UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAURÍCIO ESPEDITO DE ARAÚJO NASCIMENTO

O ALGORITMO CONTRA O CONCEITO? – UM ESTUDO DE CASO SOBRE DIVISÃO EUCLIDIANA

PATOS
2023

MAURÍCIO ESPEDITO DE ARAÚJO NASCIMENTO

O ALGORITMO CONTRA O CONCEITO? – UM ESTUDO DE CASO SOBRE DIVISÃO EUCLIDIANA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

PATOS
2023

N244a Nascimento, Mauricio Espedito de Araujo.

O algoritmo contra o conceito? [manuscrito] : um estudo de caso sobre divisão euclidiana / Mauricio Espedito de Araujo Nascimento. - 2023.

23 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Ciências Exatas - CCEA. "

1. Ensino da Matemática. 2. Divisão euclidiana. 3. Algoritmo da divisão. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Edson M. A. Monteiro - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

MAURÍCIO ESPEDITO DE ARAÚJO NASCIMENTO

O ALGORITMO CONTRA O CONCEITO? – UM ESTUDO DE CASO SOBRE DIVISÃO EUCLIDIANA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 15 / 03 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Fabíola da Cruz Martins

Profª. Ma. Fabíola da Cruz Martins
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. Rômulo Tonyathy da Silva Mangueira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

SUMÁRIO

O ALGORITMO CONTRA O CONCEITO? – UM ESTUDO DE CASO SOBRE DIVISÃO EUCLIDIANA

THE ALGORITHM AGAINST THE CONCEPT? - A CASE STUDY ON EUCLIDEAN DIVISION

Maurício Espedito de Araújo Nascimento*

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo analisar e comparar as dificuldades enfrentadas pelos alunos do terceiro ano do ensino médio em resolver questões utilizando algoritmo da divisão. Foi elaborado um questionário para os alunos do terceiro ano do ensino médio, com o intuito de observar se eles realmente dominam o algoritmo. A partir disso foi feita uma análise dos dados adquiridos e, através desses dados, foi obtido o resultado esperado, o que foi possível concluir que a maior parte dos estudantes tem dificuldades ao resolver essas questões, e ainda, que muitos deles não sabem como funciona o algoritmo da divisão euclidiano.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Divisão euclidiana. Algoritmo da Divisão.

ABSTRACT

This work aims to analyze and compare the difficulties faced by students of the third year of high school in solving questions using the division algorithm. A questionnaire was developed for the students of the third year of high school, in order to observe if they really master the algorithm. From this an analysis of the acquired data was made and, through these data, the expected result was obtained, which was possible to conclude that most students have difficulties in solving these questions, and also that many of them do not know how the Euclidean division algorithm works.

Keywords: Teaching mathematics. Euclidean division. Division algorithm.

* Aluno de graduação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII – Governador Antônio Mariz (Pato-PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: mauricio.nascimento@aluno.uepb.edu.br. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2019, comecei a trabalhar como professor de Matemática em uma escola da rede municipal de Itapetim-PE. Desde então, venho trabalhando com alunos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. Dentre os assuntos trabalhados nas turmas, observo que muitos estudantes que têm dificuldades em Matemática, na maioria das vezes, não têm dificuldades com o atual conteúdo que está sendo trabalhado, mas com conteúdos básicos que por eles já estudados e que, presume-se, que são por eles dominados.

Entre essas dificuldades por mim observadas, as mais recorrentes são questões que envolvem a divisão euclidiana, seja na resolução de determinada divisão, seja sobretudo na compreensão do algoritmo posto em funcionamento. Muitos estudantes não conseguem solucionar a maior parte dos cálculos, enquanto os que conseguem não sabem explicar o que realmente aconteceu no decorrer da operação para chegar a certo resultado. Isso condiz com o que nos fala Sánchez (2019):

> Na prática, dentro e fora da escola, as crianças realizam “divisões” desde muito cedo, ainda que não conheçam formalmente o conceito matemático nem o algoritmo dessa operação. Os mesmos são apresentados gradualmente a partir do 4º ano do Ensino Fundamental e culminando no 6º ano com a divisão de números racionais. [...] Gómez-Granell ao desenvolver os aspectos sintáticos no ensino da matemática, coloca exemplos de outras pesquisas que mostram que uma parte considerável dos erros dos estudantes se devem a terem aprendido a manipular símbolos e seguir regras, porém, sem entender os seus significados. Especificamente sobre a operação divisão, que geralmente é vista como a operação básica mais difícil, Ramos (2009, p.139) diz não concordar com essa percepção, porém, para que operar seja mais fácil, é necessário ter consolidadas as outras três operações fundamentais e desenvolver um registro escrito o mais próximo da ação real de dividir. (p. 2; 4).

Com relação a divisões envolvendo números racionais, Fávero e Neves (2008) nos dizem que

> As avaliações oficiais como o SAEB (2004) e o PISA (2003), bem como o PCN (1997), têm apontado dificuldades com a divisão e os números racionais no Ensino Básico e Médio sugerindo que o ensino tem valorizado mais as regras do algoritmo, do que o conceito e suas relações, não ampliando a compreensão dos sistemas numéricos e das interações entre as operações e engendrando rupturas conceituais entre os números naturais e os racionais (p. 112).

Essas constatações despertaram meu interesse na temática aqui abordada e são a gênese do presente trabalho que tem por objetivo geral analisar e comparar a compreensão dos alunos de duas turmas do terceiro ano de uma escola da rede pública de ensino médio da cidade de Itapetim-PE quando efetuam divisões de números inteiros ou de dízimas finitas. Para isso, inspirado em Viana (2015), formulei um instrumento aplicado junto a esses alunos. Todas as questões precisaram ser justificadas, permitindo, assim, verificar se esses alunos realmente entendem quais propriedades estão sendo usadas durante os cálculos.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral:

Analisar e comparar as dificuldades enfrentadas pelos alunos do terceiro ano do ensino médio em resolver questões utilizando algoritmo da divisão.

2.2 Objetivo Específicos:

- Verificar o conhecimento dos estudantes em relação ao algoritmo da divisão;
- Identificar a principal dificuldade dos alunos;
- Interpretar os resultados adquiridos;
- Correlacionar os dados obtidos com os de outras pesquisas.

3 A ARITMÉTICA DOS NÚMEROS INTEIROS

3.1 Sistema de numeração decimal

O sistema de numeração mais usado atualmente baseia-se no agrupamento de dez em dez, recebendo, por isso, o nome de decimal: ao juntar dez unidades forma-se uma dezena, ao juntar dez dezenas forma-se uma centena e assim por diante. São usados os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 para representar todos os números. Isso se dá pelo fato de esse sistema possuir uma característica peculiar que é o valor posicional, que consiste em que cada um desses algarismos pode representar um determinado valor dependendo da casa onde se encontra. Como exemplo, podemos ter o algarismo 2 com valor de 2 unidades e também com valor de 2 dezenas no algarismo mais à direita no número 22.

De acordo com Santos (2010), a ideia de sistema posicional não é muito simples e precisa ser bem trabalhada com os estudantes, pois eles precisarão desse conceito bem consolidado para que consigam avançar para os próximos conteúdos. Caso os alunos não tenham um bom domínio do sistema de numeração decimal e do posicionamento dos números, poderão enfrentar dificuldades em questões posteriores, visto que outros conteúdos matemáticos partem basicamente dessa ideia.

3.2 Adição, subtração e multiplicação

A adição dos números naturais é a mais básica das operações matemáticas e está ligada a ideia de aumentar, acrescentar. Essa operação toma dois números naturais, chamados de parcelas, “soma-os” e nos devolve como resultado um terceiro número natural, chamado de soma daquelas duas parcelas.

É possível utilizar vários métodos para resolver questões desse tipo, mas o convencional é chamado de “conta em pé”, em que os valores são colocados nas ordens corretas: unidade abaixo de unidade, dezena abaixo de dezena, centena abaixo de centena, e assim por diante. Em seguida, a operação é iniciada pela soma das unidades, posteriormente das dezenas, depois das centenas, até que os algarismos sejam totalmente somados, sempre da direita para esquerda. Quando a soma de dois algarismos resulta num número maior do que 9, acrescenta-se 1 ao número da esquerda, tendo em vista que 10 unidades equivalem a 1 dezena, 10 dezenas resultam a 1 centena etc.

Exemplo 1: Vamos efetuar 384 + 59.

Primeiro organizamos o seguinte diagrama ou dispositivo que nos permite operar os algarismos nas mesmas casas de cada parcela conforme a descrição dada anteriormente:

$$\begin{array}{r} 384 \\ +\ \ 59 \\ \hline \end{array}$$

Agora soma as unidades. Note que 4 + 9 = 13, logo, há 1 dezena e 3 unidades. Vamos escrever a unidade abaixo do 9, e, como temos também uma dezena, escreveremos 1 acima do 8, conforme a imagem a seguir:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 384 \\ +\ \ 59 \\ \hline 3 \end{array}$$

Agora realizamos a soma das dezenas. A dezena que encontramos na soma das unidades também fará parte da adição, logo, calculamos 1 + 8 + 5 = 14. Como o resultado da soma das dezenas foi igual a 14, isso significa que temos 4 dezenas e 1 centena, então, repetimos o processo anterior de “subir 1”:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1}\ \ \\ 384 \\ +\ \ 59 \\ \hline 43 \end{array}$$

Por fim, somamos as centenas 1 + 3 = 4.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1}\ \ \\ 384 \\ +\ \ 59 \\ \hline 443 \end{array}$$

Então, 384 + 59 = 443.

Juntamente à adição, a subtração é uma das primeiras operações matemáticas trabalhadas na escola, bastante necessária durante toda a formação escolar do estudante. A princípio, é importante que a criança consiga assimilar a ideia de subtração como a de tirar algo de um todo, comparar e completar. É a partir do momento em que a criança se apropria das noções básicas da subtração algumas regras operacionais são introduzidas. O algoritmo da subtração que descrevemos a seguir tem como principal objetivo sistematizar e facilitar o cálculo.

Segundo Mello (2008), existem dois métodos no ensino do algoritmo da subtração. O mais antigo é o método da compensação (adição de quantidades iguais no minuendo e no subtraendo). O segundo e mais usado pelos professores atualmente é o método do empréstimo (decomposição do minuendo, quando ele executa “empréstimos”).

Exemplo 2:

$$\begin{array}{rl} 95 & \text{minuendo} \\ -\ 12 & \text{subtraendo} \\ \hline \end{array}$$

Agora calcularemos a diferença entre as unidades, e posteriormente, entre as dezenas:

5 – 2 = 3

9 – 1 = 8

$$\begin{array}{r} 95 \\ -\ 12 \\ \hline 83 \end{array}$$

Então, temos 95 – 12 = 83.

Exemplo 3: Vamos calcular a diferença 224 – 73.

Primeiro montaremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{r} 224 \\ -\ 73 \\ \hline \end{array}$$

Agora subtrairemos as unidades:

$$\begin{array}{r} 224 \\ -\ 73 \\ \hline 1 \end{array}$$

Vamos subtrair as dezenas. Note, contudo, que não é possível tirar 7 dezenas de 2 dezenas. Para isso, vamos “desmanchar” 1 centena, sabemos que 1 centena possui 10 dezenas, então fazemos a subtração de 12 por 7:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{2}}\,\overset{1}{2}4 \\ -\ 73 \\ \hline 1 \end{array}$$

Então, temos 1 centena e 12 dezenas no minuendo. Realizando a subtração das dezenas, temos 12 – 7 = 5.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{2}}\,\overset{1}{\cancel{2}}4 \\ -\ 73 \\ \hline 51 \end{array}$$

Como não há centena no subtraendo, só escrevemos a quantidade de centenas restantes do minuendo:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\cancel{2}{}^{1}24 \\ -\ 73 \\ \hline 151 \end{array}$$

Assim, a diferença entre 224 e 73 é igual a 151, ou seja, 224 – 73 = 151.

A multiplicação dos números naturais *m* e *n*, chamados aqui de fatores, é a operação na qual se calcula a soma de *n* parcelas iguais ao número *m*. O primeiro fator é chamado de multiplicando e o segundo de multiplicador. O resultado dessa operação é conhecido como produto, podendo ser representada por $m \times n$, $m{\cdot}n$ ou simplesmente mn.

O cálculo é sempre efetuado da direita para a esquerda, multiplicando-se cada algarismo do multiplicador por todos os algarismos do multiplicando, gerando produtos parciais. A cada casa numérica do multiplicador, o resultado parcial é deslocado uma casa para a esquerda, e posteriormente, são somados todos os produtos parciais até ser obtido o produto final da multiplicação.

Exemplo 4: Começando com um exemplo mais simples, vamos calcular 21 × 3.

Primeiramente montamos o seguinte dispositivo, colocando o número com maior quantidade de dígitos em cima:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \text{x}\quad 3 \\ \hline \end{array}$$

Agora realizamos a multiplicação entre as unidades, ou seja, 3 x 1 = 3. O resultado é colocado abaixo do 3.

$$\begin{array}{r} 21 \\ \text{x}\quad 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

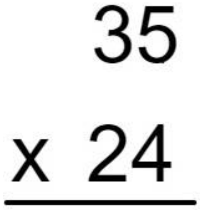
Agora multiplicamos a dezena do primeiro fator com a unidade do segundo fator, ou seja, 2 × 3 = 6, e o resultado é colocado na frente do primeiro resultado.

$$\begin{array}{r} 21 \\ \text{x}\quad 3 \\ \hline 63 \end{array}$$

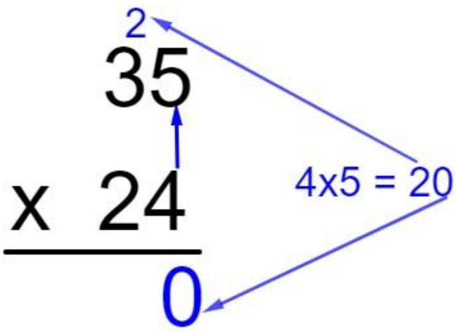
Então, o produto de 21 × 3 = 63.

Exemplo 5: Agora faremos um exemplo em que os dois fatores são maiores que 9: 35 × 24.

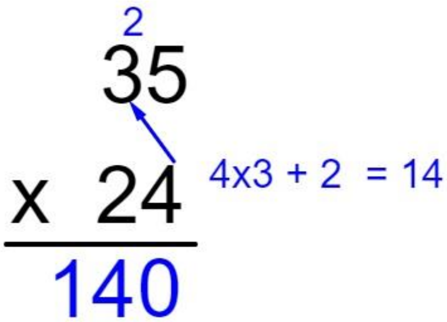
Para realizar essa multiplicação, vamos montar o diagrama:



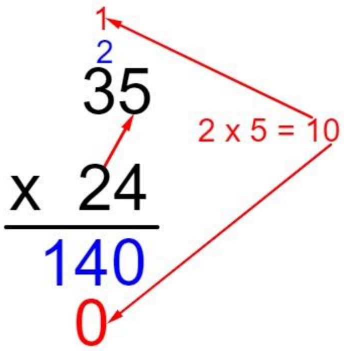
Agora multiplicamos as unidades 4 x 5.



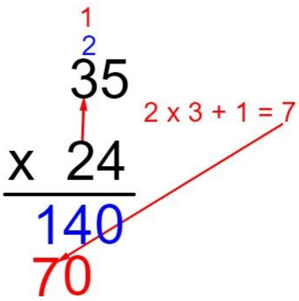
Fazemos também a multiplicação 4 x 3 e somamos 2:



Agora multiplicamos a dezena do fator que está embaixo com a unidade do fator que está em cima. Como trata-se de uma dezena, 2 x 5 = 10.



Como 2 é uma dezena, pulamos a casa das unidades ao escrever o 0. Agora multiplicamos as dezenas dos dois fatores e somaremos 1, ou seja, 2 x 3 + 1 = 7.



Agora vamos **somar os resultados encontrados**:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 24 \\ \hline 140 \\ +\ 70 \\ \hline 840 \end{array}$$

3.3 A divisão euclidiana

A divisão é considerada por muitos como a mais difícil dentre as quatro operações básicas, pelo fato de que, para compreendê-la, é necessário ter um bom domínio das outras três.

Lautert (2005, p. 43) afirma que

> Analisando-se a literatura da área, é possível identificar quatro tipos de dificuldades que surgem quando crianças e adolescentes lidam com a divisão: (a) dificuldades relacionadas aos tipos de problemas; (b) dificuldades relacionadas aos suportes de representação; (c) dificuldades em compreender as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante; (e) [sic] dificuldades em lidar com o resto.

Ele nos diz, ainda, que “apesar da criança compreender de modo implícito a ação que está sendo realizada, não é capaz de verbalizar, no momento, que o todo deve ser distribuído em quantidades iguais ou que o raciocínio requirido para resolver este tipo de problema vai além da compreensão das relações parte-todo.” (LAUTERT, 2005, p. 29). Neste sentido, é imprescindível que o estudante entenda a razão de cada passo (operações, procedimentos, rotinas, regras) que está sendo realizado até que se chegue a um resultado, permitindo-lhe não só autonomia na manipulação do algoritmo da divisão euclidiana, como também o desenvolvimento de um conceito de divisão para além da manipulação de um algoritmo.

Segundo Martinez (2012, p. 38),

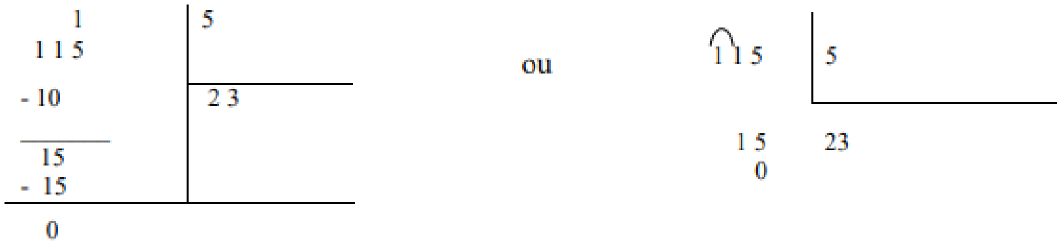
> O algoritmo euclidiano é um dos mais antigos. É conhecido desde que surgiu nos Livros VII e X da obra de Os Elementos de Euclides por volta de 300 a.C., por isso, nomeou-se de algoritmo euclidiano ou de Euclides, atualmente, também conhecido como processo curto ou usual. Este, não permite experimentar possíveis formas de distribuição, mas já se procura a maior quantidade possível de elementos a serem distribuídos para se formar um total igual ou menor que a quantidade de elementos a se distribuir. O maior valor possível que, multiplicado pelo divisor, não ultrapasse o dividendo e que seja diferente de zero.

Martinez (2012, p. 38-39) nos diz para considerar a seguinte situação: precisa-se dividir 115 tampinhas igualmente em 5 caixas:

> Concretamente, na situação de dividir 115 tampinhas em 5 caixas pode-se pensar assim: Como 20 x 5 = 100, colocamos inicialmente 20 tampinhas em cada caixa, isto é, 2 dezenas de tampinhas. Como uma centena de

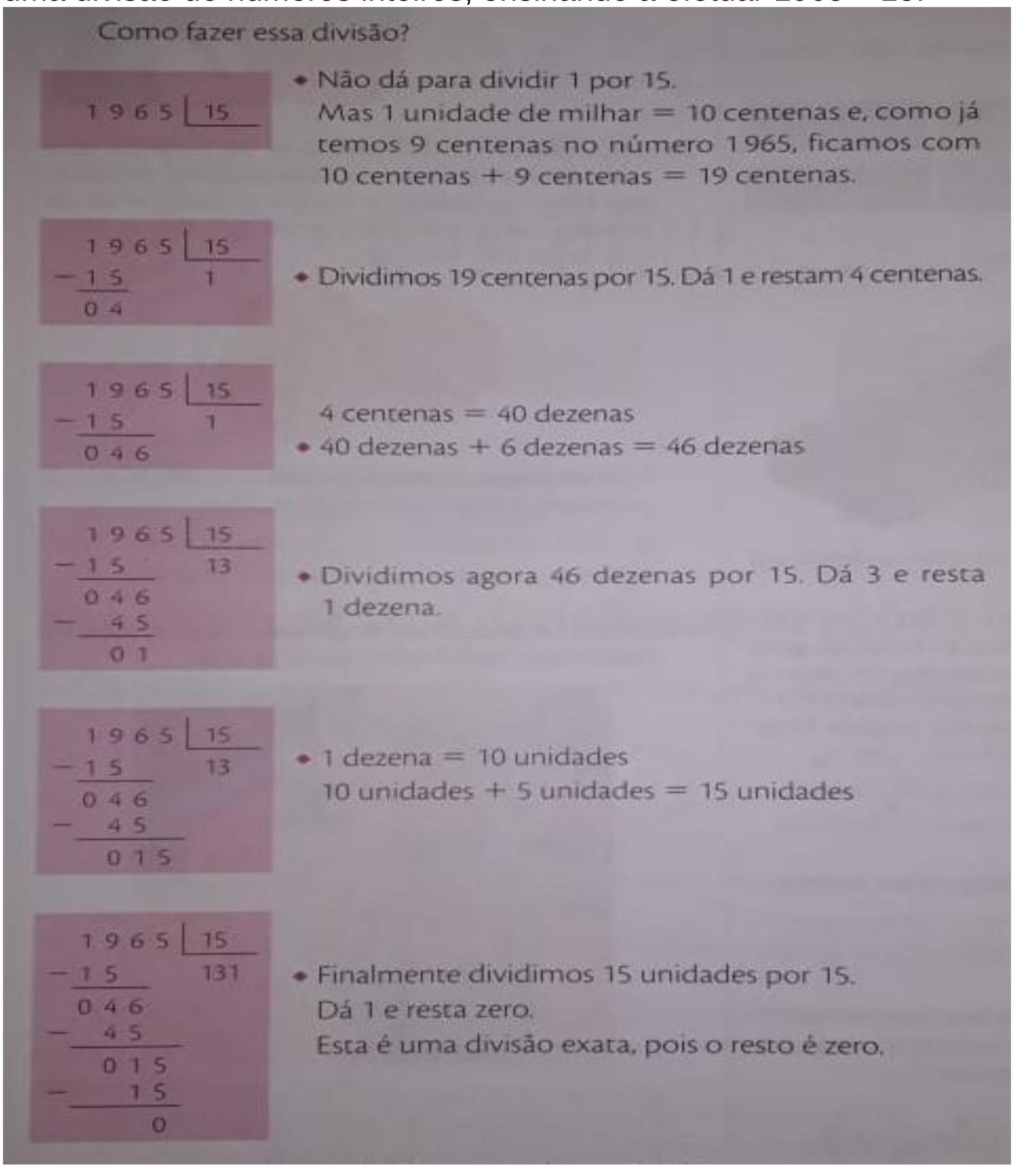
> tampinhas já foi distribuída, ou seja, 100 tampinhas, restam 15 tampinhas que representam 1 dezena e 5 unidades, que serão distribuídas em 5 caixas, ficando mais 3 tampinhas em cada caixa. Que já tinha 20.

Na escola, costuma-se aprender o processo denominado por Martinez (2012) de curto ou usual que funciona, para a divisão que consideramos no parágrafo anterior, através do dispositivo ilustrado na imagem a seguir:



Fonte: MARTINEZ, 2012, p. 39.

Andrini e Vasconcellos (2015, p. 54) explicam o processo de resolução de uma divisão de números inteiros, ensinando a efetuar 1965 ÷ 15:



Como fazer essa divisão?

- Não dá para dividir 1 por 15.
  Mas 1 unidade de milhar = 10 centenas e, como já temos 9 centenas no número 1 965, ficamos com 10 centenas + 9 centenas = 19 centenas.
- Dividimos 19 centenas por 15. Dá 1 e restam 4 centenas.
- 4 centenas = 40 dezenas
  40 dezenas + 6 dezenas = 46 dezenas
- Dividimos agora 46 dezenas por 15. Dá 3 e resta 1 dezena.
- 1 dezena = 10 unidades
  10 unidades + 5 unidades = 15 unidades
- Finalmente dividimos 15 unidades por 15.
  Dá 1 e resta zero.
  Esta é uma divisão exata, pois o resto é zero.

Formalmente, nosso trabalho com essas divisões baseia-se no seguinte resultado, que caracteriza a divisão no conjunto dos inteiros Z como um operador de Z × Z em Z × Z$^+$ que a cada par de números inteiros (a,d), dividendo a e divisor d, faz corresponder um único par de inteiros (q, r):

Teorema (Algoritmo da divisão). Se a e d são inteiros e $b > 0$, então existem inteiros únicos q e r satisfazendo as seguintes condições: $a = dq + r$ e $0 \leq r < d$.

A demonstração envolve, essencialmente, trabalhar com o conjunto S = {s = a − bt, t ∈ Z, s ≥ 0} e com o Princípio da Boa Ordenação (BERTONE, 2014).

Esse é um resultado profundo da Aritmética dos números inteiros, do qual decorrem, por exemplo, os seguintes resultados (BERTONE, 2014):

1. (Existência da representação de um número em qualquer base) Seja b um número inteiro maior do que 1. Então qualquer outro número inteiro positivo pode ser expresso de uma única maneira como $m = a_l b^l + a_{l-1} b^{l-1} + ... + a_1 b + a_0$, em que $l > 0$ é inteiro, $0 \leq a_j < b$ para $j = 0, 1, ..., l$ e $a_l \neq 0$.
2. (Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC) Sejam $a > d > 0$ inteiros. Se $a = dq + r$ então MDC(a,d) = MDC(d,r).

O presente artigo, contudo, não se debruçará sobre aspectos mais formais da Teoria nos números inteiros. No que segue, recordamos, por meio de exemplos, as regras operacionais do algoritmo da divisão tal qual nos são ensinadas na escola.

Quando dividimos o número 42 por 4, por exemplo, sabemos que o resultado é 10 com resto 2. Porém, ao utilizar o dispositivo para resolver, obtemos:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,42 & 4 \\ \cline{2-2}
\underline{4} & 10 \\
02 &
\end{array}
$$

Mesmo sendo uma divisão aparentemente fácil, algumas dúvidas podem surgir: de onde originou-se esse 0 no quociente? Qual processo é feito para que seja obtido o quociente 10 e o resto 2?

De modo análogo, se tivéssemos que efetuar a divisão de 525 por 5, utilizando a "continha" que é apresentada na escola, obteríamos:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,525 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{5} & 105 \\
-\,025 & \\
\underline{25} & \\
0 &
\end{array}
$$

Mais uma vez surge a dúvida sobre o zero do quociente. É muito comum os alunos escreverem incorretamente 15 em vez de 105, o que não é correto.

Outro caso que traz muitas dúvidas é quando o resto é diferente de 0, caso em que dizemos que a divisão não é exata. Neste caso, o quociente é formado por um número racional, como ao repartir 37 para 5.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,37 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{35} & 7,4 \\
-\,20 & \\
\underline{20} & \\
0 &
\end{array}
$$

No caso de ainda haver algum resto, mesmo após a colocação da vírgula no quociente, é acrescentado mais um zero nesse novo resto, sem alterar o quociente, e continua-se a divisão, como é possível observar ao dividir 123 por 8:

$$\begin{array}{r|l}
-123 & 8 \\
\underline{8} & 15{,}375 \\
-43 & \\
\underline{40} & \\
-30 & \\
\underline{24} & \\
-60 & \\
\underline{56} & \\
-40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array}$$

Uma coisa ainda que pode ocorrer quando se está resolvendo uma divisão é que, mesmo acrescentando o zero no novo resto, ele ainda seja menor do que o divisor, o que faz necessário acrescentar mais um zero no resto, e, neste caso, deve ser colocado também um zero no quociente:

$$\begin{array}{r|l}
-85224 & 12000 \\
\underline{84000} & 7{,}102 \\
-12240 & \\
\underline{12000} & \\
-24000 & \\
\underline{24000} & \\
0 &
\end{array}$$

Uma outra situação que causa pavor para muitos ao resolver divisões é quando o dividendo ou o divisor é uma dízima finita. Na escola, aprende-se que quando algum dos números tem vírgula, iguala-se a quantidade de casas decimais e, com isso, as vírgulas podem ser removidas e os termos pode sem operados normalmente (isto é, procede-se à divisão euclidiana entre números inteiros).

$$34{,}56 \,\underline{|\, 2{,}5 \quad} \qquad = \qquad 3556 \,\underline{|\, 250 \quad}$$

Mas, ao ensinar isso, muitos professores não ensinam a razão para assim se faça, deixando uma lacuna. Na verdade, quando se fala em "igualar as casas decimais", está sendo feita uma transformação dos termos da divisão em números naturais, usando equivalências de frações, como é possível observar no exemplo seguinte.

$$\frac{34{,}56}{2{,}5} = \frac{34{,}56}{2{,}5} \times \frac{100}{100} = \frac{3456}{250}$$

Assim, é só calcular a divisão utilizando as regras vistas anteriormente.

Essas são as regras fundamentais do funcionamento da divisão euclidiana e as principais situações em que os alunos enfrentam dificuldades para que efetuar corretamente divisões.

4 METODOLOGIA

Trata-se de um estudo de caso com objetivo geral de analisar e comparar a compreensão dos alunos de duas turmas do terceiro ano de uma escola da rede pública de ensino médio da cidade de Itapetim-PE quando efetuam divisões de números inteiros ou de dízimas finitas. Segundo Pereira et al. (2018, p. 73),

> Para realizar um estudo de caso, torna-se importante inicialmente verificar se existe o caso, isto é, se há algum fenômeno relevante, que apresente interesse para algum grupo ou para a sociedade. É preciso então identificar, que características e/ou importância tornam o estudo um caso. Essa identificação inclui a definição de um problema a ser estudado. Este problema ou questão fundamental dará origem ao objetivo do trabalho. Um objetivo é um alvo a ser perseguido ao longo da realização do trabalho. [...] Com o objetivo definido, pode-se buscar subsídios na literatura [...]. A seguir é preciso realizar um planejamento prévio do que será feito, como, quando e o responsável para cada ação. [...] Nos levantamentos de dados, o início ocorre por meio de observação dos fenômenos. O passo seguinte ocorre através da aplicação dos questionários e/ou por meio da realização de entrevistas que podem ser gravadas e com posterior transcrição (escrevendo o que foi levantando oralmente), por meio de questões abertas (de resposta livre).

A problemática estudada originou-se da percepção de que os alunos não conseguiam efetuar ou explicar divisões de números inteiros, gerando as seguintes questões: Como os alunos executam essa operação aritmética? Que conceito de divisão cada um tem? Quais dificuldades eles encontram ao dividir e como lidam com elas?

Foi elaborado um questionário, inspirado em Viana (2015), direcionado a esses alunos. Viana confeccionou um instrumento “para verificar o domínio na descrição dos procedimentos ou regras utilizados por acadêmicos do curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, no primeiro semestre de 2013, acadêmicos do 6° ao 8° semestre, ao efetuarem divisões através do algoritmo da divisão.” (2015, p. 11). Diferentemente de Viana, o instrumento aqui foi aplicado junto a alunos do ensino médio, tanto porque o autor atua como professor do ensino básico, tendo, assim, um campo natural de investigação e experimentação pedagógicas à sua disposição, quanto porque a problemática que motivou este trabalho teve sua gênese neste nível de ensino, o qual muitos estudantes concluem com dificuldades e obstáculos que são levados para o nível seguinte. Restringimo-nos ao trabalho com números positivos.

As três primeiras indagações do questionário pedem que os alunos se autoavaliem quanto a se têm ou não dificuldades com a divisão, relatem as dificuldades existem e expliquem o algoritmo usado para realizar divisão de inteiros.

1- Você sente dificuldade em resolver operações de divisão?

( ) Sim ( ) Não

2- Se sim, faça um breve relato acerca da(s) dificuldade(s) enfrentada(s).

____

____

3- Explique o funcionamento do algoritmo da divisão.

____

____

Os itens da quarta questão pedem que os alunos efetuem cálculos de divisão e expliquem o que foi feito em cada um e foram assim organizados: a) dividendo maior do que divisor; b) dividendo menor do que divisor; c) dividendo dízima finita e divisor inteiro; d) dividendo e divisor dízimas finitas; e e) dividendo dízima finita e divisor inteiro muito maior que o dividendo.

4- Resolva as divisões a seguir utilizando o algoritmo da divisão, até a terceira casa decimal, quando possível, e no quadro à frente descreva as regras que foram usados para resolve-las.

a) 3878 : 9 =

Cálculo	

b) 3 : 11 =

Cálculo	

c) 2,57 : 4 =

Cálculo	

d) 5,728 : 0,6

Cálculo

e) 73,84 : 3000 =

Cálculo

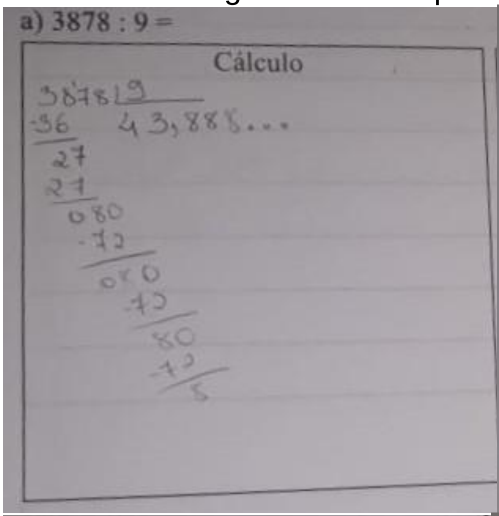
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

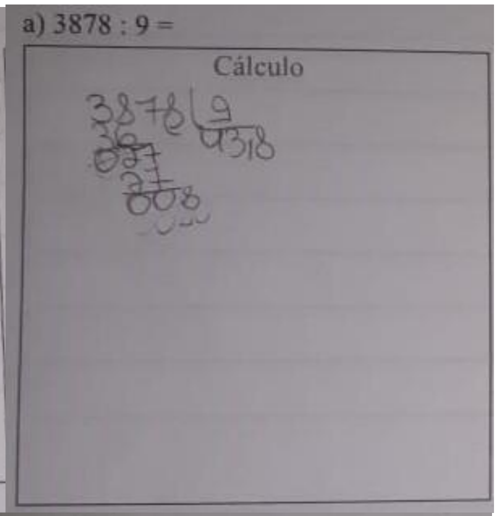
Foram selecionadas duas turmas, terceiro ano A e terceiro ano B, o que totalizam 53 alunos que responderam ao questionário, no ano de 2022. Dentre eles, os que responderam que sentem dificuldades ao resolver operações de divisão somam 29 alunos, consequentemente, 24 responderam que não.

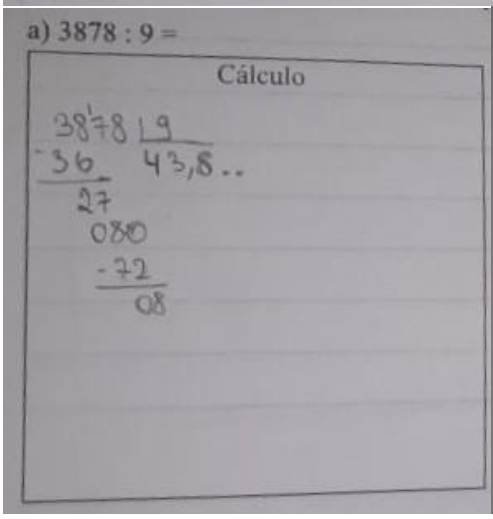
Dos 29 que responderam que apresentam dificuldades em divisão, 19 deles explicaram que têm problemas em resolver divisões com números decimais, 8 não souberam relatar qual o problema, 1 falou que tem dificuldades em contas grandes, 1 informou que nunca aprendeu essa operação. Desses 29, 17 não souberam explicar sobre o algoritmo. Entre os 24 que responderam não ter dificuldades com divisões, 8 não souberam explicar o funcionamento do algoritmo da divisão, nenhum deles explicou corretamente.

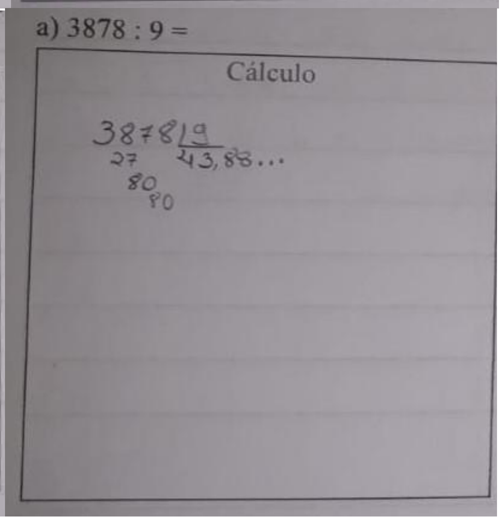
Para a quarta questão desse questionário, foram selecionadas 5 divisões que necessitam de um bom domínio sobre o algoritmo da divisão para respondê-las corretamente.

Apenas 4 alunos dos 53 conseguiram responder corretamente a divisão 3878 por 9. Destes, somente 2 conseguiram explicar corretamente. A maior parte dos alunos que errou esse resultado, cometeram erro justamente no mesmo local, como mostrado em algumas das respostas obtidas:





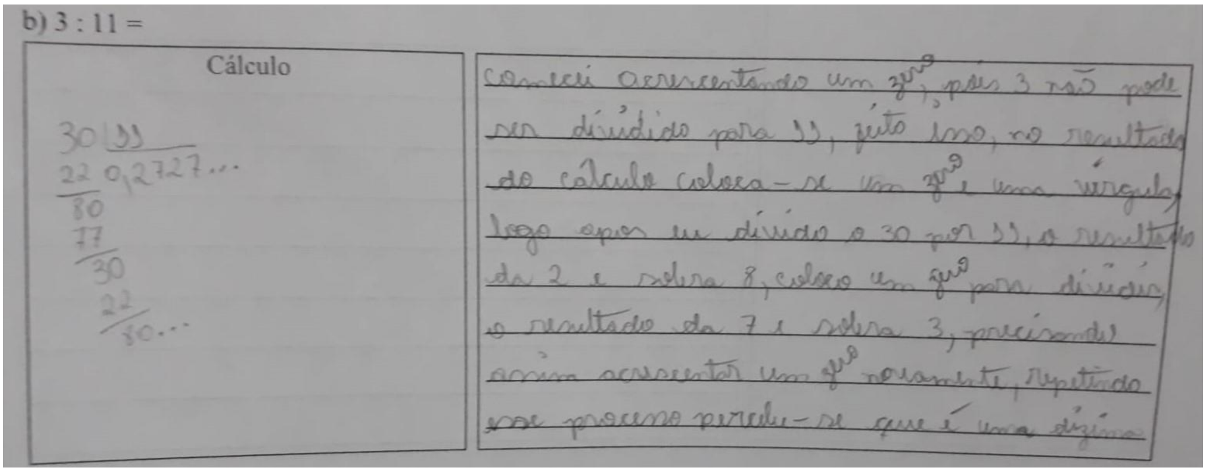


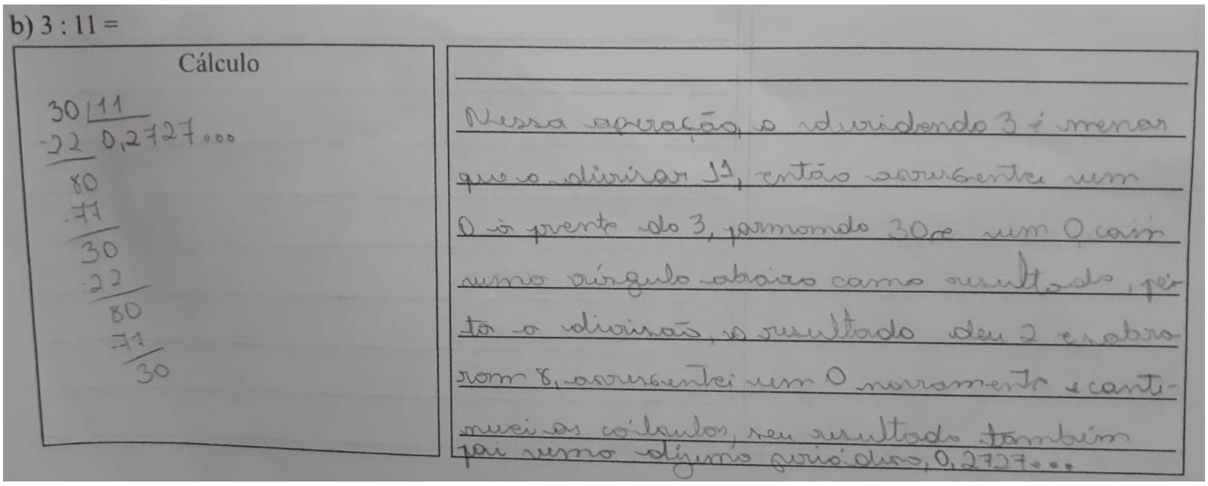


Pode-se perceber que todos os alunos cujas respostas foram destacadas acima, após dividir 3858 por 9, obtiveram como resultado 43,8; o que não é correto, visto que, se se tirar a prova real da divisão, isto é, ao se multiplicar 43,8 por 9, obtém-se 394,2. O resultado dessa divisão é a dízima periódica 430,888...

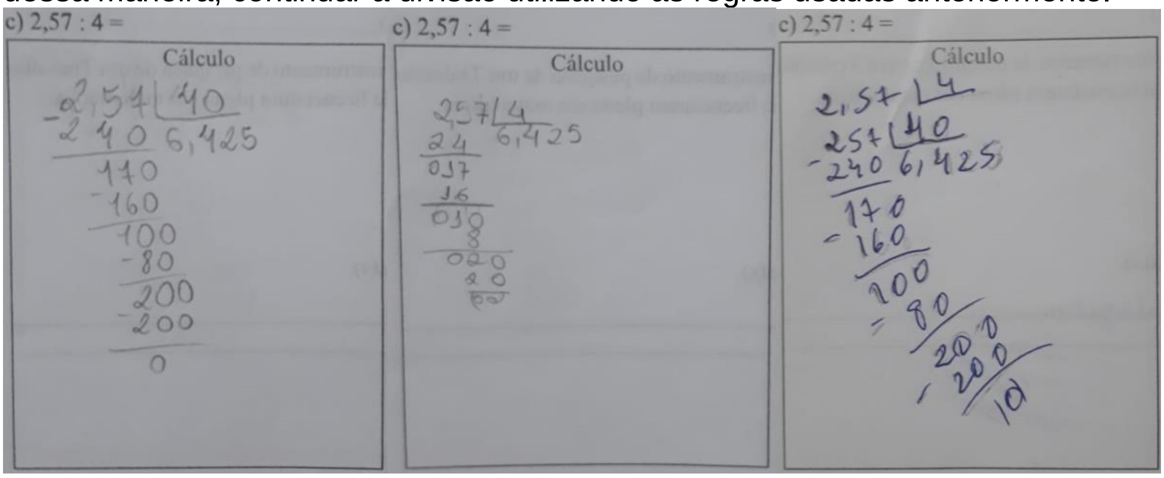
Já na segunda operação, na qual os estudantes precisariam resolver 3:11, do total, 32 conseguiram resolver a divisão de maneira correta; porém, apenas 15 pessoas conseguiram explicar o método de resolução empregado, o restante não soube ou explicou de maneira que difere do raciocínio efetivamente desenvolvido para resolver a questão.

Dentre os alunos que acertaram esse cálculo e justificaram o método usado, foram destacados 2 casos bem parecidos que demonstram o modo que seus autores aprenderam a solucionar divisões quando o dividendo é menor que o divisor.

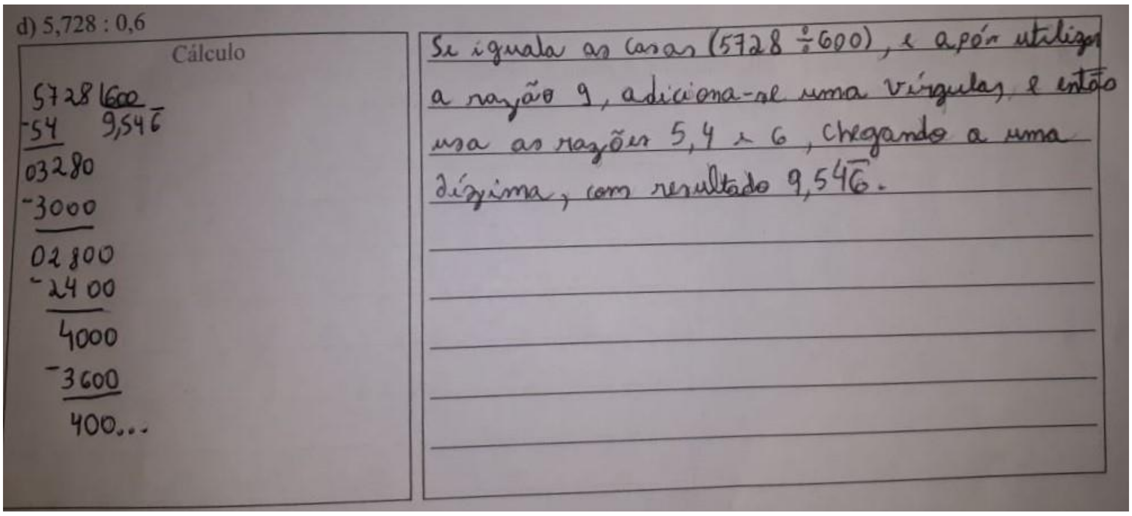


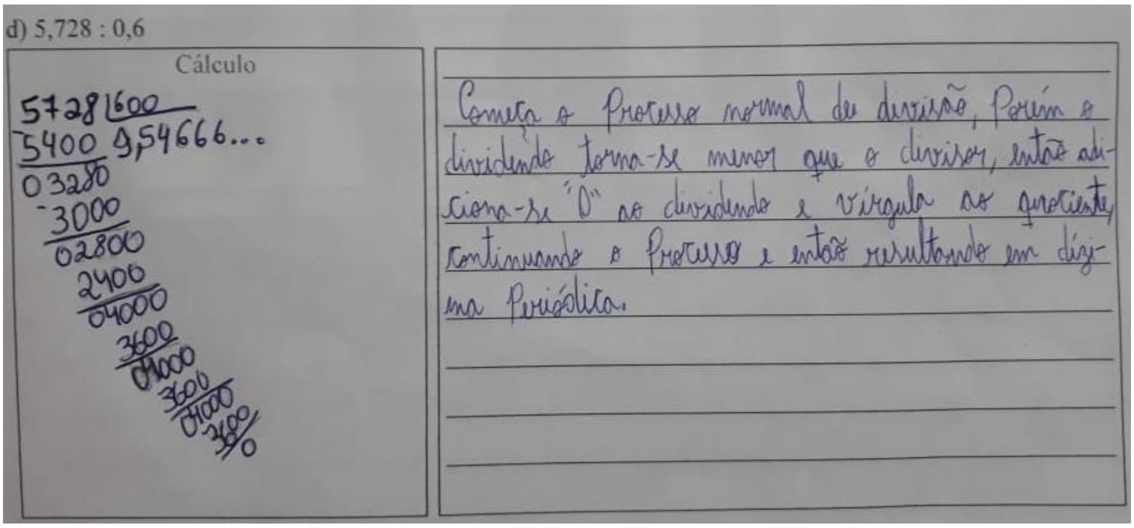


Na terceira divisão, 19 alunos conseguiram resolver corretamente 2,57:4. Entretanto, somente 10 conseguiram relatar como fizeram isso; os demais não souberam explicar. Entre os alunos que erraram o cálculo, foi possível perceber que o erro mais comum dessa divisão se deu na parte inicial, na qual os alunos teriam que primeiramente “tirar” a virgula, multiplicando ambos os números por 100, para, dessa maneira, continuar a divisão utilizando as regras usadas anteriormente.

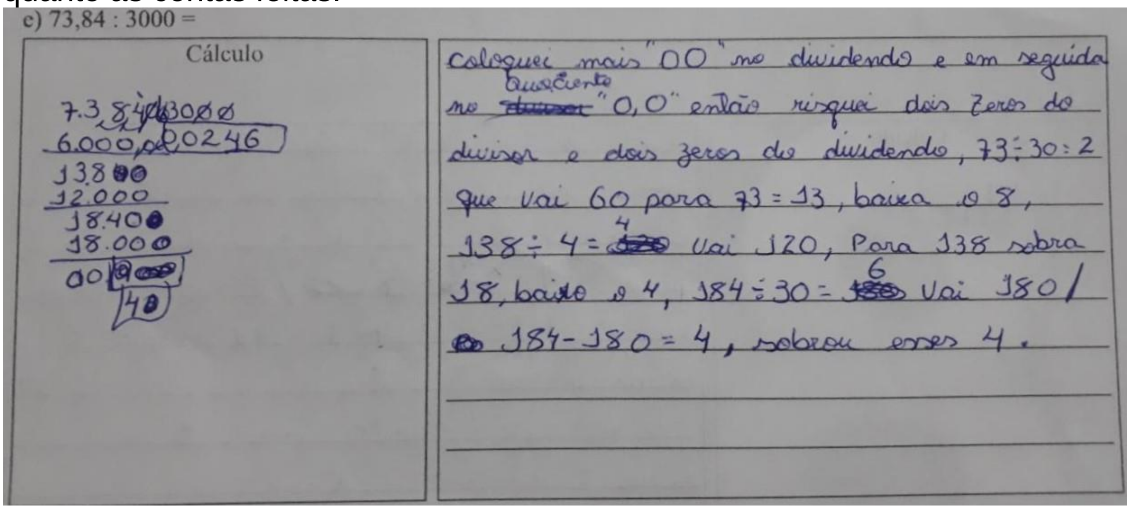


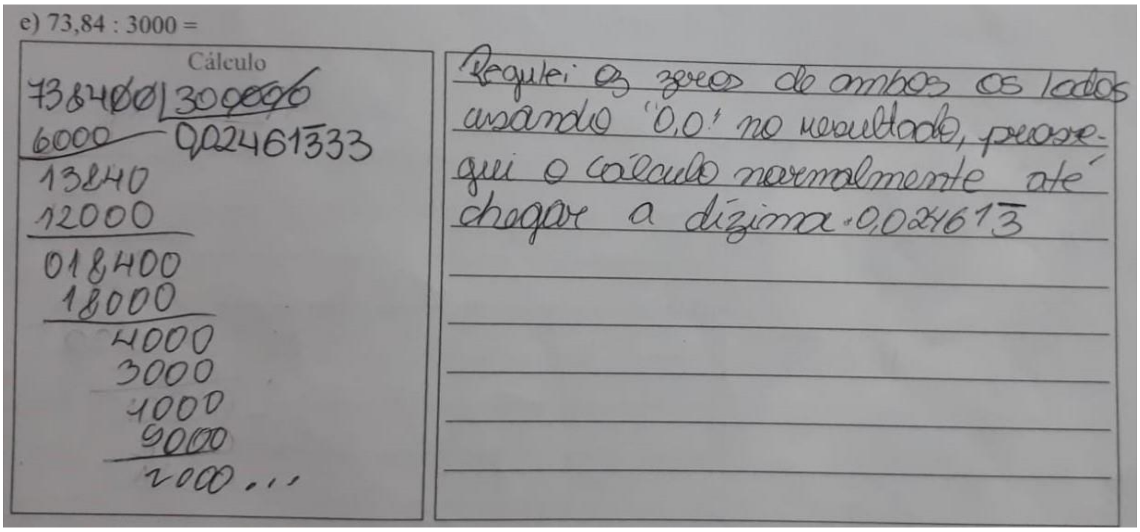
O penúltimo cálculo selecionado para o questionário era uma divisão na qual tanto o divisor quanto o dividendo são dízimas finitas. Sete pessoas resolveram corretamente. Contudo, só 5 conseguiram explicar os processos que seguiram até encontrar o quociente certo.





Na última questão, os estudantes precisavam encontrar o resultado de 73,84:3000; o que apenas 5 conseguiram, e somente 1 estudante conseguiu relatar de forma coerente os processos que usou para a resolução; o restante relatou alguns dos processos seguidos, e boa parte deles demonstrou incompreensão quanto às contas feitas.





6 CONCLUSÃO

Percebemos, a partir da análise dos dados obtidos através do questionário, que, mesmo estando na reta final da formação básica, a maior parte dos alunos do terceiro ano do ensino médio que foram nossos interlocutores nesta pesquisa não consegue resolver operações de divisão utilizando o algoritmo euclidiano.

Concluímos que, apesar de alguns estudantes conseguirem resolver algumas das divisões que compõem o instrumento de coleta, nenhum deles sabe ao certo os passos que estão sendo usados para a resolução. Foi possível perceber ainda que o que eles sabem geralmente são atalhos, normalmente ensinados pelos professores, para que consigam encontrar o resultado desejado sem que seja preciso dominar de verdade o conteúdo.

Consideramos que a pesquisa cumpriu seu objetivo ao detalhar um cenário de desconhecimento do conceito de divisão e de operação praticamente só a nível de algoritmo – cenário que infelizmente já foi apresentado, por algumas vezes, na literatura específica. Ele contrasta fortemente, por exemplo, com a seguinte habilidade, prevista na Base Nacional Comum Curricular para alunos a partir do 5º ano do ensino fundamental:

> (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (BRASIL, 2017, p.295)

Indicamos, por fim, a necessidade de um estudo mais aprofundando sobre o caso, com o intuito de identificar mais a fundo as dificuldades enfrentadas pelos alunos e suas causas, acompanhado de intervenções (como a aplicação de sequências didáticas, por exemplo) para tentar sanar ou, ao menos, amenizar os problemas já apontados no presente estudo. Acreditamos que outras questões sobre a aritmética dos números inteiros e sobre números racionais, particularmente com a inclusão de números negativos em nossa abordagem, também são repletas de obstáculos, dificuldades e dúvidas por parte dos estudantes e devem ser investigadas.

REFERÊNCIAS

LAUTERT, Síntria Labres. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.** 2005. 325 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco.

SANTOS, Cesar Augusto. **Algoritmo da divisão de números naturais na 6ª série do ensino fundamental.** Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

MELLO, Elisabete M. **Análise de dificuldades de alunos com o algoritmo da subtração.** Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP. São Paulo, 2008.

MARTINEZ, Michelle Cristine Pinto Tyszka. **Um olhar para a abordagem do conteúdo de divisão de Números naturais em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação). Cuiabá – MT 2012.

CAIXETA, Susiane Bezerra. **Algoritmo da divisão de Euclides**. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática**. Coleção praticando matemática; v.6. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza. **Algoritmos de multiplicação: uma experiência no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2016. 52 p.

SÁNCHEZ, Maria Celeste. Formação inicial de professores de matemática: o ensino-aprendizagem do algoritmo da divisão no conjunto dos números naturais. XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. UNICSUL – Campus Anália Franco, São Paulo – SP, 25 a 27 de outubro de 2019.

MARTINEZ, Michelle Cristine Pinto Tyszka. Um olhar para a abordagem do conteúdo de divisão de números naturais em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental. 106 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2012.

PEREIRA; Adriana Soares; SHITSUKA, Dorlivete Moreira; PARREIRA, Fabio José; SHITSUKA, Ricardo. Metodologia da pesquisa científica [recurso eletrônico]. 1.ed. – Santa Maria, RS: UFSM, NTE, 2018.

BERTONE, Ana Maria Amarillo. **Introdução à Teoria dos Números.** Uberlândia, MG: UFU, 2014.

VIANA, Hilton Bruno Pereira. **Algoritmo da divisão em quatro regras.** 2016. Dissertação (Mestrado em PROFMAT) – Universidade Federal do Amapá.

FÁVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. Divisão e números racionais: como os professores avaliam a produção dos alunos. **Perspectivas da educação matemática**, Campo Grande, MS, v. 1, n. 2, p. 111 – 123, jul./dez. 2008.