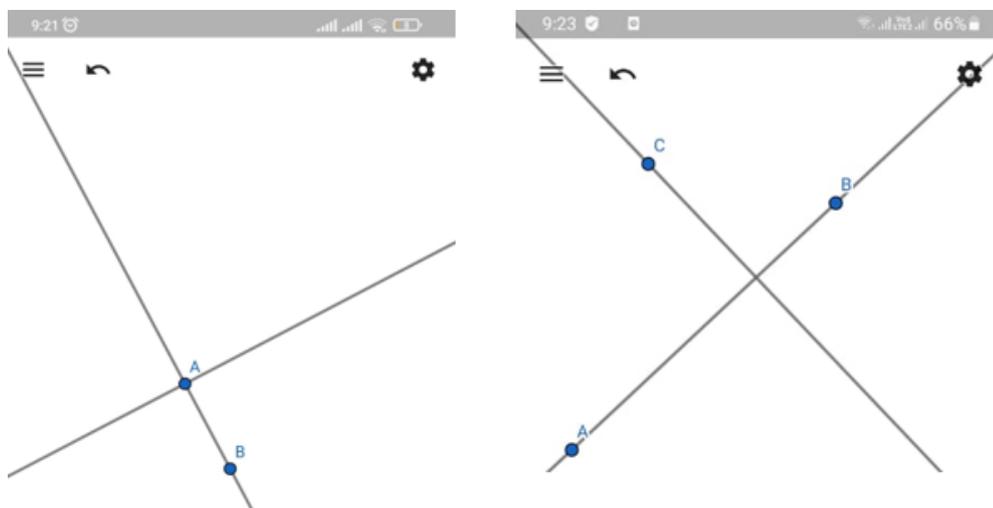


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Em seguida, solicitamos que os estudantes construíssem uma reta perpendicular, os passos para a construção de uma reta perpendicular no GeoGebra, são: Utilizando a construção anterior, selecione a janela 4 “Reta Perpendicular” e clique sobre o ponto A da reta. Observou-se que alguns grupos confundiram a construção da reta perpendicular com uma semirreta, no entanto, após algumas explicações, os estudantes conseguiram com facilidade reproduzir

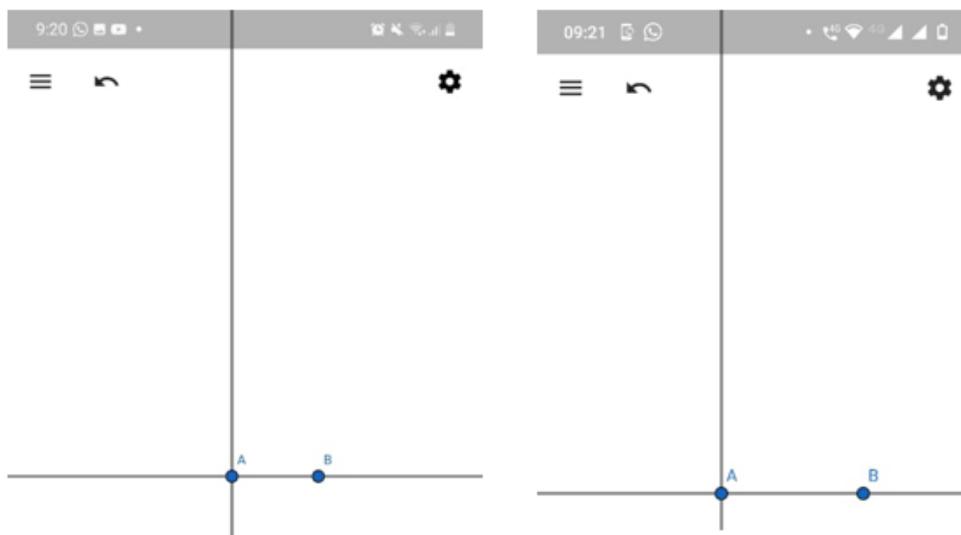
uma reta perpendicular no aplicativo. Nas figuras 16 e 17 a seguir apresentaremos algumas das construções realizadas pelos estudantes:

Figura 16 - Construção da reta perpendicular pelos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Figura 17 - Construção da reta perpendicular pelos grupos C e D

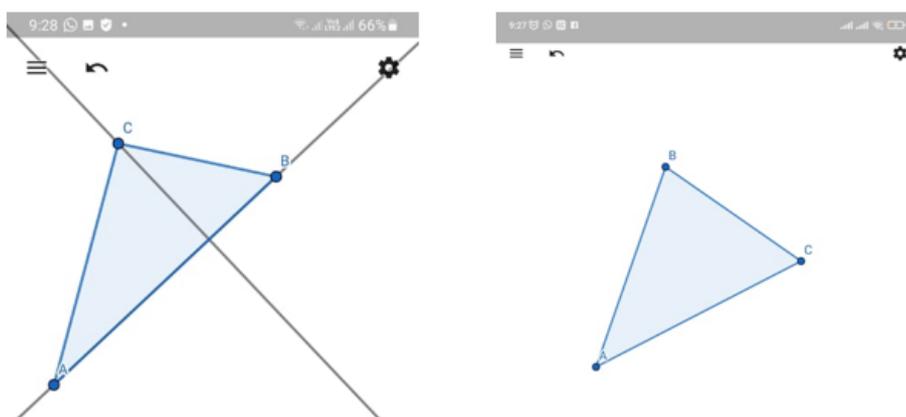


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Após a construção da reta perpendicular, solicitamos aos estudantes que construísse um polígono de três lados, os passos para a construção do polígono de três lados são: Selecione a janela 5 “Polígono” e clique sobre os 3 pontos até voltar

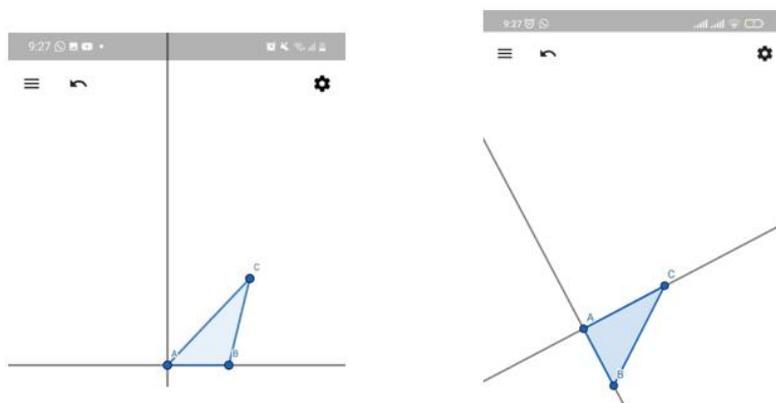
ao primeiro ponto. Alguns grupos sentiram dificuldade na hora de construir um polígono de três lados, sobretudo, os grupos B e D. Para tentar solucionar algumas dessas dificuldades a pesquisadora fez algumas mediações entre os passos de construção e algumas ações que foram executadas no aplicativo durante a exploração de suas ferramentas, apesar das dificuldades, todos os grupos conseguiram ilustrar a situação solicitada. Nas figuras 18 e 19 seguir, apresentaremos algumas das construções realizadas pelos estudantes:

Figura 18 - Construção do polígono de três lados pelos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Figura 19 - Construção do polígono de três lados pelos grupos C e D

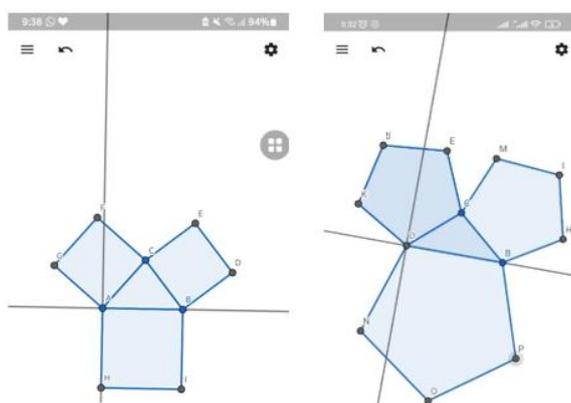


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A seguir, foi solicitado aos grupos a construção de um polígono no segmento de outro polígono. Os passos para a construção de um polígono no segmento de outro polígono são: Utilizando o polígono representado na atividade anterior, clique na janela 5 "Polígono Regular" e indique a quantidade de lados que o novo polígono

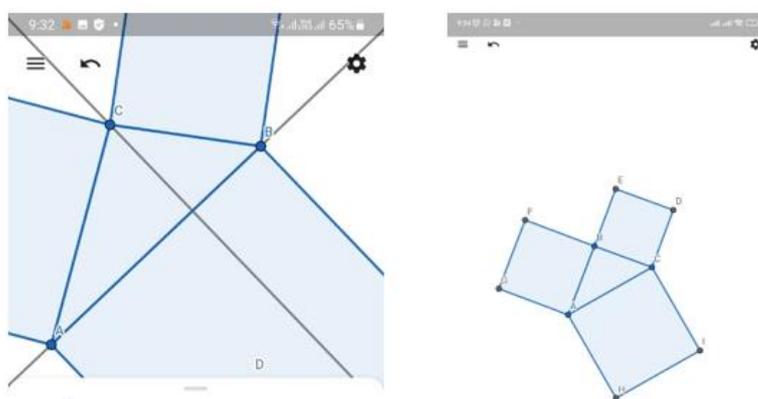
terá. Todos os grupos sentiram dificuldade em representar um polígono no segmento de outro polígono, para tentar sanar algumas dessas dificuldades a professora pesquisadora deu algumas instruções em relação a alguns comandos do aplicativo, e todos os grupos conseguiram enviar as suas representações. Nas figuras 20 e 21 a seguir, apresentaremos algumas das construções realizadas pelos estudantes:

Figura 20 – Construção de um polígono no segmento de outro polígono pelos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

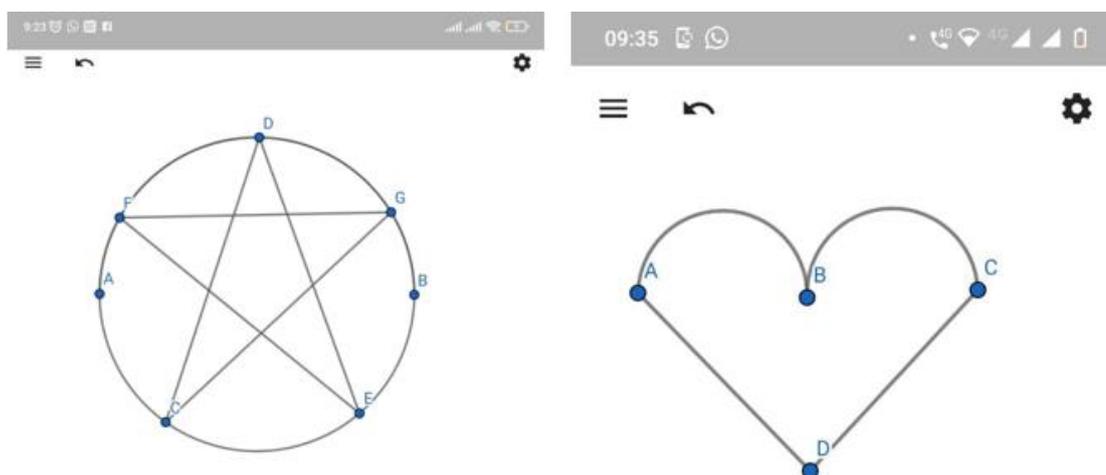
Figura 21 – Construção de um polígono no segmento de outro polígono pelos grupos C e D



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

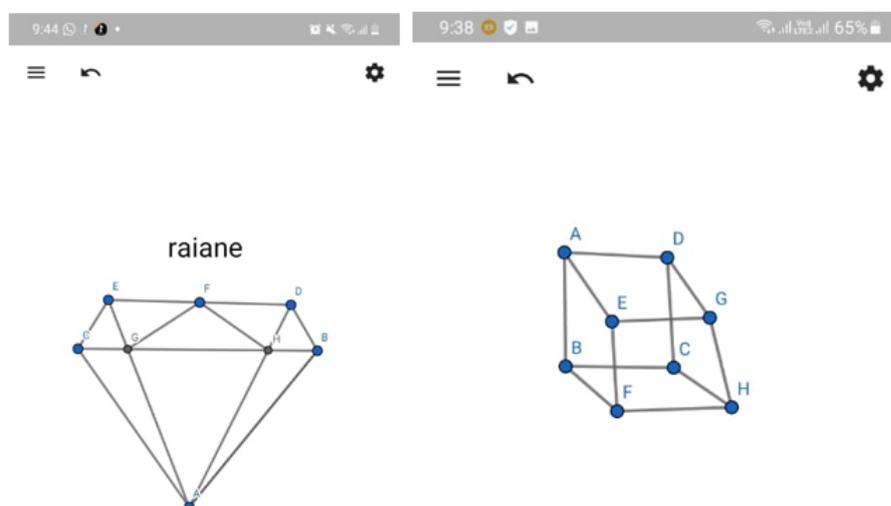
Por fim, deixamos os estudantes livres para que, utilizando a sua criatividade e os conhecimentos adquiridos durante a aula, pudessem desenvolver no GeoGebra, a representação de algumas figuras conhecidas. As figuras 22 e 23 ilustram as representações construídas pelos estudantes:

Figura 22 – Desenho livre dos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Figura 23– Desenho livre dos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

5.3 O segundo encontro

A primeira apresentação de slides feita durante o segundo encontro versava sobre os tipos de triângulos e suas classificações em relação aos lados e ângulos. Houve uma pequena participação dos estudantes e foi possível perceber que alguns deles estavam familiarizados com o conteúdo, como foi possível identificar no questionário inicial. Alguns alunos apresentaram algumas dúvidas em relação ao conteúdo e alegaram que não lembravam algumas de suas principais características ou que nunca haviam estudado sobre.

A segunda sessão de slides foi dedicada a definição e apresentação de algumas das principais características do triângulo retângulo. A maioria dos estudantes mostrou ter conhecimento sobre o triângulo retângulo, foram capazes de identificar o ângulo de noventa graus e sua representação, no entanto, apenas um estudante conseguiu especificar a nomenclatura dos lados do triângulo retângulo. Essa característica nos mostra que pode haver uma contradição entre o que foi respondido no questionário e o que foi observado no dia da pesquisa. Tal fato pode ocorrer em virtude de uma falta de interpretação das questões como foi evidenciado em Mazucato (2018) ao relatar sobre as limitações que o uso de questionários pode trazer para pesquisa:

Em termos de limitações, os questionários: 1) quando não aplicados pessoalmente – o que gera um custo operacional muito grande, em especial com pesquisas que resguardam grandes amostras – são facilmente rejeitados; 2) frequentemente retornam sem serem respondidos; 3) caso haja incompreensão por parte do informante, não há a possibilidade de sanar tal empecilho; 4) são devolvidos tardiamente, prejudicando o andamento e a execução da pesquisa; 5) são extremamente impessoais e ratificam, por vezes, uma relação utilitária entre o sujeito e o objeto da pesquisa (Mazucato 2018, p: 75).

Após a discussão dos conteúdos, seguimos para o desenvolvimento da primeira atividade de investigação geométrica com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D.

A primeira atividade de investigação geométrica tinha como objetivo indicar uma situação problemática que motivasse os estudantes a realizarem explorações para, a partir dela, desenvolverem a formulação de possíveis conjecturas que em seguida deveriam ser testadas e discutidas entre os integrantes dos grupos. A situação problemática foi apresentada em um dos slides e será descrita a seguir:

Situação 1: Alicia estava resolvendo uma atividade de Matemática sobre Triângulo Retângulo no aplicativo GeoGebra. Por curiosidade, Alicia resolveu usar as ferramentas do aplicativo e criar quadrados cujas medidas coincidiam com as medidas dos lados do Triângulo Retângulo que estava em sua atividade. Para isso, Alicia seguiu os seguintes passos:

- Construiu uma reta;
- Traçou uma perpendicular sob o ponto A da reta;
- Marcou o ponto c na reta perpendicular;
- Desenhou o polígono formado pelos 3 pontos que apareceram na interface do GeoGebra e determinou a medida de seus segmentos;
- Clicou em um segmento do polígono e reproduziu um polígono regular de 4 lados e determinou a sua área.

Questão 1: Observando o valor dos segmentos, que constituem os lados do triângulo, e a área do quadrado, você consegue identificar alguma relação entre eles?

Questão 2: Em relação aos três quadrados, vocês conseguem identificar alguma característica entre eles?

Questão 3: O que acontece com os quadrados se modificarmos a posição do ponto B na figura? Explique.

Questão 4: Como podemos representar as observações feitas acima?

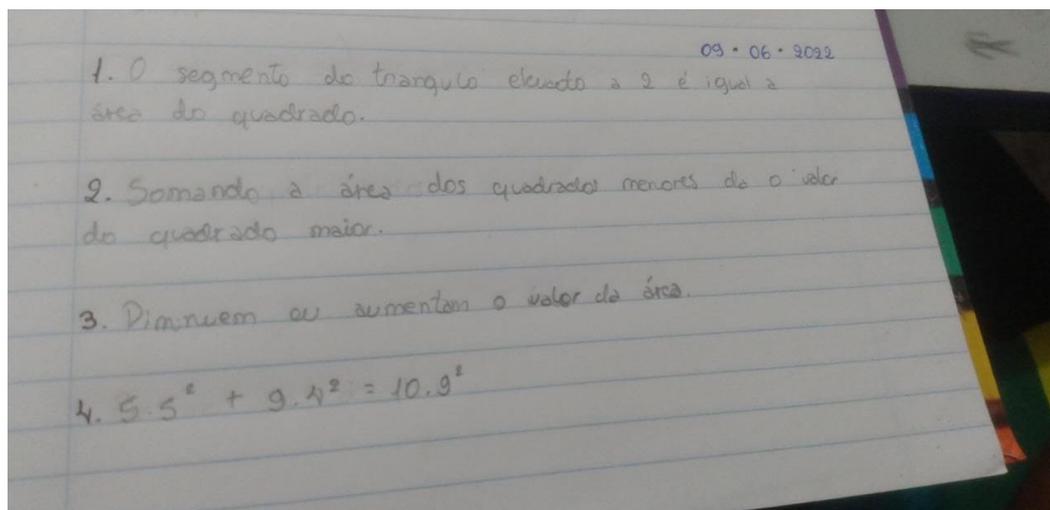
Os estudantes rapidamente se debruçaram sobre o aplicativo e começaram a fazer as representações das construções descritas na situação anterior. É importante destacar que os estudantes já conheciam as construções descritas acima, no entanto, os grupos B e D apresentaram dificuldades em representar polígonos regulares nos segmentos do triângulo retângulo. Na tentativa de sanar tais dificuldades, recordamos as construções desenvolvidas na aula anterior e todos os grupos conseguiram reproduzir a situação problemática no aplicativo GeoGebra.

Por se tratar de uma turma que nunca trabalhou com atividades de investigação, todos os grupos apresentaram dúvidas ou dificuldades em relacionarem a representação construída no aplicativo com o que estava sendo solicitado ao longo de cada questão.

Em relação ao grupo A, na questão 1, houve uma forte interação entre os componentes do grupo. Percebeu-se que um dos integrantes detinha conhecimentos prévios sobre o conteúdo: áreas e, com facilidade, percebeu que a relação entre a área do quadrado e o segmento do triângulo é que o valor da área do quadrado corresponde ao valor do segmento do triângulo elevado ao quadrado. A ideia foi aceita por todos os integrantes do grupo após testarem, em uma calculadora, se esses valores realmente correspondiam ao que o colega havia falado.

Na questão 2 o grupo testou algumas possibilidades até perceber que a área do quadrado maior era igual a soma dos quadrados menores. Na questão 3 o grupo percebeu que ao modificar o ponto B o valor das áreas dos quadrados aumentava ou diminuía. E na questão 4 verificou-se que os estudantes compreenderam a relação existente entre as áreas dos quadrados e o valor dos segmentos, no entanto, é possível notar que não conseguiram chegar a uma generalização da situação, apenas uma representação numérica da situação analisada. A figura 24 mostra algumas das respostas do grupo A.

Figura 24 – Respostas do grupo A

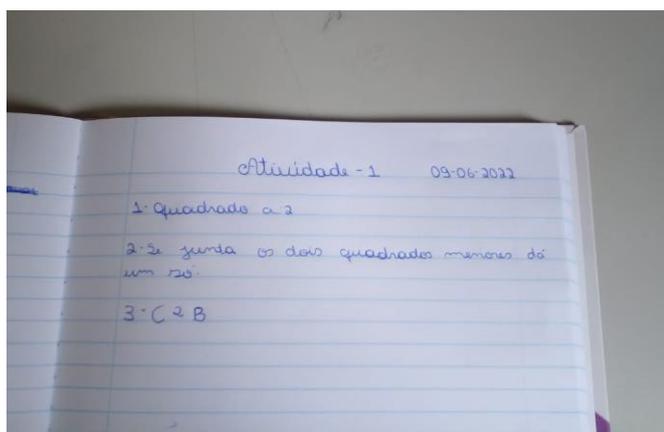


Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

O grupo B, na primeira questão, apresentou grande dificuldade em identificar a relação entre a área do quadrado e o segmento do triângulo, uma vez que, a maioria dos integrantes do grupo possuía pouco ou nenhum conhecimento prévio sobre áreas, sendo necessária a mediação do professor pesquisador, além disso,

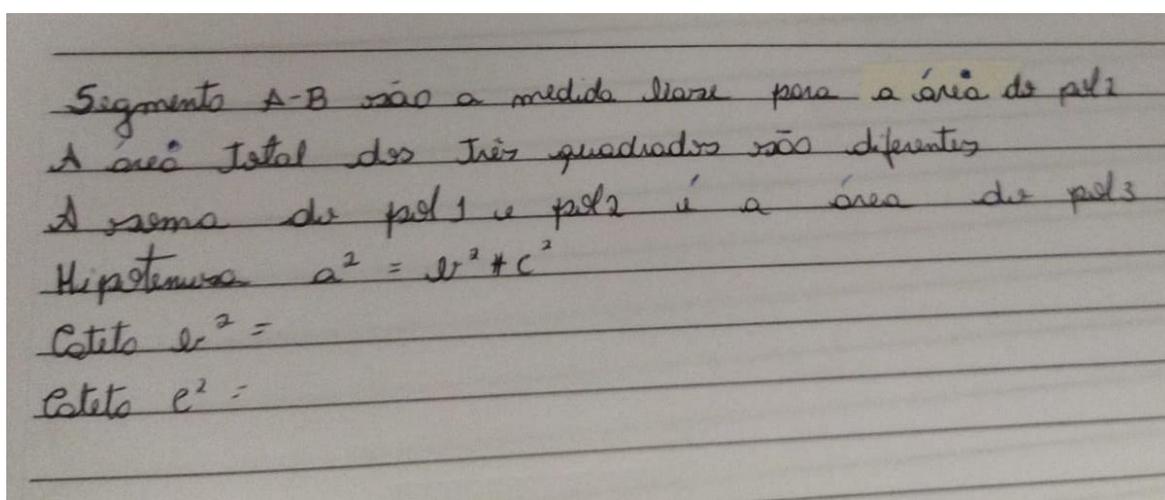
percebeu-se que o grupo possui muita dificuldade em escrever sobre as suas observações. Na segunda questão observa-se que o grupo consegue estabelecer uma relação entre os quadrados, no entanto, o grupo não apresenta uma explicação clara sobre a situação observada. Na terceira questão o grupo não fez colocações a respeito do que foi executado. Na quarta questão percebeu-se que o grupo não conseguiu estabelecer uma relação entre a área dos quadrados e a medida dos segmentos, nem chegar a uma generalização da situação proposta. A figura 25 mostra algumas das respostas do grupo B.

Figura 25 –Respostas do grupo B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

O grupo C, na primeira questão, conseguiu identificar algumas relações existentes entre a área do quadrado e o segmento do triângulo, no entanto, o grupo não conseguiu generalizar uma relação entre os elementos. Na segunda questão, o grupo consegue observar as relações entre os quadrados e escrever uma generalização entre eles. Na terceira questão o grupo não fez colocações a respeito do que foi executado. Na quarta questão observa-se que o grupo conseguiu identificar a relação existente entre as áreas dos quadrados e os segmentos além



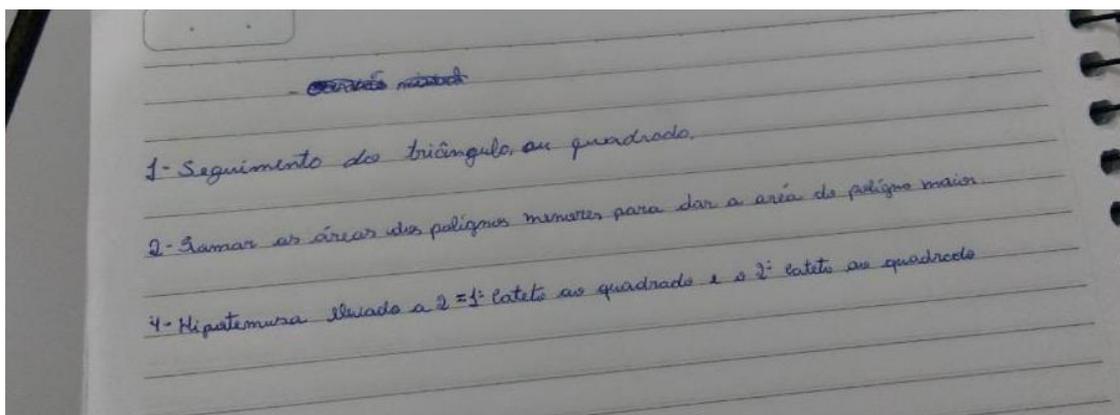
disso, escrever uma generalização dos resultados obtidos. A figura 26 mostra as respostas do grupo C.

Figura 26 – Respostas do grupo C

Fonte: Elaborada pela autora 2022.

O grupo D, na primeira questão, apresentou algumas dificuldades em relacionar as áreas dos quadrados aos segmentos do triângulo sendo necessária a mediação do professor pesquisador, além disso, observa-se que o grupo possui dificuldade em representar a escrita dos resultados. Na segunda questão o grupo consegue identificar a relação existente entre as áreas dos quadrados. Na terceira questão o grupo não fez colocações a respeito do que foi executado. Na quarta questão evidencia-se que o grupo consegue estabelecer uma relação entre as áreas e os segmentos e, além disso, estabelecer uma generalização entre os elementos analisados. A figura 27 mostra as respostas do grupo D.

Figura 27: Respostas do grupo D



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

5.4 O terceiro encontro

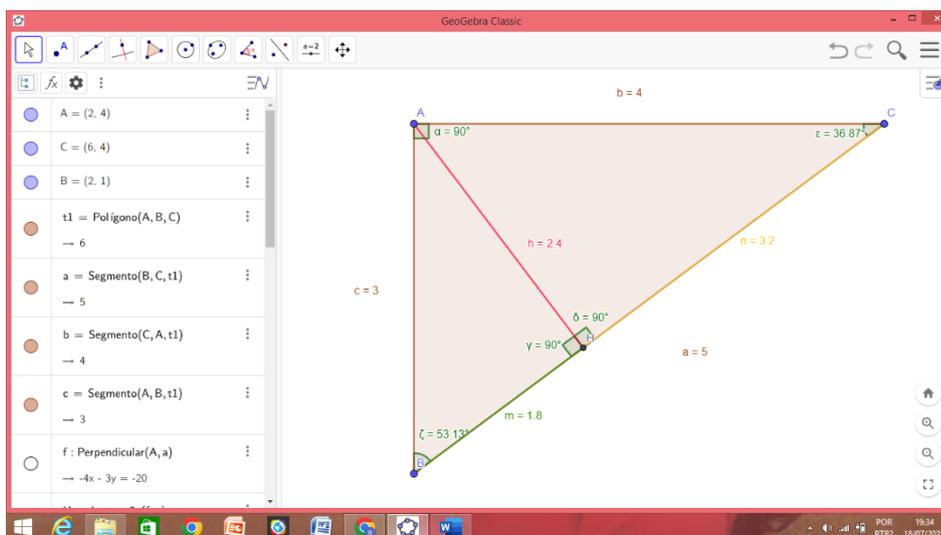
Durante o terceiro encontro foi aberta uma nova sessão de slides que continha uma situação problemática decorrente de uma nova construção no aplicativo GeoGebra. A construção foi realizada em coletivo com os estudantes e a sua representação e seguiu os seguintes passos:

- Construir três pontos A, B, e C, cujas coordenadas são, respectivamente (2,4), (2,1), (6,4);

- Construir um triângulo ABC;
- Marcar os ângulos formados pelos lados do triângulo construído;
- Traçar uma reta perpendicular entre o ponto A e o segmento a do triângulo ABC;
- Marcar o ponto de intersecção entre o ponto A e o segmento a do triângulo ABC renomear o ponto de H;
- Traçar o segmento formado pelo ponto A e o ponto H, renomear o segmento de h e modificar a sua cor;
- Clicar na reta perpendicular e ocultá-la;
- Traçar o segmento formado pelo ponto H e C, renomear de n e modificar a sua cor;
- Traçar o segmento formado pelo ponto H e B, renomear de m e modificar a sua cor;
- Marcar o ângulo formado pelo segmento h e n;
- Marcar o ângulo formado pelo segmento h e m.

A figura 28 mostra a representação construída:

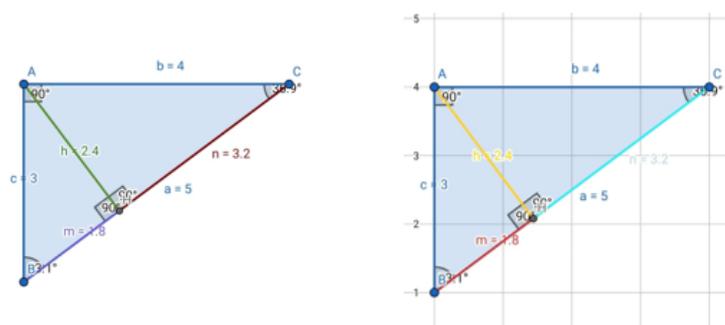
Figura 28 – Representação da atividade 2



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

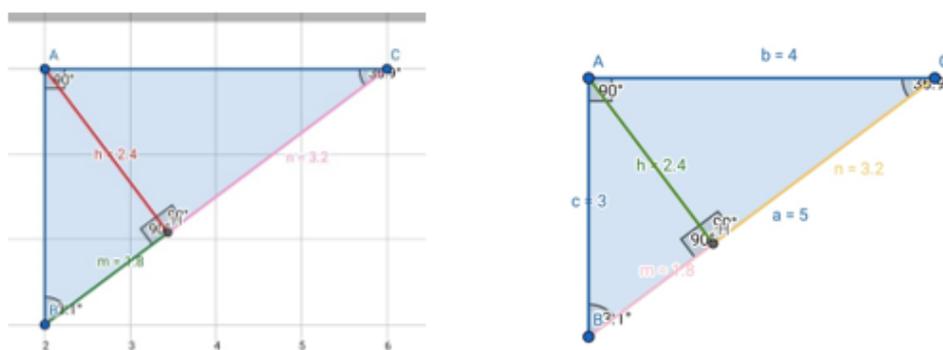
Nas figuras 29 e 30 abaixo mostraremos algumas das construções desenvolvidas pelos estudantes:

Figura 29 – Construção da atividade 2 pelos grupos A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Figura 30 – Construção da atividade 2 pelos grupos C e D



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Ao verificarmos que todos os grupos conseguiram reproduzir a construção solicitada, apresentamos três questões a serem analisadas por eles, as questões serão descritas a seguir:

Questão 1: Ao traçar a perpendicular, o que acontece com a figura que tínhamos inicialmente?

Questão 2: Analisando as duas figuras e a figura inicial, podemos observar alguma relação entre elas?

Questão 3: Como podemos representar as situações observadas acima?

A figura 31 mostra algumas das observações desenvolvidas pelos estudantes do grupo A:

Figura 31 – Observações do grupo A

② 1) A reta perpendicular dividir o triângulo de início em dois triângulos retângulos porque os dois tem um ângulo de 90° cada.

2) Os triângulos são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo porque tem dois ângulos iguais, os ângulos iguais são 90° e $38,9^\circ$ e 90° e $31,7^\circ$ e 90° e 45° .

3) Agente pode fazer razão entre os lados dos três triângulos, seu olho o primeiro e o segundo o triângulo vamos observar que $\frac{4}{2,4} = \frac{3}{1,8} = \frac{5}{3}$

$$\frac{1,8 \cdot 4 = 7,2}{7,2 = 7,2} \quad \frac{3 \cdot 3 = 9}{9 = 9}$$

Depois para justificar $4 = b, 2,4 = h, 3 = c, 1,8 = m, 5 = a$
 $3 = c$

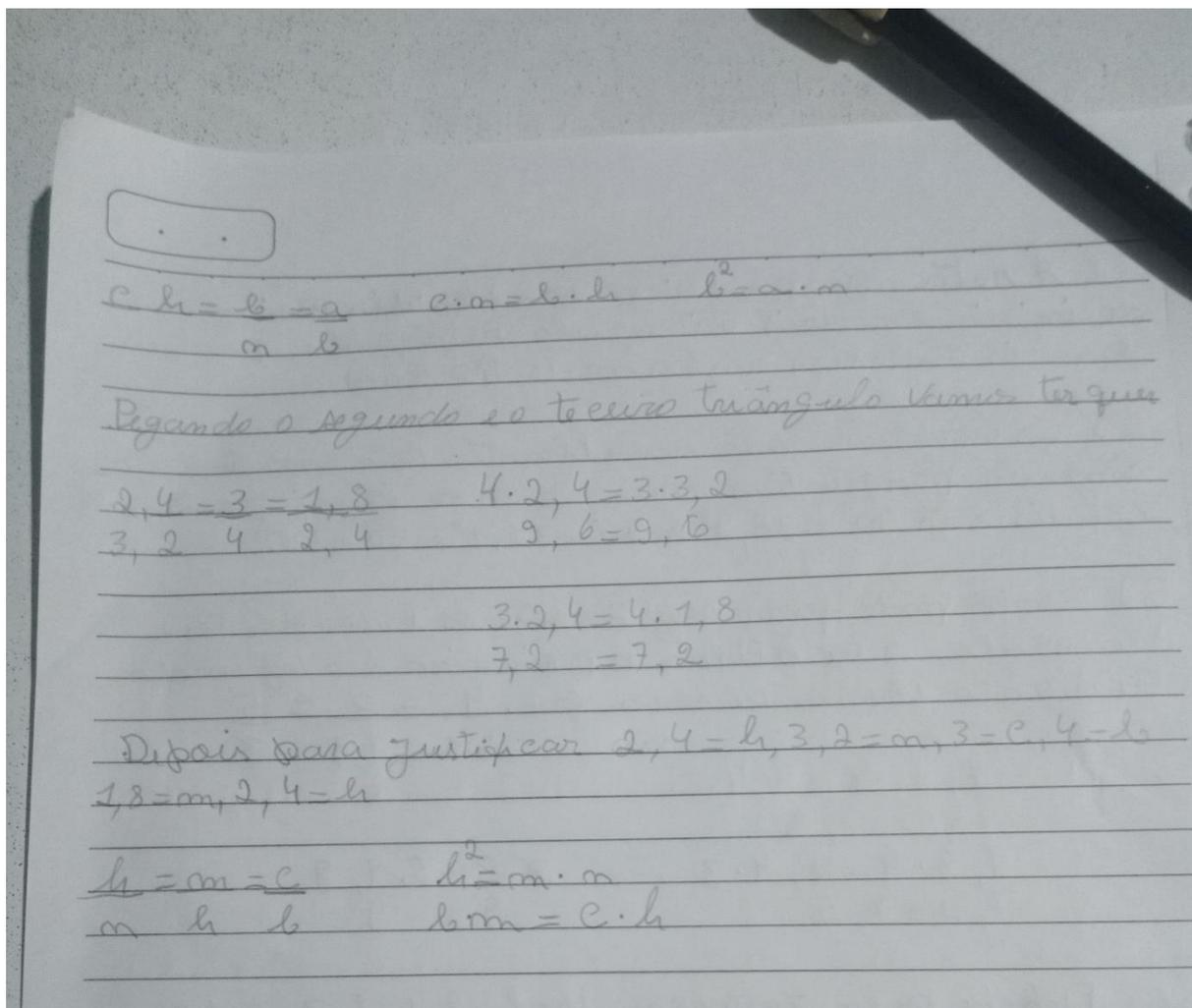
$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} = \frac{a}{c}$$

$$b \cdot m = c \cdot h \quad c^2 = a \cdot m$$

Vamos fazer a razão entre o primeiro e o triângulo.

$$\frac{3}{2,4} = \frac{4}{3,2} = \frac{5}{4} \quad \frac{3 \cdot 3,2 = 9,6}{9,6 = 9,6} \quad \frac{4 \cdot 4 = 16}{16 = 16}$$

Depois para justificar $3 = b, 2,4 = h, 4 = b, 3,2 = m, 5 = a, b = 4$

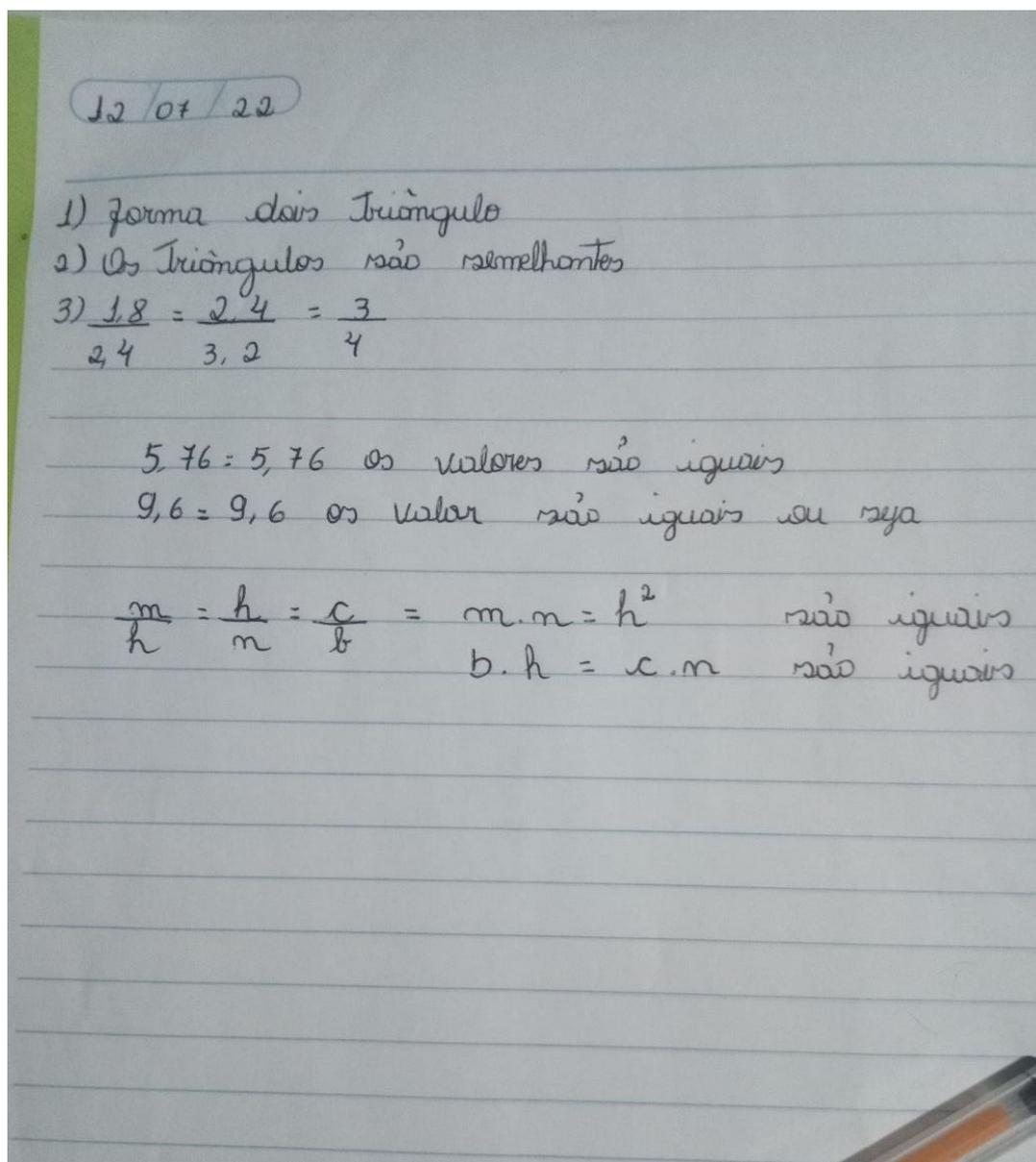


Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Ao analisarmos as observações do grupo A podemos notar que eles conseguiram identificar que a reta perpendicular dividia o triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos e que quando comparados os triângulos formados eram semelhantes pelo caso AA e que para representar a situação acima eles utilizaram uma proporção entre os lados dos triângulos obtendo algumas das relações métricas. Algumas intervenções precisaram ser feitas para que os estudantes fossem estimulados a testarem suas conjecturas e chegar nas representações indicadas.

Na figura 32 seguir apresentaremos as observações do grupo B:

Figura 32 – Observações do grupo B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

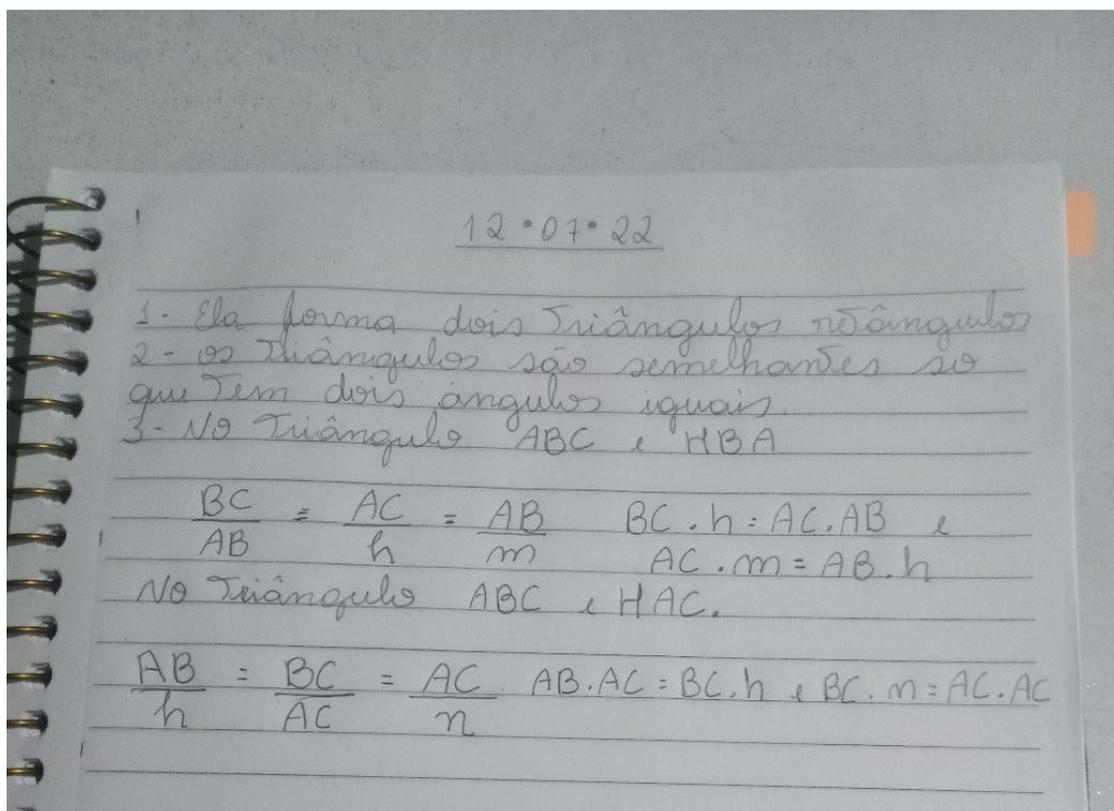
Ao analisarmos as observações do grupo B podemos notar que eles conseguiram identificar que a reta perpendicular dividia o triângulo retângulo ABC em dois triângulos, no entanto, o grupo não deixa claro que os triângulos formados eram retângulos.

O grupo consegue identificar que os triângulos são semelhantes, no entanto, não especificam o caso de semelhança entre eles e para representar as observações eles tentam estabelecer algumas proporções, no entanto, os estudantes tiveram algumas dificuldades em relacionarem os triângulos chegando apenas em duas das relações métricas. No grupo B algumas intervenções foram

feitas no intuito de estimular os estudantes a relembrares alguns conteúdos prévios e tentar relacioná-los com a atividade proposta.

Na figura 33 a seguir apresentaremos as observações do grupo C:

Figura 33 – Observações do grupo C

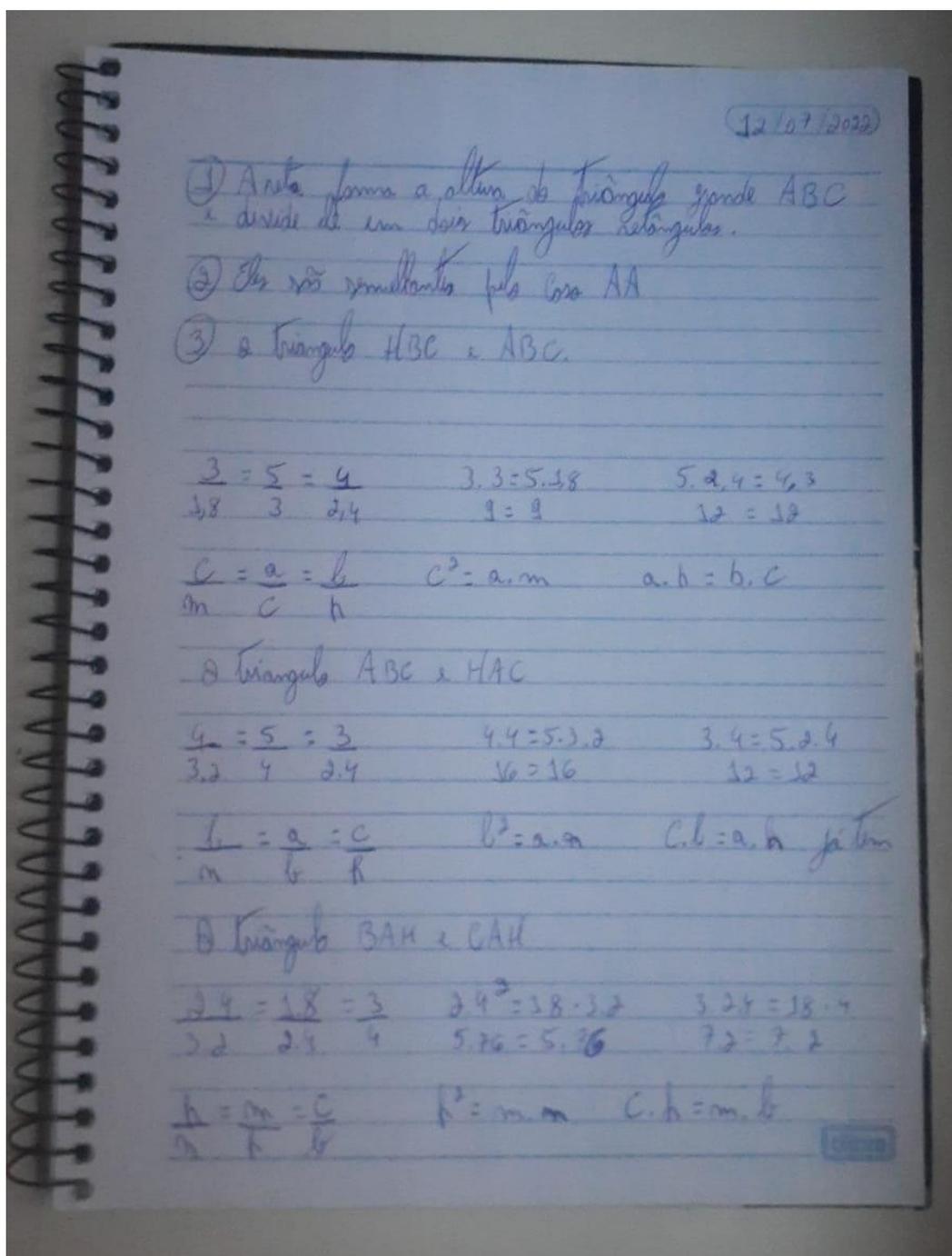


Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Ao analisarmos as observações do grupo C nota-se que os estudantes tiveram dificuldade em utilizar o aplicativo para colocar os valores dos segmentos dos triângulo, talvez por uma falta de comunicação. Os estudantes conseguiram identificar que a reta perpendicular dividia o triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos e que quando comparados os triângulos formados eram semelhantes pelo caso AA. Para representar a situação acima eles utilizaram a proporção entre a medida dos segmentos dos triângulos, no entanto, como a figura construída por eles não possuía valores, eles fizeram a proporção entre os nomes que identificavam os lados dos triângulos e conseguiram encontrar três relações métricas. A análise do que foi desenvolvido pelo grupo permitiu verificar que os estudantes não observaram as relações existentes entre os triângulos ABC e HAC.

Na figura 34 a seguir apresentaremos as observações do grupo D:

Figura 34 – Algumas observações do grupo D



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Ao analisarmos as observações do grupo D nota-se que eles conseguiram identificar que a reta perpendicular dividia o triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos. O grupo D também acrescenta que o segmento formado pelo

ponto A e a intersecção da reta perpendicular constituía a altura do triângulo e que quando comparados os triângulos formados eram semelhantes pelo caso AA podendo ser representados por uma proporção entre os lados dos triângulos, ao relacionarem os valores os estudantes encontraram algumas das relações métricas e, para testá-las, os estudantes resolveram construir um outro triângulo e identificar se as relações encontradas eram verdadeiras.

5.5 O quarto e último encontro

O grupo que iniciou as discussões foi o grupo A que trouxe contribuições significativas no tocante a apresentação das observações feitas, destacando as justificativas referentes à semelhança dos triângulos, às proporções e os passos que seguiram para encontrar as relações métricas. Um momento interessante que aconteceu durante a apresentação do grupo é que um integrante do grupo D fez um questionamento em relação à justificativa apresentada pelo grupo A, mostrando que ele estava atento à forma como os integrantes do grupo A apresentavam suas justificativas e antecipava que a forma encontrada pelo grupo D para justificar as suas observações poderia ser diferente daquela apresentada pelo grupo A.

Em seguida foi a vez do grupo B que não apresentou justificativas claras em relação as observações feitas, sendo necessária a intervenção do professor pesquisador na condução das análises. Infelizmente o grupo não conseguiu identificar todas as relações métricas, no entanto, alguns integrantes do grupo A deram algumas dicas de como eles poderiam proceder para encontrar as demais relações.

O próximo grupo a apresentar suas observações foi o grupo C que conseguiu apresentar suas justificativas de forma clara, o grupo também conseguiu identificar que houve uma falha de comunicação durante a construção da figura, mas que mesmo assim conseguiu encontrar relações parecidas com as que os colegas haviam apresentado nas suas discussões. O grupo também destaca que não conseguiu encontrar algumas das relações métricas e novamente um integrante do grupo A sugere algumas informações para que o grupo tente encontrar as relações que estavam faltando.

A seguir, o grupo D apresentou suas discussões justificando cada passo das observações feitas, principalmente em relação à semelhança de triângulos,

nomenclatura dos segmentos dos triângulos, a proporção entre os lados dos triângulos e as relações métricas. Um ponto que chamou bastante atenção em relação ao grupo D foi a forma como os seus integrantes testaram suas conjecturas, de acordo com o que foi apresentado o grupo construiu um novo triângulo com medidas diferentes e verificaram se cada relação encontrada era válida para outros triângulos.

Por fim, a professora pesquisadora fez uma generalização das discussões apresentadas e introduziu o conteúdo mostrando algumas das relações métricas que foram rapidamente apercebidas por alguns estudantes dos grupos A e D

5.6 O Questionário Final

Com o objetivo de verificar os impactos que as atividades propostas trouxeram à aprendizagem dos estudantes, decidimos aplicar um novo questionário à turma. Para facilitar o levantamento de informações, elaboramos um formulário com cinco questões para serem respondidas virtualmente pelos estudantes. O questionário foi estruturado no programa Google Forms e as questões serão descritas no apêndice B.

A primeira questão tinha como objetivo verificar quais pontos os estudantes destacaram em relação aos encontros e as atividades propostas. A análise do formulário permitiu identificar que os estudantes destacaram os conhecimentos adquiridos, a manipulação do aplicativo, como construir triângulos e identificar suas características e relações.

A segunda questão tinha como objetivo verificar qual era a opinião dos estudantes em relação às experiências adquiridas com o uso do aplicativo GeoGebra 2D. A análise do formulário permitiu identificar que os estudantes destacaram a experiência como boa, uma vez que, caracterizaram o aplicativo como bom e facilitador do aprendizado. Além disso destacaram que a utilização do aplicativo foi vista como uma experiência nova da qual a grande maioria se identificou e achou bastante legal.

A terceira questão tinha como objetivo identificar a perspectiva dos estudantes em relação às aprendizagens adquiridas ao longo das aulas e dos encontros referentes as atividades de investigação. Os estudantes destacaram que que a utilização de recursos tecnológicos pode facilitar o entendimento dos

conteúdos e promover o desenvolvimento de um aprendizado a mais na sala de aula.

A quarta questão tinha como objetivo identificar a perspectiva dos estudantes em relação à aprendizagem dos conteúdos: triângulos e relações métricas no triângulo retângulo com a utilização do aplicativo GeoGebra 2D. Os estudantes destacaram que as ilustrações e as ferramentas do aplicativo tornam mais fácil a sua compreensão facilitando a aprendizagem dos conteúdos.

A quinta e última questão tinha como objetivo verificar a opinião dos estudantes em relação à utilização de recursos tecnológicos nas aulas de Matemática. Os estudantes destacaram que a utilização de recursos tecnológicos traz novas informações ao contexto da sala de aula, além disso, destacaram a sua importância para o aprendizado dos estudantes, facilitando a sua aquisição de conhecimentos.

6 CONCLUSÃO

De acordo com o que foi abordado ao longo da pesquisa fica evidente que as investigações geométricas com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D contribuíram de forma significativa na aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo. A forma como os estudantes realizaram as investigações favoreceu a sua percepção em relação aos conteúdos trabalhados e, principalmente, o desenvolvimento de sua autonomia e participação em sala de aula, dessa forma, conseguimos atingir nossos objetivos.

A partir das análises desenvolvidas em relação ao questionário inicial no qual buscamos identificar alguns dos conhecimentos prévios dos estudantes, bem como, o uso de recursos tecnológicos em sala de aula, podemos perceber o quanto alguns estudantes possuem uma aprendizagem deficiente em relação aos conteúdos de Geometria.

Neste caso, destacamos os conhecimentos que antecedem o estudo da Trigonometria. Além disso, é importante destacar que o uso de recursos tecnológicos em sala de aula ainda é uma realidade pouco explorada pelos professores, haja vista que a maioria dos estudantes evidenciou ter pouco ou nenhum contato com esse tipo de recurso em sala de aula, principalmente nas aulas de Matemática na qual, os professores tendem a ficar presos em metodologias tradicionais.

Tratamos de organizar as aulas de forma que os estudantes tivessem autonomia para construir sua própria aprendizagem, nesse tocante, associar o uso de recursos tecnológicos, como o aplicativo GeoGebra 2D, com atividades de investigação permitiu aos estudantes o desenvolvimento de um ambiente de aprendizagem no qual, a participação, o entusiasmo e o interesse da turma destacam-se como aspectos de suma importância para o resultado final de nosso trabalho.

Também é importante destacar que o tempo e espaço cedido pela escola em muito contribuiu para o desenvolvimento da pesquisa. Nesse contexto, foi possível proporcionar aos estudantes quatro encontros, nos quais, foi possível fazer uso de alguns recursos tecnológicos tais como: apresentação de slides através do aparelho de TV cedido pela própria escola, o manuseio e instalação do aplicativo GeoGebra 2D nos celulares graças a rede de internet cedida pela secretaria da escola. Esses

fatores foram cruciais para que os estudantes pudessem gozar de um ambiente no qual foi possível explorar, refletir, analisar e discutir suas observações e, conseqüentemente, construir o seu próprio conhecimento.

O objetivo geral de nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi observar como os estudantes realizam Investigações Geométricas a partir da exploração das relações métricas no triângulo retângulo com o auxílio do aplicativo GeoGebra 2D em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de trazer melhorias ao ensino-aprendizagem de Matemática, em especial nos conteúdos referentes à Geometria. Consideramos que diante do que foi exposto ao longo da pesquisa, em especial, às atividades desenvolvidas na turma, alcançamos nosso objetivo.

Em relação aos objetivos específicos, tratamos de atingi-los com exatidão iniciando com um questionário a fim de identificar os conhecimentos prévios que os estudantes haviam adquirido sobre os triângulos na tentativa de aprofundar esses conhecimentos no estudo das relações métricas. Graças aos resultados obtidos foi possível o desenvolvimento de uma atividade investigativa que pudesse abranger as aprendizagens gerais dos estudantes.

Em seguida apresentamos o aplicativo GeoGebra 2D e suas funcionalidades na tentativa de trazer ao ambiente da sala de aula um recurso tecnológico ainda pouco conhecido pelos estudantes na forma de nova proposta metodológica que fuja dos padrões de uma aula tradicional. Além disso foi proposto aos estudantes que desenvolvessem a construção de algumas figuras no aplicativo de modo que fossem desenvolvendo familiaridade com o aplicativo e o desenvolvimento de habilidades para as construções sugeridas nas atividades de investigação. Esse momento da aula foi de suma importância para a pesquisa, uma vez que, os estudantes mostraram-se bastante entusiasmados com o aplicativo e os benefícios que as suas ferramentas podem trazer para as aulas de Matemática.

Posteriormente foram apresentadas as duas atividades de investigação, nas quais foi possível perceber que os estudantes apresentaram uma maior interação entre eles e um aprofundamento dos conhecimentos adquiridos na medida em que observavam as características e relações entre os lados dos triângulos.

Sabe-se que o uso de recursos tecnológicos em sala de aula está presente na Educação Matemática, no entanto, é importante destacar que mesmo estando inseridos em uma realidade digital alguns estudantes tiveram dificuldades em manipular e fazer construções com o aplicativo GeoGebra 2D. Mas, na medida em

que foram aprofundando suas análises, os estudantes foram aprimorando suas construções.

O último objetivo específico foi analisar os impactos que as atividades de investigação aqui desenvolvidas trouxeram para as aprendizagens dos estudantes no tocante às Relações Métricas no Triângulo Retângulo. E com base no que foi observado, alguns estudantes destacaram que o aplicativo GeoGebra 2D aparece como um facilitador das aprendizagens pois foi um elemento de suma importância para a construção dos resultados obtidos ao longo das investigações.

Para finalizar, fica evidente que o uso de aplicativos, como o aplicativo GeoGebra 2D, associados as atividades de investigação podem favorecer o contexto da sala de aula de Matemática ao proporcionar ao estudante um novo ambiente de ensino marcado por metodologias dinâmicas que fogem do tradicionalismo comumente aplicado nas salas de aula de Matemática. Além disso, é válido salientar que este ambiente permite a construção de novas aprendizagens por parte dos estudantes, uma vez que, tais atividades possibilitam o desenvolvimento de autonomia, de estímulo, de interesse e participação, destacando-se como um elemento facilitador do processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P.; Estratégias pedagógicas para ensinar e aprender Matemática com o uso do GeoGebra. **Revista Educação em foco**. Campina Grande, v.1, n.2, p. 89-103, ago/dez, 2012.
- ARAÚJO, L.C.L.; NÓBRIGA, J.C.C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Editora Exato, 2010.
- BRASIL. Ministério da educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- COSTA, B. P.; PEQUENO, P. I. E.; PEREIRA, C. d. S. Dificuldades de Aprendizagem da Trigonometria. *In*: CONEDU, 6., 2019, Fortaleza. **Anais eletrônicos**. Fortaleza: Realize, 2019. p. 1-12 Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID11326_24092019110045.pdf. Acesso em 28 de agosto de 2022.
- FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: http://repositorio.se.df.gov.br/bitstream/123456789/1058/1/2018_RachelSaffirAra%c3%baAlvesFeij%c3%b3.pdf. Acesso em: 28 de agosto de 2022.
- FONSECA, L. S. **Aprendizado em Trigonometria**: Obstáculos, sentidos e mobilização. São Cristóvão: Editora UFS; Aracaju: Fundação Oviêdo Teixeira, 2010.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25.ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- GARBI, G.G.; A rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. *In*: GARBI, G.G. **Nove Séculos da universidade de Alexandria** 5.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. p. 110-122.
- LAMAS, R.C.P; MENDES, J. **GeoGebra**: animações geométricas. 1. ed. Curitiba: Appris, 2017.
- LOPES, M. M.; Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. **Bolema**. Rio Claro (SP), v.27, n.46, p. 631-644, ago. 2013.
- LORENZATO, S. A. Desafios do contemporâneo que não é novo. **Revista Educação em foco**. Campina Grande, v.1, n.2, p. 9-32, ago/dez, 2012.
- LORENZATO, S. A. Por que não ensinar Geometria?. **A Educação Matemática em revista**. Campinas, n.4, p.3-13, 1995.
- MAZUCATO, T. P. S.; Metodologia da pesquisa e do trabalho científico. Penápolis: FUNEPE, 2018. p. 47-51.
- OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. d. Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 1998, Porto Alegre. **Anais eletrônicos**. Porto Alegre: SPCE-SEM, 1998. p. 107-125. Disponível em: <https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/32301603/texto10-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1632754119&Signature=SCHdhBbKK4DFrYQdK0XzkgzIU~345qs3ACsb2VENiJTXBm1bePEhyFSK>. Acesso em: 28 de agosto de 2022.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

PARAÍBA. Ministério da educação. Proposta Curricular da Paraíba. João Pessoa, 2018.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. (7 a 17), março, 1993.

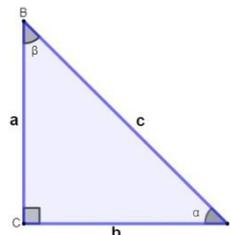
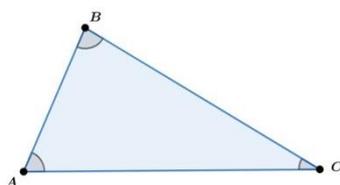
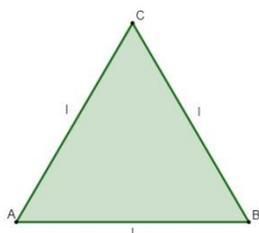
SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. d. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso - Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadi+a.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em 23 de setembro de 2021.

SOLERA, M.S. **História da Trigonometria**. UNESP, São Paulo, 2022. Disponível em: https://www.feis.unesp.br/Home/Extensao/teia_saber/Teia2003/Trabalhos/matematica/Marli%20Solera/Anexo%201%20-%20Historia%20da%20Trigonometria.pdf. Acesso em 28 de julho de 2022.

APÊNDICE A – INSTRUMENTO DE PRODUÇÃO DE DADOS 1

QUESTÕES PARA O ESTUDANTE

- 1- O que você entende por triângulos?
- 2- Observe as imagens abaixo e indique quais características e propriedades você consegue identificar.



- 3- Como podemos classificar as figuras que aparecem nas imagens do quesito anterior? Justifique.
- 4- Em relação ao triângulo retângulo, destaque algumas características e propriedades já conhecidas.
- 5- Qual o seu ponto de vista em relação ao conteúdo de Trigonometria?
- 6- Qual é a sua opinião em relação ao uso de softwares de Geometria nas aulas de Matemática? Com que frequência você tem contato com esse tipo de recurso didático em sala de aula? Explique.

APÊNDICE B – INSTRUMENTO DE PRODUÇÃO DE DADOS 2

- 1- Quais pontos você destaca sobre os encontros em que realizamos investigações geométricas com auxílio do aplicativo GeoGebra 2D?
- 2- Como foi a experiência de utilizar o aplicativo GeoGebra 2D em sala de aula? Comente.
- 3- Qual a sua perspectiva em relação às aprendizagens construídas ao longo dos encontros em que trabalhamos com recursos tecnológicos em sala de aula?
- 4- Na sua opinião, como a utilização do GeoGebra 2D contribuiu para o entendimento dos conteúdos: triângulos e relações métricas no triângulo retângulo?
- 5- Tendo em vista a experiência vivenciada em sala de aula, na sua opinião, como a utilização de recursos tecnológicos, a exemplo do GeoGebra 2D, podem auxiliar nas aulas de Matemática?

ANEXO A – TERMO DE REQUERIMENTO**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA****REQUERIMENTO**

Venho, por meio deste, requerer ao gestor IRANILDO FIRMINO NORMANDO FILHO, da EEEEFM MAJOR JOSÉ BARBOSA, CNPJ 01858058000133, MATRÍCULA 1874284, CPF 01617793442, RG 3629437

SSDS-PB, autorização para desenvolver a pesquisa referente ao Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), de minha orientanda Rita de Cássia Andrade Matos, intitulado *Investigações Geométricas no Triângulo Retângulo com o Auxílio do GeoGebra 2D*.

Campina Grande, 01 de junho de 2022.

Atenciosamente,

A handwritten signature in black ink that reads 'Kátia Maria de Medeiros'.

**Profª Drª Kátia Maria de Medeiros
Matrícula 123412-9
Orientadora**