



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

ROBERTA RAYANE DE FARIAS SANTOS

**GEOMETRIA FRACTAL E PENSAMENTO
COMPUTACIONAL NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**MONTEIRO
2023**

ROBERTA RAYANE DE FARIAS SANTOS

**GEOMETRIA FRACTAL E PENSAMENTO
COMPUTACIONAL NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Dra. Ana Emília Victor Barbosa Coutinho

MONTEIRO

2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237g Santos, Roberta Rayane de Farias.
Geometria fractal e pensamento computacional no contexto da formação de professores de Matemática [manuscrito] / Roberta Rayane de Farias Santos. - 2023.
38 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2023.
"Orientação : Profa. Dra. Ana Emília Victor Barbosa Coutinho, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Geometria Fractal. 2. Pensamento Computacional. 3. Formação de Professores. 4. Ensino de Matemática. I. Título
21. ed. CDD 371.12

ROBERTA RAYANE DE FARIAS SANTOS

GEOMETRIA FRACTAL E PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO
CONTEXTO DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 17/03/2023.

BANCA EXAMINADORA

Dra. Ana Emília Victor Barbosa Coutinho
Orientador

Dr. Brauner Gonçalves Coutinho
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Dr. José Luiz Cavalcante
Examinador interno (CCHE/UEPB)

*Dedico esse trabalho aos meus familiares e amigos que foram essenciais nessa caminhada,
em especial minha avó Doralice e minha sobrinha Ruanna.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível. Por me dar saúde, sabedoria e força de vontade para concluir mais esta etapa de vida. Por me permitir a concretização deste trabalho que é apenas o início de um sonho, um sonho sonhado junto por mim e toda minha família.

À minha família, por ser minha rocha e incentivo. À minha mãe Damiana Márcia, ao meu pai Roberto, ao meu segundo pai que a vida me deu, meu padrasto Geraldo, aos meus irmãos que são muitos e eu vou ter que citar todos, para que nenhum dê ataque de pelanca depois, então lá vai: Rafaela, Camylly, Carolinne, Rhagylla, Yamin, João e Paulo, que sempre foram meus melhores amigos e minha força em dias ruins. A eles, todo meu amor e gratidão.

Um particular agradecimento a duas pessoas que são mais que família, para mim são casa, é com quem me sinto segura e de onde tiro forças todas as manhãs para conquistar meus objetivos, minha avó Doralice Emiliano e minha sobrinha Ruanna Lívia. À elas todo meu amor e gratidão.

Aos meus amigos, Leandro, Leandro Alexandre, Simone, Danrley, Inês Gabriela, Cloves Cruyff, Tales Rodolfo, Amanda Carla. E minhas amigas, Paloma Correia e Raquel Andrade, por serem as melhores amigas que eu poderia ter.

À minha amiga Daniele Clemente que a UEPB me presenteou, e que foi meu braço direito durante esses 5 anos, me dando apoio e parceria e essa amizade linda que construímos.

Um particular agradecimento à minha amiga de anos Mariana Gabrielly, que faz parte da minha vida desde que nasci e que sonhou muito junto comigo. Um deles era concluir o Ensino Superior, o dela já alcançamos e agora chegou minha vez. Obrigada por mesmo de longe se fazer presente em minha vida e que tudo que sonhamos quando criança está começando a se realizar. Agradeço por todos os aprendizados, motivação, por cada palavra de carinho e também por cada puxão de orelha, afeto e irmandade.

Não poderia deixar de citar Marcello de Carvalho, meu amor, amigo e companheiro da vida, que me entende e me apoia sempre e que divide os melhores momentos comigo. Amo-te!

Ao meu bebê *pet*, Kenai Malvadeza, meu gato de estimação, por me ajudar em momentos difíceis da minha vida, sempre sendo meu companheiro.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora Ana Emília Victor Barbosa Coutinho, por toda paciência, generosidade e aprendizado nesses últimos anos. Sou grata

por todo suporte, por compartilhar comigo seus conhecimentos e me inspirar cada dia, sendo essencial em toda minha Jornada acadêmica, desde a monitoria, o PIBIC e agora me auxiliando a tornar possível esse sonho. Meu respeito e admiração.

A todos os professores e funcionários do CCHE que contribuíram de forma direta ou indiretamente com o meu desenvolvimento e aprendizado.

Enfim, agradeço a todos que conheci neste período que me auxiliaram a chegar até aqui. Gratidão!

RESUMO

O presente trabalho é resultado de um projeto de pesquisa financiado desenvolvido no âmbito do Programa Institucional de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/UEPB), cota 2021-2022. Esse projeto de pesquisa teve como objetivo introduzir, concomitantemente, a Geometria Fractal e o Pensamento Computacional alinhada com as recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A Geometria Fractal possibilita ao professor propor um ensino de diferentes conteúdos matemáticos através de atividades dinâmicas, intuitivas e contextualizadas com situações cotidianas, despertando o interesse dos alunos pela Matemática. Recentemente, estudos indicam que os processos adotados na construção de fractais por meio do software GeoGebra estimulam o desenvolvimento de habilidades inerentes ao Pensamento Computacional. Nessa perspectiva, este trabalho visa identificar o cenário atual da inserção da Geometria Fractal no ensino de Matemática no Brasil e contribuir para o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional através da construção de fractais clássicos no software GeoGebra no contexto da formação de licenciandos e professores de Matemática. Os resultados obtidos indicam que comumente o estudo de fractais é explorado no âmbito do Ensino Médio e atrelado ao uso das tecnologias digitais, especialmente do software GeoGebra. Apesar da Geometria Fractal constar na BNCC, esse é ainda um tema pouco explorado e com a carência trabalhos voltados para formação de professores. No curso de formação, observa-se que durante a construção de fractais clássicos no GeoGebra que habilidades do Pensamento Computacional são desenvolvidas de maneira intrínseca. Por fim, concluímos como importante a oferta de formação inicial e continuada de professores que tratem de ambas as temáticas, com a necessidade de novas ações que explorem tais temáticas.

Palavras-chave: Geometria Fractal. Pensamento Computacional. Formação de Professores.

ABSTRACT

The present work is the result of a research project developed under the Institutional Program for Scientific Initiation Scholarships (PIBIC/CNPq/UEPB), quota 2021-2022. This research project aimed to introduce, concomitantly, Fractal Geometry and Computational Thinking in line with the recommendations in line with the recommendations of the Common Base National Curriculum (BNCC). Fractal Geometry allows the teacher to propose teaching different mathematical contents through dynamic, intuitive and contextualized activities with everyday situations, arousing students' interest in Mathematics. Recently, researches suggest that the processes adopted in the construction of fractals through the GeoGebra software stimulate the development of skills inherent to Computational Thinking. In this perspective, this work aims to identify the current scenario of the insertion of Fractal Geometry in the teaching of Mathematics in Brazil and to contribute to the development of Computational Thinking skills through the construction of classic fractals in the GeoGebra software in the context of the training course for Mathematics teachers and undergraduate students. The results indicate that the study of fractals is commonly explored within the scope of High School and linked to the use of digital technologies, especially the GeoGebra software. Despite Fractal Geometry appearing in the BNCC, this is still a little explored topic and with the shortage of work aimed at teacher training. In the training course, it is observed that during the construction of classic fractals in GeoGebra that Computational Thinking skills are developed intrinsically. Finally, we conclude that offering initial and continuing training for teachers is important, with the need for new actions that explore such themes.

Keywords: Fractal Geometry. Computational Thinking. Teacher Training.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Número de artigos excluídos por critério de exclusão.	22
Figura 2 – Duas iterações do Triângulo de Sierpinski.	25
Figura 3 – Duas iterações do Tapete de Sierpinski.	26
Figura 4 – Duas iterações da Curva de Koch.	26
Figura 5 – Duas iterações do Floco de Neve de Koch.	26
Figura 6 – Duas iterações da Árvore Pitagórica.	27
Figura 7 – Duas iterações do Tetraedro de Sierpinski.	27
Figura 8 – Frequência de publicações por ano.	29
Figura 9 – Meio de publicação.	30
Figura 10 – Método de pesquisa.	30
Figura 11 – Construções do fractal floco de neve de Koch.	33

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação dos repositórios online.	21
Tabela 2 – Resultado quantitativo de trabalhos encontrados, identificados e selecionados.	23
Tabela 3 – Trabalhos selecionados.	23
Tabela 4 – Público-alvo.	31
Tabela 5 – Fractais explorados.	31
Tabela 6 – Recursos utilizados.	32

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Geometria Fractal	15
2.2	Pensamento Computacional	17
3	METODOLOGIA DA PESQUISA	20
3.1	Mapeamento sistemático	20
3.1.1	<i>Planejamento</i>	21
3.1.2	<i>Condução</i>	22
3.2	Curso de formação	24
3.2.1	<i>Perfil dos participantes</i>	24
3.2.2	<i>Estrutura do curso</i>	24
3.2.3	<i>Fractais estudados</i>	25
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	29
4.1	Mapeamento sistemático	29
4.2	Curso de formação	32
5	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

Um dos constantes desafios enfrentados pelos educadores é o de abordar em sala de aula temas que agucem o interesse e a curiosidade dos estudantes, e que ao mesmo tempo atendam as diretrizes curriculares nacionais. Nesse contexto, o ensino da Geometria Fractal pode ser visto como uma alternativa, por se tratar de uma geometria fundamentalmente intuitiva e dinâmica, que possibilita ao professor relacionar diversos conceitos matemáticos visto em sala de aula com situações do dia a dia dos alunos em diferentes contextos (FERREIRA; JULIO, 2019; CARVALHO, 2005). Nessa perspectiva, nos últimos anos o ensino da Geometria Fractal tem sido proposto em documentos que orientam o ensino de Matemática (NASCIMENTO; SILVA; MACIEL, 2012).

Segundo Nascimento e Costa (2020), o ensino da Geometria Fractal permite representar formas, objetos e fenômenos da natureza presentes no nosso cotidiano e possibilita relacionar várias áreas do conhecimento. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o estudo dos fractais está descrito explicitamente no Ensino Médio quando sugere a utilização de “transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)” (BRASIL, 2018a, p. 533).

De acordo com Santos e Coutinho (2021), as tecnologias digitais são um dos recursos comumente utilizados no estudo de fractais. A inclusão das tecnologias digitais na educação deve ir além de apenas utilizá-las como meio ou suporte para promover aprendizagens ou despertar o interesse dos alunos, mas utilizá-las como recursos que possibilitam aos alunos a construção dos conhecimentos com e sobre o uso dessas tecnologias digitais (BRASIL, 2018b). Considerando esse pressuposto, as tecnologias digitais podem modificar a maneira como os estudantes compreendem a Matemática, motivando e tornando o seu ensino mais atrativo. Nesse contexto, a inserção do ensino de fractais vai de encontro ao que é previsto na BNCC, quando diz que, na área de Matemática, deve utilizar “processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018a, p. 267). Para Rabay (2013), o uso de recursos computacionais é essencial para a construção de fractais definidos por sistemas de funções iteradas¹ ou por uma relação de recorrência. Segundo Kampff, Machado e Cavedini (2004), o uso das tecnologias digitais no ensino de Matemática promove novas possibilidades pedagógicas que

¹ Em matemática, função iterada é uma função que é composta consigo mesma, em forma repetida, em um processo chamado iteração; o termo também define uma técnica utilizada em análise numérica para se chegar a resultados de problemas complexos de serem resolvidas pelo método algébrico (SIQUEIRA, 2014, p. 87)

permitem ao professor motivar seus alunos para a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nesse contexto, a utilização do computador fornece meios para que os alunos construam conhecimentos com e sobre o uso das tecnologias digitais (BRASIL, 2018b).

Existem vários softwares que podem ser utilizados para a construção de fractais na Educação Básica, dentre os quais destacamos o software GeoGebra². O GeoGebra é um software educacional de matemática dinâmica que agrega em um único ambiente recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos que podem ser utilizados em todos os níveis de educação. Barbosa e Silva (2019) afirmam que habilidades do Pensamento Computacional são estimuladas durante o desenvolvimento de atividades que explorem a Geometria Fractal por meio do software GeoGebra.

O Pensamento Computacional vem sendo incorporado no currículo da Educação Básica de vários países desde que Wing (2006) recuperou o termo e defendeu-o como uma habilidade analítica que dever ser desenvolvida nas crianças assim como a leitura, a escrita e a aritmética (RAABE; COUTO; BLIKSTEIN, 2020). No Brasil, o Pensamento Computacional é abordado na BNCC com enfoque transversal, com ênfase na área da Matemática, a partir do Ensino Fundamental. O documento cita o Pensamento Computacional como uma competência que “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos” (BRASIL, 2018a, p. 474). Ainda de acordo com a BNCC, as habilidades do Pensamento Computacional podem ser trabalhadas por meio de processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem matemática. Contudo, apesar da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional fazerem parte das orientações da BNCC para construção de currículos escolares e de propostas pedagógicas em Matemática na Educação Básica brasileira, ainda se faz necessário reflexões e discussões de como promover a adequada formação inicial e continuada dos professores para inserção destes temas em sala de aula.

Visando fomentar tais reflexões e discussões, desenvolvemos o projeto de pesquisa PIBIC/CNPq/UEPB, cota 2021-2022, intitulado “O Pensamento Computacional por meio da Geometria Fractal no contexto da formação de professores”, que originou este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O objetivo do projeto de pesquisa foi contribuir com a formação inicial e continuada de professores levando-se em consideração as particularidades da educação brasileira e a realidade da prática docente, especificamente do professor de Matemática, alinhada com as recomendações da BNCC. Nessa perspectiva, nossa ideia foi considerar a possibilidade de propor novas maneiras de ensinar e aprender Matemática que contribuam para melhoria do desempenho dos estudantes através do desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional a partir da construção de fractais com apoio

² <https://www.geogebra.org/>

do software GeoGebra e, ao mesmo tempo, relacionar esta atividade com outros conteúdos matemáticos no contexto da formação de professores. Aspirando alcançar este objetivo, pretendemos responder às seguintes questões de pesquisa (QP):

- QP1:** *Como a Geometria Fractal tem sido abordada e explorada dentro do ensino de Matemática e quais os recursos estão apoiando essas propostas?*
- QP2:** *Quais as contribuições de um curso de formação para desenvolver o Pensamento Computacional através da construção de fractais?*

Para fundamentar e responder tais questões de pesquisa, no Capítulo 2 apresentamos o embasamento teórico sobre as definições e os conceitos da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional considerados neste estudo. No Capítulo 3 descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento do trabalho com o objetivo de responder as questões de pesquisa supracitadas, que foram divididos em duas etapas: i) mapeamento sistemático; ii) curso de formação. Na sequência, no Capítulo 4 apresentamos os resultados e discussões referentes as duas etapas das atividades desenvolvidas. Por fim, no Capítulo 5 destacamos as conclusões deste estudo e apresentamos propostas para possíveis trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos os conceitos relacionados aos temas abordados na pesquisa. Na Seção 2.1, expomos inicialmente um breve histórico sobre o surgimento e as propriedades fundamentais da Geometria Fractal, encerrando com a descrição de alguns fractais clássicos que foram utilizados no desenvolvimento desta pesquisa. Na Seção 2.2 são apresentadas algumas considerações teóricas acerca do Pensamento Computacional, onde descrevemos a definição, os fundamentos e as habilidades consideradas neste trabalho.

2.1 Geometria Fractal

O termo “fractal” (do latim *fractus*, que significa irregular ou quebrado) data de meados da década de 1970, quando o matemático francês-americano de origem judaico-polonesa Benoît B. Mandelbrot utilizou pela primeira vez para referenciar objetos que durante séculos foram propostos por muitos matemáticos ao representar fenômenos e comportamentos da natureza (NUNES, 2006). Esses objetos colocavam à prova os conceitos matemáticos já consolidados da Geometria Euclidiana, sendo rotulados de “monstros matemáticos”. Desde então, surgiu um novo ramo da Matemática, designado como Geometria Fractal, que vêm desenvolvendo vários estudos sobre as propriedades e o comportamento dos fractais em diversas áreas de conhecimento.

De acordo com Nascimento (2012), na natureza temos simultaneamente a ordem (o determinismo) e o caos (a imprevisibilidade). Nessa perspectiva, Barbosa (2005) diz que a Geometria Fractal e uma nova ciência chamada CAOS estão estreitamente relacionadas, tendo em vista que essa nova ciência permite “ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico” (BARBOSA, 2005, p. 10). A evolução dos computadores permitiu o desenvolvimento e aprimoramento de ambas ciências nas últimas décadas.

A Geometria Fractal contrapõe a Geometria Euclidiana. Para entender melhor essa afirmação, é preciso considerar os 5 postulados apresentados no Livro I de Euclides, conforme Agustini (2022, p. 21) são eles:

- **P1:** Pode-se traçar uma (**única**) reta (**segmento**) por quaisquer dois pontos.
- **P2:** Pode-se continuar (**de modo único**) uma reta (**segmento**) infinitamente.
- **P3:** Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.
- **P4:** Todos os ângulos retos são iguais.

- **P5:** Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Desde a época de Euclides (século III aC) até o início do século XIX, vários matemáticos tentaram provar o 5º postulado de Euclides. Um dos mais importantes foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que, a partir de seus estudos, contribuiu grandemente para a descoberta da Geometria não Euclidiana, embora tenha falecido sem ter publicado nada a respeito. Em paralelo a Gauss, outros estudiosos também se esforçaram para provar o 5º postulado, como Johann Bolyai (1802-1860) que, por volta de 1820, percebeu que para negar o quinto postulado é preciso considerar dois casos (FERREIRA, 2011, p. 39):

- i) Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta;
- i) Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

As descobertas de Bolyai foram publicadas somente em 1832. Porém, o matemático russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) foi o primeiro a publicar sobre a Geometria não Euclidiana em 1829, que inicialmente chamou de “imaginária”, e depois “pangeometria”.

As discussões a respeito do quinto postulado deram origem às Geometrias não Euclidianas, como a hiperbólica e a elíptica. No entanto, segundo Silva (2011) outras geometrias mesmo não tendo origem com tais discussões, como é o caso da Geometria Fractal, são também denominadas como não Euclidianas. De acordo com Rabay (2013, p. 3), os fractais possuem as seguintes propriedades fundamentais:

- **Autossimilaridade:** é a semelhança que uma parte tem com o todo. Pode ser exata, aproximada ou estatística, mas em qualquer dos casos mantém uma semelhança independente da escala que observamos o objeto;
- **Complexidade infinita:** qualquer que seja a ampliação do objeto fractal, poderíamos seguir ampliando pois nunca teríamos uma imagem finalizada;
- **Irregularidade:** no sentido de rugosidade (não-suavidade) ou fragmentação;
- **Dimensão não inteira:** a maioria dos objetos fractais apresenta dimensão não inteira. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto considerado.

Conforme Baldovinotti (2011), a Geometria Euclidiana utiliza a dimensão inteira, onde a reta, o plano e o espaço possuem, respectivamente, dimensões um, dois e três.

Assim, segundo o autor, a propriedade de dimensão não inteira (fracionada) dos fractais é o que caracteriza a Geometria Fractal como uma Geometria não Euclidiana.

Como supracitado, os estudos de vários matemáticos precederam e, certamente, inspiraram Mandelbrot na concepção da Geometria Fractal. Estes fractais precursores, de tipos e formas diferentes que são geralmente utilizados para apresentação dos conceitos, são conhecidos como fractais clássicos, tais como: Conjunto de Cantor; Curva de Peano; Curva de Hilbert; Curva de Koch; Triângulo, Tapete e Tetraedro de Sierpinski; Árvore Pitagórica; entre outros.

2.2 Pensamento Computacional

O termo “Pensamento Computacional” (do inglês, *Computational Thinking*) foi apresentado pela primeira vez na literatura por Seymour Papert, matemático e educador, no seu livro intitulado “*Mindstorms: Children, Computers, And Powerful Ideas*” (PAPERT, 1980). Este livro aborda a importância de introduzir os conceitos da computação e das tecnologias na educação desde a infância como uma maneira de ensinar a pensar de maneira lógica, crítica e criativa. No entanto, na época, o termo e seus princípios não foram difundidos.

Somente em 2006 o termo Pensamento Computacional se popularizou após ser mencionado pela pesquisadora Jeannette Wing em um artigo homônimo (em inglês) publicado na revista da Associação de Computação da América (ACM). Neste artigo, Wing define o Pensamento Computacional como uma maneira de pensar de forma clara e lógica sobre problemas e soluções baseando-se em princípios fundamentais da computação (WING, 2006). A autora também enfatiza que esta maneira de pensar pode e deve ser aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento e não somente à programação ou ao uso de tecnologias computacionais.

Desde então, a definição dada por Wing para o termo Pensamento Computacional tem sido amplamente aceita e utilizada como referência em estudos e discussões sobre o assunto. Porém, ainda não existe uma definição convencional na comunidade científica. Vários estudiosos têm constantemente redefinido ou refinado o seu significado, inclusive Wing, que em sua definição mais recente, explica que o Pensamento Computacional “são os processos de pensamento envolvidos na formulação de um problema e que expressam sua solução ou soluções eficazmente, de tal forma que uma máquina ou uma pessoa possa realizar” (WING, 2014 apud SANTOS JÚNIOR; RICARTE, 2020, p. 3). Kurshan (2016), baseando-se em diferentes definições, diz que:

O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de

passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente (KURSHAN, 2016 apud BRACKMANN, 2017, p. 29).

Para Nunes (2011), o Pensamento Computacional é a base da Ciência da Computação e pode ser definido como “processo cognitivo utilizado pelos seres humanos para encontrar algoritmos para resolver problemas”. O autor sugere que tal processo pode auxiliar na capacitação dos alunos para resolução de problemas em outras ciências, tais como matemática, física, química, filosofia, economia, sociologia, etc.

De acordo com Vicari, Moreira e Menezes (2018), pesquisas desenvolvidas por Liukas (2015), BBC Learning (2015) e Code.org (2016) especificam que o Pensamento Computacional está subdividido em quatro pilares que conduzem o processo de solução de problemas, são eles:

- **Decomposição:** dividir um problema maior em partes menores e mais gerenciáveis;
- **Reconhecimento de padrões:** identificar similaridade ou padrões entre e dentro dos problemas propostos com problemas que já foram solucionados anteriormente;
- **Abstração:** focar apenas nos processos importantes, ignorando detalhes irrelevantes;
- **Algoritmo:** desenvolver o passo a passo de uma solução para o problema.

Estes pilares são comumente utilizados como base de propostas para inclusão do Pensamento Computacional na Educação Básica que vêm sendo discutidas por diversos países ao longo dos últimos anos. O desenvolvimento do Pensamento Computacional é visto como fundamental, dado que prepara os estudantes para o futuro e auxilia no desenvolvimento de habilidades importantes como resolução de problemas, pensamento lógico, criatividade e colaboração. Nessa perspectiva, a *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *Computer Science Teachers Association* (CSTA) apresentou em 2011 uma proposta voltada para educação básica americana (ISTE; CSTA, 2011). Essa proposta baseia-se em um conjunto de conceitos e capacidades para a resolução de problemas, que Mestre (2017, p. 21) define como:

- **Coleta de dados:** coletar informações de forma adequada;
- **Análise de dados:** dar sentido aos dados, encontrar padrões e tirar conclusões;
- **Representação de dados:** representar e organizar os dados em gráficos, tabelas, textos e imagens;
- **Decomposição de problemas:** quebrar tarefas em partes gerenciáveis, menores;

- **Abstração:** reduzir a complexidade para definir a ideia principal;
- **Algoritmo e procedimentos:** definir um conjunto de passos ordenados para resolver um problema ou atingir algum fim;
- **Automação:** usar os computadores ou máquinas para fazer tarefas repetitivas e tediosas;
- **Paralelização:** organizar recursos para, simultaneamente, realizar tarefas para alcançar um objetivo comum;
- **Simulação:** representar ou modelar um processo.

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) especifica explicitamente no Ensino Fundamental o desenvolvimento do Pensamento Computacional como uma responsabilidade do professor de Matemática. Xavier et al. (2021) destacam que a BNCC sugere o desenvolvimento do Pensamento Computacional, especificamente, na unidade temática de Álgebra, enquanto no Ensino Médio o termo é citado em outras duas áreas além da Matemática. Segundo a BNCC, o Pensamento Computacional “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos” (BRASIL, 2018a, p. 474).

Existem diferentes abordagens que podem ser utilizadas para trabalhar o Pensamento Computacional em sala de aula, incluindo: resolução de problemas, programação, atividades desplugadas, design de jogos, robótica, análise de dados, entre outras. Segundo Oliveira, Junior e Filho (2019), comumente as abordagens que visam estimular o Pensamento Computacional focam em um ensino interativo e lúdico, envolvendo assim os alunos e mantendo-os motivados.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a metodologia de pesquisa adotada na condução deste trabalho visando responder as questões de pesquisa. Para tanto, dividimos o desenvolvimento deste trabalho em duas etapas. Na primeira etapa, apresentada na Seção ??, conduzimos um mapeamento sistemático da literatura com o objetivo de identificar e categorizar as pesquisas brasileiras que inserem o estudo e construção de fractais no ensino de Matemática com o propósito de identificar as abordagens adotadas. Na Seção ?? descrevemos o curso de formação proposto na segunda etapa, que visou explorar o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional por meio da construção de fractais apoiado pelo uso do software GeoGebra.

3.1 Mapeamento sistemático

Numa primeira etapa deste trabalho, realizamos um levantamento dos trabalhos desenvolvidos no Brasil com a intenção de obter uma visão geral acerca de da seguinte questão de pesquisa: *QP1: Geometria Fractal tem sido abordada e explorada dentro do ensino de Matemática e quais os recursos estão apoiando essas propostas?*

Para tanto, conduzimos um mapeamento sistemático da literatura de estudos primários, visando identificar e categorizar as pesquisas que propõem atividades didáticas que explorem a Geometria Fractal relacionada com o ensino de Matemática nos últimos cinco anos antecedentes. Este mapeamento sistemático baseou-se nas diretrizes de revisão sugeridas por Kitchenham e Charters (2007). De acordo com os autores, esse protocolo pode ser dividido em três fases distintas:

- 1. Planejamento:** identificação da necessidade da revisão, formulação das questões de investigação e definição do protocolo da revisão;
- 2. Condução:** seleção e classificação dos trabalhos, extração e sintetização os dados;
- 3. Publicação dos resultados:** exposição dos resultados obtidos.

O texto reproduzido a seguir descreve detalhadamente as atividades desenvolvidas em cada fase do processo de revisão deste mapeamento sistemático da literatura e consta do trabalho aceito para apresentação e publicação no VII Congresso Nacional de Educação, intitulado “Geometria Fractal no Ensino de Matemática: Um Mapeamento Sistemático” (SANTOS; COUTINHO, 2021). Este trabalho culminou posteriormente no convite para publicação no periódico *Brazilian Journal of Development* (SANTOS; COUTINHO, 2022b).

3.1.1 Planejamento

Primeiramente, foi realizada uma pesquisa preliminar em dois repositórios online (Periódicos da CAPES e Google Acadêmico) com o propósito de identificar trabalhos com objetivo semelhante ao desta revisão. Nenhuma pesquisa correlata foi identificada, o que justifica a necessidade da realização deste mapeamento sistemático. Provavelmente, a ausência de estudos sistemáticos correlatos justifica-se pelo fato de tratar-se de uma recente área de pesquisa.

A fim de nortear a condução deste mapeamento sistemático em relação ao ensino de Geometria Fractal, as seguintes questões de investigação (QI) foram formuladas:

- **QI1:** Qual o público-alvo?
- **QI2:** Quais construções de fractais vêm sendo exploradas?
- **QI3:** Quais recursos são utilizados?

Optamos pela formulação da QI3 mais ampla, de modo que fossem identificados todos os recursos sugeridos, além das tecnologias digitais, para o desenvolvimento das atividades. Na sequência, definimos o protocolo de revisão objetivando a identificação dos estudos nacionais potencialmente elegíveis reportados nos repositórios online (bibliotecas digitais), listados na Tabela 1, publicados a partir de 2016. Aspirando obter a maior quantidade de trabalhos possível, optamos pelo uso de um *string* de busca abrangente: “*geometria fractal*” OR “*fractal*”.

Tabela 1 – Relação dos repositórios online.

Id	Repositório Online
F1	Bolema: Boletim de Educação Matemática
F2	Boletim Online de Educação Matemática
F3	Congresso Nacional de Educação (CONEDU)
F4	Educação Matemática em Revista
F5	EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
F6	Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)
F7	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática
F8	Periódicos CAPES
F9	Perspectivas da Educação Matemática
F10	Revista de Educação Matemática (REMAT)
F11	Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)
F12	Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
F13	Revista Paranaense de Educação Matemática
F14	Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática
F15	TANGRAM - Revista de Educação Matemática

Fonte: Autoria própria.

Por último, foram especificados os critérios de inclusão e exclusão para seleção dos trabalhos relevantes dentre os identificados na busca. Para inclusão do trabalho na revisão, o artigo deve descrever atividades didáticas que explorem a relação entre Geometria

Fractal e a Matemática em sala de aula. Equitativamente, foram descartados os artigos que atendiam algum dos seguintes critérios de exclusão:

- **CE1:** não apresentam propostas de atividades didáticas;
- **CE2:** o ensino de Geometria Fractal não é o foco do trabalho;
- **CE3:** a Geometria Fractal é o foco do trabalho, mas não apresenta relação com o ensino de Matemática;
- **CE4:** estudos duplicados;
- **CE5:** indisponíveis para consulta.

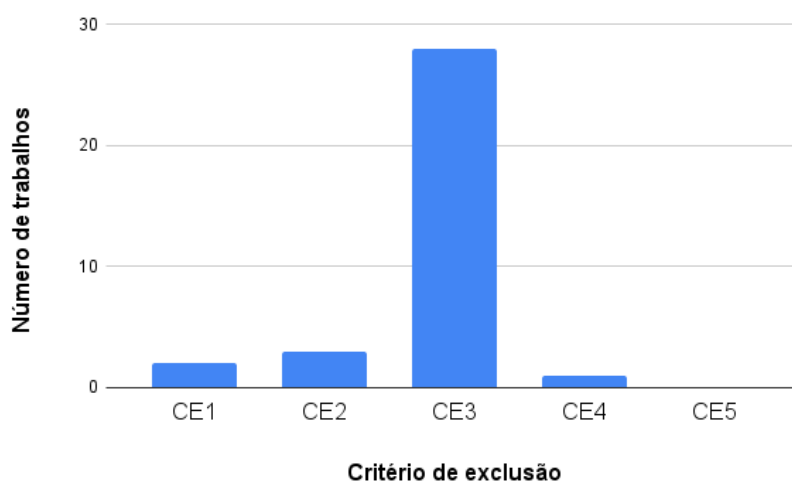
3.1.2 Condução

As buscas por trabalhos elegíveis por meio do *string* de busca nos repositórios online foram executadas entre 10 e 12 de agosto de 2021, resultando em 43 artigos, todos com suas versões completas disponíveis para consulta.

Na sequência, foram identificados os trabalhos elegíveis. Inicialmente, realizamos uma triagem preliminar considerando título, resumo e palavras-chave com base nos critérios de inclusão e exclusão. Nessa primeira triagem, um trabalho duplicado foi identificado e excluído da pesquisa (CE4). Além disso, a não relação entre a Geometria Fractal e o ensino de Matemática (CE3) resultou na exclusão dos demais artigos obtidos (28). Por fim, 14 artigos foram identificados para que fosse realizada uma revisão completa do texto.

Após a leitura completa destes artigos, mais 5 trabalhos foram excluídos conforme os critérios de exclusão, sendo 2 artigos devido ao CE1 e 3 artigos por conta do CE2. A Figura 1 apresenta o número de artigos excluídos para cada critério de exclusão.

Figura 1 – Número de artigos excluídos por critério de exclusão.



Fonte: Autoria própria.

A Tabela 2 apresenta o mapeamento dos dados quantitativos dos trabalhos resultantes das etapas de busca, identificação e seleção por repositório online após a consideração dos critérios de inclusão e exclusão.

Tabela 2 – Resultado quantitativo de trabalhos encontrados, identificados e selecionados.

Bases	Busca	Identificação	Seleção
F1	0	0	0
F2	1	1	1
F3	0	0	0
F4	2	2	1
F5	3	3	3
F6	1	1	1
F7	34	6	3
F8	0	0	0
F9	0	0	0
F10	0	0	0
F11	2	1	0
F12	0	0	0
F13	0	0	0
F14	0	0	0
F15	0	0	0
Total	43	14	9

Fonte: Autoria própria.

Por fim, a etapa de seleção resultou em 9 trabalhos selecionados (listados na Tabela 3) para análise e extração dos dados de modo padronizado e individualizado de acordo com as questões de investigação.

Tabela 3 – Trabalhos selecionados.

Id	Título
T1	Uma Abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio (PAULA; SOUZA, 2017)
T2	O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio (REZENDE et al., 2018a)
T3	Registros de representação semiótica e sua articulação com o hexágono de Dürer nas aulas de matemática (REZENDE et al., 2018b)
T4	Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas (FERREIRA; JULIO, 2019)
T5	Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio da Perspectiva de Modelagem Matemática (ARAÚJO; MARINS, 2019)
T6	Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra (BARBOSA; SILVA, 2019)
T7	Cartão Fractal Degraus Centrais: Uma Atividade com Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (FADIN; TORTOLA, 2019)
T8	Geometria Fractal: Uma Proposta de Investigação de Conceitos Matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental (PAIXÃO FERREIRA; ARAÚJO; DO NASCIMENTO, 2019)
T9	Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica (MORAN; REZENDE, 2020)

Fonte: Autoria própria.

3.2 Curso de formação

A segunda etapa deste trabalho teve como objetivo refletir sobre a formação inicial e continuada de professores de Matemática para o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional a partir da construção de fractais por meio do software GeoGebra visando responder a seguinte questão de pesquisa: *QP2: Quais as contribuições de um curso de formação para desenvolver o Pensamento Computacional através da construção de fractais?*

Com o objetivo de associar e estimular o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional e de diferentes conteúdos matemáticos a partir da construção de fractais clássicos, foi proposto e ministrado um curso tendo como público-alvo licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica. Nossa ideia foi investigar novas maneiras de ensinar e aprender Matemática, contribuindo para melhoria do desempenho dos estudantes e, ao mesmo tempo, relacionando a construção de fractais com diversos conteúdos matemáticos. Para tanto, tomamos como base os estudos identificados no mapeamento sistemático apresentado na Seção 3.1 e então propusemos um curso alinhado com as recomendações da BNCC e apoiado pelo software GeoGebra.

Na sequência apresentamos o planejamento, aplicação e avaliação do estudo de caso desenvolvido por meio da realização de um curso prático, cujos resultados foram no trabalho intitulado “Geometria Fractal e Pensamento Computacional: Um Relato de Experiência na Formação de Professores”, publicado no VIII Congresso Nacional de Educação (SANTOS; COUTINHO, 2022a).

3.2.1 Perfil dos participantes

O curso foi ofertado entre os meses de maio e julho de 2022, contando com a participação de três licenciandos em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e um professor da Educação Básica, que atua na rede pública da cidade de Monteiro/PB.

3.2.2 Estrutura do curso

O curso foi estruturado em oito encontros semanais, com duração de duas horas e trinta minutos cada, totalizando vinte horas. Os encontros ocorreram no laboratório de informática do CCHE/UEPB, no qual os participantes tinham acesso aos recursos computacionais necessários.

No primeiro encontro, apresentamos os objetivos do curso e uma introdução teórica de conceitos da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional, que fundamentam nosso estudo. A Geometria Fractal foi definida como uma área da Matemática que estuda figuras mais complexas conhecidas como fractais, que possuem as seguintes propriedades: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal. No caso do Pensamento

Computacional assumimos a definição operacional dada pela *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *Computer Science Teachers Association* (CSTA). Nessa definição, o Pensamento Computacional é um processo de resolução de problemas que pode ser mapeado através do seguinte conjunto de conceitos e capacidades: coleta, análise e representação de dados; decomposição de problemas, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, simulação e paralelização (ISTE; CSTA, 2011).

A aula ministrada na segunda semana teve por objetivo apresentar o software GeoGebra, explorando transformações isométricas e homotéticas, bem como o uso do recurso de criação de ferramentas. Optamos pela adoção do software GeoGebra como ferramenta de apoio para construção de fractais geométricos por esse software disponibilizar diversos recursos que permitem combinar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação em um ambiente de visualização 2D e 3D. Além disso, o GeoGebra possibilita ao usuário criar novas ferramentas o que é bastante útil no desenvolvimento das atividades propostas, dado que a construção de fractais é um processo recursivo. Ao longo dos demais encontros, foram sugeridas atividades baseadas nas diretrizes e nos protocolos de construção descritos por Barbosa (2019), que visam a construção de fractais clássicos por meio do software GeoGebra.

3.2.3 *Fractais estudados*

Um total de seis fractais clássicos foram explorados durante o curso: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Árvore Pitagórica e Tetraedro de Sierpinski. Para cada fractal, inicialmente um breve histórico era apresentado seguido a partir da sua definição e propriedades, para que os participantes obtivessem conhecimento das particularidades necessárias para construção do fractal. Os fractais clássicos estudados e explorados são listados a seguir:

1. **Triângulo de Sierpinski:** publicado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, trata-se de um fractal de aspecto triangular (Figura 2). Propriedades exploradas: contagem de triângulos azuis, comprimento do lado de cada triângulo, perímetro de cada triângulo, perímetro total, área de cada triângulo, área total.

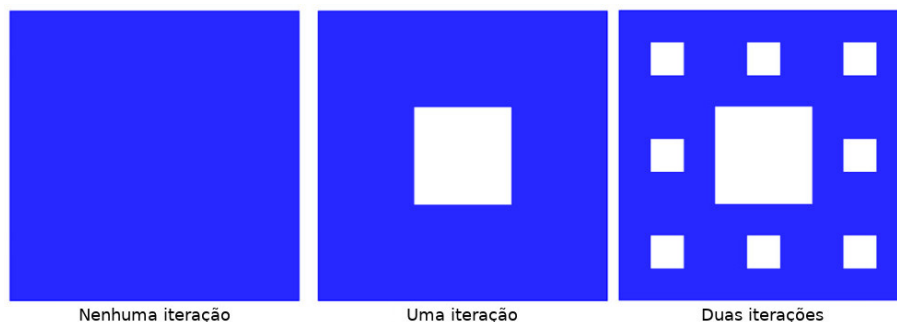
Figura 2 – Duas iterações do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria.

2. **Tapete de Sierpinski:** fractal obtido pela aplicação da mesma técnica (remoção) utilizada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado (Figura 3). Propriedades exploradas: contagem de quadrados azuis, comprimento do lado de cada quadrado, perímetro de cada quadrado, perímetro total, área de cada quadrado, área total.

Figura 3 – Duas iterações do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria.

3. **Curva de Koch:** criado em 1904 pelo matemático polonês Helge Von Koch (Figura 4). Segundo Barbosa (2005, p. 38), trata-se de uma curva sem tangente, que pode ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado Mandelbront, pois tem muito de uma linha costeira. Propriedades exploradas: contagem de segmentos azuis, comprimento de cada segmento, comprimento.

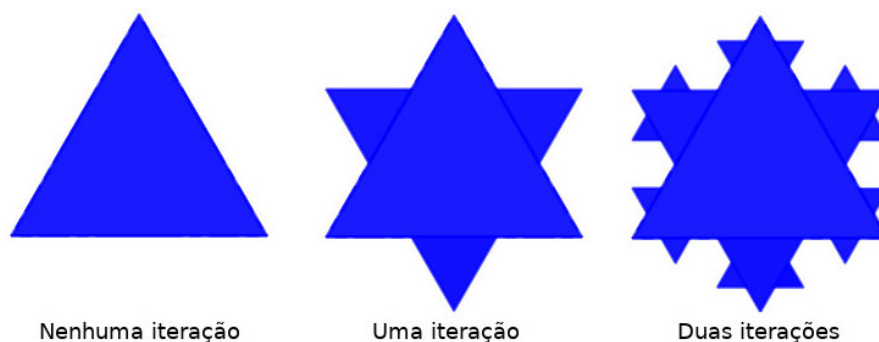
Figura 4 – Duas iterações da Curva de Koch.



Fonte: Autoria própria.

4. **Floco de Neve de Koch:** obtido a partir de um triângulo equilátero com construções sucessivas da Curva de Kock sobre cada lado (Figura 5). Propriedades exploradas: perímetro e área.

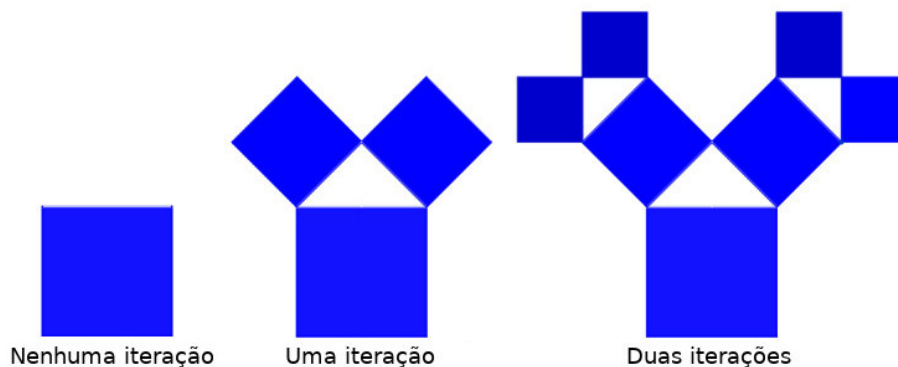
Figura 5 – Duas iterações do Floco de Neve de Koch.



Fonte: Autoria própria.

5. **Árvore Pitagórica:** trata-se de uma árvore pitagórica equilátera (Figura 6) que, de acordo com Barbosa (2005), gera um mosaico de pavimentação uniforme do tipo 4, 3, 4, 6. Propriedades exploradas: número de quadrados e área.

Figura 6 – Duas iterações da Árvore Pitagórica.



Fonte: Autoria própria.

6. **Tetraedro de Sierpinski:** generalização tridimensional, se considerarmos a dimensão euclidiana, do famoso Triângulo de Sierpinski (Figura 7). Propriedades exploradas: quantidade de tetraedros azuis, comprimento do lado de cada tetraedro azul, volume de cada tetraedro azul e volume total.

Figura 7 – Duas iterações do Tetraedro de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria.

Dos seis fractais explorados, três (Triângulo, Tapete e Tetraedro de Sierpinski) fazem parte do estudo de Barbosa (2019) que identificou o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional durante o processo de construção destes fractais no GeoGebra. A escolha dos demais fractais levou em consideração os mesmos aspectos adotados por Barbosa (2019), em que foram selecionados fractais geométricos, uma vez que passível a sua construção através de elementos da Geometria Euclidiana. Esses tipos de fractais são definidos por sistemas de funções iteradas para sua construção usando a propriedade de autossimilaridade. Considerando a classificação dada por Barbosa (2005), os fractais explorados no curso foram dos tipos: fractais pela fronteira (Curva de Koch e Floco de

Neve de Koch), fractais por remoção (Triângulo, Tapete e Tetraedro de Sierpinski) e fractais tipo árvore (Árvore Pitagórica).

Durante o desenvolvimento das atividades, semelhante aos procedimentos empregados por Barbosa e Silva (2019), os participantes tinham autonomia para utilizar quaisquer um dos recursos do software GeoGebra. Ao final da construção de cada um dos fractais, inspirados nas perguntas do trabalho supracitado, questionamos os participantes acerca de quais conceitos matemáticos são importantes para a construção daquele fractal.

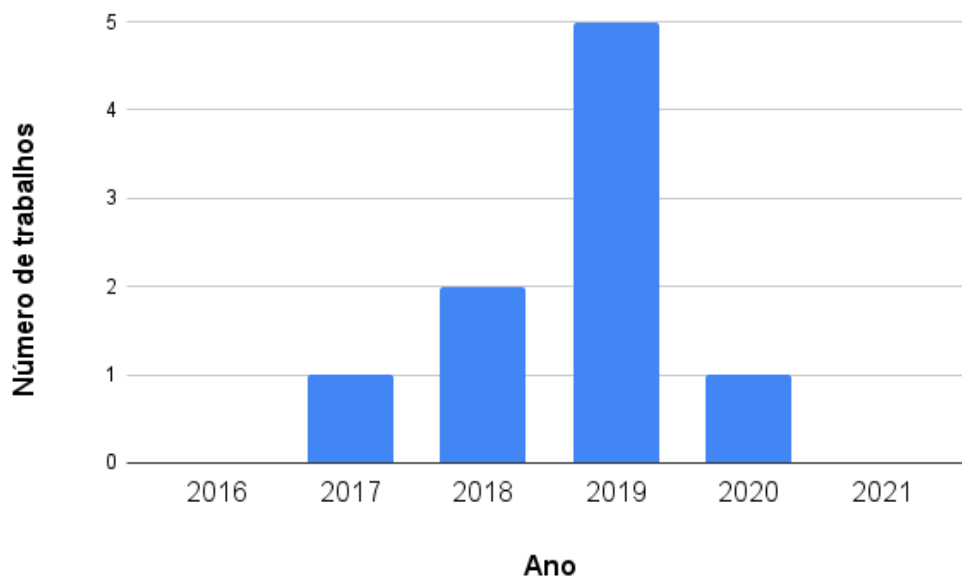
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das atividades desenvolvidas com a condução do mapeamento sistemático da literatura e o curso de formação proposto e ministrado para licenciandos e professores de Matemática.

4.1 Mapeamento sistemático

De acordo com a Figura 8, os resultados obtidos mostram que houve um crescimento no interesse no ensino de Geometria Fractal nos últimos anos, com ápice em 2019. O número de trabalhos representativos em 2019 está relacionado com a edição do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), evento trienal, no qual foram identificados e selecionados 3 artigos.

Figura 8 – Frequência de publicações por ano.

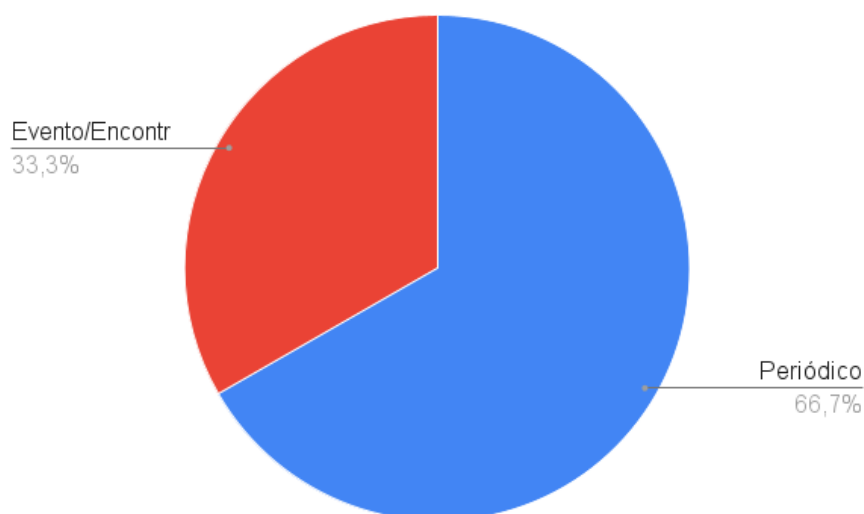


Fonte: Autoria própria.

Ao considerarmos os estados dos autores, a região Sul concentra a maioria dos trabalhos, sendo todos os 5 do Paraná. A região Sudeste possui 2 trabalhos, sendo 1 de Minas Gerais e 1 de São Paulo. As regiões Norte e Nordeste possuem 1 trabalho cada, sendo 1 do Pará e 1 do Ceará. Não foi identificado nenhum trabalho da região Centro-Oeste.

Ao classificarmos os trabalhos pelo tipo/meio de publicação (Figura 9), observamos que a maior parte dos estudos foram reportados em periódicos (jornal/revista), somando 66,66% das publicações. Os demais trabalhos selecionados foram publicados no XIII ENEM.

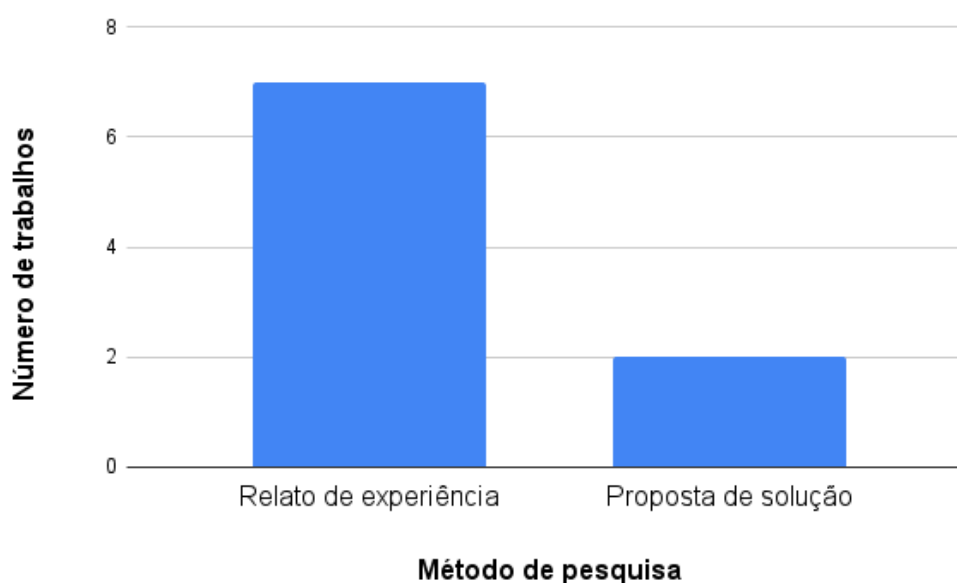
Figura 9 – Meio de publicação.



Fonte: Autoria própria.

Com relação ao método de pesquisa utilizado de acordo com a classificação proposta por Petersen et al. (2008), constatamos que 7 trabalhos apresentam relatos de experiência e 2 podem ser classificados como propostas de solução, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Método de pesquisa.



Fonte: Autoria própria.

QI1: Qual o público-alvo?

Para esta classificação, foi considerado o nível de ensino para o qual as atividades didáticas foram propostas. Em geral, 8 dos 9 trabalhos selecionados apresentam atividades

didáticas voltadas para a Educação Básica, conforme apresentado na Tabela 4. Destes, apenas 1 trabalho é direcionado para a formação de professores da Educação Básica. Além disso, somente 1 estudo (T9) desenvolveu a pesquisa tendo o Ensino Superior como público-alvo.

Tabela 4 – Público-alvo.

Nível de ensino	Trabalhos
Ensino Fundamental	T4, T7, T8 e T9
Ensino Médio	T1, T2, T3, T4, T5 e T9
Ensino Superior	T6

Fonte: Autoria própria.

QI2: Quais construções de fractais vêm sendo exploradas?

Os trabalhos selecionados propõem atividades didáticas que introduzem a Geometria Fractal a partir da exploração de conteúdos matemáticos básicos. Para tanto, são explorados variados fractais clássicos como podemos observar na Tabela 5, sendo o Triângulo de Sierpinski o fractal mais comumente explorado.

Tabela 5 – Fractais explorados.

Fractais	Trabalhos
Árvore Pitagórica	T2
Cartão Fractal Degraus Centrais	T7
Conjunto de Cantor	T1 e T4
Curva de Koch	T1
Esponja de Menger	T8
Flocos de neve	T4
Hexágono de Dürer	T3 e T9
Tapete de Sierpinski	T5
Triângulo de Sierpinski	T1, T4, T6 e T8

Fonte: Autoria própria.

QI3: Quais recursos são utilizados?

Os dados coletados para responder esta questão de investigação dizem respeito à forma como a construção de fractais está sendo estudada a partir das atividades didáticas propostas. De acordo com os resultados reportados na Tabela 6, observa-se que dois recursos são comumente empregados: materiais manipuláveis e/ou computacionais. Em 4 trabalhos apenas recursos computacionais foram adotados para o desenvolvimento das atividades (T3, T5, T6 e T9). Materiais manipuláveis, como o uso de lápis, papel, régua e compasso, foram os únicos recursos utilizados em 2 trabalhos (T1 e T7). O uso materiais manipuláveis e recursos computacionais em conjunto foi descrito em 2 trabalhos (T2 e T4).

Apenas 1 trabalho não sugeriu a utilização de nenhum recurso para o desenvolvimento das atividades (T8). Em todos os trabalhos que fizeram uso de recursos computacionais, o software GeoGebra foi utilizado em todos. O Excel também foi adotado no T5.

Tabela 6 – Recursos utilizados.

Recursos	Trabalhos
Materiais manipuláveis	T1, T2, T4 e T7
Recursos computacionais	T2, T3, T4, T5, T6 e T9

Fonte: Autoria própria.

Vale ressaltar que durante o desenvolvimento deste mapeamento sistemático foram identificadas algumas ameaças à validade que podem comprometer os resultados apresentados (KITCHENHAM; CHARTERS, 2007). Uma ameaça é a definição dos repositórios online para busca de estudos sistemáticos, uma vez que nem todas as fontes comuns foram escolhidas. Para minimizar essas escolhas, foram utilizados motores de buscas de vários periódicos e eventos na área de Educação Matemática. A seleção dos trabalhos e extração dos dados é uma outra ameaça à validade, já que foi realizada por pessoas. Visando mitigar tais ameaças, todas as atividades foram desenvolvidas pelos dois pesquisadores envolvidos nesta pesquisa de modo independente.

4.2 Curso de formação

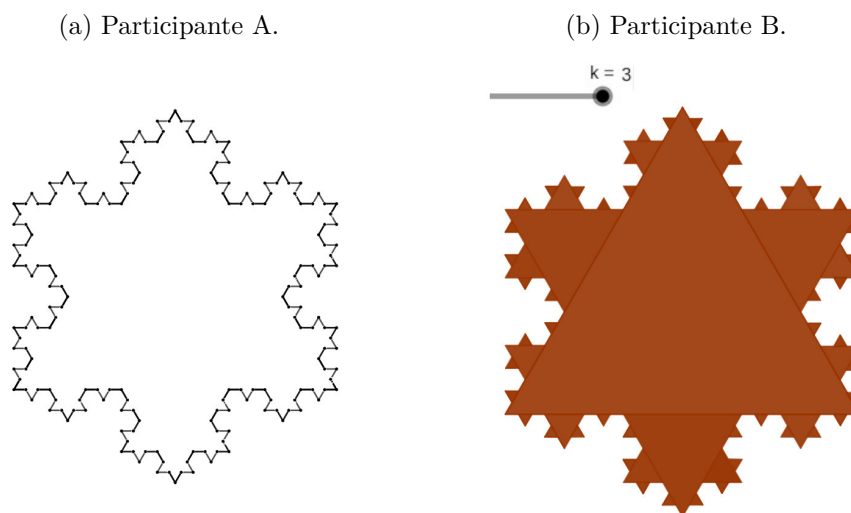
O desenvolvimento das atividades teve como foco a investigação, a discussão de hipóteses e a argumentação, visto que os participantes comumente não alcançavam uma solução imediata, o que exigia deles a exploração de outras maneiras de resolução. Em todas as atividades, os participantes eram instruídos a construir o fractal com o máximo de iterações possíveis. O fator variante entre a construção dos fractais propostos diz respeito às dimensões de cada fractal, nos quais os cinco primeiros foram construídos a partir da janela de visualização 2D e somente o Tetraedro de Sierpinski requer o uso da janela de visualização 3D.

Destacamos que, apesar dos participantes do curso já conhecerem e manipularem o software GeoGebra, nenhum deles havia utilizado os recursos de criação de ferramentas, assim como também das ferramentas de transformações isométricas e homotéticas.

Avaliando as construções dos fractais propostas pelos participantes, observamos soluções distintas e com diferentes níveis de graus de conhecimento e complexidade com relação ao uso do software GeoGebra para um mesmo tipo de fractal. Para exemplificar essa situação, vamos utilizar duas construções do fractal “flocos de neve de Koch”, também conhecido como “ilha de Koch”, ilustrado na Figura 11. Ambas soluções fazem uso do recurso de criação de ferramentas em que o fractal é representado com até três iterações. No entanto, a construção da Figura 11b apresenta uma interação dinâmica, a partir do uso

do controle deslizante associado com a programação do campo de entrada “Condição para Exibir Objetos(s)”, da seção “Avançado” nas propriedades de alguns dos objetos criados, o que permite ao usuário representar o fractal com iterações variando entre 0 e 3.

Figura 11 – Construções do fractal floco de neve de Koch.



Fonte: Acervo da autora.

Com relação ao questionamento sobre os conceitos matemáticos necessários para construção dos fractais, os participantes destacaram uma série de conteúdos matemáticos importantes para o entendimento das características de cada fractal e sua construção, tais como: perímetro, área, volume, posição relativa entre retas, polígonos, círculo, semi círculo, ângulos, simetria, congruência e semelhança, reflexão, homotetia, teorema de Pitágoras, progressões, entre outros.

Quanto as habilidades do Pensamento Computacional, observamos que estas são requeridas independentemente dos processos utilizados pelos alunos para construção dos fractais propostos adotando o software GeoGebra como apontado por Barbosa (2019).

5 CONCLUSÃO

Barbosa (2005) preconiza que os professores da Educação Básica podem explorar diversos conceitos matemáticos abstraídos dos fractais por meio do uso de recursos tecnológicos. Posteriormente, Barbosa (2019) sugere que o processo de construção de fractais por meio do software GeoGebra promove o estímulo de várias habilidades do Pensamento Computacional, além de despertar a investigação, a imaginação e a curiosidade dos alunos. Nesse contexto, o estudo de fractais pode ser caracterizada como atividades matemáticas interdisciplinares, que podem ser desenvolvidas com apoio de recursos digitais e, concomitantemente, estimular das habilidades do Pensamento Computacional, apresentando-se como uma das possíveis alternativas que atendem as recomendações da BNCC. Nessa perspectiva, o presente trabalho buscou investigar o cenário atual da inclusão da Geometria Fractal no currículo escolar no Brasil (QP1) e colaborar com a formação de professores de Matemática para o desenvolvimento do Pensamento Computacional através da construção de fractais (QP2). Para buscar alcançar estes objetivos, a pesquisa foi desenvolvida em duas etapas.

Primeiramente, foi realizado um mapeamento sistemático da literatura sobre o ensino de Geometria Fractal na área de Matemática. Com base nos resultados obtidos, podemos observar que o ensino de fractais ainda é pouco explorado. A Educação Básica, especialmente o Ensino Médio, concentra boa parte das pesquisas desenvolvidas no Brasil. Além disso, nosso estudo revelou a escassez de trabalhos voltados para a formação inicial e continuada de professores, contando com apenas um artigo com esse propósito.

No geral, compreende-se que o estudo da Geometria Fractal fornece ao professor várias possibilidades de explorar diferentes conteúdos matemáticos na Educação Básica. Observou-se que, comumente, os conceitos básicos para a construção de fractais clássicos são explorados com o apoio de tecnologias digitais, sendo a adoção do software GeoGebra unanime em todos os trabalhos selecionados que fizeram uso de recursos computacionais, confirmando ser uma ferramenta adequada para o ensino de fractais (FARIA, 2005). Além disso, a utilização do GeoGebra para a construção de fractais permite ao aluno experimentar e testar hipóteses, favorecendo e potencializando a construção do conhecimento.

No entanto, apesar da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional fazerem parte das recomendações da BNCC, Santos e Coutinho (2021) e Ferreira, Coutinho e Coutinho (2020), respectivamente, argumentam sobre a carência de trabalhos voltados para à formação inicial e continuada de professores em ambas as temáticas. Nessa perspectiva, propusemos um curso de formação de professores com o intuito de introduzir a Geometria Fractal a partir da construção de fractais clássicos no software GeoGebra, possibilitando o desenvolvimento do Pensamento Computacional, associando-o com diversos outros

conteúdos matemáticos.

Os resultados observados com a realização do curso indicam que a Geometria Fractal permite explorar a aplicação de diversos conteúdos matemáticos de forma prática e atrativa. O uso do software GeoGebra auxilia os alunos na visualização, interpretação, raciocínio e comunicação durante a construção dos fractais propostos. Ademais, todo processo adotado para a construção dos fractais favorece o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional, instigando a investigação, criatividade e curiosidade dos estudantes, corroborando com os resultados obtidos por Barbosa (2019).

A Geometria não Euclidiana ainda é pouco explorada e estudada na educação brasileira como um todo, dentre elas elencamos a Geometria Fractal. Durante o desenvolvimento da pesquisa, verificamos que a Geometria Fractal não é abordada na grade curricular do nosso curso de Licenciatura Plena em Matemática do CCHE/UEPB. Esse cenário faz parte da maior parte dos cursos de licenciatura do Brasil, sendo um dos aspectos que justificam a não abordagem de tal temática na Educação Básica. Sendo assim, o presente trabalho oportunizou aos licenciandos e professores tivessem o primeiro contato com a Geometria Fractal e, também, com o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional através da construção de fractais.

Diante dos resultados obtidos, observa-se ainda que se faz necessário promover ações para formação inicial e continuada de professores que visem o desenvolvimento do Pensamento Computacional a partir da Geometria Fractal. Para tanto, como trabalhos futuros recomendamos a investigação das percepções do professor de Matemática e as implicações na prática docente ao articular e explorar as habilidades do Pensamento Computacional juntamente com outros conteúdos indicados na BNCC a partir da construção de fractais. Sugerimos a oferta de novos cursos que explorem, em paralelo, outras abordagens para o estudo de fractais atrelados a outros conteúdos matemáticos que auxiliem no desenvolvimento do Pensamento Computacional.

REFERÊNCIAS

- AGUSTINI, E. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana**. Uberlândia: FAMAT - UFU; CEaD – UFU, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>>. Citado na página 15.
- ARAÚJO, F. G. d. S.; MARINS, A. S. Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio da Perspectiva de Modelagem Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 18, p. 21–34, 2019. Citado na página 23.
- BALDOVINOTTI, N. J. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2011. Citado na página 16.
- BARBOSA, L. M. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019. Citado nas páginas 25, 27, 33, 34 e 35.
- BARBOSA, L. M.; SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 537–559, 2019. Citado nas páginas 13, 23 e 28.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal: para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. Citado nas páginas 15, 26, 27 e 34.
- BBC LEARNING. **What is computational thinking?** 2015. Disponível em: <<http://www.bbc.co.uk/education/guides/zp92mp3/revision>>. Acesso em: 07 fev. 2023. Citado na página 18.
- BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2017. Citado na página 18.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 08 fev. 2023. Citado nas páginas 12, 13 e 19.
- BRASIL. **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 2018. <<https://bityli.com/Cukxa>>. Acesso em: 06 fev. 2023. Citado nas páginas 12 e 13.
- CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: Perspectivas e Possibilidades para o Ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. Citado na página 12.
- CODE.ORG. **Code Studio Lesson Plans for Courses One, Two, and Three: Instructor Handbook**. 2016. Citado na página 18.

FADIN, C.; TORTOLA, E. Cartão Fractal Degraus Centrais: Uma Atividade com Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. Cuiabá: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, 2019. Acesso em: 21 dez. 2022. Citado na página 23.

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Rio Claro, 2005. Citado na página 34.

FERREIRA, J. C.; JULIO, R. S. Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. Cuiabá: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, 2019. Acesso em: 21 dez. 2022. Citado nas páginas 12 e 23.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “Construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011. Citado na página 16.

FERREIRA, M. A.; COUTINHO, A. E. V. B.; COUTINHO, B. G. Pensamento Computacional e o Ensino de Matemática no Brasil: Um Mapeamento Sistemático. **Revista Novas Tecnologias na Educação - RENOTE**, v. 18, n. 2, 2020. Citado na página 34.

ISTE; CSTA. **Computational thinking: leadership toolkit**. 2011. Disponível em: <<https://csteachers.org/documents/en-us/4f93dab1-1086-40fa-8b7c-6f604b4909f4/1/>>. Acesso em: 08 ago. 2022. Citado nas páginas 18 e 25.

KAMPPFF, A. J. C.; MACHADO, J. C.; CAVEDINI, P. Novas Tecnologias e Educação Matemática. **RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 2, n. 2, 2004. Citado na página 12.

KITCHENHAM, B.; CHARTERS, S. Guidelines for performing systematic literature reviews in Software Engineering. Citeseer, 2007. Citado nas páginas 20 e 32.

KURSHAN, B. **Thawing from a Long Winter in Computer Science Education**. [S.l.]: Forbes, 2016. Citado nas páginas 17 e 18.

LIUKAS, L. **Hello Ruby: Adventures in Coding**. New York: Feiwei & Friends, 2015. Citado na página 18.

MESTRE, P. A. A. **O Uso do Pensamento Computacional como Estratégia para Resolução de Problemas Matemáticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, 2017. Citado na página 18.

MORAN, M.; REZENDE, V. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Boletim Online de Educação Matemática**, v. 8, n. 15, p. 109–127, 2020. Citado na página 23.

NASCIMENTO, M. **Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012. Citado na página 15.

- NASCIMENTO, M.; SILVA, S. C. R.; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **VIDYA**, v. 32, n. 2, p. 20, 2012. Citado na página 12.
- NASCIMENTO, R. C.; COSTA, L. d. F. M. A Geometria Fractal e a formação do professor de Matemática: constructos possíveis. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 1, p. 1–15, 2020. Citado na página 12.
- NUNES, D. J. **Ciência da Computação na Educação Básica**. 2011. Disponível em: <<http://gestaouniversitaria.com.br/artigos/ciencia-da-computacao-na-educacao-basica-3>>. Acesso em: 06 fev. 2023. Citado na página 18.
- NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006. Citado na página 15.
- OLIVEIRA, V.; JUNIOR, J. R. de A.; FILHO, A. B. Aplicação de Métodos Lúdicos para o Desenvolvimento e Avaliação da Capacidade de Pensamento Algorítmico em Crianças. In: **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**. Brasília: [s.n.], 2019. v. 8, n. 1, p. 218. Citado na página 19.
- PAIXÃO FERREIRA, L. B.; ARAÚJO, T. d. V.; DO NASCIMENTO, M. L. Geometria Fractal: Uma Proposta de Investigação de Conceitos Matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. Cuiabá: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, 2019. Acesso em: 21 dez. 2022. Citado na página 23.
- PAPERT, S. **Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas**. New York: Basic Books, 1980. Citado na página 17.
- PAULA, C. E. S.; SOUZA, T. M. R. Uma Abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 10, n. 3, p. 1–14, 2017. Citado na página 23.
- PETERSEN, K. et al. Systematic Mapping Studies in Software Engineering. In: **12th International Conference on Evaluation and Assessment in Software Engineering (EASE'08)**. Swindon: BCS Learning & Development Ltd, 2008. p. 68–77. Citado na página 30.
- RAABE, A.; COUTO, N. E. R.; BLIKSTEIN, P. Diferentes abordagens para a Computação na Educação Básica. In: RAABE, A.; ZORZO, A. F.; BLIKSTEIN, P. (Ed.). **Computação na Educação Básica: Fundamentos e Experiências**. Porto Alegre: Penso Editora, 2020, (Tecnologia e inovação na educação brasileira). cap. 1, p. 3–15. Citado na página 13.
- RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, Belém, 2013. Citado nas páginas 12 e 16.
- REZENDE, V. et al. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 160–171, 2018. Citado na página 23.

- REZENDE, V. et al. Registros de representação semiótica e sua articulação com o hexágono de Dürer nas aulas de matemática. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, n. 2, p. 1–25, 2018. Citado na página 23.
- SANTOS JÚNIOR, F. R.; RICARTE, D. R. D. Um retrato sobre o ensino do Pensamento Computacional em anos finais do Ensino Fundamental no Sertão Paraibano. **RENOTE**, v. 18, n. 1, 2020. Citado na página 17.
- SANTOS, R. R. F.; COUTINHO, A. E. V. B. Geometria Fractal no Ensino de Matemática: Um Mapeamento Sistemático. In: **VII CONEDU – Conedu em Casa**. Campina Grande: Realize Editora, 2021. Acesso em: 21 dez. 2022. Citado nas páginas 12, 20 e 34.
- SANTOS, R. R. F.; COUTINHO, A. E. V. B. Geometria Fractal e Pensamento Computacional: Um Relato de Experiência na Formação de Professores. In: **VIII CONEDU**. Campina Grande: Realize Editora, 2022. Acesso em: 04 jan. 2023. Citado na página 24.
- SANTOS, R. R. F.; COUTINHO, A. E. V. B. Geometria Fractal no Ensino de Matemática: Um Mapeamento Sistemático. **Brazilian Journal of Development**, v. 8, n. 2, p. 12559–12570, 2022. Citado na página 20.
- SILVA, K. B. R. **Noções de Geometrias não Euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais**. Curitiba: CRV, 2011. Citado na página 16.
- SIQUEIRA, R. A. **Proposta de metodologia para modelagem e análise de sistemas para controle de geração de energia elétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado na página 12.
- VICARI, R. M.; MOREIRA, Á. F.; MENEZES, P. F. B. **Pensamento Computacional: Revisão Bibliográfica**. Porto Alegre: UFRGS/MEC, 2018. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/197566>>. Citado na página 18.
- WING, J. M. Computational Thinking. **Communications of the ACM**, ACM, New York, v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006. Citado nas páginas 13 e 17.
- WING, J. M. **Computational Thinking Benefits Society**. 2014. Disponível em: <<http://socialissues.cs.toronto.edu/2014/01/computational-thinking/>>. Acesso em: 06 fev. 2023. Citado na página 17.
- XAVIER, E. et al. Pensamento Computacional integrado à Matemática na BNCC: proposta para o primeiro ano do Ensino Fundamental. In: **Anais do XXXII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. Porto Alegre: SBC, 2021. p. 989–1001. Citado na página 19.