UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIEL MARTINS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA ESPECTRAL DOS OPERADORES COMPACTOS

CAMPINA GRANDE
2022

DANIEL MARTINS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA ESPECTRAL DOS OPERADORES COMPACTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2022

S586e Silva, Daniel Martins da.

Um estudo sobre a teoria espectral dos operadores compactos [manuscrito] / Daniel Martins da Silva. - 2022.

39 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Análise funcional. 2. Operadores compactos. 3. Teoria espectral. I. Título

21. ed. CDD 515.7

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

DANIEL MARTINS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA ESPECTRAL DOS OPERADORES COMPACTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em: 23/09/2022

BANCA EXAMINADORA

Luciana R. Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de S. Coelho

Profª. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Burití Galvão
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Este trabalho é dedicado a Deus e à minha família, pessoas que foram essenciais para que eu o conseguisse concluir com êxito. minha orientadora pela paciência e por todos os conselhos e instrução que foi fornecido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. Em segundo, à minha família por ter me apoiado a realizar esse sonho, principalmente, a minha irmã, Daniele, por ter me ajudado durante o curso; aos meus dois avôs que faleceram no ano de 2022 e eram uma grande fonte admiração, a minha mãe que faleceu em 2006, o qual ela sempre será a minha maior fonte de força e respeito; o meu pai que sempre me auxiliou em tudo.

Agradeço ao meu ex-professor, Nelson Roberto, pois ele que me incentivou a cursar a licenciatura matemática e me ajudou muito no início e os meus amigos, porque sempre estiveram ao meu lado colaborando durante o curso, ressaltando Erickson Ronielle, Jefferson Henriques e Matheus Marques. A orientadora Luciana, pois ela sempre me apoiou e ajudou em vários momentos e por fim a toda equipe de professores da UEPB, porque eles me proporcionaram grandes aprendizados.

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos um estudo sobre alguns tópicos da Análise Funcional. Abordamos conceitos e resultados importantes envolvendo os Operadores Lineares Limitados. No entanto, focando nossa atenção a uma classe especial de operadores, a saber, os operadores lineares compactos entre espaços normados. O objetivo central é fazer um estudo introdutório sobre a teoria espectral dos operadores compactos e compreender a similaridade das propriedades espectrais de tais operadores com a teoria de autovalores e autovetores em espaços de dimensão finita. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa de cunho exploratório e bibliográfico.

Palavras-chave: análise funcional. operadores compactos. teoria espectral.

ABSTRACT

This article will briefly introduce a study concerning some features related to Funcional Analysis. It will be covered important concepts and results dealing with Limited Linear Operators. Nevertheless, we intend to focus on a special grouping of operators, namely, compact operators among normed spaces. The main aim is to produce an introductory study concerning the spectral theory of compact operators as well as to comprehend similarities of spectral properties of such operators along with the theory of eigenvalues and eigenvectors within finite-dimensional spaces. Methodologically, this research assumes a exploratory as well as bibliographical character.

Keywords: functional analysis. compact operators. spectral theory.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Funcional fornece elementos de grande importância na matemática, nela encontramos a Teoria dos Espaços Vetoriais Normados e dos Operadores Lineares Contínuos nesses espaços. A sua teoria está presente em diversas áreas da Matemática Pura e Aplicada, onde podemos destacar seu uso nas Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Diferenciais Parciais, com aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Na Análise Funcional, alguns conceitos relacionados a Álgebra Linear e a Análise Matemática são vistos num contexto mais amplo, considerando não apenas espaços vetoriais de dimensão finita, mas dando maior ênfase aos Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita. Nesses espaços, introduz-se a partir de uma norma, uma noção abstrata de comprimento de um vetor e de distância entre vetores, o que torna o espaço vetorial um espaço topológico, e, como consequência, as noções de limite, continuidade, compacidade e outras, ficam estabelecidas.

Dentre os conceitos da Álgebra Linear, que são estudados de maneira mais geral na Análise Funcional, destacam-se os autovalores e autovetores de operadores lineares. Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear no espaço vetorial V de dimensão finita e $I : V \longrightarrow V$ é o operador identidade, sabe-se que:

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \Leftrightarrow Ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow T - \lambda I \text{ não é bijetora.}$$

Portanto, os autovalores de T são os escalares λ tais que $T - \lambda I$ não é invertível. O conjunto de todos os autovalores de T é chamado de espectro de T e, todos os outros valores de λ são chamados de valores regulares. Em outras palavras, λ é regular se, e somente se, o operador $T - \lambda I$ é invertível. O operador $(T - \lambda I)^{-1}$ é, então, automaticamente limitado, como qualquer operador em espaços de dimensão finita. No entanto, para espaços vetoriais de dimensão infinita esse argumento não é válido e requer uma análise adequada para obtenção dos autovalores. Essa análise nos leva ao conceito de espectro de um operador linear. O espectro é uma generalização do conjunto de autovalores de operadores lineares.

Desenvolvida a partir do século XX, a Teoria Espectral teve como pioneiros matemáticos como Hilbert, Riesz, Hellinger e Neumann. Trata-se do estudo de certos operadores inversos, suas propriedades gerais e suas relações com os operadores originais. Está diretamente relacionada a problemas de resolução de algumas classes de equações, aproximações de problemas não lineares por versões lineares, entre outras aplicações. Por exemplo, a investigação de problemas de valores de fronteira por Sturm e Lioville e a famosa teoria de Fredholm das equações integrais foram importantes para o desenvolvimento deste ramo.

Nosso objetivo é fazer um estudo introdutório sobre a teoria espectral de operadores lineares limitados $T : V \longrightarrow V$ em espaços normados com ênfase a uma classe de operadores que é de grande interesse prático, os operadores compactos.

Operadores lineares compactos são muito importantes nas aplicações, pois por exemplo, constituem uma importante ferramenta na teoria de equações integrais. Suas propriedades têm grande semelhança com as de operadores lineares em dimensão finita. Faremos o estudo dos operadores lineares compactos, abordando os principais conceitos, resultados e suas propriedades espectrais.

O trabalho está organizado em quatro capítulos: O primeiro é esta Introdução, o segundo capítulo apresenta a teoria básica essencial para a compreensão do tema principal, a saber, conjuntos compactos, operadores lineares limitados e funcionais lineares. O Capítulo 3 será dedicado ao estudo dos operadores lineares compactos em espaços normados. Por fim, no Capítulo 4, apresentamos a teoria espectral dos operadores compactos.

Para um bom entendimento do texto é importante que o leitor tenha um conhecimento prévio dos seguintes conceitos associados a espaços métricos: conjunto aberto e fechado, sequências, funções contínuas, espaços vetoriais normados e espaços de Banach. Referências importantes que poderão ser utilizadas para este fim são Domingues (1982), Lima (2012) e Lima (2009).

2 CONTEÚDO PRELIMINAR

Esse capítulo vai abordar conteúdos que servirão como base para uma melhor compreensão do leitor para o tema principal. As demonstrações serão omitidas, porém podem ser facilmente encontradas nas referências Kreyszig (1989), Botelho e Pellegrino (2012) e Oliveira (2010).

2.1 Compacidade e dimensão finita

Algumas propriedades de espaços e subespaços normados de dimensão finita estão relacionadas com o conceito de compacidade. Para tal, será utilizado a seguinte definição.

Definição 2.1 (Compacidade)**.** Um espaço métrico X é dito compacto se toda sequência em X tem uma subsequência convergente. Um subconjunto M de X é dito compacto se M é compacto considerado como um subespaço de X, isto é, se toda sequência em M tem uma subsequência convergente cujo limite é um elemento de M.

◇

Uma propriedade geral de conjuntos compactos é apresentada a seguir.

Lema 2.1. *Um subconjunto compacto M de um espaço métrico é fechado e limitado.*

Deve ser observado que a recíproca desse lema não é valida:

Observação 2.1. Dado o famoso espaço de sequência de Hilbert l^2 (este espaço foi introduzido e estudado por D. Hilbert (1912)) com a métrica definida por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2}, \text{ para } x, y \in l^2.$$

e vamos pegar uma sequência (e_n) em l^2, onde $e_n = (\delta_{nj})$, no qual seu enésimo termo é 1 e todos os outros termos é igual a 0. Logo $\|e_n\| = 1$, assim a sequência é limitada. Seus termos constituem um conjunto de pontos que é fechado porque não tem ponto de acumulação. O fato de não ter ponto de acumulação garante que esse conjunto de pontos não é compacto.

■

O próximo teorema aborda o conceito de compacidade em espaços normados de dimensão finita.

Teorema 2.1. *Em um espaço normado de dimensão finita X, qualquer subconjunto $M \subset X$ é compacto, se e somente, se M é fechado e limitado.*

Logo, do Teorema 2.1, se obtém que em qualquer espaço normado de dimensão finita os subconjuntos compactos são precisamente os subconjuntos fechados e limitados, então usualmente tal propriedade é utilizada para definir compacidade quando o espaço possui dimensão finita.

Lema 2.2 (F. Riesz)**.** *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (de qualquer dimensão), e suponha que Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z, então para cada número real $\theta \in (0, 1)$ existe $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1 \qquad e \qquad \|z - y\| \geq \theta, \;\; \forall y \in Y.$$

Pelo Teorema 2.1, em qualquer espaço normado de dimensão finita uma bola unitária fechada é compacta. Aplicando o Lema de Riesz é possível provar a seguinte propriedade.

Teorema 2.2. *Se um espaço normado X tem a propriedade de que a bola fechada $M = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então X é de dimensão finita.*

Apresentamos a seguir uma propriedade importante sobre aplicações contínuas, na qual conjunto compacto vai ter sua imagem compacta.

Teorema 2.3. *Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se M é um subconjunto compacto de X então $T(M) \subset Y$ é compacto.*

A partir do Teorema 2.3, concluímos que a seguinte propriedade, bem conhecida do cálculo para funções contínuas, é válida para espaços métricos.

Corolário 2.1. *Se X é um espaço métrico, então toda aplicação contínua T de um subconjunto compacto $M \subset X$ em $\mathbb{R}$ assume um máximo e um mínimo em pontos de M.*

2.2 Operadores lineares

Os operadores lineares, para depois se aprofunda mais em uma classe especial especial, que é operadores compactos entre espaços normados. Assim, segue a definição.

Definição 2.2 (Operador Linear)**.** Um operador linear T é uma função tal que

(i) O domínio $\mathfrak{D}(T)$ de T é um espaço vetorial e a imagem $\mathfrak{R}(T)$ está em um espaço vetorial sobre o mesmo o corpo $\mathbb{K}$.

(ii) Para todo x, $y \in \mathfrak{D}(T)$ e escalar $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

◇

Por definição, o núcleo de T denotado por $\mathfrak{N}(T)$ (ou $Ker(T)$) é dado por $\ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$.

Podemos observar que (2.1) é equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \;\; \forall\, \alpha, \beta \in K \;\text{ e }\; \forall\, x \in \mathfrak{D}(T). \tag{2.2}$$

Em (2.1), fazendo $\alpha = 0$ obtém-se a seguinte igualdade:

$$T0 = 0. \tag{2.3}$$

Vamos agora considerar alguns exemplos básicos de operadores lineares.

Exemplo 2.1. Considere o espaço $C[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$, munida da métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|, \text{ para } x,\, y \in C[a, b].$$

O operador $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ dado por

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau, \qquad\qquad t \in [a, b],$$

é linear em $C[a, b]$. De fato, se $x_1, x_2 \in C[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \int_a^t [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)] d\tau \\ &= \int_a^t \alpha x_1(\tau) d\tau + \int_a^t \beta x_2(\tau) d\tau \\ &= \alpha \int_a^t x_1(\tau) d\tau + \beta \int_a^t x_2(\tau) d\tau \\ &= \alpha T x_1 + \beta T x_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

⧫

Exemplo 2.2. O produto escalar em $\mathbb{R}$ com um fator fixo define um operador linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T_2 x = x \cdot a = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3,$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ e $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ é fixo.
Para ver que T_2 é um operador linear basta verificar que para $x_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2 =$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
T_2x_1 + T_2x_2 &= x_1 \cdot a + x_2 \cdot a \\
&= \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3 + \varphi_1\alpha_1 + \varphi_2\alpha_2 + \varphi_3\alpha_3 \\
&= \alpha_1(\xi_1 + \varphi_1) + \alpha_2(\xi_2 + \varphi_2) + \alpha_3(\xi_3 + \varphi_3) \\
&= a(x_1 + x_2) \\
&= T_2(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_2(\beta x_1) = (\beta x_1) \cdot a &= (\beta\xi_1)\alpha_1 + (\beta\xi_2)\alpha_2 + (\beta\xi_3)\alpha_3 \\
&= \beta(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3) = \beta(x_1 \cdot a) = \beta T_2 x_1.
\end{aligned}$$

♦

A imagem e núcleo dos operadores lineares são espaços vetoriais.

Teorema 2.4. *Seja T um operador linear. Então:*

(a) A imagem $\mathfrak{R}(T)$ é um espaço vetorial.

(b) O núcleo $\mathfrak{N}(T)$ é um espaço vetorial.

(c) Se $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$, então $\dim \mathfrak{R}(T) \leq n$.

Uma aplicação $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ é dita ser injetiva se pontos diferentes no domínio têm imagens diferentes, ou seja, se para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(T)$, tem-se:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2, \tag{2.5}$$

equivalentemente,

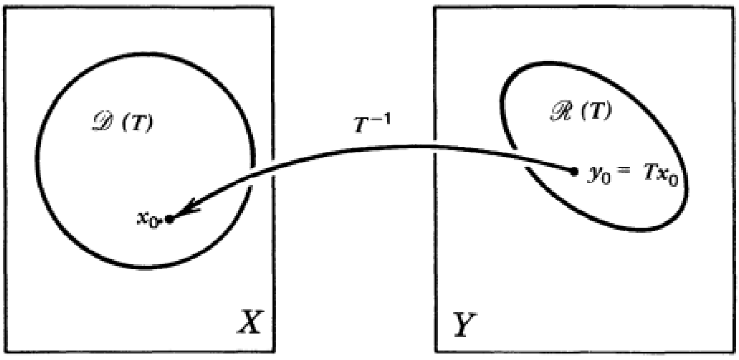
$$Tx_1 = Tx_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2. \tag{2.6}$$

Neste caso, existe a aplicação

$$\begin{aligned}
T^{-1} : \mathfrak{R}(T) &\longrightarrow \mathfrak{D}(T) \\
y_0 &\longmapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

que aplica todo $y_0 \in \mathfrak{R}(T)$ em $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ no qual $Tx_0 = y_0$. A aplicação T^{-1} é chamada de inversa de T.

Figura 1 – Aplicação inversa



Fonte: Erwin Kreyszig (1989, p 87)

De (2.7), obtemos

$$T^{-1}Tx = x \qquad \text{para todo } x \in \mathfrak{D}(T)$$

e

$$TT^{-1}y = y \qquad \text{para todo } y \in \mathfrak{R}(T).$$

Agora, analisando o caso de operadores lineares em espaços vetoriais, o inverso de um operador linear existe se, e somente se, o núcleo do operador consiste apenas no vetor nulo.

Teorema 2.5. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Seja $T : X(T) \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $\mathfrak{D}(T) \subset X$ e imagem $\mathfrak{R}(T) \subset Y$. Então:*

(a) O inverso $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T)$ existe se, e somente se,

$$Tx = 0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

(b) Caso exista, T^{-1} é um operador linear.

(c) Se $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$ *e T^{-1} existe, então* $\dim \mathfrak{R}(T) = \dim \mathfrak{D}(T)$.

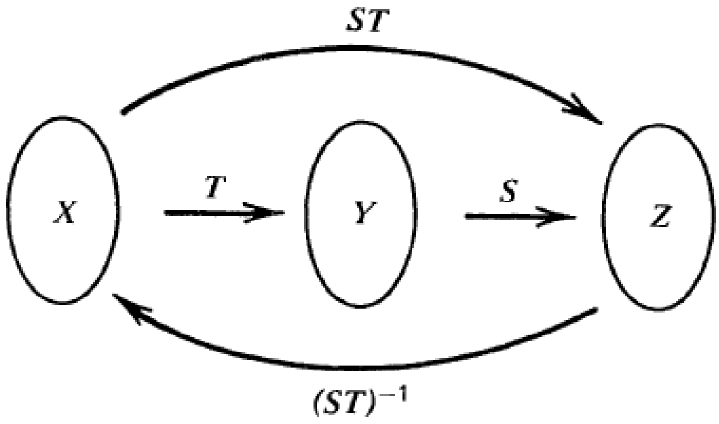
Vamos ter uma fórmula bastante útil para o inverso da composta de operadores lineares.

Lema 2.3. *Sejam $T : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow Z$ operadores lineares bijetivos, onde X, Y, Z são espaços vetoriais. Então, o inverso $(ST)^{-1} : Z \longrightarrow X$ do produto (composição) ST existe, e*

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

A Figura 2 resume a ideia de como séria o lema 2.3.

Figura 2 – Produto inverso



Fonte: Erwin Kreyszig (1989, p 89)

2.3 Operadores lineares limitados e contínuos

Agora, apresentamos o conjunto de operadores em espaços normados, aonde abordará resultados impostantes que auxiliaram no desenvolvimento do alguns resultados dos capítulos 3 e 4.

Definição 2.3 (Operador linear limitado)**.** Sejam X e Y espaços normados e $T : T(\mathfrak{D}) \subseteq X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $\mathfrak{D}(T) \subset X$. Diz-se que o operador T é limitado se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$, tem-se:

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \tag{2.8}$$

⧫

Em (2.8) o lado esquerdo e o direito pertencem a $\mathbb{R}$. Além disso, um operador linear limitado aplica conjuntos limitados em $\mathfrak{D}(T)$ sobre conjuntos limitados em Y. Por isso a utilização do termo "operador limitado".

De (2.8), obtemos

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c. \qquad (x \neq 0)$$

Diante disso, c é maior cota superior do conjunto $S = \{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \in \mathfrak{D}(T),\, x \neq 0\}$, e portanto, S possui supremo. Assim, definimos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

em que $\|T\|$ será chamada de norma do operador T. Vale ressaltar da definição que se $\mathfrak{D}(T) = \{0\}$, obtemos que $\|T\| = c\|0\| = 0$. Para este caso, $T = 0$ pois $T0 = 0$.

Da definição de supremo, temos

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|Tx\|, \qquad (\forall x \in \mathfrak{D} - \{0\}),$$

logo,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Nessa direção, temos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Dado um operador linear limitado, conforme a Definição 2.3. Então:*

(a) Uma fórmula alternativa para a norma de T é

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathfrak{D}(T) \|x\|=1} \|Tx\|. \tag{2.9}$$

(b) A norma definida por (2.9) satisfaz as condições de uma norma no espaço vetorial dos operadores lineares limitados $T : \mathfrak{D}(T) \subset X \Leftrightarrow Y$. Ou seja,

(N1) $\|T\| \geq 0$

(N2) $\|T\| = 0 \iff T = 0$

(N3) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$

(N4) $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

Agora, apresentaremos alguns resultados de operadores lineares.

Teorema 2.6. *Se um espaço normado X é de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Teorema 2.7. *Seja $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $\mathfrak{D}(T) \subset X$ e X, Y são espaços normados. Então:*

(a) T é contínuo se, e somente se, T é limitado;

(b) Se T é contínuo em um único ponto, então é contínuo.

Corolário 2.2. *Seja T um operador linear limitado. Então:*

(a) Dado $x_n, x \in \mathfrak{D}(T)$, se $x_n \longrightarrow x$ implica que $Tx_n \longrightarrow Tx$.

(b) O núcleo $\mathfrak{N}(T)$ é fechado.

Uma aplicação contínua $T : X \longrightarrow Y$ tem a propriedade de que, para todo conjunto aberto em Y, a imagem inversa é um conjunto aberto em X. Isto não implica que T aplique conjuntos abertos de X em conjuntos abertos de Y. Por exemplo, a aplicação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $T(t) \longmapsto \sin t$ é contínua, mas aplica $(0, 2\pi)$ em $[-1, 1]$.

Teorema 2.8. *Sejam X e Y espaço de Banach. Um operador linear limitado T de X em Y é uma aplicação aberta. Portanto, se T é bijetivo, então T^{-1} é contínuo, e assim, limitado.*

2.4 Funcionais lineares

Um funcional é um operador cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$. Aparecem com frequência e são usadas notações especiais. Denotamos funcionais por letras minúsculas $f, g, h, \ldots$; o domínio de f por $\mathfrak{D}(f)$, a imagem por $\mathfrak{R}(f)$ e o valor de f em um $x \in \mathfrak{D}(f)$ por $f(x)$.

Definição 2.4 (Funcional linear)**.** Um funcional linear f é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e imagem no corpo escalar $\mathbb{K}$ de X. Assim,

$$f : \mathfrak{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K},$$

em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se X é real e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se X é complexo.

◇

Definição 2.5 (Funcional linear limitado)**.** Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com imagem no corpo escalar do espaço normado X em que se encontra o domínio $\mathfrak{D}(f)$. Assim, existe um número real c tal que para todo o $x \in \mathfrak{D}(f)$,

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

Além disso, a norma de f é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.10}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

◊

De (2.10), tem-se

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

Teorema 2.9. *Um funcional linear f com domínio $\mathfrak{D}(f)$ em um espaço normado é contínuo se, e somente se, f for limitado.*

Dados X e Y espaços normados, em que ambos podem ser real ou complexo, define-se o conjunto $B(X, Y)$ que consiste de todos os operadores lineares limitados de X em Y.

Sabendo que se Y é um espaço Banach, então $B(X, Y)$ é um espaço Banach, obtêm-se uma consequência em relação ao espaço dual X' de X, que é definido da seguinte forma.

Definição 2.6 (Espaço dual X')**.** Seja X um espaço normado. Então o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X, é chamado de espaço dual de X e é denotado por X'.

◊

Da definição 2.6, X constitui um espaço normado, com norma definida por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|. \tag{2.11}$$

Teorema 2.10. *O espaço dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach (se X é ou não).*

O resultado a seguir apresenta as convergências de uma sequência de operadores $(T_n) \subset B(X, Y)$ em espaços normados.

Definição 2.7 (Convergência de sequências de operadores)**.** Sejam X e Y espaços normados. Uma sequência (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ é dito ser:

(1) uniformemente convergente se (T_n) converge na norma em $B(X, Y)$,

(2) fortemente convergente se $(T_n x)$ converge fortemente em Y para cada $x \in X$,

(3) fracamente convergente se $(T_n x)$ converge fracamente em Y para cada $x \in X$.

Em fórmulas isto significa que há um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que

(1) $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

(2) $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$,

(3) $|f(T_n)x - f(Tx)\| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$ e todo $f \in Y'$.

Respectivamente, o operador T é chamado de limite uniforme, forte e fraco de (T_n).

$\diamond$

3 OPERADORES LINEARES COMPACTOS EM ESPAÇOS NORMADOS

Neste capítulo vamos abordar o que são operadores lineares compacto em espaços normados e, logo após, apresentamos alguns resultados essenciais.

Definição 3.1 (Operador linear compacto)**.** *Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é chamado de operador linear compacto (ou o operador linear completamente contínuo) se T é linear e se, para cada subconjunto limitado M de X, a imagem $T(M)$ é relativamente compacto, ou seja, o fecho $\overline{T(M)}$ é compacto.*

$\diamond$

A teoria de equações integrais da forma

$$(T - \lambda I)x(s) = y(s) \qquad \text{onde} \quad Tx(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt, \tag{3.1}$$

originou a teoria dos operadores lineares compactos, em que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um parâmetro, y e k são funções dadas (submetidas a certas condições) e x é uma função desconhecida.

D. Hilbert (1912) descobriu um resultado essencial sobre a resolução de (3.1) ("Teorema de Fredhom"), que ela não depende da representação integral de T, mas apenas do fato de T seja um operador linear compacto.

No lema a seguir, veremos que um operador linear compacto é contínuo, mas a reciproca não é verdadeira.

Lema 3.1. *Sejam X e Y espaços normados. Então:*

(a) *Todo operador linear compacto $T : X \longrightarrow Y$ é limitado, portanto contínuo.*

(b) *Se $\dim X = \infty$, o operador identidade $I : X \longrightarrow X$ (que é contínuo) não é compacto.*

Demonstração:

(a) Seja $U = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ a bola unitária, que é limitada. Como T é compacto, $\overline{T(U)}$ é compacto e limitado.Logo, pelo Lema 2.1, temos

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty.$$

Assim, T é limitado, e consequentemente, pelo Teorema 2.7(a), T é contínuo.

(b) Seja $M = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária fechada, que é limitada. Como $\dim X = \infty$, M não pode ser compacto. Então, $I(M) = M = \overline{M}$ não é relativamente compacto.

■

Da definição de conjuntos compactos, obtemos a seguinte caracterização:

Teorema 3.1. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ é um operador linear, então T é compacto se, e somente se, ele aplica toda sequência limitada (x_n) em X em uma sequência (Tx_n) em Y que tem uma subsequência convergente.*

Demonstração: Sendo T compacto e (x_n) limitada, obtemos que o fecho de (Tx_n) em Y é compacto e, usando a Definição 2.1, isto implica que (Tx_n) contém uma subsequência convergente.

Para a recíproca, vamos considerar que toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ contém uma subsequência (x_{n_k}) na qual (Tx_{n_k}) converge em Y. Sejam $B \subset X$ um subconjunto limitado e (y_n) uma sequência qualquer em $T(B)$. Logo, $y_n = Tx_n$, para alguns $x_n \in B$, e (x_n) é limitada, porque B é limitado. Assim, (Tx_n) contém uma subsequência convergente. Então, $\overline{T(B)}$ é compacto pela Definição 2.1, pela arbitrariedade de (y_n). Portanto, da Definição 3.1, segue-se que T é compacto .

■

Usando o Teorema 3.1, obtemos que a soma $T_1 + T_2$ de dois operadores lineares compactos $T_j : X \longrightarrow Y$ é compacto. Além disso, αT_1 é compacto, onde α é qualquer escalar. Implicando que o conjunto de todos os operadores lineares compactos de X para Y é um espaço vetorial.

No caso de dimensão finita, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*

(a) *Se T é limitado e $\dim T(X) < \infty$, o operador T é compacto.*

(b) *Se $\dim X < \infty$, o operador T é compacto.*

Demonstração:

(a) Seja (x_n) uma sequência limitada qualquer em X. Assim, usando o fato de que T é um operador linear limitado temos a desigualdade $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$, obtendo que (Tx_n) é limitada. Como $\dim T(X) < \infty$, temos (Tx_n) relativamente compacto pelo Teorema 2.1. Assim, (Tx_n) tem uma subsequência convergente. Pela arbitrariedade de (x_n) em X, obtemos, pelo Teorema 3.1, que o operador T é compacto.

(b) Usando o fato que $\dim X < \infty$ obtemos que T é limitado (Teorema 2.6). Agora, usando o Teorema 2.4 (b), obtemos que $\dim T(X) \leq \dim X$. Portanto, pela parte (a), T é compacto.

■

O teorema a seguir estabelece as condições nas quais o limite de uma sequência de operadores lineares compactos é compacto. Pode-se provar a compacidade de um operador dado, exibindo-o como o limite uniforme de uma sequência de operadores lineares compactos.

Teorema 3.3. *Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares compactos $T_i : X \longrightarrow Y$ com $(i = 1, \cdots, n)$ e X um espaço normado para e Y espaço de Banach. Se (T_n) converge uniformemente para um operador T, então o operador limite T é compacto.*

Demonstração: Sejam T_1 compacto e $(x_n) \subset X$ limitada. Logo obtemos uma subsequência $(x_{1,m})$ tal que $(Tx_{1,m})$ é de Cauchy. De maneira análoga, $(x_{1,m})$ vai ter uma subsequência $(x_{2,m})$ no qual $(Tx_{2,m})$ é de Cauchy. Assim, iremos aplicar esse processo de forma contínua até obter uma "sequência diagonal" $(y_m) = (x_{m,m})$ sendo subsequência de (x_m) tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ fixo, a sequência $(T_n y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. (x_m) é limitada, ou seja, $\|x_m\| \leq c$ para todo m. Consequentemente, $\|y_m\| \leq c$ para todo m. Seja $\varepsilon > 0$, logo existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_p\| < \varepsilon/3c$. Desde que $(T_p y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (j,\, k > N)$$

Para $j,\, k > N$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|Ty_j - Ty_k\| &= \|Ty_j - T_p y_j + T_p y_j - T_p y_k + T_p y_k - Ty_k\| \\
&\leq \|Ty_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - Ty_k\| \\
&= \|(T - T_p) y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|(T_p - T) y_k\| \\
&\leq \|T - T_p\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \|y_k\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Então (Ty_m) é de Cauchy e converge, pois Y é um espaço de Banach, ou seja, é completo. Uma vez que (y_m) é uma subsequência da sequência limitada arbitrária (x_m), do Teorema 3.1 segue o resultado.

■

A convergência forte $\|T_n x - Tx\| \to 0$ não é suficiente para garantir que T seja compacto. De fato, vamos considerar $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$, definindo $T_n x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots)$, com

$x = (\xi_j) \in l^2$. Como T_n é linear e limitado, do Teorema 3.2 (a) obtemos que T_n é compacto. Porém, $T_n x \longrightarrow x = Ix$, sendo $\dim l^2 = \infty$, do Lema 3.1 (b) segue-se que I não é compacto.

No exemplo a seguir usamos o Teorema 3.3 para provar a compacidade de um operador.

Exemplo 3.1. *O operador $T : l^2 \longrightarrow l^2$ definido por*

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots) = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots, \frac{\xi_n}{n}, \ldots\right)$$

é compacto.

Solução: Seja $x = (\xi_j) \in l^2$, logo $y = (\xi_j/j) \in l^2$. Definindo $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ por

$$T_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \cdots\right)$$

tem-se que T_n é linear e limitado, do Teorema 3.2(a) obtemos que também é compacto. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_n x\|^2 = \|(T - T_n)x\|^2 &= \left\|\xi_1 - \xi_1, \cdots, \frac{\xi_n}{n} - \frac{\xi_n}{n}, \frac{\xi_{n+1}}{n+1} - 0, \frac{\xi_{n+2}}{n+2} - 0, \cdots\right\|^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}|\xi_j|^2 \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in l^2$ com $\|x\| = 1$, temos

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, $T_n \longrightarrow T$, e T é compacto pelo Teorema 3.3.

♦

É possível a partir de uma sequência fracamente covergente, obter uma sequência fortemente convergentes, usando o seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Suponha que (x_n) em X é fracamente convergente, digamos, $x_n \xrightarrow{w} x$. Então (Tx_n) é fortemente convergente em Y e tem o limite $y = Tx$.*

Demonstração: Sejam $y_n = Tx_n$ e $y = Tx$. A prova será realizada em duas etapas, primeiro será mostrado que

$$y_n \xrightarrow{w} y. \tag{3.2}$$

E depois

$$y_n \longrightarrow y. \tag{3.3}$$

Considere g um funcional linear limitado qualquer em Y e defina o funcional f em X, tal que

$$f(z) = g(Tz) \qquad\qquad z \in X.$$

Como T é compacto, então f é linear e limitado, assim

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \|Tz\| \leq \|g\| \|T\| \|z\|.$$

Por hipótese, $x_n \xrightarrow{w} x$, o que implica $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, porém temos que, $g(Tx_n) \longrightarrow g(Tx)$, isto é, $g(y_n) \longrightarrow g(y)$. Como g foi arbitrário, (3.2) está provado.

Supondo que (3.3) não é válido, (y_n) tem uma subsequência (y_{n_k}) tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \eta,$$

para alguns $\eta > 0$. Como por hipótese (x_n) é fracamente convergente , (x_n) é limitada (ver Kreyszig (1989) p. 258), assim (x_{n_k}) é limitada. Como T é compacto, temos, do Teorema 3.1, que (Tx_{n_k}) tem uma subsequência convergente $(\tilde{y}_j)$. Seja $\tilde{y}_j \longrightarrow \tilde{y}$, logo, $\tilde{y}_j \xrightarrow{w} \tilde{y}$. De (3.2) segue-se que $\tilde{y} = y$. Portanto,

$$\|\tilde{y}_j - y\| \longrightarrow 0 \qquad \text{porém} \qquad \|\tilde{y}_j - y\| \geq \eta > 0,$$

o que é uma contradição, provando (3.3).

■

No próximo resultado veremos que dado um operador linear compacto e um operador linear limitado, a composição é um operador linear compacto.

Lema 3.2. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto e $S : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado em um espaço normado X. Então, TS e ST são compactos.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um conjunto limitado qualquer e usando a hipótese de S ser um operador limitado, então $S(B)$ é um conjunto limitado, como T é compacto, segue que o conjunto $T(S(B)) = TS(B)$ é relativamente compacto.

Agora, seja $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada qualquer. Do Teorema 3.1, Tx_n tem uma subsequência convergente $T(x_{n_k})$ e assim, $ST(x_{n_k})$ converge. Decorrente do Teorema 3.1 que ST é compacto.

$\blacksquare$

4 TEORIA ESPECTRAL DOS OPERADORES COMPACTOS

Neste capítulo será usado espaços vetoriais de dimensão infinita esse aonde será usado o conceito de espectro de um operador linear em espaços normados e, logo após, apresentamos algumas propriedades espectrais dos operadores compactos.

4.1 Teoria espectral dos operadores lineares em espaços normados

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow X$ um operador linear com domínio $\mathfrak{D}(T) \subset X$. Associamos a T o seguinte operador

$$T_\lambda = T - \lambda I, \tag{4.1}$$

em que λ é um número complexo e I é o operador identidade em $\mathfrak{D}(T)$. O inverso de T_λ (caso exista) é denotado por $R_\lambda(T)$ (ou simplesmente R_λ), ou seja,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}, \tag{4.2}$$

que será chamado de operador resolvente de T ou resolvente de T. Do Teorema (2.5) obtêm-se que $R_\lambda(T)$ é um operador linear.

Esse nome é adequado, pois o resolvente de T ajuda a resolver a equação $T_\lambda x = y$. De fato, $x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T) y$ desde que $R_\lambda(T)$ exista.

As propriedades de T_λ e R_λ dependem de λ e a teoria espectral se preocupa com essas propriedades. Buscamos saber para quais $\lambda \in \mathbb{C}$, R_λ existe, é limitado, e possui domínio denso em X, para citar apenas alguns aspectos.

Para compreender melhor T, T_λ e R_λ será necessário a seguinte definição.

Definição 4.1. (Valor regular, conjunto resolvente e espectro) *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço complexo normado e $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow X$ um operador linear com domínio $\mathfrak{D}(T) \subset X$. um valor regular λ de T é um número complexo tal que*

(R1) *$R_\lambda(T)$ existe;*

(R2) *$R_\lambda(T)$ é limitado;*

(R3) *$R_\lambda(T)$ está definido em um conjunto que é denso em X.*

- *O conjunto resolvente $\rho(T)$ de T é o conjunto de todos os valores regulares λ de T. Seu complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ no plano complexo $\mathbb{C}$, é chamado de espectro de T e um $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado de valor espectral de $\sigma(T)$.*

- *O espectro pontual ou espectro discreto $\sigma_p(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ não existe. Um $\lambda \in \sigma_p(T)$ é chamado de autovalor de T.*

- *O espectro contínuo de $\sigma_c(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \sigma(T)$ tais que $R_\lambda(T)$ existe e satisfaz **(R3)** mas não **(R2)**, ou seja, $R_\lambda(T)$ é ilimitado.*

- *O espectro residual para $\sigma_r(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \sigma(T)$ tais que $R_\lambda(T)$ existe (e pode ser limitado ou não) mas não satisfaz **(R3)**, ou seja, o domínio de $R_\lambda(T)$ não é denso em X.*

$\diamond$

Um fato a ser notado da Definição 4.1 é que alguns dos conjuntos podem ser vazios. Por exemplo, $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \varnothing$ no caso de X ser de dimensão finita.

Para auxiliar e organizar melhor as informações da Definição 4.1, apresentamos a seguinte a tabela:

Tabela 1.1: Tabela resumindo a Definição 4.1.

Satisfeito	Não satisfeito	λ pertence a
(R1) (R2) (R3)		$\rho(T)$
	(R1)	$\sigma_p(T)$
(R1) (R3)	(R2)	$\sigma_c(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

Fonte: Erwin Kreyszig (1989, p 89)

É notável que os quatro conjuntos na tabela são disjuntos e sua união é todo o plano complexo:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \rho(T) \cup \sigma(T) \\ &= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \end{aligned}$$

Do Teorema 2.5 obtemos que $R_\lambda(T) : \mathfrak{R}(T_\lambda) \longrightarrow \mathfrak{D}(T_\lambda)$ existe, se e somente, se $T_\lambda x = 0$ implica $x = 0$, ou seja, o núcleo de T_λ é $\{0\}$. Assim, se $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ para algum $x \neq 0$, $R_\lambda(T)$ não existe e, então, $\lambda \in \sigma_p(T)$, por definição, isto é, λ é um autovalor de T. O vetor x é então chamado um autovetor de T correspondente ao valor λ. O subespaço de $\mathfrak{D}(T)$ consistindo do vetor nulo e todos os autovetores de T correspondentes a um autovalor λ de T é chamado de autoespaço de T correspondente esse autovalor λ.

Se X é de dimensão infinita, então T pode ter valores espectrais que não são autovalores, como apresentado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. No espaço $X = l^2$ definimos um operador linear $T : l^2 \longrightarrow l^2$ por $T(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$, com $(\xi_j) \in l^2$. Vejamos que $0 \in \sigma_r(T)$.

Solução: T é limitado e $\|T\|= 1$, pois

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2.$$

Temos que $Tx = 0$ implica $x = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ não é um autovalor. Mas, vejamos que $\lambda = 0$ é um valor espectral. De fato, o operador $R_0(T) = T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ existe e é o operador dado por

$$T^{-1}(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_2, \xi_3, \cdots).$$

Além disso, $T(X)$ é o subespaço de Y que consiste de todos $Y = (\eta_j)$ com $\eta_1 = 0$, assim $T(X)$ não é denso em X, então $R_0(T)$ não satisfaz **(R3)**.

♦

Se $T : X \longrightarrow X$ é limitado e linear e X é completo, e se para algum λ o resolvente $R_\lambda(T)$ existe e é definido em todo o espaço X, então para aquele λ o resolvente é limitado.

Lema 4.1. *Seja X um espaço de Banach complexo, $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado, e $\lambda \in \rho(T)$. Então, $R_\lambda(T)$ está definido em todo o espaço X e é limitado.*

Demonstração: Ver Kreyszig (1989) p. 373.

Agora será apresentado uma propriedade básica dos autovetores.

Teorema 4.1 (Independência Linear)**.** *Os autovetores $x_1, \cdots, x_n$ correspondentes a diferentes autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de um operador linear T em um espaço vetorial X constituem um conjunto linearmente independente.*

Demonstração: Inicialmente, supondo que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é linearmente dependente obtemos que existe x_m que pode ser escrito como uma combinação linear de seus antecessores, da seguinte maneira,

$$x_m = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m-1} x_{m-1}, \tag{4.3}$$

e tal que $\{x_1, \cdots, x_{m-1}\}$ é linearmente independente. Em (4.3) será aplicado $T - \lambda_m I$ em ambos os lados, logo

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m I)x_m &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (T - \lambda_m I)x_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m)x_j. \end{aligned}$$

O lado esquerdo vai ser 0 pois x_m é um autovetor correspondente λ_m. Sabendo que os vetores à direita formam um conjunto linearmente independente, tem-se que

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda_m) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, m-1),$$

pois deve-se ao fato de $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$. Assim, por (4.3), $x_m = 0$ e isto é uma contradição pois x_m é um autovetor e, portanto, demonstrando o teorema.

■

4.2 Propriedades espectrais de operadores lineares compactos em espaços normados

A teoria espectral de operadores lineares compactos por ser entendida como uma generalização da teoria de autovalores de matrizes finitas. Nesta seção, apresentamos alguns resultados essenciais da teoria.

Teorema 4.2. *O conjunto dos autovalores de um operador linear compacto $T : X \longrightarrow X$ em um espaço normado X é enumerável, e o único ponto de acumulação possível é $\lambda = 0$.*

Demonstração: A ideia para realizar essa demonstração é mostrar que para todo $k > 0$ real o conjunto dos $\lambda \in \sigma_p(T)$ tal que $|\lambda| > k$ é finito. Então, fazendo por contradição, suponha que existe $k_0 > 0$ e uma sequência (λ_n) de infinitos autovalores distintos tais que $|\lambda_n| \geq k_0$. Decorre da definição de autovalores, que existem $x_n \neq 0$ tais que $Tx_n = \lambda x_n$. Porém, o conjunto de todos os $x_n's$ é linearmente independente pelo Teorema 4.1. Seja $M_n = span\{x_1, \cdots, x_n\}$. Cada elemento de M_n tem uma representação única, da forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \text{ com } x \in M_n.$$

Aplicando $T - \lambda_n I$, temos que:

$$\begin{aligned}(T-\lambda_n I)x &= Tx - \lambda_n Ix\\ &= \alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n - \alpha_1\lambda_n x_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n x_n\\ &= \alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n x_n - \alpha_1\lambda_n x_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n x_n\\ &= \alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_{n-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$(T-\lambda_n I)x \in M_{n-1} \qquad \text{para todo } x \in M_n. \tag{4.4}$$

Usando que os conjuntos $M_n's$ são fechados. Pelo Lema de Riesz (Lema 2.2) existe uma sequência (y_n) tal que

$$y_n \in M_n, \qquad \|y_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \ \text{ para todo } x \in M_{n-1}. \tag{4.5}$$

Para finalizar, vamos provar que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k_0, \qquad (n > m) \tag{4.6}$$

assim, como $k_0 > 0$, (Ty_n) não tem subsequência convergente, que é uma contradição, pois T é compacto e (y_n) é limitado. Para obter (4.6), observe que

$$\begin{aligned}Ty_n - Ty_m &= \lambda_n y_n - \lambda_n y_n + Ty_n - Ty_m\\ &= \lambda_n y_n - (\lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m)\\ &= \lambda_n y_n - \tilde{x}\end{aligned}$$

com,

$$\tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m. \tag{4.7}$$

Seja que $m < n$. Logo $m \leq n-1 < n$. Usando o fato de $y_m \in M_m \subset M_{n-1} = span\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ e $Tx_j = \lambda_j x_j$, então $Ty_m \in M_{n-1}$. Além disso, por (4.4)

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(Ty_n - \lambda_n y_n) = -(T-\lambda_n I)y_n \in M_{n-1}.$$

Desse modo, $\tilde{x} \in M_{n-1}$. Nesse caso $x = \lambda_n^{-1}\tilde{x} \in M_{n-1}$, e de (4.5)

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = |\lambda_n|\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda_n| \geq \frac{1}{2}k_0. \tag{4.8}$$

Provando (4.6). Portanto, a suposição que existem infinitos autovalores satisfazendo $|\lambda_n| \geq k_0$ para algum $k_0 > 0$ é falso, concluindo a demonstração.

■

Em outras palavras, esse teorema mostra que se um operador linear compacto em um espaço normado tiver infinitos autovalores, podemos organizá-los em uma sequência convergente para zero.

Teorema 4.3. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X. Então, para cada $\lambda \neq 0$ o núcleo $\mathcal{N}(T_\lambda)$ de $T_\lambda = T - \lambda I$ é de dimensão finita.*

Demonstração: Sejam M a bola fechada e unitária em $\mathcal{N}(T_\lambda)$ e $(x_n) \subset M$. Consequentemente, (x_n) é limitado, ou seja, $\|x_n\| \leq 1$, do Teorema 3.1, (Tx_n) tem a subsequência convergente (Tx_{n_k}). Como x_n pertence ao núcleo de T_λ, então

$$T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0 \Rightarrow Tx_n = \lambda x_n.$$

Como por hipótese $\lambda \neq 0$, temos que $x_n = \lambda^{-1} T x_n$. Dessa construção, $(x_{n_k}) = (\lambda^{-1} T x_{n_k})$ é convergente. O limite está em M pois é fechado. Da definição de compactos, M é compacto, pois (x_n) foi arbitrário. Portanto, conclui-se que $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$, pois provamos que a bola unitária em $\mathcal{N}(T)$ é compacta.

■

Corolário 4.1. *Nas hipóteses do Teorema 4.3,temos*

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda^n) < \infty \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4.9}$$

e

$$\{0\} = \mathcal{N}(T_\lambda^0) \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \cdots \tag{4.10}$$

Demonstração: Usando, o desenvolvimento binomial, segue que

$$\begin{aligned}
T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} T^0 (-\lambda)^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \\
&= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}
\end{aligned}$$

Agora, rescrevemos da seguinte forma

$$T_\lambda^n = W - \mu I, \qquad \mu = -(-\lambda)^n,$$

em que $W = TS = ST$ e

$$S = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}.$$

Usando o fato de que T é limitado, temos que S é limitado e também T é compacto por hipótese, assim, aplicando o Lema (3.2), temos que W é compacto. Portanto, do Teorema (4.3), segue a veracidade de (4.9).

Como T_λ é linear, tem-se que $T_\lambda 0 = 0$, daí $T_\lambda^n x = 0$ implica $T_\lambda^{n+1} x = 0$, provando (4.10).

∎

Seja um operador linear compacto T e $\lambda \neq 0$ qualquer, e consideremos as imagens dos operadores T_λ, T_λ^2, $\cdots$. O núcleo de um operador linear limitado é sempre fechado, porém, não necessariamente a imagem é fechada. Mas, se T é compacto, então T_λ tem uma imagem fechada para cada $\lambda \neq 0$, isso decorre para T_λ^2, T_λ^3, $\cdots$, como será provado no teorema e corolário a seguir.

Teorema 4.4. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X. Então para cada $\lambda \neq 0$ a imagem de $T_\lambda = T - \lambda I$ é fechado.*

Demonstração: A ideia para demonstrar esse teorema é assumir que a imagem $T(X)$ não é fechado, assim chegando em uma contradição, porém é um processo extenso, por isso será divido em três etapas, da seguinte forma:

(a) Seja y no fêcho de $T_\lambda(X)$ mas que não está em $T_\lambda(X)$ e uma sequência $(T_\lambda x_n)$ convergindo para y. Vai ser verificado que $x_n \notin \mathcal{N}(T)$, porém $\mathcal{N}(T)$ contém uma sequência (z_n), na qual $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, com δ_n sendo a distância de x_n a $\mathcal{N}(T)$.

(b) Fazendo $a_n = \|x_n - z_n\|$, será provado que $a_n \longrightarrow \infty$.

(c) Por fim, definindo $w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$, chegaremos a uma contradição.

Vamos as provas destes itens.

(a) Suponha que $T_\lambda(X)$, não é fechado. Assim, existe $y \in \overline{T_\lambda(X)}$, tal que $y \notin T_\lambda(X)$ e uma sequência $(x_n) \in X$, tal que

$$y_n = T_\lambda x_n \longrightarrow y. \tag{4.11}$$

Sabe-se que $0 \in T_\lambda(X)$, pois $T_\lambda(X)$ é um espaço vetorial. Como $y \notin T_\lambda(X)$, temos que $y \neq 0$, então, $y_n \neq 0$ e $x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$ para todo n suficientemente grande. Sem perda de generalidade, podemos assumir que isso vale para todo n. Uma vez que $\mathcal{N}(T_\lambda)$ é fechado, a distância de x_n para $\mathcal{N}(T_\lambda)$ dada por δ_n é positiva,

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

Aplicando a definição de ínfimo, existe uma sequência (z_n) em $\mathcal{N}(T_\lambda)$, tal que

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n. \tag{4.12}$$

(b) Agora vamos demonstrar que

$$a_n = \|x_n - z_n\| \longrightarrow \infty \qquad (n \longrightarrow \infty). \tag{4.13}$$

Para isso, supondo que tal fato não ocorra, temos que $(x_n - z_n)$ tem uma subsequência limitada. Da hipótese que T é compacto, segue-se que $(T(x_n - z_n))$ tem uma subsequência convergente. Como $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} T_\lambda &= T - \lambda I \\ \lambda I &= T - T_\lambda \\ I &= \lambda^{-1}(T - T_\lambda) \end{aligned}$$

Usando $T_\lambda z_n = 0$, pois $z_n \in \mathfrak{N}(T_\lambda)$ obtemos

$$\begin{aligned} x_n - z_n = I(x_n - z_n) &= \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) \\ &= \frac{1}{\lambda}[T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n - z_n)] \\ &= \frac{1}{\lambda}[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n]. \end{aligned}$$

De (4.11) e do fato de $(T(x_n - z_n))$ ter uma subsequência convergente. Segue-se $(x_n - z_n)$ tem uma subsequência convergente, ou seja, $x_{n_k} - z_{n_k} \longrightarrow v$. Da hipótese que T é compacto, temos que T_λ é contínuo, logo

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \longrightarrow T_\lambda v.$$

Porém, de (4.11) e sabendo que $z_n \in \mathcal{N}(T)$, obtemos

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \longrightarrow y,$$

Desses dois últimos limites, conclui-se que $T_\lambda v = y$. Implicando que $y \in T_\lambda$, mas é um absurdo, pois $y \notin T_\lambda(X)$. Portanto (4.13) é válido.

(c) Defina

$$w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n). \tag{4.14}$$

Consequentemente, $\|w_n\| = 1$. Agora utilizando os fatos que $a_n \longrightarrow \infty$, $T_\lambda z_n = 0$ e $(T_\lambda x_n)$ converge, obtemos

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{a_n}T_\lambda(x_n - z_n) = \frac{1}{a_n}T_\lambda x_n \longrightarrow 0. \tag{4.15}$$

Seja $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$, como definido anteriormente, obtemos

$$w_n = Iw_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda w_n). \tag{4.16}$$

Uma vez que T é compacto e (w_n) é limitado, então (Tw_n) tem uma subsequência convergente. Usando (4.15), $(T_\lambda w_n)$ converge. De (4.16), obtemos uma subsequência convergente, ou seja,

$$w_{n_j} \longrightarrow w. \tag{4.17}$$

Junto com (4.15), implica que $T_\lambda w = 0$ ou seja, $w \in \mathcal{N}(T)$. Como $z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, temos

$$u_n = z_n + a_n w \in \mathcal{N}(T_\lambda). \tag{4.18}$$

Assim, pela definição de δ_n que a distância de x_n a u_n satisfaz:

$$\|x_n - u_n\| \geq \delta_n.$$

De (4.12), (4.14) e (4.18), segue que

$$\begin{aligned}
\delta_n &\leq \|x_n - u_n\| \\
&= \|x_n - (z_n + a_n w)\| \\
&= \|(x_n - z_n) - a_n w\| \\
&= \|a_n w_n - a_n w\| \\
&= a_n\|w_n - w\| \\
&< 2\delta_n\|w_n - w\|.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\delta_n > 0$,

$$\frac{\delta_n}{2\delta_n} < \|w_n - w\| \Rightarrow \frac{1}{2} < \|w_n - w\|.$$

Mas isso contradiz (4.17), finalizando a demonstração do teorema.

■

Corolário 4.2. *Sob as hipótese do Teorema 4.4 a imagem de T_λ^n é fechada para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$. Além disso,*

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \cdots$$

Demonstração: Usando o fato de $T_\lambda^n = W - \mu I$ ser compacto, como foi visto no Corolário 4.1, e usando o Teorema 4.4 a primeira afirmação segue. Por indução, conclui-se a segunda afirmação. De fato,

$$T_\lambda^0(X) = I(X) = X \supset T_\lambda(X).$$

,

Supondo que $T_\lambda^{n-1}(X) \supset T_\lambda^n(X)$ é valido, então aplicando T_λ, obtemos

$$T_\lambda^n(X) \supset T_\lambda^{n+1}(X).$$

■

Teorema 4.5. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X, e seja $\lambda \neq 0$. Então existe um menor inteiro $n = r$ (dependendo de λ) tal que*

$$\mathcal{N}(T_\lambda^r) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r+1}) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r+2}) = \cdots \tag{4.19}$$

e

$$T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = T_\lambda^{r+2}(X) = \cdots \tag{4.20}$$

E se $r > 0$, as seguintes inclusões são próprias:

$$\mathcal{N}(T_\lambda^0) \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \cdots \subset \mathcal{N}(T_\lambda^r) \tag{4.21}$$

e

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^r(X) \tag{4.22}$$

Demonstração: Ver Kreyszig (1989) na p. 431.

A caracterização do espectro de um operador linear compacto num espaço de Banach é uma consequência do teorema acima.

Teorema 4.6. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço de Banach X. Então, todo valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (se existir) é um autovalor de T.*

Demonstração: Para $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$, então λ é um autovalor de T. Suponha que $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$, com $\lambda \neq 0$. Consequentemente, $T_\lambda x = 0$ implica que $x = 0$ e $T_\lambda^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ existe. Como

$$\{0\} = \mathcal{N}(I) = \mathcal{N}(T_\lambda^0) = \mathcal{N}(T_\lambda),$$

temos que $r = 0$ pelo Teorema 4.5 e, assim, $X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda(X)$. Logo, T_λ é bijetivo, T_λ^{-1} é limitado pelo Teorema 2.8, pois X é completo. Portanto, pela definição $\lambda \in \rho(T)$.

■

Observação 4.1. Agora, será analisado o que ocorre quando $\lambda = 0$ com o operador compacto $T : X \longrightarrow X$ em um espaço normado complexo X. Se $\dim X < \infty$, então T tem representações por matrizes e 0 pode ou não pertencer a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, ou seja, podemos ter $0 \notin \sigma(T)$, e assim, $0 \in \rho(T)$. Para o caso de $\dim X = \infty$, então $0 \in \sigma(T)$ de fato, pois se $0 \in \rho(T)$ então $TT^{-1} = I$ séria compacto o que não ocorre e

$$0 \in \sigma_p(T), \qquad 0 \in \sigma_c(T) \qquad 0 \in \sigma_r(T)$$

são possíveis.

■

Do Teorema 4.5, obtemos uma representação de X como a soma direta de dois subespaços fechados, como pode ser visto a seguir:

Teorema 4.7. *Sejam X, T, λ e r como no Teorema 4.5. Então X pode ser representado na forma*

$$X = \mathcal{N}(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X). \tag{4.23}$$

Demonstração: Será utilizada a seguinte notação $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}(T_\lambda^n)$ e $\mathfrak{R}_n = T_\lambda^n(X)$. Dado $x \in X$ qualquer.

Seja $z = T_\lambda^r x$, assim $z \in \mathfrak{R}_r$. Do Teorema 4.5, $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_{2r}$, consequentemente, $z \in \mathfrak{R}_{2r}$, com $z = T_\lambda^{2r} x_1$ para alguns $x_1 \in X$. Fazendo $x_0 = T_\lambda^r x_1$, tem-se, $x_0 \in \mathfrak{R}_r$, daí

$$T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^r(T_\lambda^r x_1) = T_\lambda^{2r} x_1 = z = T_\lambda^r x.$$

Assim

$$T_\lambda^r x_0 - T_\lambda^r x = 0 \Rightarrow T_\lambda^r(x_0 - x) = 0.$$

Então, $x - x_0 \in \mathcal{N}_r$, e

$$x = (x - x_0) + x_0 \qquad (x - x_0 \in \mathcal{N}_r,\ x_0 \in \mathfrak{R}_r). \tag{4.24}$$

Para provar a unicidade, vamos supor que existe

$$x = (x - \tilde{x}_0) + \tilde{x}_0 \qquad (x - \tilde{x}_0 \in \mathcal{N}_r,\ \tilde{x}_0 \in \mathfrak{R}_r).$$

Seja $v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 \in \mathfrak{R}_r$, pois $\mathfrak{R}_r$ é um espaço vetorial. Daí $v_0 = T_\lambda^r v$ para alguns $v \in X$. Porém

$$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = x - x + x_0 - \tilde{x}_0 = (x - \tilde{x}_0) - (x - x_0) \in \mathcal{N}_r,$$

e $T_\lambda^r v_0 = 0$. Como,

$$T_\lambda^{2r} v = T_\lambda^r(T_\lambda^r v) = T_\lambda^r v_0 = 0,$$

mostrando que $v \in \mathcal{N}_{2r} = \mathcal{N}_r$. Obtemos

$$v_0 = T_\lambda^r v = 0$$

ou seja,

$$x_0 - \tilde{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0.$$

Provando a unicidade da representação. Disto e de (4.24) segue o resultado.

■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento desse trabalho é possível compreender vários resultados importantes, dentre os quais pode-se destacar os conceitos ensinados em Álgebra Linear que são apresentados de maneira mais geral em Análise Funcional, principalmente os autovalores e autovetores de operadores lineares, presentes na teoria espectral.

Realizamos, através de uma pesquisa bibliográfica, um estudo introdutório sobre a teoria espectral de operadores lineares limitados $T : X \longrightarrow X$ em espaços normados, com ênfase aos operadores compactos. Para isto, abordamos resultados sobre espaços métricos, espaços vetoriais normados, especialmente os espaços de Banach. Vimos propriedades dos operadores lineares contínuos e dos funcionais lineares.

Foi possível notar que os operadores lineares compactos possuem propriedades semelhantes as de operadores lineares em dimensão finita.

O conhecimento adquirido neste trabalho promoveu uma importante complementação na minha formação matemática como aluno, pude ter uma visão geral dos principais conceitos e resultados da Análise Funcional, além de desenvolver a habilidade em demonstrar alguns tipos especiais de resultados matemáticos.

REFERÊNCIAS

Botelho, G.; Pellegrino, D. e Teixeira, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Domingues, H. H. **Espaços Métricos e Introdução á Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

Kreyszig,Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. Wiley, 1989.

Lima, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de janeiro: SBM, 2009.

Lima, E. L. **Espaços Métricos** . Rio de janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2012.

Oliveira, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.