UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARCOS ALBERTO DE SOUSA JUNIOR

O PRINCIPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO: UM OUTRO MÉTODO DE CONTAGEM

PATOS
2022

MARCOS ALBERTO DE SOUSA JUNIOR

O PRINCIPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO: UM OUTRO MÉTODO DE CONTAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias

PATOS
2022

S725p Sousa Junior, Marcos Alberto de.
O principio da Inclusão-Exclusão [manuscrito] : um outro método de contagem / Marcos Alberto de Sousa Junior. - 2022.
26 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Analise Combinatória . 2. Princípio da inclusão-exclusão. 3. Métodos de Contagem . I. Título

21. ed. CDD 515.1

Elaborada por Edson M. A. Monteiro - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

MARCOS ALBERTO DE SOUZA JÚNIOR

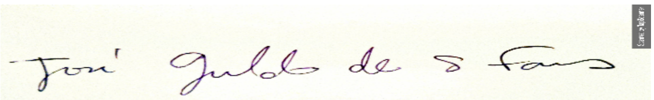
O PRINCÍPIO DE INCLUSÃO -EXCLUSÃO : UM OUTRO MÉTODO DE CONTAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Departamento do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

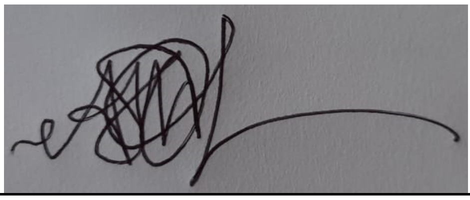
Área de concentração: Matemática

Aprovada em: _14_/_12_/_2022_.

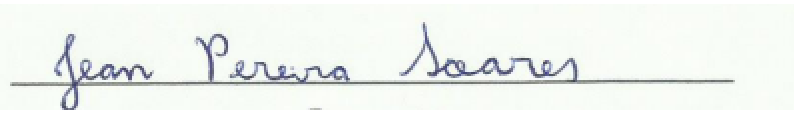
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Jean Soares Pereira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática.

LISTA DE SÍMBOLOS

!	Fatorial
U	União
∩	Interseção
∑	Somatório

SUMÁRIO

O PRINCIPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO: UM OUTRO MÉTODO DE CONTAGEM

Marcos Alberto de Sousa Junior*

RESUMO

Esse trabalho traz os aspectos fundamentais que norteiam a Análise Combinatória, com ênfase no Princípio da Inclusão-Exclusão e em sua aplicação. Será argumentado que, no contexto da Educação Básica e do Ensino Superior, há pouca cobrança e um parco reconhecimento das instituições de ensino para com métodos de Análise Combinatória. No entanto, há uma cobrança recorrente por tal área da matemática em vestibulares, concursos e olimpíadas de matemática. Visando este cenário, serão mostrados argumentos que reforçam o aprendizado da Análise Combinatória e de princípios como o Princípio de Inclusão-Exclusão, sendo ambos de extrema importância para o raciocínio e para a resolução de problemas matemáticos. Além disso, serão apresentados exemplos de sua aplicação em provas da OBMEP, do ENEM e de concursos públicos.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Princípio da Inclusão-Exclusão. Métodos de Contagem.

ABSTRACT

This work brings the fundamental aspects that guide Combinatorial Analysis, with emphasis on the Inclusion-Exclusion Principle and its application. It will be argued that, in the context of Basic Education and Higher Education, there is little demand and recognition by educational institutions for Combinatorial Analysis methods. Although there is a recurring demand for this area of mathematics in college entrance exams, publix exams, and mathematical olympics. In this scenario, arguments that reinforce the learning of Combinatorial Analysis and principles such as the Inclusion-Exclusion Principle will be shown, both of which are extremely important for reasoning and solving mathematical problems. In addition, examples of its application in OBMEP, ENEM and public exams will be presented.

Keywords: Combinatorics. Inclusion-Exclusion Principle. Counting Methods.

*Aluno de graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII – Governador Antônio Mariz (Patos–PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: prograd@setor.uepb.edu.br. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

1 INTRODUÇÃO

Ultimamente, os métodos de contagem não têm tido muita ênfase em um contexto de Educação Básica ou no Ensino Superior, mesmo estes sendo frequentemente cobrados em provas como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e também em alguns concursos públicos (GOMES; SOUZA, 2018).

Mais que apenas para resolver problemas de exames e provas, o estudo dos métodos de contagem permite o desenvolvimento de um raciocínio mais cautelosos e uma análise mais refinada na resolução de problemas matemáticos, visto que em alguns problemas temos que analisar e resolver separadamente o problema caso a caso.

Em geral, os problemas de Análise Combinatória buscam enumerar (contar) ou classificar os elementos de um conjunto ou subconjunto finitos que satisfazem ou não certas condições dadas.

Além dos Princípios Multiplicativo e Aditivo que são comumente vistos na 2ª série do Ensino Médio - geralmente o conteúdo de Combinatória se resume a esses princípios - temos também as Permutações simples, circulares e com repetição, Combinações simples e completas, entre outros métodos como o Princípio da Inclusão-Exclusão que será também tratado nesse trabalho.

Dito isso, esse estudo tem por objetivo apresentar os aspectos fundamentais que norteiam os conceitos de Análise Combinatória, enfatizando o Princípio da Inclusão-Exclusão como método de contagem e trazer exemplos de aplicações desses conhecimentos.

A estrutura do trabalho se dá em seis seções, sendo após essa apresentada a metodologia utilizada, os conceitos fundamentais de Análise Combinatória com seus respectivos exemplos e o Princípio da Inclusão-Exclusão também com suas aplicações em provas da OBM, do ENEM e de concursos públicos. Por fim, são tecidas algumas considerações finais e apresentadas as referências utilizadas.

2 Metodologia

A pesquisa realizada nesse estudo é caracterizada como bibliográfica e possui caráter qualitativo, visto que foi realizada uma pesquisa de obras já existentes no intuito de auxiliar a discussão entorno do objetivo desse trabalho (SOUSA; OLIVEIRA; ALVES, 2021), que é apresentar os aspectos fundamentais que norteiam os conceitos de Análise Combinatória, enfatizando o Princípio da Inclusão-Exclusão como método de contagem e trazer exemplos de aplicações desses conhecimentos.

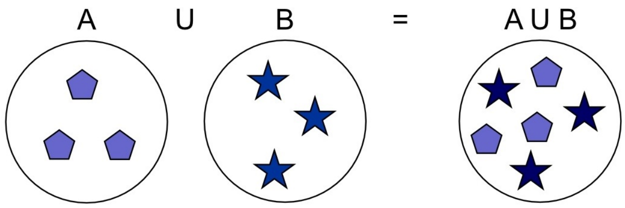
Selecionados os dois livros que serviram como norte para a construção dos conceitos discutidos nesse trabalho, o conteúdo trazido por essas obras é apresentado de uma forma mais breve, porém sem perder a essência, a fim que estudantes de Educação Básica e do Ensino Superior compreendam os conceitos de Análise Combinatória tratados. Alguns exemplos e problemas trazidos foram adaptados de questões das obras supracitadas, outros foram retirados de provas da OBMEP, do ENEM e de um Concurso Público.

3 PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

O ato de contar é algo que esteve presente em toda a história da Matemática, inclusive nos dias de hoje. Enumerar os elementos de um conjunto (contar) pode ser tarefa fácil em alguns casos, mas há outros nos quais precisamos adotar métodos de contagem. Os conceitos desenvolvidos nessa seção, bem como os da seção seguinte foram baseados na obra de Morgado et al (1991).

3.1 Princípio da Adição e Princípio da Multiplicação

O **Princípio de Adição** *é um desses métodos, o qual traz que se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*



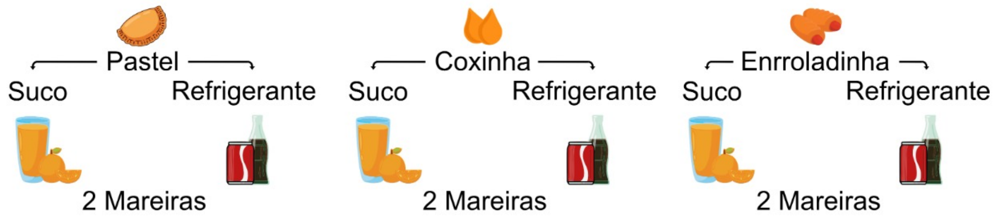
Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos disjuntos tomados dois a dois isso significa que $A_p \cap A_q = \emptyset$ para $p \neq q$, caso A_p possua a_p elementos. $p = 1, 2, 3, \ldots, n$, então $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Agora que já entendemos o Princípio de Adição, vamos compreender como funciona o Princípio de Multiplicação. Juntos esses dois princípios constituíssem como ferramentas de contagens para a resolução de diversos problemas matemáticos abordados a nível de Ensino Médio.

O **Princípio de Multiplicação** *enuncia que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 é xy.* Para ilustrarmos tal enunciado, vamos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo 1: A cantina da escola possui três tipos de salgados, pastel, coxinha e enroladinho, e duas opções de bebidas, suco de laranja e refrigerante. De quantos modos é possível escolher um salgado e uma bebida?

Resolução: Ao escolher o pastel, podemos pegar o refrigerante ou o suco, logo já temos dois modos. O mesmo vale para a coxinha que pode ser combinada com as duas opções de bebidas e, de mesmo modo, o enroladinho, como a ilustração mostra a seguir:



Logo, $2+2+2=3.2=6$
Perceba que para escolher a bebida e o salgado precisamos tomar:
d_1: tipo de salgado
d_2: tipo de bebida

Visto que d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e d_2 pode ser tomada de 2 maneiras, o número de escolhas diferentes (de tomar d_1 e d_2) é $3.2=6$.

A utilização do Principio de Multiplicação, permite obtermos o seguinte conjunto o seguinte conjunto das opções de escolha ilustradas no exemplo:

{pastel e suco, pastel e refrigerante, coxinha e suco, coxinha e refrigerante, enroladinho e suco, enroladinho e refrigerante}.

3.1.1 Contando o número de placas

Problema 1: As placas Mercosul são formadas por 4 letras e 3 números, podendo-se repetir letras e números. Quantas possibilidades de placas diferentes podem ser formadas?

Resolução: Como as placas possuem 4 letras e 3 números, podendo ser escolhidos de 26 (letra do alfabeto) e 10 (0 a 9) maneiras respectivamente, teremos que tomar as sete seguintes decisões:

$$\underset{d_1}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_2}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_3}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_4}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_5}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_6}{\underline{\qquad}}\quad\underset{d_7}{\underline{\qquad}}$$

Teremos que podemos tomar quatro dessas decisões de 26 maneiras e as três restantes de 10.

$$\underset{d_1}{\underline{26}}\quad\underset{d_2}{\underline{26}}\quad\underset{d_3}{\underline{26}}\quad\underset{d_4}{\underline{26}}\quad\underset{d_5}{\underline{10}}\quad\underset{d_6}{\underline{10}}\quad\underset{d_7}{\underline{10}}$$

Logo, as possibilidades de placas diferentes são

$$26\times26\times26\times26\times10\times10\times10=456.976.000$$

Problema 2: As placas de veículos antigas, ainda em circulação, dispunham de 3 letras e 4 números, diferente da Mercosul que se configura em 4 letras e três números. Qual a diferença de números de placas entre a Mercosul e as placas antigas?

Resolução: Temos que o número de possibilidades das antigas placas se dão por

$$\underset{d_1}{\underline{\ 26\ }}\quad \underset{d_2}{\underline{\ 26\ }}\quad \underset{d_3}{\underline{\ 26\ }}\quad \underset{d_4}{\underline{\ 10\ }}\quad \underset{d_5}{\underline{\ 10\ }}\quad \underset{d_6}{\underline{\ 10\ }}\quad \underset{d_7}{\underline{\ 10\ }}$$

Por isso, temos que esse número é

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$$

Como já sabemos o número das possibilidades das placas Mercosul é $456.976.000$, realizando a diferença, temos $456.976.000 - 175.760.000 = 281.216.000$.
Logo, a diferença entre o número de possibilidades de diferentes placas entre as placas Mercosul e o antigo padrão é de $281.216.000$.

3.2 Permutações simples

Dadas as letras A, B e C, de quantos modos podemos ordená-las, podemos ordená-las das seguintes formas: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Perceba que, de maneira geral, para a escolha da primeira letra temos 3 opções, para a escolha da segunda 2 (tendo escolhida a primeira), e para a escolha da terceira letra resta 1 opção. Generalizando, temos que para a primeira escolha dispomos de n opções, para a segunda $n \min 1$, ..., para a última escolha temos 1 opção. Logo, o número de modos de organizar elementos distintos é:

$$n(n-1), \ldots, 1 = n!$$

Chamamos cada forma de ordenar esses elementos de permutação simples de n objetos, representada por P_n. Desse modo, $P_n = n!$ (como $0! = 1$, definimos $P_0. = 1$).

3.2.1 Contando anagramas

Problema 1: Anagramas são diferentes formas de ordenar as letras de uma palavra. A palavra BRASIL, por exemplo, tem como anagrama SILBRA. Sabendo disso, quantos anagramas que essa palavra possui?

Resolução: Como a palavra BRASIL possui 6 letras, basta tomarmos 6 decisões para ordená-las:

$$\underset{d_1}{\underline{\qquad}}\quad \underset{d_2}{\underline{\qquad}}\quad \underset{d_3}{\underline{\qquad}}\quad \underset{d_4}{\underline{\qquad}}\quad \underset{d_5}{\underline{\qquad}}\quad \underset{d_6}{\underline{\qquad}}$$

Tal que podemos tomar d_1 de 6 maneiras, d_2 de 5 maneiras, ..., e d_6 (última decisão) de 1 maneira:

$$\frac{6}{d_1}\quad\frac{5}{d_2}\quad\frac{4}{d_3}\quad\frac{3}{d_4}\quad\frac{2}{d_5}\quad\frac{1}{d_6}$$

Ou seja, $6.5.4.3.2.1 =$, o que é o mesmo que $P_6 = 6! = 720$.

Problema 2: Ainda em relação aos anagramas de BRASIL, quantos deles:

a) Começam com consoante?

Tomando a decisão da escolha da consoante para iniciar a palavra, temos 4 possibilidades e, após escolher a consoante inicial, temos 5 letras para permutar entre si. Logo,

$$\frac{4}{d_1}\quad\frac{5}{d_2}\quad\frac{4}{d_3}\quad\frac{3}{d_4}\quad\frac{2}{d_5}\quad\frac{1}{d_6}$$

O que resulta em $4.P_5 = 4.5! = 480$.

b) Começam e terminam com vogal?

Vamos inicialmente escolher a primeira e a última letra que precisam ser vogais. Para a primeira temos duas opções e para última temos uma, já que selecionamos uma na 1ª escolha: 2.1. Para escolher as outras 4 letras, sobram 2 opções: $4!$.

$$\frac{2}{d_1}\quad\frac{4}{d_2}\quad\frac{3}{d_3}\quad\frac{2}{d_4}\quad\frac{1}{d_5}\quad\frac{1}{d_6}$$

Logo, temos que $2.4! = 48$ é o número de anagramas que começam e terminam com vogal.

3.3 Combinações simples

Dado o conjunto A = a,e,i,o,u, de quantos modos podemos escolher 3 vogais distintas, ou seja, de quantas formas podemos formar subconjuntos de A com três elementos distintos?

Formando todos os subconjuntos de A com 3 vogais distintas, temos:

$\{$a, e, i$\}$, $\{$a, e, o$\}$, $\{$a, e, u$\}$, $\{$a, i, o$\}$, $\{$a, i, u$\}$, $\{$a, o, u$\}$, $\{$e, i, o$\}$, $\{$e, i, u$\}$, $\{$i, o, u$\}$, $\{$o, u, a$\}$, $\{$o, u, e$\}$.

Cada conjunto de p elementos é chamado de combinação simples de n elementos. Por exemplo, acima vemos as combinações simples de classe 3 dos 5 elementos distintos do conjunto A. Dessa forma, temos que o número de combinações simples de classe p de n elementos é escrito como C_n^p. No exemplo, $C_5^3 = 10$

Analisando a combinações das vogais, temos que o primeiro elemento pode ser escolhido de 5 modos, o segundo de 4 e o terceiro de 3 modos, o que nos induz a pensarmos que a resposta seria $5.4.3 = 60$. No entanto, ao compararmos as combinações $\{$a, e, i$\}$, $\{$e, a, i$\}$, $\{$i, e, a}, ..., vemos que estas se configuram no mesmo conjunto, ou seja, {a, e, i} = {e, a, i} = {i, e, a}. A precipitação da resposta "$5.4.3 = 60$", se dá pelo fato de que estamos considerando as combinações citadas como distintas, quando na verdade são idênticas. Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens (mas que se configuram na mesma combinação), cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, basta dividirmos $5.4.3 = 60$ por 6 e obtemos $C_5^3 = \dfrac{(5.4.3)}{6} = \dfrac{60}{6} = 10$.

No caso geral, temos: $C_n^p = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p)+1}{p!}$ com $0 < p \leq n$ e $C_n^0 = 1$.

Multiplicando o quociente por $(n-p)!$, obtemos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

com $0 < p \leq n$.

3.3.1 Contando times de futebol e Ganhando o campeonato

Problema 1: Para a seleção foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível formar um time com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

Resolução: Como cada tipo de jogador deve jogar em sua posição, teremos que dividir as combinações em 4 classes:

$$C_2^1 \text{ (goleiros)}, C_6^4 \text{ (zagueiros)}, C_7^4 \text{ (meios de campo) e } C_4^2 \text{ (atacantes)}$$

Agora, basta calcular e multiplicar entre si essas combinações:

$$C_2^1.C_6^4.C_7^4.C_4^2\text{=}2.15.35.6 = 6300.$$

Problema 2: (ENEM 2022) A World Series é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitorias é declarado campeão. Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\dfrac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

Resolução: Para dar início a resolução, vamos fichar a primeira vitória e, em seguida, calcular as probabilidades de acordo com o número de jogos necessários para decidir o campeão.

Com 7 jogos:

Temos 6 jogos com probabilidade $\frac{1}{2}$ e por isso vamos elevar essa fração por 6. Em seguida, iremos multiplicar pela combinação de quantas são as possibilidades de ocorrer duas vitorias nas casas restantes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times C_5^2 == \frac{1}{64} \times 10 = \frac{10}{64}$$

Com 6 jogos:

Temos 5 jogos com probabilidade $\frac{1}{2}$ e por isso vamos elevar essa fração por 5. Em seguida, iremos multiplicar pela combinação de quantas são as possibilidades de ocorrer duas vitorias nas casas restantes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times C_4^2 == \frac{1}{32} \times 6 = \frac{6}{32}$$

No restante dos casos esse esquema vai ser repetir :

Com 5 jogos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times C_3^2 == \frac{1}{16} \times 3 = \frac{3}{16}$$

Com 4 jogos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Nos resta apenas somar todos os resultados, mas antes vamos colocar todos na mesma base para facilitar

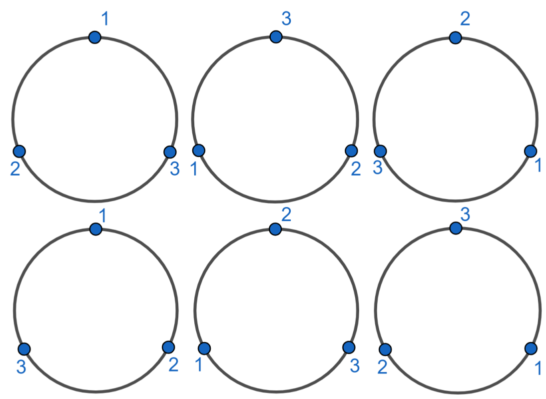
$$\frac{10}{64} + \frac{12}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} = \frac{42}{64}$$

3.4 Permutações circulares

Considerando um círculo com n lugares equiespaçados de quantas maneiras podemos colocar n objetos nesses lugares? Chamaremos esse procedimento de permutações circulares de n objetos distintos, representadas por $(PC)_n$.

Vamos a um exemplo para entendermos melhor esse procedimento e compreender também porque ele é diferente de uma permutação simples (P_n).

Considerando $n = 3$, temos que $P_3 = 3! = 6$, ou seja, trazendo para círculo temos:



Mas perceba que os três primeiros modos de dispor os números coincidem por rotação e o mesmo ocorre para as três últimas.

Logo, $(PC)_3 = 2$.

Note que nas permutações simples os lugares que cada número ocupa importa, sendo que nas permutações circulares o que importa são as posições relativas que os objetos ocupam entre si. No exemplo tratado, ao olharmos para as três primeiras configurações, ao partirmos do número 1, passamos pelo 3 e chegamos no 2 (sentido horário). Considerando a mesma lógica, nas três últimas, partindo do número 1, passamos pelo 2 e chegamos no 3. Portanto, as posições relativas dos objetos são as mesmas.

De maneira geral temos que $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

Na qual, $n!$ São as disposições equivalentes que podem coincidir por rotação e n o número de disposições de cada permutação circular.

3.4.1 Contado formas de sentar-se à mesa

Problema 1: De quantos modos uma família de 5 pessoas (2 pais e 3 filhos) podem sentar-se em uma mesa redonda, de modo que os pais fiquem juntos? Os pais e o filho mais novos fiquem juntos?

Resolução: Inicialmente, temos 5 elementos e devemos ordená-los (de maneira circular) de modo que dois fiquem juntos. Para isso, vamos considerar pai e mãe como P e M e os filhos como F_1, F_2 e F_3. Temos que o pai e a mãe podem sentar juntos de 2 maneiras: o pai à esquerda da mãe ou à direita dela. Escolhendo os lugares dos pais, temos que podemos escolher para sentar na terceira cadeira F_1, F_2 ou F_3., ou seja, é possível escolher de $3! = 6$ formas. Logo, temos que a família pode sentar-se à mesa, de modo que os pais fiquem juntos, de $2.3! = 12$ maneiras. Perceba que, mesmo tomando os pais como um único elemento, pôde-se escolher duas formas de sentá-los à mesa. Note também que ao tomar a primeira decisão os n elementos restantes puderam ser permutados de n formas, isto é, P_n.

3.5 Permutações de elementos nem todos distintos

Pelo que vimos em permutações simples, se questionado quantos anagramas tem a palavra arara? Você poderia dizer $P_5 = 5! = 120$, mas está incorreto. O fato das letras R e A se repetirem faz com que obtemos um número menor de anagramas do que quando a palavra tem todas as letras diferentes. Por exemplo, os anagramas RA_1RA_2A e RA_2RA_1A são idênticos.

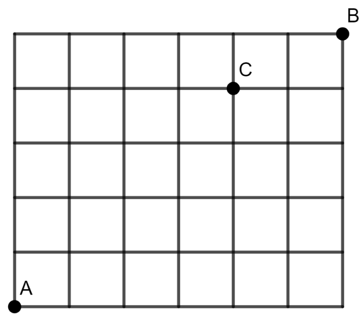
Dito isso, representamos o número de anagramas da palavra ARARA como $P_5^{3,2}$, ou seja, número de permutações de 5 elementos dos quais 3 e 2 são semelhantes entre si (3 letras A e 2 letras R).

Caso as letras fossem distintas, teríamos $P_5 = 5!$. Como as letras A são iguais, contamos cada anagrama (mudando a posição das letras A) $3!$ vezes e o mesmo ocorre com a letra R, contando seus anagramas 2! vezes. Logo, $P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

No caso geral temos que $P_n^{(x,y,\ldots,z)} = \dfrac{n!}{(x!y!\ldots z!)}$.

3.5.1 Contado trajetos e pulos

Problema 1: A figura abaixo representa um mapa das ruas de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo para ir de A até B?

Resolução: Como queremos calcular os menores trajetos, teremos que pensar em caminhos direto até de A até B, ou seja, não vamos iniciar na primeira rua, depois ir para a segunda e voltar para a primeira. Temos que qualquer caminho que tomemos de trajeto mínimo de A a B, andamos 6 vezes para direita e 5 vezes para cima. Logo, teremos $P_{11}^{6,5} = 462$.

b) Quantos deles passam pelo ponto C?

Resolução: Para realizar esse cálculo, vamos dividir a resolução em duas partes. Inicialmente, vamos calcular os menores trajeto de A até C, que é $P_8^{4,4} = 70$, pois nos menores trajetos de A até C andamos 4 vezes para a direita e 4 para cima. Agora, vamos calcular os menores trajetos de C a B, que são $P_3^{2,1} = 3$. Por fim, basta multiplicarmos esses valores e obtemos 210 como possibilidades de caminhos mínimos de A a B que passam por C.

Problema 2:A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Resolução: Para descobrir de quantas maneiras que Zinza pode pular as pedras, vamos dividir a resolução de acordo com a quantidade de maneiras diferentes que podemos somar até 9, de acordo com os tamanhos dos pulos de Zinza possíveis dentro dos 5 pulos obrigatórios.

$$1+1+1+3+3=9$$
$$1+1+2+2+3=9$$
$$1+2+2+2+2=9$$

Com isso, podemos perceber que a ordem de dar esses pulos pode ser trocada, portanto faremos uma permutação de elementos nem todos distintos e teremos os seguintes casos:

i) 1, 1, 1, 3, 3.
$P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5.4.3!}{3!.2} = 10$

ii) 1, 1, 2, 2, 3.
$P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2!2!} = \dfrac{5.4.3.2!}{2!.2} = 30$

iii) 1, 2, 2, 2, 2.
$P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5.4!}{4!} = 5$

Por fim, nos resta apenas somar os valores encontrando assim à quantidade de maneiras diferentes de Zinza pular $10+30+5=45$.

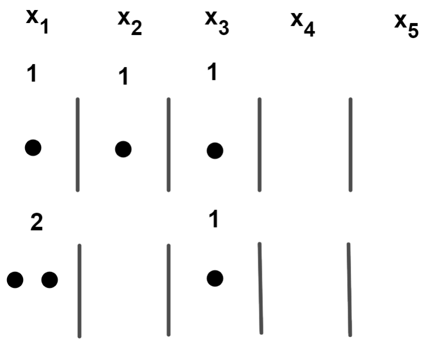
3.6 Combinações completas

Sabendo que uma pastelaria disponibiliza 5 sabores de pasteis de quantos modos é possível comprar 3 pasteis? E a resposta não é $C_5^3 = 10$. No caso desse resultado, estamos considerando os modos de comprar pasteis diferentes entre os sabores disponibilizados.

É para problemas como esse que utilizamos as combinações completas, representadas por CR_n^P que é o número de maneiras de escolher p objetos **distintos ou não** entre n objetos distintos dados. Lembrando que C_n^P é o número de modos de escolher p objetos **distintos** entre n objetos distintos dados.

Resolvendo o problema dos pasteis, vamos considerar a seguinte equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3$, na qual x_1 é o primeiro sabor, x_2 o segundo e assim por diante. Considerando x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 como inteiros positivos.

Temos duas das possíveis soluções representadas abaixo:



Podemos entender cada fila representada como uma maneira de escolher os 3 pasteis entre os 5 sabores disponíveis. Note também que para cada solução temos que escolher 3 bolas (unidades das incógnitas) e utilizar 4 traços (para separar as 5 incógnitas). Logo, o modo de fazer isso é

$$P_{(3+4)}^{3,4} = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = C_7^3$$

Desse modo,

$$CR_5^3 = C_7^3 = 35.$$

De modo geral, temos

$$CR_n^p = P_{(p+n-1)}^{(p,n-1)} \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{(n+p-1)}^p$$

Portanto,

$$CR_n^p = C_{(n+p-1)}^p.$$

3.6.1 Contando soluções

Problema 1: Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x+y+z=3$? E da inequação $x+y+z<3$?

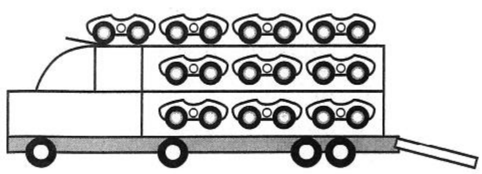
Resolução: Para o primeiro caso, temos as incógnitas x, y e z podem assumir valores inteiros positivos, tais que $x+y+z=3$.

Dessa forma, a solução dessa equação será $CR_3^3 = C_5^3 = 10$.

Em relação à inequação $x+y+z<3$, temos que as soluções se dividem em três grupos nos quais $x+y+z=2$, $x+y+z=1$ e $x+y+z=0$.

Logo, teremos que o número de soluções será $C_4^2.C_3^1.C_2^0 = 6+3+1 = 10$.

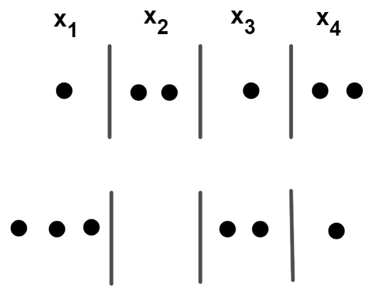
Problema 2:(ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas infirmações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

Resolução: Para responder à questão, vamos fixar cada um dos quatro carrinhos de cima de uma cor e com o restante iremos distribuir as cores de forma aleatória, no qual x_1, x_2, x_3 e $x4$ são as cores e os pontos são os carrinhos:



Com isso, podemos entender cada fila representada como uma possibilidade de escolher as cores de pintar os carrinhos. Por fim, basta colocarmos as informações na fórmula da combinação, encontrando assim $C9^3$; desenvolvendo-a, encontramos:

$$C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!3!} =$$
$$\frac{9!}{6!3!} = \frac{9.8.7.6!}{6!.3!} =$$
$$\frac{504}{6} = 84$$

4 O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

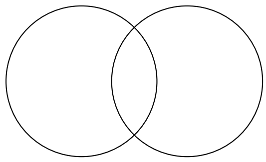
No início do capítulo anterior introduzimos um princípio que estabelece que o número de elementos de dois conjuntos disjuntos é a soma do número de seus elementos. Veremos agora o *Princípio da Inclusão-Exclusão*, que é uma forma de contar o número de elementos da união de dois ou mais conjuntos não necessariamente disjuntos. Esse princípio afirma que

$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Onde "$\#$" representa o número de elementos, por exemplo, $\#A =$ número de elementos do conjunto A.

A justificativa para essa afirmação pode ser entendida de uma maneira bem simples. Supondo que temos dois conjuntos A e B, com sua união ilustrada abaixo:

$A \cup B$



Temos que $\#A = 4$, $\#B = 3$ e $\#(A \cap B) = 1$, dessa forma,$\#(A \cup B) = 4+3-1 = 6$. Perceba que subtraímos 1, pois temos o elemento $d \in (A \cap B)$. Agora, considerando três conjuntos A, B e C, temos que

$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

De maneira geral, temos que o número de elementos da união de conjuntos pode ser obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro, somando os números de elementos das interseções cinco a cinco e assim por diante.

Exemplo 1: Quantos inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 2 ou 5? Resolução: Consideremos $A =$ o conjunto dos inteiros entre 1 e 100 divisíveis por 2; $B =$ o conjunto dos inteiros entre 1 e 100 divisíveis por 5. Considerando a parte inteira, sabemos que $\#A = (\frac{100}{2}) = 50$

$\#B = (\frac{100}{5}) = 25$

$\#(A \cap B) = (\frac{100}{10}) = 10$

Sendo $(A \cap B)$ o conjunto dos números divisíveis por 2 e por 5. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos que

$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 50 + 25 - 10 = 65.$

O teorema a seguir traz a generalização do Princípio da Inclusão-Exclusão. Teorema: Sejam α um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de α e

$$S_0 = \#\alpha;$$
$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i);$$
$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \#(A_i \cap A_j)$$
$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n}^{n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$\vdots$$

(Note que há C_n^1 parcelas em S_1, C_n^2 parcelas em S_2 e assim por diante).

Logo,

i) O número de elementos de α que pertencem a exatamente $p(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ é

$$ap = \sum_{k=0}^{n-p}((-1)^k C_(p+k)^k S_(p+k))$$

Demonstração: É evidente que, se um elemento de α pertence a menos que p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ele não será contado na soma ap. Então devemos provar que se um elemento de α pertence a exatamente p dos subconjuntos, ele é contado na soma ap e que se um elemento pertence a mais do que p dos subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ele não é contado na soma ap.

Temos que a soma ap é

$$\binom{p}{0}S_p - \binom{p+1}{1}S_{p+1} + \binom{p+2}{2}S_{p+2} - \ldots + (-1)^(n-p)\binom{n}{n-p}S_n$$

Dessa forma, um elemento de α que pertencem a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é contado uma vez em S_p e não é contado em $S_{p+1}, Sp+2, \ldots, S_n$. Logo, contamos esse elemento $\binom{p}{0}.1 = 1$ vez.

Considerando um elemento de α que pertence a exatamente $p+j(j > 0, p+j \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é contada em $\binom{p+j}{p}$ das parcelas de S_p, em $\binom{p+j}{p+1}$ das parcelas de S_{p+1} e assim por diante.

Portanto, o número de vezes que ele é contado na soma ap é:

$$\begin{aligned}
\binom{p}{0}\binom{p+j}{p} - \binom{p+1}{1}\binom{p+j}{p+1} + \ldots + (-1)^(n-p)\binom{n}{n-p}\binom{p+j}{n} \\
= \sum_{k=0}^{j}(1)^k\binom{p+k}{k}\binom{p+j}{p+k} \\
= \sum_{k-0}^{j}\frac{(p+k)!(p+j)!}{k!p!(p+k)!(j-k)!} \\
= \frac{(p+j)!}{p!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{1}{k!(j-k)!} \\
= \frac{(p+j)!}{p!j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} \\
= \binom{p+j}{p}(1-1)^j \\
= \binom{p+j}{p}.0 = 0
\end{aligned}$$

ii) O número de elementos de α que pertencem a pelo menos $p(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$bp = \sum_{k=0}^{n-p}((-1)^k C_(p+k-1)^k S_(p+k))$$

Demonstração: Temos que

$$b_p = a_p + a_p + 1 + \ldots + a_n - 1 + a_n$$
$$\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k \binom{p+k}{k} S_{p+k} + \sum_{k=0}^{n-p-1}(-1)^k \binom{p+1+k}{k} S_{p+1+k} + \ldots$$
$$+ \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \binom{n-1+k}{k} S_{n-1+k} + \sum_{k=0}^{0}(-1)^k \binom{n+k}{k} S_{n+k}.$$

O coeficiente de $S_{p+j}(0 \leq j \leq n-p)$ no segundo membro é

$$(-1)^j \binom{p+j}{j} + (-1)^j - 1 \binom{p+j}{j-1} + \ldots$$
$$+(-1)^1 \binom{p+j}{1} + (-1)^0 \binom{p+j}{0}$$
$$(-1)^j \left[\binom{p+j-1}{j}\binom{p+j-1}{j-1}\right] + (-1)^{j-1}\left[\binom{p+j-1}{j-1}\binom{p+j-1}{j-2}\right] + \ldots$$
$$+(-1)^1 \left[\binom{p+j-1}{1}\binom{p+j-1}{0}\right] + (-1)^0 \left[\binom{p+j-1}{0}\right]$$
$$= (-1)^j \left[\binom{p+j-1}{j}\right].$$

Portanto,

$$bp = \sum_{k=0}^{n-p}(-1)^j \binom{p+j-1}{j} S_{p+j} = \sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k \binom{p+k-1}{k} S_{p+k}.$$

iii) O número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Demonstração:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = b_1) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \tbinom{j}{j} S_{j+1} = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.$$

4.0.1 Problemas Olímpicos

Problema 1(OBMEP – 2016): No refeitório da escola Quixajuba, na hora do almoço, 130 alunos comeram carne e 150 comeram macarrão, sendo que $\frac{1}{6}$ dos alunos comeram carne e também macarrão. Além disso, 70 alunos não comeram carne nem macarrão. Quantos alunos comeram carne, mas não comeram macarrão?

Resolução: Considere x o número de alunos na escola e defina os conjuntos:
$A_1 =$ Conjunto dos alunos que comem carne
$A_2 =$ Conjunto dos alunos que comem macarrão
Sabemos que $|A_1| = 130$ e $|A_2| = 150$ e os que comem carne e macarrão são $\frac{x}{6}$, ou seja, $|A_1 \cap A_2| = \frac{x}{6}$
Logo, temos:

$$x = 70 + |A_1 \cup A_2| = 70 + |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$x = 70 + 130 + 150 - \frac{x}{6}$$
$$x + \frac{x}{6} = 350$$
$$\frac{7}{6}x = 350 \rightarrow x = 300.$$

Como gostaríamos de saber o número de alunos que comem apenas carne fazemos $|A_1| - \dfrac{x}{6} = 130 - \dfrac{300}{6} = 80$ estudantes.

Problema 2 (OBMEP – 2014): Em uma orquestra de cordas, sopro e percussão, 23 pessoas tocam instrumentos de corda, 18 tocam instrumentos de sopro e 12 tocam instrumentos de percussão. Nenhum de seus componentes toca os três tipos de instrumentos, mas 10 tocam instrumentos de corda e sopro, 6 tocam instrumentos de corda e percussão e alguns tocam instrumentos de sopro e percussão. No mínimo, quantos componentes há nessa orquestra?

Resolução: Defina os conjuntos:
$A_1 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de corda
$A_2 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de sopro
$A_3 =$ Conjunto das pessoas que tocam instrumentos de percussão
Com isso, temos que

$$|A_1| = 23, |A_2| = 18 \text{ e } |A_3| = 12;$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0, |A_1 \cap A_2| = 10, |A_1 \cap A_3| = 6$$
$$\text{e}$$
$$|A_2 \cap A_3| = y, \text{ com } y \in \mathbb{N} \neq 0.$$

Logo, a quantidade de componentes da orquestra é:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3 =$$
$$(|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$
$$(23 + 18 + 12) - (10 + 6 + y) + 0 = 37 - y.$$

Note que $|A_1 \cap A_2| = 10$ e $|A_1 \cap A_3| = 6$, o que resulta em 8 pessoas em Observe que com isso resta apenas 8 pessoas em A_2 e 6 pessoas em A_3, caso contrário teríamos que $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \neq 0$. Logo, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ é mínimo quando y é máximo, isto é, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 37 - 6 = 31$ pessoas.

4.0.2 Problemas de ENEM e provas de concurso

Em 2017, a banca responsável pelas questões de Matemática do ENEM desse ano cometeram um equivoco ao suporem que a seguinte questão poderia ser resolvida utilizando apenas o Princípio Multiplicativo. No entanto, essa questão não era tão simples, pois é solicitado que utilize-se todas as cores e, ao resolver pelo Princípio Multiplicativo, são incluídos casos nos quais não necessariamente são utilizadas todas as cores disponíveis.

Problema 1 (ENEM 2017): O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15

b) 30

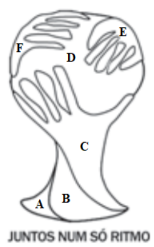
c) 108

d) 360

e) 972

A referida questão foi anulada e vamos apresentar uma resolução utilizando o Princípio da Inclusão-Exclusão a seguir:

Resolução: Chamaremos de A, B, C, D, E e F as 6 regiões que precisa ser pintada da logomarca,



Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

Com no máximo 4 cores, teremos o seguinte valor de colorações possíveis:

$4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 972$

Agora vamos encontrar os valores com a utilização de exatamente 3 cores:
Como queremos utilizar exatamente 3 cores precisamos fazer a combinatória de 4 cores tomadas 3 a 3 e então multiplicar pelo princípio multiplicativo

$$C(4,3) \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$$
$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} =$$
$$C(4,3) = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$$
$$12 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 384$$

Agora vamos encontrar os valores com a utilização de no exatamente 2 cores:
Como queremos utilizar exatamente 2 cores precisamos fazer a combinatória de 4 cores tomadas 2 a 2 e então multiplicar pelo princípio multiplicativo,

$$C(4,2) \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$$
$$C(4,2) = \frac{4}{2!(4-2)!} =$$
$$C(4,2) = \frac{4!}{2! \times 2!} =$$
$$C(4,2) = \frac{(4 \times 3 \times 2!)}{(2! \times 2!)} =$$
$$C(4,2) = \frac{(4 \times 3)}{2!} = 6$$
$$6 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 12$$

Para o caso com exatamente uma cor é impossível.
Então o que precisamos encontrar agora é o valor referente a exatamente 4 cores, com isso resolveremos a questão pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, e para encontrarmos o número de maneiras de pintar usando todas as cores precisamos responder o seguinte cálculo:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{n-1}.S_n.$$

Quando substituímos na formulas vamos ter,

$$972 = S_1 - S_2 + S_3$$
$$972 = 384 - 12 + S_3$$

Nos resta apenas desenvolver e encontramos o resultado desejado

$$S_3 = 972 - 384 + 12$$
$$S_3 = 600$$

Problema 2 SELECON 2019: Determine $n(X)$ de modo que ele represente o número de elementos de um conjunto X. Dados os conjuntos A e B, considere que:

- $n(A \cup B) = 42$
- $n(A - B) = 2.n(A \cap B)$
- $n(B) = 4.n(A \cap B)$

a) Qual valor de $n(A)$?

Resolução: Para encontrar o valor de $n(A)$ basta utilizarmos o Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$$

Com isso, temos

$$\begin{gathered} n(A) + 4n(A \cap B) - n(A \cap B) = 42 \\ n(A) + 3n(A \cap B) = 42 \end{gathered}$$

Como sabemos

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

Assim,

$$\begin{gathered} n(A) = 2n(A \cap B) + n(A \cap B) \\ n(A) = 3n(A \cap B) \end{gathered}$$

Substituindo $n(A)$ temos

$$\begin{gathered} 3n(A \cap B) + 3n(A \cap B) = 42 \\ 2(3n(A \cap B)) = 42 \\ 3n(A \cap B) = 21 \\ n(A) = 3n(A \cap B) = 21 \\ n(A) = 21 \end{gathered}$$

Encontrando assim o valor de $n(A)$.

5 Considerações Finais

Espera-se que com esse estudo tenha ficado claro os conceitos fundamentais de Análise Combinatória apresentados, bem como os que circundam o importante método de contagem que é o Principio da Inclusão-Exclusão, dada sua relevância para resolução de questões de ENEM, OBMEP e de concursos públicos.

Para além disso, é importante que os professores da Educação Básica e de Ensino Superior, não restrinjam a aprendizagem de Combinatória apenas aos Princípios Aditivos e Multiplicativos, privando seus discente de conhecer outros métodos de contagem como as Permutações e Combinações, além de inibir o desenvolvimento de um raciocínio mais cautelosos e uma análise mais refinada na resolução de problemas matemáticos.

Nesse trabalho trouxemos apenas alguns dos métodos de contagem existentes que podem também ser bem explorados como as Permutações Caóticas, os Lemas de Kaplansky, o Princípio da Reflexão e o Princípio de Dirichlet. Portanto, esse trabalho pode servir como uma foz para o estudo de outros métodos de contagem que não são comumente estudados na Educação Básica ou no Ensino Superior.

References

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

GOMES, A. M. S.; SOUZA, R. A. **O Princípio da Inclusão – Exclusão e as Permutações Caóticas: Métodos Alternativos de Contagem**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. ed. 08, vol. 16, 2018. Disponivel em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/principio-da-inclusao#: :text=O%20Princ%C3%ADpio%20da%20Inclus%C3%A3o%20%E2%80%93%20Exclus%C3%A3o%20%C3%A9%20um%20modelo%20que%20serve,conjunto%20qualquer%20ser%C3%A1%20representado%20por%20. Acesso em: 11 nov. 2022.

SOUSA, A SILVA; OLIVEIRA, G SARAMAGO; ALVES, L HILÁRIO. **A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos**. Cadernos da FUCAMP, v. 20, n. 43, 2021.

BRASIL. **Processo Seletivo Simplificado Da Secretaria Municipal De Educação De Cuiabá**. Mato Grosso, 2019. Disponivel: https://tkq.48c.myftpupload.com/concursos/710/#geral-infosme001. Acesso em: 21 nov. 2022.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**, 2022. Disponível em: www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos Acesso em: 20 nov. 2022

BRASIL. **Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP)**. Rio de Janeiro, 2022. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 22 nov. 2022.