UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

WESLEY DOS SANTOS PEREIRA

O TEOREMA DE MOTZKIN

PATOS
2022

WESLEY DOS SANTOS PEREIRA

O TEOREMA DE MOTZKIN

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

PATOS
2022

P436t Pereira, Wesley dos Santos.

O Teorema de Motzkin [manuscrito] / Wesley dos Santos Pereira. - 2022.

27 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Conjunto de Chebyshev. 2. Convexidade. 3. Espaço euclidiano. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Edson M. A. Monteiro - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

WESLEY DOS SANTOS PEREIRA

O TEOREMA DE MOTZKIN

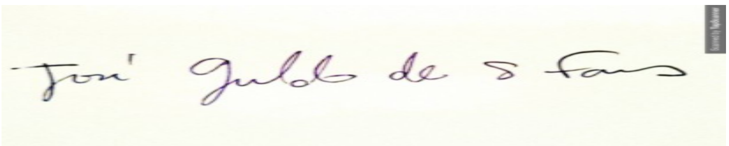
Trabalho de Conclusão de Curso (artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 15 / 12 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. Geovane de Souza Ferreira Júnior
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

SUMÁRIO

O TEOREMA DE MOTZKIN

Wesley dos Santos Pereira*

RESUMO

O famoso Teorema de Motzkin afirma que um subconjunto fechado do espaço euclidiano é convexo se, e somente se, é um conjunto de Chebyshev ou, ainda, se, e somente se, a função distância até ele é diferenciável em seu complementar. Neste artigo, apresentamos um esboço da demonstração desse teorema devida a Lima (2011). Essa demonstração nos propiciou um bom itinerário para introduzir os conceitos primordiais da Análise e da Topologia no espaço euclidiano, os quais são apresentados, por exemplo, em Bartle (1964) e Lima (2015). Estas duas teorias são essenciais para o estudo de objetos geométricos mais sofisticados e do Cálculo em ambientes mais gerais, como se faz na Geometria dos dias de hoje.
Palavras-chave: Análise e Topologia no Espaço Euclidiano. Conjunto de Chebyshev. Convexidade. Espaço euclidiano.

ABSTRACT

Motzkin's famous theorem states that a closed subset of Euclidean space is convex if and only if it is a Chebyshev set or even if and only if the distance function to it is differentiable in its complement. In this article, we present an outline of the proof of this theorem due to Lima (2011). This demonstration provided us with a good itinerary to introduce the primordial concepts of Analysis and Topology in Euclidean space, which are presented, for example, in Bartle (1964) and Lima (2015). These two theories are essential for the study of more sophisticated geometric objects and Calculus in more general environments, as is done in Geometry today.
Keywords: Analysis and Topology in Euclidean Space. Chebyshev set. Convexity. Euclidean space.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma das áreas mais antigas da Matemática, e os problemas de máximos e mínimos sempre dela fizeram parte. Tal é o caso do seguinte problema: *No plano, sejam dados uma reta r e um ponto A fora de r. Determine um ponto $P \in r$ tal que o comprimento do segmento AP seja o menor possível.*

A introdução de coordenadas e o uso de técnicas do Cálculo permitem que alguns dos problemas geométricos de máximos e mínimos sejam melhor formalizados, tratados com maior

*Aluno de graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII – Governador Antônio Mariz (Patos–PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: email@email.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

generalidade e, assim, resolvidos de forma mais completa e satisfatória. Coordenadas e Cálculo também tornam possível estender problemas do plano a espaços mais gerais e abstratos.

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, podemos estudar geometria a partir do produto interno canônico, definido por $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ quaisquer que sejam os vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Este produto interno dá origem a uma norma, chamada norma euclidiana, $\|x\| := \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$ para $x \in \mathbb{R}^n$, que mede o comprimento dos vetores. Da norma, vem uma noção de distância entre dois pontos: para $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos $d(x, y) := \|x - y\|$. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ pode, então, ser considerado como espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d)$, e a métrica gera naturalmente uma topologia. Esta noção de distância pode ser estendida, de maneira natural, à de distância entre ponto e subconjunto: a distância $d(x, A)$ de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ a um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é definida por $d(x, A) := \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$. Do ponto de vista da Análise e da Topologia podemos formular as seguintes questões:

- Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, que propriedades tem a função distância $x \mapsto d(x, A)$?
- Que relações têm as propriedades métricas e topológicas de A com as propriedades da função distância?

No caso particular em que A é um subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$, são conhecidos os seguintes três fatos:

- Existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^n \to A$ tal que $d(x, A) = \|x - \pi(x)\|$, isto é, $\pi(x)$ é o ponto de A mais próximo de x;
- A função distância é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$;
- A é um subcojunto convexo.

É notável que estes três fatos são, na verdade, equivalentes para qualquer conjunto fechado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Segundo Lima (2011), “Este resultado, conhecido como Teorema de Motzkin, constitui uma importante caracterização dos conjuntos convexos (fechados) de espaços euclidianos e deve seu nome ao matemático alemão Theodore Motzkin (1908-1970), que o estabeleceu”.

Este trabalho teve como objetivo geral estudar o Teorema de Motzkin que constitui uma importante caracterização dos conjuntos convexos de espaços euclidianos, para o qual apresentamos a demonstração devida a Lima (2011).

A metodologia empregada na elaboração deste artigo consistiu na leitura minuciona e mapeamento dos pré-requisitos necessários para compreender a demonstração do Teorema de Motzkin devida a Lima (2011). Passamos, então, a estudar esses pré-requisitos a partir de Bartle (1964) e Lima (2015), o que nos levou a ter acesso ao formidável cabedal matemático da Análise e Topologia no Espaço euclidiano, com ênfase no Cálculo Diferencial.

O trabalho está organizado como segue.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL NO ESPAÇO $\mathbb{R}^n$

2.1 O espaço vetorial normado $\mathbb{R}^n$

Na teoria da Análise Matemática, o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é caracterizado como corpo ordenado completo e é comum chamar os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ de pontos. A partir disso, surge a noção de distância, designada como valor absoluto, de um ponto até um ponto pré-fixado, uma origem. Essa ideia de distância conduz aos conceitos centrais da Análise — limite, convergência, continuidade, derivada e integral.

Os espaços euclidianos de várias dimensões, no entanto, não possuem estrutura de corpo. Portanto, precisa-se de uma estrutura mais apropriada que valha para espaços multidimensionais, a saber, a de espaço vetorial.

Em vista disso, para se alcançar os resultados importantes da demonstração do Teorema de Motzkin, é necessário introduzir o ambiente adequado para este fim, que será então o estudo do espaço euclidiano n-dimensional como espaço vetorial normado.

2.1.1 Produto interno e Norma

Definimos o espaço $\mathbb{R}^n$ como um produto de n cópias de $\mathbb{R}$, com $n \geq 1$,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ são da forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Os $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são as coordenadas, respectivamente, dos pontos x, y.

A seguir, definiremos uma noção importante para o nosso estudo que é o produto interno euclidiano. É importante, pois utilizaremos para introduzir outro conceito fundamental que é a norma de um elemento de $\mathbb{R}^n$. Essa norma é a generalização da ideia de módulo ou valor absoluto de um número real.

Definição 2.1. Dados dois pontos em $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, o produto interno euclidiano entre x e y é definido como:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Isto define uma função

$$\begin{aligned} \langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

e observamos facilmente que para cada $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (simetria);

2. $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$ (linearidade);

3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positividade).

Definição 2.2. A norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ é a função $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, por

$$||x|| = \sqrt{\langle x \cdot x\rangle},$$

a qual goza das seguintes propriedades:

1. $||x|| \geq 0$ e vale a igualdade se, e somente se, $x = 0$;

2. $||\lambda x||$ = $|\lambda$ $||x||$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$;

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.3. A distância euclidiana entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

O números real $d(x, y)$ é chamado de distância de x a y.

Tem as seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Seja E um conjunto sobre o qual está definida uma função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ com as propriedades acima. O par (E, d) é dito um espaço métrico. Sendo assim, se tomarmos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$, temos um exemplo de espaço métrico.

A noção de distância em $\mathbb{R}^n$ permite falar de conceitos fundamentais tais como de pontos próximos, em particular, podemos falar em convergência.

2.1.2 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Apresentaremos agora um tipo de função especial, denominada sequência, assim como suas principais propriedades de convergência.

Definição 2.4. Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^n \\ k &\mapsto x_k \end{aligned}$$

Como cada $x_k \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$. Assim, uma sequência de termos $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é equivalente a termos n sequências de números reais, $(x_k^1), \ldots, (x_k^n)$.

Definição 2.5. Uma subsequência da sequência (x_k) no conjunto $\mathbb{R}^n$ é a restrição da aplicação $k \mapsto x_k$ a um subconjunto infinito $N' = \{k_1 < k_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Já que sequências são funções, podemos questionar seus limites. Entretanto, como o domínio da função está definida em $\mathbb{N}$, o único limite que faz sentido é o de x_n quando $n \to +\infty$.

Definição 2.6 (Sequência convergente)**.** Sejam (x_k) uma sequência em $\mathbb{R}^n$ e um ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que (x_k) converge para $a \in \mathbb{R}^n$ ou equivalentemente, que a é limite da sequência (x_k), se

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0.$$

Isto significa o seguinte: para todo $\epsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$, tal que se $k \geq N \Rightarrow \|x_k - a\| < \epsilon$. Desse modo, escrevemos:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a \quad \text{ou} \quad x_k \to a.$$

Caso possua limite, a sequência (x_k) é dita convergente; caso contrário, ela é dita divergente.

Proposição 2.1. *Sejam (x_k) uma sequência em $\mathbb{R}^n$ e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. A sequência (x_k) converge para a se, e somente se, cada sequência coordenada (x_k^j) converge para a_j.*

Demonstração. Suponhamos que (x_k) converge para $a \in \mathbb{R}^n$. Então, para cada $\epsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N \Rightarrow \|x_k - a\| < \epsilon.$$

Como $\|x_k - a\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_k^j - a_j)^2$, segue que, se $k \geq N$, então:

$$\sum_{j=1}^n (x_k^j - a_j)^2 < \epsilon^2.$$

A soma anterior envolve somente números reais não negativos. Portanto:

$$(x_k^j - a_j)^2 < \epsilon^2 \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

desde que $k \geq N$. Concluímos, então, que

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x_k^j - a_j\right\| < \epsilon \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Isto mostra que cada sequência (x_k^j) converge para a^j.

Reciprocamente, suponhamos que x_k^j converge para a^j para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Então, dado $\epsilon > 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existe $k_j \in \mathbb{N}$, tal que

$$k \geq k_j \Rightarrow \left\|x_k^j - a_j\right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Tomando-se, então, $N = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, tem-se, para todo $k \geq N$,

$$\|x_k - a\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{\left\|x_k^1 - a_1\right\|, \ldots, \|x_k^n - a_n\|\} < \sqrt{n} \cdot \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} = \epsilon,$$

donde $x_k \to a$ $\square$

Definição 2.7. Uma sequência $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é limitada se existe $r > 0$ tal que

$$\|x_k\| \leq r \; \forall \; k \in \mathbb{N}.$$

Proposição 2.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. De fato, se (x_k) é uma sequência em $\mathbb{R}^n$ que converge para a, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < 1$. Logo,

$$\|x_k\| = \|(x_k - a) + a\| \leq \|x_k - a\| + \|a\| < 1 + \|a\| \; \forall \; k \geq k_0.$$

Fazendo-se $r = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{k_0-1}\|, 1 + \|a\|\}$, tem-se $\|x_k\| \leq r \; \forall \; k \in \mathbb{N}$. $\square$

O Teorema de Bolzano-Weirstrass na reta diz que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Esse teorema, quando tratado no conjunto dos reais $\mathbb{R}$, requer o conceito de supremo para um conjunto não-vazio limitado superiormente. Mas observe que essa ideia de supremo não se aplica ao espaço multidimensional $\mathbb{R}^n$, haja visto que $\mathbb{R}^n$ não tem uma ordem compatível com a estrutura de espaço vetorial.

Teorema 2.1 (Bolzano-Weirstrass)**.** *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_k) = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ uma sequência limitada. Segue imediatamente das definições que cada sequência coordenada $(x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \ldots, n$, é limitada. Com efeito, existe $r > 0$ tal que

$$|x_k^i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_k^i\right)^2 \right)^{1/2} < r \quad \forall k \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n.$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass unidimensional, existe uma subsequência $(x_k^1)_{k \in \mathbb{N}_1}$ de (x_k^1) que converge para um número $a_1 \in \mathbb{R}$. A sequência $(x_k^2)_{k \in \mathbb{N}_1}$ é limitada; logo, possui uma subsequência $(x_k^2)_{k \in \mathbb{N}_2}$, com $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$, convergindo para algum $a_2 \in \mathbb{R}$. Prosseguindo assim, após n etapas, obtemos um subconjunto infinito $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}$ tal que, para cada $i = 1, \ldots, n$, (x_k^i) converge para $a_i \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 2.1, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_n}$ converge para $a = (a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Definição 2.8. Uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ é uma sequência (x_k) que tem a seguinte propriedade: $\forall \; \epsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N}$ tal que se $k, m \geq N$, então:

$$\|x_k - x_m\| < \epsilon$$

Então, uma sequência é de Cauchy quando, dado arbitrariamente um $\epsilon > 0$, a partir de um certo termo, a distância entre dois termos quaisquer da sequência é menor que ϵ, ou seja,

$$(x_k) \text{ é de Cauchy} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_{k+p} - x_k\| = 0 \; \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.2 (Completude de $\mathbb{R}^n$). *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.*

Demonstração. A prova de que uma sequência convergente é de Cauchy é imediata a partir das definições. Seja, agora, (x_k) de Cauchy. Não é difícil ver, a partir da definição, que (x_k) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, existe uma subsequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ convergindo para, digamos, $a \in \mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon > 0$, existem $l_1 \in \mathbb{N}_0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$l \geq l_1, l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \|x_l - a\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad k, l \geq k_1, k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_k - x_l\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fazendo $k_2 = \max\{k_1, l_1\}$ e fixando $\mathbb{N} \ni l \geq k_2$, temos

$$\|x_k - a\| \leq \|x_k - x_l\| + \|x_l - a\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \forall k \geq k_2,$$

o que prova que $x_k \to a$. $\square$

2.2 Noções topológicas no $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta aberto determinado pelos extremos a e b é, por definição, o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (1-t)a + tb, t \in (0, 1)\}$$

Da mesma forma, o segmento de reta fechado é, por definição, o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}$$

Ademais, nos referiremos ao conjunto

$$\{(1-t)a + tb; t \in [0, +\infty\}$$

como a semirreta com origem em a e que contém b.

Definição 2.9. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo quando, para quaisquer $a, b \in X$, tem-se $[a, b] \subset X$

Em termos geométricos, a definição de conjunto convexo equivale a dizer que qualquer segmento de reta com extremos no conjunto, está inteiramente contido no conjunto.

Exemplo 2.1. O conjunto do $\mathbb{R}^n$ é, obviamente, um caso de conjunto convexo. Outro exemplo é o de um qualquer subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$. Com efeito, dados $a, b \in V$, a combinação linear $(1-t)a + tb$ pertence a V para todo $t \in [0, 1]$.

2.2.1 *Abertos e fechados*

No estudo da Análise na reta, os intervalos da reta real desempenham um importante papel. Já no $\mathbb{R}^n$ é possível generalizar esse conceito, através da ideia de bola.

Definimos bola aberta, bola fechada e esfera da seguinte maneira:

1. A bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos cuja distância a a é inferior a r, isto é,
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

2. A bola fechada de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos cuja distância de a é não superior a r, isto é,
$$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

3. A esfera de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância a a é igual a r
$$S[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}.$$

Definição 2.10 (conjunto aberto)**.** Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito aberto se para cada $a \in A$ existe $r > 0$, que depende de a, tal que $B(a,r) \subseteq A$.

Definição 2.11 (interior)**.** Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Dado um $r > 0$ arbitrário, definimos o interior de A como:

$$int(A) := \{a \in A; \exists B(a,r) \subseteq A\}.$$

É possível mostrar que $int(A)$ é um conjunto aberto que está contido em qualquer outro conjunto aberto contendo A.

Exemplo 2.2. Toda bola aberta $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Demonstração. Dado $x \in B(a,r)$, fazendo $s = \|x - a\| < r$, defina $\delta := \frac{r-s}{2}$. Então todo $y \in B(x,\delta)$ satisfaz

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \delta + s < (r - s) + s = r.$$

Logo, $B(x,\delta) \subset B(a,r)$. Portanto, todo ponto $x \in B(a,r)$ é ponto interior, ou seja, $B(a,r)$ é aberto. □

Definição 2.12. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $X \subset B[0,c]$.

Definição 2.13. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de A se para cada $\epsilon > 0$ tem-se:

$$A \cap (B(a, \epsilon) \backslash \{a\}) \neq \emptyset.$$

Denotamos por A' o conjunto dos pontos de acumulação de A. Os pontos de A que não são pontos de acumulação são chamados de pontos isolados.

Exemplo 2.3. Seja $X = B(0, r)$. Todo ponto $x \in B[0, r]$ é ponto de acumulação de X.

Demonstração. Tome $x \in B[0, r]$. Assim, $\|x\| \leq r$. Dado $\epsilon > 0$, queremos mostrar que existe $y \neq x$ tal que: $y \in X$ e $y \in B(x, \epsilon)$ ou seja, queremos $y \neq x$ com $\|y\| < r$ e $\|x - y\| < \epsilon$. Denotamos $\|x\| = a$. Podemos assumir que $\epsilon < 2a$. Tome $y = \left(1 - \frac{\epsilon}{2a}\right) x$. Logo, temos $y \neq x$ (pois $1 - \frac{\epsilon}{2a} \neq 1$) e $\|y\| = \left|1 - \frac{\epsilon}{2a}\right| \cdot \|x\| \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2a}\right) \cdot r < r$. Portanto, $y \in B(0, r)$. Temos também que $\|x - y\| = \left\|\frac{\epsilon}{2a} \cdot x\right\| = \frac{\epsilon}{2a} \|x\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Logo, $y \in B(x, \epsilon)$. $\square$

Definição 2.14. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o fecho de A por:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Exemplo 2.4. O fecho de uma bola $B(a, r)$ é a bola $B[a, r]$.

Definição 2.15 (Conjunto fechado)**.** Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado se o seu complementar $X^c = \mathbb{R}^n - X$ for aberto.

É possível mostrar que $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando $X = \overline{X}$. Portanto, dizer que X é fechado é o mesmo que dizer que se $\lim x_k = a$ e $x_k \in X, \forall\, k \in \mathbb{N}$, então $a \in X$.

Exemplo 2.5. O conjunto vazio e o espaço $\mathbb{R}^n$ são exemplos imediatos de conjuntos fechados. (Estes conjuntos também são conjuntos abertos. Na verdade, esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$.) Outro exemplo de conjuntos fechados são as bolas fechadas e as esferas.

Exemplo 2.6. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial próprio. Então V é fechado e tem interior vazio. Com efeito, seja $\{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base ortonormal de V a qual completamos para uma base $\{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$, existem únicos escalares α_j tais que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$. O vetor $\pi_V(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$ é a *projeção* de x sobre v. Fazendo $r = |x - \pi_V(x)|/2$, a bola $B(x, r)$ é disjunta de V. (De fato, dado $w \in V, w \neq \pi_V(x)$, temos $\pi_V(x) - w \in V$. Não é difícil ver que $x - \pi_V(x)$ é ortogonal a $\pi_V(x) - w$; logo, pelo Teorema de Pitágoras, $|x - \pi_V(x)|^2 + |\pi_V(x) - w|^2 = |x - w|^2$. Uma vez que $|\pi_V(x) - w|^2 > 0$, segue-se que $|x - \pi_V(x)| < |x - w|$.) Isso mostra que $\mathbb{R}^n \setminus V$ e, portanto, que V é fechado. Agora, dado $v \in V$, para qualquer $\epsilon > 0$ seja $w = v + \epsilon u_{m+1}/2$. Então $w \in B(v, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus V)$. Isso mostra que $int(V) = \emptyset$.

Definição 2.16. Dizemos que um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se ele é fechado e limitado.

Exemplo 2.7. A esfera $\mathbb{S}_1(0) = S[0,1]$ é um conjunto compacto. Com efeito, não é difícil ver que, em $\mathbb{R}^n$, um conjunto K é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto, isto é, se para toda sequência $(x_j) \subset K$, existe uma subsequência (x_{j_l}) convergindo para $x \in K$. Usaremos essa caracterização para provar que $\mathbb{S}_1(0)$ é compacta. Dada $(u_j) \subset \mathbb{S}_1(0)$, é claro que esta sequência é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass (Teorema 2.1), existe uma subsequência convergente $(u_{j_l}) \subset (u_j)$. Seja u o limite. Para ver onde está esse limite, usaremos a seguinte desigualdade:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

(Aplicando a desigualdade triangular $|z+y| \leq |z|+|y|$ a $z = x-y$, obtemos $|x|-|y| \leq |x-y|$. Analogamente, $|y| - |x| \leq |x - y|$.) Segue-se dessa desigualdade que $\lim |u_{j_l}| = |u|$. Ora $|u_{j_l}| = 1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Logo, $|u| = 1$, isto é, $u \in \mathbb{S}_1(0)$.

Definição 2.17. Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. (Em particular, A e B são disjuntos.) A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se a cisão trivial.

Proposição 2.3. *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o intervalo I admita a cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomemos $a \in A$, $b \in B$, digamos com $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então $c \in A$ ou $c \in B$. Se $c \in A$, pomos $a_1 = c, b_1 = b$. Se $c \in B$, escreveremos $a_1 = a, b_1 = c$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ e $a_1 \in A, b_1 \in B$. Por sua vez, o ponto médio de $[a_1, b_1]$ o decompõe em dois intervalos fechados justapostos de comprimento $(b - a)/4$. Um desses intervalos, que chamaremos $[a_2, b_2]$, tem $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Prosseguindo analogamente, obteremos uma sequência de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ com $b - a = (b - a)/2^n$, $a_n \in A, b_n \in B$ para todo n. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < d < b_n$ para todo n. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim b_n \in B$ nem em B pois $d = \lim a_n \in A$. Absurdo! $\square$

2.2.2 Distância entre ponto e conjunto

Dados, no plano euclidiano, uma reta ℓ e um ponto P fora de ℓ, aprendemos nos cursos de Geometria a determinar a projeção ortogonal $P^{\perp}$ de P sobre ℓ. Escolhendo um ponto $A \in \ell$, podemos supor que AP não é perpendicular a ℓ. Seja $B \neq A$ outro ponto de ℓ. No semiplano determinado por ℓ (aquele não contendo P), construímos uma semirreta $\overrightarrow{BQ}$ tal que $P\hat{A}B = Q\hat{A}B$. Nesta semirreta, escolhemos P_1 tal que $\overline{PA} = \overline{P_1A}$. Não é difícil ver que a interseção $P^{\perp}$ de PP_1 com ℓ é a projeção procurada. Assim, para todo ponto P do plano, fora de ℓ, é possível determinar um único ponto $P^{\perp} \in \ell$ que realiza a distância de P a ℓ no sentido de que $d(P, P^{\perp}) = \inf_{Q \in \ell} d(P, Q)$, onde d é a distância euclidiana.

É possível generalizar este conceito para conjuntos mais abstratos de espaços euclidianos de dimensão qualquer. Isso é feito, por exemplo, no Exemplo 2.6. Cabe observar que uma reta no plano é um subespaço afim, isto é, é a translação de um subespaço do $\mathbb{R}^2$ (o qual é uma reta que passa pela origem).

Quando não conhecemos a geometria ou a estrutura (algébrica ou de outra natureza) de que possa estar munido um subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos a distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ a A, de maneira natural, por

$$d(x, A) = d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

O conjunto de números reais não-negativos $\{d(x, a); a \in A\}$, formado pelas distâncias de x aos diversos pontos de A, é não-vazio e limitado inferiormente por zero. Pela completude de $\mathbb{R}$, é claro que este conjunto possui ínfimo. A questão passa a ser quando existe um ponto $a_x \in A$ que realiza a distância de x a A, isto é, que é tal que $d(x, a_x) = d(x, A)$.

2.3 Cálculo no $\mathbb{R}^n$

2.3.1 Limites e continuidade

Sejam $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de X.

Definição 2.18. Dizemos que $L \in \mathbb{R}^m$ é o limite de f quando x tende para $a \in X'$, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$.

Definição 2.19. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$, em que $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, é contínua no ponto $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Quando f é contínua em cada um dos pontos de X, dizemos que f é contínua.

A relação entre continuidade e limites é a seguinte: Se $a \in X' \cap X$, então f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Em termos de limites de sequências, temos a seguinte caracterização: f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \subset X$ com $\lim x_k = a$, tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$.

Exemplo 2.8. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana quando existe $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n$$

L é chamado uma constante de Lipschitz de f. Nestas condições, dizemos também que f é L-lipschitziana. Toda aplicação lipschitziana é contínua.

Demonstração. Seja f L-lipschitziana. Então, dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2L}$. Assim,

$$\|x - y\| < \delta = \tfrac{\epsilon}{2L} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Portanto, f é contínua em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$. □

Exemplo 2.9. Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, segue-se da desigualdade (1) que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - a\|$ é 1-lipschitziana e, portanto, contínua. Em particular, tomando $a = 0$, a função norma $x \mapsto \|x\|$ é contínua.

Exemplo 2.10. Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $T \neq 0$, tem-se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Tx - Ta\| = \|T(x - a)\| \leq \|T\| \|x - a\|$, onde $\|T\| := \sup\{\|Tu\| : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\}$ é a norma espectral de T. Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando-se $\delta = \epsilon / \|T\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x - a\| < \delta$, tem-se $\|Tx - Ta\| < \epsilon$. Logo, T é contínua.

Proposição 2.4 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua sobre um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^n$, então a função f assume o seu valor máximo e o seu mínimo em X, isto é, existem $a, b \in X$ tal que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \; \forall \, x \in X.$$

Demonstração. Vamos começar provando que a imagem $f(X)$ é um compacto. Seja (y_k) uma sequência de pontos em $f(X)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in X$ tal que $f(x_k) = y_k$. Como X é compacto, uma subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge para um ponto $a \in X$. Sendo f contínua nesse ponto a, de $\lim x_k = a$ resulta $\lim f(x_k) = f(a)$. Logo toda seqüência de pontos $y_k = f(x_k) \in f(X)$ possui uma subseqüência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergente para um ponto $f(a) \in f(X)$. Noutras palavras: $f(X)$ é compacto.

Sendo $f(X)$ limitado, existem

$$\sup_{x \in X} f(x) \text{ e } \inf_{x \in X} f(x)$$

os quais são pontos de acumulação de $f(X)$. Como $f(X)$ é fechado, segue que

$$\sup_{x \in X} f(x) \in f(X) \text{ e } \inf_{x \in X} f(x) \in f(X).$$

portanto o máximo e mínimo são atingidos em pontos de X. □

2.3.2 Derivadas

Definição 2.20 (Derivada parcial)**.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e e_i o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos a i-ésima derivada parcial de f em a é o número

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}$$

caso este limite exista.

Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $a + te_i \in U$ para todo $|t| < \delta$, de maneira que está bem definido o caminho $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ dado por $\lambda(t) = a + te_i$. Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ é a derivada no ponto $t = 0$ da função real $f \circ \lambda : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$.

Dizemos que f é diferenciável no ponto $a \in U$ quando cumpre as seguintes condições:

- As derivadas parciais de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existem e são contínuas em todo U.
- Para todo $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$, temos:

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i + r(v), \text{ com } \lim_{|v| \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

A essência dessa definição está na condição $\lim\limits_{|v| \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$. Daí decorre que, se f é diferenciável no ponto a, então f é contínua nesse ponto. Com efeito, temos $\lim\limits_{v \to 0} r(v) = 0$, uma vez que $r(v) = |v| \cdot \dfrac{r(v)}{|v|}$. Segue-se que $\lim\limits_{v \to 0} [f(a + v) - f(a)] = 0$. Diremos que $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável quando f é diferenciável em todos os pontos de U.

Dado $a \in U$, existe um único vetor de $\mathbb{R}^n$, o qual designamos por gradiente de f em a e denotamos por $\nabla f(x)$, tal que

$$f'(a)h = \langle \nabla f(a), h \rangle \;\forall\, h \in \mathbb{R}^n$$

O gradiente de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ em $a \in U$ é o vetor

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Se v é qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, a derivada direcional de f no ponto a na direção de v é, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Quando f é diferenciável no ponto a, a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe na direção de qualquer vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$. De fato, se $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ é qualquer caminho diferenciável com $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$, então

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então, para cada $a \in U$, é bem definida a aplicação linear $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f'(a)v = \langle \nabla f(a), v \rangle$, denominada a derivada de f em a.

Definição 2.21. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $a \in U$ é dito:

1. Ponto crítico de f, se $\nabla f(a) = 0$.

2. Ponto regular de f, se $\nabla f(a) \neq 0$.

Exemplo 2.11. Seja $a \in U$ um ponto de máximo local de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(x) \leq f(a) \;\; \forall \, x \in B(a, \epsilon).$$

Afirmamos que a é um ponto crítico de f. De fato, para cada $i = 1, \ldots, n$ a função $f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ definida para t próximo de a_i, tem um máximo local em $t = a_i$. Assim,

$$0 = f_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \;\; \forall \, i = 1, \ldots, n.$$

Logo, $\nabla f(a) = 0$.

Observação 2.1. *Se $a \in U$ é um ponto de mínimo local de f, da mesma forma mostramos que a é ponto crítico de f.*

Proposição 2.5 (Teorema de Rolle)**.** *Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em U e constante em ∂U. Então existe $x \in U$, tal que $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Como $\overline{U}$ é compacto e f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seus valores máximo e mínimo, respectivamente, em pontos $x_0, y_0 \in \overline{U}$. Como f é constante em ∂U, a menos que f seja constante em $\overline{U}$, o que implicaria $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$, devemos ter $x_0 \in U$ ou $y_0 \in U$. □

Exemplo 2.12 (Norma ao quadrado)**.** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função norma ao quadrado, $f(x) = \|x\|^2$. Temos que

$$f(x + h) - f(x) = \langle x + h, x + h \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2.$$

Fazendo-se $r(h) = \|h\|^2$, tem-se, claramente, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, donde f é diferenciável e $f'(x)h = 2\langle x, h \rangle \; \forall \, x, h \in \mathbb{R}^n$.

3 TEOREMA DE MOTZKIN

3.1 Projeções e conjuntos de Chebyshev

No que segue, supomos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, o que é o mesmo que dizer que seu complementar $\mathbb{R}^n - A$ é aberto ou ainda, que, se $a \in \mathbb{R}^n$ é limite de uma sequência de pontos de A, então $a \in A$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, infere-se da definição de distância de x a A, $d(x, A)$, que existe uma sequência de pontos $(a_k) \subset A$ tal que $\|x - a_k\| \to \inf_{a \in A} \|x - a\| = d(x, A)$. Aplicando a desigualdade (1), obtemos $\|a_k\| - \|x\| \leq \|a_k - x\|$, isto é, $\|a_k\| \leq \|x - a_k\| + \|x\|$, donde se segue que (a_k) é limitada e, portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (a_k) converge para um ponto $a \in A$ (pois A é fechado). A partir daí e da continuidade da norma, concluímos que $d(x, A) = \lim_{k \to \infty} \|x - a_k\| = \|x - a\|$.

Observe que o ponto $a \in A$ que satisfaz essa distância não é, necessariamente, único. Isto é, podendo existir infinitos pontos com essa propriedade; basta tomar por exemplo a esfera $S[x, r] \in \mathbb{R}^n$. Por isso, vamos designar o conjunto desses pontos da seguinte forma: $\Pi(x) = \{a \in A; \|x - a\| = d(x, A)\}$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota-se que esse conjunto é formado por todos os pontos de A que realizam a distância de x a A. Além disso, esse conjunto é compacto, pois é fechado, em virtude da continuidade da norma, e claramente limitado, já que $\forall\, a \in \Pi(x)$ temos $\|a\| \leq \|a - x\| + \|x\| = d(x, A) + \|x\|$.

Conforme se vê sem dificuldade, usando a definição e a desigualdade triangular, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se a função distância $x \mapsto d_A(x) = d(x, A) \in \mathbb{R}$ é 1-lipschitziana. Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para quaisquer $a \in \Pi(x)$ e $b \in \Pi(y)$, tem-se

$$d_A(x) - d_A(y) = \|x - a\| - \|y - b\|$$

Além do mais, $\|x - a\| \leq \|x - b\|$, $\|y - b\| \leq \|y - a\|$. Portanto, usando a desigualdade triangular,

$$-\|x - y\| \leq \|x - a\| - \|y - a\| \leq \|x - a\| - \|y - b\| \leq \|x - b\| - \|y - b\| \leq \|x - y\|$$

Ou seja,

$$\|d_A(x) - d_A(y)\| \leq \|x - y\| \;\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, essa função é (uniformemente) contínua.

Quando para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $\Pi(x)$ contém um único ponto $a \in A$, dizemos que A é um conjunto de Chebyshev, que denotamos por $\pi(x)$. Assim, fica bem definida a aplicação projeção sobre A,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\to A \\ x &\mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

a qual satisfaz

$$d_A(x) = \|x - \pi(x)\|.$$

Afirmamos que esta projeção é contínua. Com efeito, suponha que $A \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto de Chebyshev. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ com $x = \lim x_k$, então, da desigualdade triangular, vem

$$\|\pi(x_k)\| \leq \|\pi(x_k) - x_k\| + \|x_k\| \leq \|\pi(x) - x_k\| + \|x_k\|.$$

Aqui, fizemos uso também do fato de que $\pi(x_k)$ realiza a distância de x_k a A. Como as sequências $(\|\pi(x) - x_k\|)$ e $(\|x_k\|)$ são convergentes, logo limitadas, segue-se que $(\|\pi(x_k)\|)$ é limitada. Já que toda sequência limitada possui uma subsequência convergente, seja $(\pi(x_{k_i}))$ uma subsequência de $(\pi(x_k))$ convergindo para, digamos, a, isto é, $a = \lim_{i\to\infty} \pi(x_{k_i})$. Daí, temos

$$\|x - a\| = \lim_{i\to\infty} \|(x_{k_i} - \pi(x_{k_i})\| = \lim_{i\to\infty} d_A(x_{k_i}) = d_A(x),$$

donde $a = \pi(x)$, mostrando que a projeção π é, de fato, contínua.[1]

3.2 Demonstração do resultado principal

A demonstração do Teorema de Motzkin devida a Lima (2011) repousa, essencialmete, sobre os dois lemas que enunciamos e provamos a seguir.

Lema 3.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função distância a A ao quadrado, isto é, $f(x) = d_A^2(x)$. Então, dado $x \in \mathbb{R}^n$, a função*

$$T(h) = \min_{a\in\Pi(x)} 2\langle x - a, h\rangle, h \in \mathbb{R}^n,$$

cumpre as seguintes condições:

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0$;
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h)$.

Demonstração. Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$. Devido à compacidade de $\Pi(x)$ e à continuidade[2] da função $a \mapsto 2\langle x - a, h\rangle$, pelo Teorema de Weirstrass, para cada $h \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\Pi_h(x) = \{a \in \Pi(x); T(h) = 2\langle x - a, h\rangle\} \neq \emptyset.$$

Assim, dados $h_0, h \in \mathbb{R}^n$, para quaisquer $a_h \in \Pi_{h_0+h}(x)$ e $a \in \Pi_{h_0}(x)$, temos

$$T(h_0 + h) - T(h_0) = 2\langle x - a_h, h_0 + h\rangle - 2\langle x - a, h_0\rangle.$$

[1] Não é difícil ver que $(\pi(x_k))$ é uma sequência de Cauchy:

$$\|\pi(x_k) - \pi(x_l)\| \leq \|\pi(x_k) - x_k\| + \|x_l - \pi(x_l)\| + \|x_k - x_l\| \leq \|(\pi(x) - x_k)\| + \|x_l - \pi(x)\| + \|x_k - x_l\|;$$

todas as últimas parcelas são sequências convergentes, logo de Cauchy.

[2] Consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Por definição de $T, \Pi_{h_0+h}(x)$ e $\Pi_{h_0}(x)$,

$$\langle x - a_h, h_0 + h\rangle \leq \langle x - a, h_0 + h\rangle \tag{2}$$

e

$$\langle x - a, h_0\rangle \leq \langle x - a_h, h_0\rangle. \tag{3}$$

De (2), usando a bilinearidade do produto interno, segue que

$$\langle x - a_h, h_0 + h\rangle \leq \langle x - a, h_0 + h\rangle = \langle x - a, h_0\rangle + \langle x - a, h_0 + h\rangle,$$

donde

$$\langle x - a_h, h_0 + h\rangle - \langle x - a, h_0\rangle \leq \langle x - a, h_0 + h\rangle. \tag{4}$$

De (3), segue-se que

$$0 \leq \langle x - a_h, h_0\rangle - \langle x - a, h_0\rangle \Rightarrow \langle x - a_h, h\rangle \leq \langle x - a_h, h_0\rangle - \langle x - a, h_0\rangle + \langle x - a_h, h\rangle$$

isto é,

$$\langle x - a_h, h\rangle \leq \langle x - a_h, h_0 + h\rangle - \langle x - a, h_0\rangle. \tag{5}$$

Combinando (4) e (5), vem

$$2\langle x - a_h, h\rangle \leq T(h_0 + h) - T(h_0) \leq 2\langle x - a, h\rangle. \tag{6}$$

Uma vez que $|\langle x - a_h, h\rangle| \leq ||x - a_h||\,||h||$ = $d_A(x)||h||$ (pois $a, a_h \in \Pi(x)$), temos

$$\lim_{h\to 0}\langle x - a_h, h\rangle = 0.$$

Segue-se, portanto, de (6) e do Teorema do Confronto que

$$0 = \lim_{h\to 0} 2\langle x - a_h, h\rangle \leq \lim_{h\to 0}\{T(h_0 + h) - T(h_0)\} \leq \lim_{h\to 0} 2\langle x - a, h\rangle = 0,$$

isto é,

$$\lim_{h\to 0} T(h_0 + h) - T(h_0) = 0,$$

ou ainda,

$$\lim_{h\to 0} T(h_0 + h) = T(h_0),$$

donde T é contínua.

Agora, tomando-se $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $a_h \in \Pi(x + h)$ e $a \in \Pi(x)$, valem as desigualdades

$$||x + h - a_h|| \leq ||x + h - a||,\ ||x - a|| \leq ||x - a_h||.$$

Daí segue-se que

$$2\langle x - a_h, h\rangle + ||h||^2 \leq f(x+h) - f(x) \leq 2\langle x - a, h\rangle + ||h||^2. \tag{7}$$

Assim, tomando-se $a \in \Pi_h(x) \subset \Pi(x)$ e observando-se que, para todo real $t > 0$, $T(th) = tT(h)$, somando $T(h)$ a todos os membros de (7) obtém-se as desigualdades

$$2\langle x - a_h, \frac{h}{||h||}\rangle - T\left(\frac{h}{||h||}\right) + ||h|| \leq \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{||h||} \leq ||h||. \tag{8}$$

Em particular,

$$2\langle x - a_h, \frac{h}{||h||}\rangle - T\left(\frac{h}{||h||}\right) \leq 0, \forall a_h \in \Pi(x+h). \tag{9}$$

Provemos então que, $\lim\limits_{h\to 0}\left[2\langle x - a_h, \frac{h}{||h||}\rangle - T\left(\frac{h}{||h||}\right)\right] = 0$. Para tanto, tomemos uma sequência (h_k) em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, tal que $h_k \to 0$. Pelo exemplo 2.7, podemos supor que

$$u_k := \frac{h_k}{||h_k||} \to u, \qquad \text{com } ||u|| = 1.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $a_k \in \Pi(x + h_k)$. Por (1), temos

$$||a_k|| - ||x + h_k|| \leq ||x + h_k - a_k|| \leq ||x + h_k - b|| \tag{10}$$

donde

$$||a_k|| \leq ||x + h_k - b|| + ||x + h_k||.$$

Daí, vê-se que $(\|a_k\|)$ é limitada, pois $(||x + h_k - b||)$ e $(||x + h_k||)$ o são (por serem convergentes). Assim, passando a uma subsequência (se necessário), podemos supor que $a_k \to a_0 \in \Pi(x)$. Fazendo $k \to \infty$ na segunda desigualdade em (10), obtém-se

$$||x - a_0|| \leq ||x - b||, \forall b \in A.$$

Logo, pela continuidade de T e por (9), vem

$$2\langle x - a_0, u\rangle = \lim_{k\to\infty} 2\langle x - a_k, u_k\rangle \leq \lim_{k\to\infty} T(u_k) = T(u) = \min_{a\in\Pi(x)} 2\langle x - a, u\rangle,$$

donde $2\langle x - a_0, u\rangle = T(u)$. Desta forma,

$$\lim_{k\to\infty}\left[2\langle x - a_h, \frac{h_k}{||h_k||}\rangle - T\left(\frac{h_k}{||h_k||}\right)\right] = 2\langle x - a_0, u\rangle - T(u) = 0.$$

Como (h_k) e (a_k) são arbitrárias, retornando a (8), concluímos que

$$0 = \lim_{h\to 0}\left\{2\langle x - a_h, \frac{h}{||h||}\rangle - T\left(\frac{h}{||h||}\right) + ||h||\right\} \leq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{||h||} \leq \lim_{h\to 0} ||h|| = 0,$$

o que conclui a demonstração de (i).

Quanto a (ii), o resultado segue de (i) observando que , para todo real $t > 0$,

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t} - T(h) = \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - \frac{T(th)}{t} = \frac{f(x+th)-f(x)-T(th)}{||th||}||h||.$$

□

Corolário 3.1. *Nas condições do Lema 3.1, se A é um conjunto de Chebyshev, então d_A^2 é diferenciável e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\nabla d_A^2(x) = 2(x - \pi(x))$$

Demonstração. Com efeito, sendo A um conjunto de Chebyshev, tem-se, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}^n$, que

$$T(h) = \min_{a \in \Pi(x)} 2\langle x - a, h\rangle = 2\langle x - \pi(x), h\rangle;$$

daí, T é linear. O resultado segue-se, então, do item (i) do Lema 3.1. □

Lema 3.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de Chebyshev e um ponto x_0 do comlementar de A, isto é, $x_0 \in \mathbb{R}^n - A$. Então, todo ponto x da semirreta σ, que tem origem em $\pi(x_0)$ e contém x_0, satisfaz $\pi(x) = \pi(x_0)$.*

Demonstração. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n - A$, todo x no segmento $[\pi(x_0), x_0]$ é tal que $\pi(x) = \pi(x_0)$, pois, neste caso, temos $||x_0 - \pi(x_0)|| = ||x_0 - x|| + ||x - \pi(x_0)||$. Logo, utilizando da desigualdade triangular,

$$||x_0 - \pi(x)|| \leq ||x_0 - x|| + ||x - \pi(x)|| \leq ||x_0 - x|| + ||x - \pi(x_0)|| = ||x_0 - \pi(x_0)||.$$

donde $\pi(x) = \pi(x_0)$.

Desta forma, devemos nos ocupar apenas dos pontos da semirreta $\sigma_0 \subset \sigma$, cuja origem é x_0. Vamos provar que

$$\Omega = \{x \in \sigma_0; \pi(x) = \pi(x_0)\} \subset \sigma_0$$

é fechado em σ_0. De fato, seja $(x_k) \subset \Omega$ convergindo para $a \in \mathbb{R}^n$. Temos $\pi(x_k) = \pi(x_0)$ para todo k. Pela continuidade da projeção, temos $\pi(a) = \lim \pi(x_k) = \lim \pi(x_0) = \pi(x_0)$. Logo, $a \in \Omega$. Se conseguirmos mostrar que este conjunto é, também, aberto em σ_0, nosso trabalho acabou.

Dado $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n - A$, tomemos uma bola fechada $B[x, r]$, tal que $B[x, r] \cap A = \emptyset$. Seja, então,

$$\mu = \max\{d_A(z); z \in S[x, r]\}.$$

É claro que $\mu > 0$, porque A é fechado e a esfera $S[x, r]$ é compacta e disjunta de A. Assim, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 < \lambda < \min\left\{1, \frac{r^2}{\mu^2}\right\}$$

e definir a função

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & d_{A_0}^2(z) - \lambda d_A^2(z),\end{array}$$

em que $A_0 = \{x\}$. Pelo Corolário 3.1, φ é diferenciável e satisfaz, para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla\varphi(z) = 2((z-x) - \lambda(z - \pi(z))). \tag{11}$$

Em particular, φ é contínua (pois φ é derivável). Então, por Weierstrass, a restrição de φ à bola compacta $B[x,r]$ assume seu valor mínimo em algum ponto $z_0 \in B[x,r]$. Note que $\varphi(x) = -\lambda d_A^2(x) < 0$ e, para todo ponto z da esfera $S[x,r]$, tem-se

$$\varphi(z) = r^2 - \lambda d_A^2(z) \geq r^2 - \lambda\mu^2 > 0.$$

Logo, o mínimo de φ sobre $B[x,r]$ é atingido num ponto z_0 bola aberta $B(x,r)$ no qual temos

$$\nabla\varphi(z_0) = 0.$$

Logo, por (11),

$$z_0 - x = \lambda(z_0 - \pi(z_0)).$$

Lembrando-se que $0 < \lambda < 1$, concluímos que $x \in (\pi(z_0), z_0)$. Pela primeira parte desta demonstração, $\pi(z_0) = \pi(x) = \pi(x_0)$, ou seja, $x \in (z_0, \pi(x_0))$. Fazendo-se, então, r_0=$||z_0 - x||$, $I_0 = B(x, r_0) \cap \sigma_0$ é um aberto de σ_0 que contém x e, claramente, está contido em $[x_0, z_0]$. Logo, todo ponto $y \in I_0$ satisfaz $\pi(y)$=$\pi(x_0)$, donde se infere que $I_0 \subset \Omega$ e, portanto, que Ω é aberto em σ_0. □

Teorema 3.1 (Teorema de Motzkin)**.** *Dado um conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *A função distância a A é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$;*
- *A é um conjunto de Chebyshev;*
- *A é convexo.*

Demonstração. Suponhamos que d_A seja diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$. Então, vale o mesmo para

$f = d_A^2$. Logo, pelo item (ii) do Lema 3.1, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n - A$ e $h \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$f'(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h),$$

donde $T = f'(x)$. Em particular,

$$Th = \langle \nabla f(x), h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $h \in \mathbb{R}^n$, se $a_h \in \Pi(x)$ é tal que $T(h) = 2 \langle x - a_h, h \rangle$, então

$$\langle \nabla f(x), h \rangle = \langle x - a_h, h \rangle \,,$$

donde, tomando-se $a = x - \frac{\nabla f(x)}{2}$, tem-se, pela definição de T,

$$\langle x - a, h \rangle \leq \langle x - b, h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n, b \in \Pi(x).$$

Daí, tomando-se $b \in \Pi(x)$ e $h = b - a$, obtém-se $||b - a||^2 \leq 0$, ou seja, $b = a$. Logo, A é um conjunto de Chebyshev.

Agora, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Chebyshev, então, pelo Corolário 1, d_A^2 é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $d_A = \sqrt{d_A^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$. Desta forma, (i) e (ii) são equivalentes.

Suponhamos agora que A seja convexo. Neste caso, dados $x \in \mathbb{R}^n - A$, $a \in \Pi(x)$ e $b \in A$, $b \neq a$, o segmento fechado $[a, b]$ está contido em A. Logo, para todo $x_t = a + t(b - a) \in [a, b]$, $0 \leq t \leq 1$, tem-se

$$||x - a||^2 \leq ||x - x_t||^2 = ||x - a||^2 - 2t\langle x - a, b - a \rangle + t^2 ||b - a||^2 \tag{12}$$

donde, para todo $t \in (0, 1]$, $2\langle x - a, b - a \rangle \leq t||b - a||^2$, o que nos dá, fazendo $t \to 0^+$, $\langle x - a, b - a \rangle \leq 0$. Fazendo-se $t = 1$ na igualdade em (12) obtém-se, então,

$$||x - b||^2 - ||x - a||^2 = -2\langle x - a, b - a \rangle + ||b - a||^2 > 0$$

isto é, $||x - a|| < ||x - b||$. Segue-se que a é o único elemento de $\Pi(x)$ e, portanto, que A é de Chebyshev.

Finalmente, suponhamos que A seja de Chebyshev e, por absurdo, que não seja convexo. Então, existem $a, b \in A$, tais que $[a, b] \not\subset A$. Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que o segmento aberto (a, b) não intersecta A. Com efeito, cada componente conexa de $(\mathbb{R}^n - A) \cap (a, b)$ é um aberto conexo de (a, b) e, portanto, é um segmento da forma (a_0, b_0), em que $a_0, b_0 \in A$.

Fazendo-se $\alpha(t) = a + t(b - a)$ $t \in [0, 1]$, pelo Corolário 3.1, a função $g(t) = d_A^2(\alpha(t))$ é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$ e satisfaz $g(0) = g(1) = 0$. Então, pelo Teorema de

Rolle[3], existe $t_0 \in (0,1)$, tal que

$$0 = g'(t_0) = \langle \nabla d_A^2(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0)\rangle = 2\langle \alpha(t_0) - \pi(\alpha(t_0)), b - a\rangle,$$

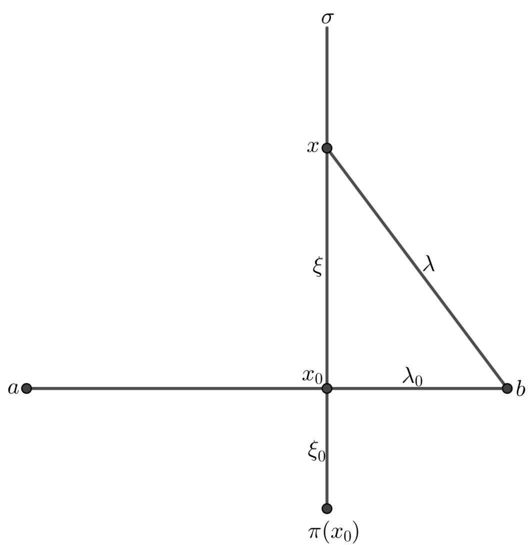
donde a semirreta σ, que contém $x_0 = \alpha(t_0) \in (a,b)$ e tem origem em $\pi(x_0)$, é ortogonal ao segmento $[a,b]$.

Definamos

$$u = \frac{x_0 - \pi(x_0)}{||x_0 - \pi(x_0)||}$$

e consideremos $x = x_0 + \zeta u \in \sigma$.

Figura 1: Se A é de Chebyshev, mas não-convexo, chegamos a uma contradição com o Lema 3.2.



Fonte: LIMA (2011).

Escrevendo-se

$$\xi_0 = ||x_0 - \pi(x_0)||, \quad \lambda_0 = ||b - x_0|| \quad \text{e} \quad \lambda = ||x - b||$$

tem-se

$$d(x_0, A) = \xi_0 < \lambda_0, \quad ||x - \pi(x_0)|| = \xi_0 + \xi \quad \text{e} \quad \lambda^2 = \xi^2 + \lambda_0^2$$

Logo, tomando-se $\xi > \frac{\lambda_0^2 - \xi_0^2}{2\xi_0}$, obtém-se

$$\|x - \pi(x_0)\|^2 = (\xi_0 + \xi)^2 = \xi_0^2 + 2\xi_0\xi + \xi^2 > \lambda_0^2 + \xi^2 = \lambda^2 = \|x - b\|^2$$

isto é,

$$\|x - b\| < \|x - \pi(x_0)\|.$$

[3]Veja o Teorema 6, Capítulo 8, de Lima (2006).

Segue-se desta última desigualdade que $\pi(x) \neq \pi(x_0)$, o que contradiz o Lema 3.2. Desta forma, A é convexo e, portanto, as afirmações (ii) e (iii) são equivalentes. $\square$

4 CONCLUSÃO

Por fim, este trabalhou descortinou possibilidades e temas de estudos que esperamos poder desenvolver em um curso de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Real Analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1964.

LIMA, E. L. **Análise Real.** Volume 1 – Funções de uma variável. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

__________. **Análise Real.** Volume 2 – Funções de n Variáveis. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, R. F. Uma nova demonstração do Teorema de Motzkin. **Revista Matemática Universitária,** Rio de Janeiro, n. 50-51, jun/dez. de 2011, p.76-82.

__________. **Análise e Topologia no Espaço $\mathbb{R}^n$.** Coleção Textos Universitários 18. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me ajudar a superar todas as eventuais dificuldades encontradas ao longo do curso.

Aos meus pais e irmãs que me motivaram e deram todo apoio nos momentos mais difíceis e que também tiveram sua parcela de contribuição para que este trabalho fosse realizado.

Ao meu professor e orientador Dr. Arlandson por ter desempenhado com carinho e paciencia a função de me orientar neste processo de aprendizagem.

Aos amigos de turma, que sempre se ajudavam mutuamente nos obstáculos e com quem tive o prazer de conviver ao longo deste percurso.

E a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.