



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS MARQUES DA SILVA

EXISTÊNCIA DE PONTO ELÍPTICO EM SUPERFÍCIES COMPACTAS

CAMPINA GRANDE

2022

**MATHEUS MARQUES DA SILVA**

**EXISTÊNCIA DE PONTO ELÍPTICO EM SUPERFÍCIES COMPACTAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática

**Orientador:** Prof. Me. Geovane de Souza Ferreira Júnior

**CAMPINA GRANDE**

**2022**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Matheus Marques da.  
Existência de ponto elíptico em superfícies compactas  
[manuscrito] / Matheus Marques da Silva. - 2022.  
57 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação : Prof. Me. Geovane de Souza Ferreira Júnior, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Geometria diferencial. 2. Superfícies regulares. 3. Superfícies compactas. I. Título

21. ed. CDD 516.36

MATHEUS MARQUES DA SILVA

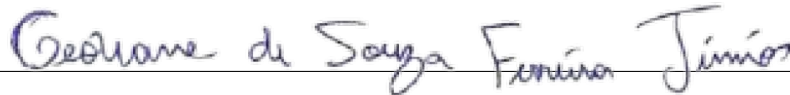
EXISTÊNCIA DE PONTOS ELÍPTICOS EM SUPERFÍCIES COMPACTAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

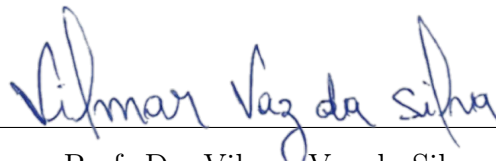
Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 04/08/2022

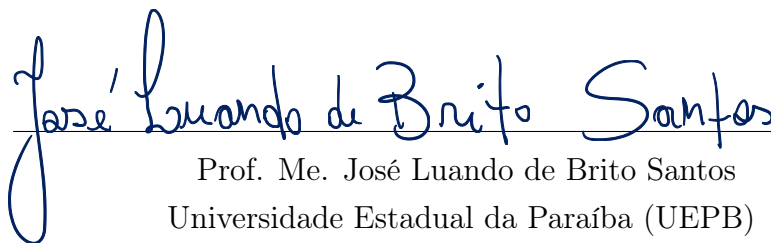
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Geovane de Souza Ferreira Júnior (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Vilmar Vaz da Silva  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. José Luando de Brito Santos  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais, pela motivação  
para seguir com meus estudos,  
dedico.

## AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, gostaria de agradecer primeiramente a Deus e minha família, por me conduzir, guiar e motivar nessa jornada.

Aos meus pais, Ricardo José e Inaldete Marques, por me motivarem cada dia mais a seguir com meus estudos e trabalhos.

Aos professores Luando e Vilmar por terem aceitado participar da banca de apresentação desse TCC e todas as suas contribuições.

Ao professor Geovane, que me orientou desde que fui monitor de sua disciplina, e que, mesmo com a dificuldade da distância, conseguiu passar conteúdos e conceitos que levarei para toda minha vida acadêmica.

Aos professores que conheci presencial e virtualmente durante o curso.

Ao professor Joelson, pela sua amizade, pelos projetos, eventos, leituras e aprendizados, junto ao grupo de pesquisa LEEMAT, ao qual participei e produzi meu primeiro artigo. Gratidão a todos os membros.

Aos amigos que adquiri durante o curso, em especial a Jefferson Henriques, Erick Sousa, Daniel Martins e Caio Vinicius, pela amizade e companheirismo, desde o início do curso.

“Geometria é a arte do raciocínio correto de  
figuras desenhadas incorretamente.”

Henri Poincaré

## RESUMO

O presente trabalho consiste em um estudo envolvendo a Geometria Diferencial de curvas e superfícies, nos seus aspectos mais elementares. Baseados nas referências [1] e [2], mostraremos que toda superfície regular compacta admite ao menos um ponto elíptico, isto é, sempre possuirá ao menos um ponto em que a curvatura Gaussiana é estritamente positiva. Além disso, como ilustração desse fato, mostraremos que todo ponto de uma esfera é elíptico. A metodologia empregada neste trabalho consiste em uma revisão da literatura matemática que versa sobre tais conhecimentos. A forma como decidimos apresentar o tema foi iniciando com alguns conceitos topológicos do espaço euclidiano, por conseguinte, abordamos algumas noções básicas de continuidade e diferenciabilidade e finalizando com a noção de curvas diferenciáveis e suas propriedades.

**Palavras-chave:** Geometria diferencial. Superfícies regulares. Superfícies compactas.



## ABSTRACT

The present work consists of a study involving the Differential Geometry of curves and surfaces, in its most elementary aspects. Based on references [1] and [2], we will show that every compact regular surface admits at least one elliptical point, that is, it will always have at least one point where the Gaussian curvature is strictly positive. Furthermore, as an illustration of this fact, we will show that every point on a sphere is elliptical. The methodology used in this work consists of a review of the mathematical literature that deals with such knowledge. The way we decided to present the topic was starting with some topological concepts of Euclidean space, therefore, we approached some basic notions of continuity and differentiability and ending with the notion of differentiable curves and their properties.

**Keywords:** Differential geometry. Regular surfaces. Compact surfaces.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1. Círculo $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ . . . . .	21
Figura 3.2. Hélice Circular . . . . .	22
Figura 3.3. Curva com bico . . . . .	23
Figura 3.4. Reta tangente à parábola . . . . .	23
Figura 3.5. Reta tangente à hélice circular . . . . .	24
Figura 3.6. Círculo contido no plano $z = 0$ . . . . .	25
Figura 3.7. Curva não plana . . . . .	25
Figura 3.8. Curva Circular Parametrizada . . . . .	26
Figura 3.9. Diagrama da Mudança de Parâmetros . . . . .	26
Figura 3.10. Curvas Parametrizadas com orientações opostas . . . . .	27
Figura 3.11. Função comprimento de arco . . . . .	28
Figura 3.12. Vetores ortonormais . . . . .	32
Figura 3.13. Comprimento do vetor igual a área do paralelogramo . . . . .	33
Figura 3.14. Triedro de Frenet de $\alpha$ em $s_0$ . . . . .	33
Figura 3.15. Vetores como combinação linear . . . . .	35
Figura 4.1. Ponto crítico de $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	39
Figura 4.2. F diferenciável . . . . .	41
Figura 4.3. Elipsóide $\mathcal{E}$ . . . . .	42
Figura 4.4. Plano tangente . . . . .	43
Figura 4.5. Representação da curva diferencial . . . . .	43
Figura 4.6. Vetores tangentes as curvas . . . . .	44
Figura 4.7. Vetor normal . . . . .	45
Figura 4.8. Campo normal . . . . .	46
Figura 4.9. $dN_p$ Autoadjunta . . . . .	47
Figura 5.1. Curva entre discos . . . . .	52
Figura 5.2. Distância $d$ do ponto $p$ ao plano tangente . . . . .	53
Figura 5.3. Superfície $S$ contida pelas esferas de raio $r$ e $r_1$ . . . . .	54
Figura 5.4. Seções normais de $S$ e $S^2(r_1)$ . . . . .	55

# SUMÁRIO

	Página
<b>1</b> <b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b> <b>NOÇÕES PRELIMINARES</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b> <b>Noções topológicas</b> . . . . .	13
<b>2.1.1</b> <b>Bolas e esferas</b> . . . . .	13
<b>2.1.2</b> <b>Conjunto aberto</b> . . . . .	14
<b>2.1.3</b> <b>Sequências em <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	14
<b>2.1.4</b> <b>Conjunto fechado</b> . . . . .	15
<b>2.1.5</b> <b>Fronteira ou bordo</b> . . . . .	15
<b>2.1.6</b> <b>Conjuntos compactos</b> . . . . .	16
<b>2.1.7</b> <b>Cobertura</b> . . . . .	16
<b>2.2</b> <b>Aplicações contínuas</b> . . . . .	16
<b>2.3</b> <b>Homeomorfismos</b> . . . . .	17
<b>2.4</b> <b>Aplicações diferenciáveis</b> . . . . .	18
<b>2.5</b> <b>Difeomorfismo</b> . . . . .	18
<b>3</b> <b>CURVAS PARAMETRIZADAS</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b> <b>Curvas parametrizadas diferenciáveis em <math>\mathbb{R}^2</math> e em <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	21
<b>3.1.1</b> <b>Curvas Parametrizadas Diferenciáveis</b> . . . . .	21
<b>3.1.2</b> <b>Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Regulares</b> . . . . .	22
<b>3.1.3</b> <b>Reta Tangente</b> . . . . .	23
<b>3.1.4</b> <b>Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Simples</b> . . . . .	24
<b>3.1.5</b> <b>Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Planas</b> . . . . .	24
<b>3.2</b> <b>Mudança de parâmetros e orientação de curvas</b> . . . . .	25
<b>3.2.1</b> <b>Mudança de Parâmetros</b> . . . . .	25
<b>3.2.2</b> <b>Orientação de curvas</b> . . . . .	27
<b>3.3</b> <b>Comprimento de Arco e Parametrização pelo comprimento de arco</b> . . . . .	28
<b>3.3.1</b> <b>Comprimento de Arco</b> . . . . .	28
<b>3.3.2</b> <b>Parametrização pelo comprimento de arco</b> . . . . .	28
<b>3.4</b> <b>A Base de Frenet; Curvatura; Torção; Fórmulas de Frenet</b> . . . . .	30
<b>3.4.1</b> <b>Curvatura</b> . . . . .	30
<b>3.4.2</b> <b>A Base de Frenet</b> . . . . .	31
<b>3.4.3</b> <b>Torção</b> . . . . .	34
<b>4</b> <b>SUPERFÍCIES REGULARES</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b> <b>Superfícies Regulares; Imagens inversas de valores regulares</b> . . . . .	38

4.2	Plano Tangente	43
4.3	Vetor normal	44
4.4	Superfícies Orientáveis	45
4.5	Aplicação de Gauss e Segunda Forma Fundamental	47
5	EXISTÊNCIA DE PONTO ELÍPTICO EM SUPERFÍCIES COMPACTAS.	50
5.1	Classificação dos pontos de uma superfície regular	50
5.2	Existência de ponto elíptico	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	Referências Bibliográficas	56

## 1 INTRODUÇÃO

A geometria diferencial clássica se concentra basicamente ao estudo das propriedades de curvas e superfícies. Nesse estudo, se destaca as superfícies regulares: que são objetos que estão imersos sobre o espaço euclidiano, por exemplo, esfera, elipsoide, parabolóide, plano, entre outros. Esses objetos matemáticos têm sido amplamente estudados de duas perspectivas: de forma intrínseca, que está ligado apenas aos coeficientes da primeira forma fundamental, ou seja, se faz geometria sobre essas superfícies sem fazer referência ao espaço ou ambiente que elas estão colocadas, e também de forma extrínseca, que faz referência a suas propriedades levando em consideração o espaço euclidiano.

Ao longo do trabalho, iremos lidar apenas com superfícies regulares orientáveis, ou seja, superfícies que admitem um campo diferenciável de vetores normais e unitários, em que denotaremos por  $N$ , onde a escolha de tal campo será chamada de uma orientação dessa superfície. Com isso, sendo  $S$  uma superfície com orientação  $N$ , damos origem a um operador auto-adjunto  $dN$ , em que definimos a curvatura Gaussiana de  $S$  em  $p$ , denotada por  $K(p)$  e definida por

$$K(p) = \det(dN_p).$$

Por meio da curvatura Gaussiana, podemos caracterizar todos os pontos de uma superfície regular orientável qualquer, os pontos de uma superfície podem ser: elípticos, hiperbólicos, parabólicos e planares. Vale ressaltar que a classificação da curvatura não depende da orientação escolhida para superfície  $S$ .

Considerando  $p$  um ponto elíptico de uma superfície  $S$ , tem-se que a curvatura Gaussiana  $K(p)$  será positiva. Nosso objetivo nesse trabalho será mostrar que toda superfície compacta (limitada e fechada em  $\mathbb{R}^3$ ) tem ao menos um ponto elíptico. A esfera  $S^2(r)$  de raio  $r$  é um exemplo de uma superfície compacta em que todos os seus pontos são elípticos (ver Exemplo [5.5](#)).

Ademais, este trabalho é apresentado em cinco capítulos, faremos uma pequena descrição sobre cada um: no Capítulo 2 apresentamos alguns resultados fundamentais para nosso objetivo principal. Inicia-se com definições e exemplos de algumas noções topológicas, como bolas e esferas, conjuntos abertos, fechados, compactos, homeomorfismos e difeomorfismos. No Capítulo 3 veremos os conceitos básicos de geometria diferencial, começando com curvas parametrizadas diferenciáveis e finalizando com a Base de Frenet e suas fórmulas. No Capítulo 4 abordaremos as superfícies regulares, Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental. Na sequência, tem-se o Capítulo 5, onde mostraremos a prova da Existência de Pontos Elípticos em Superfícies compactas e finalizaremos com

a comprovação de que todos os pontos de uma esfera são elípticos. Por fim, no Capítulo 6, serão deixadas as considerações finais.

## 2 NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados vários resultados fundamentais para assuntos futuros deste trabalho. Primeiramente veremos algumas noções topológicas e finalizaremos com os conceitos de homeomorfismos e difeomorfismos. Caso o leitor queira verificar as demonstrações e se aprofundar mais nos resultados que serão apresentados nesse capítulo, recomendamos a leitura de [4] e [8].

### 2.1 Noções topológicas

#### 2.1.1 Bolas e esferas

**Definição 2.1.** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$  número real. Então, tem-se:

- **Bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$**

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

- **Bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$**

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$$

- **Esfera de centro  $a$  e raio  $r$**

$$S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}$$

**Observação 2.2.**  $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$ .

**Observação 2.3.** A esfera unitária (raio de comprimento igual a 1 e centro na origem) do  $\mathbb{R}^n$  é denotada por  $S^{n-1}$  e dada por

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}.$$

Em  $\mathbb{R}^3$ , a esfera unitária será

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}.$$

**Definição 2.4.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é limitado quando existir números reais  $a$  e  $r > 0$ , tal que

$$X \subset B[a, r].$$

**Observação 2.5.** Toda bola  $B[a, r]$  é limitada.

### 2.1.2 Conjunto aberto

**Definição 2.6.** Seja  $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $a$  é um ponto interior a  $X$  se existir algum  $r > 0$ , tal que

$$B(a, r) \subset X.$$

**Observação 2.7.** O conjunto de todos os pontos interiores a  $X$  será denotado por  $\text{int}X$ .

**Exemplo 2.8.** Seja  $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; b > 0\}$ . Todo ponto do conjunto  $X$  é interior. De fato, pois basta tomar  $0 < r < b$ .

**Definição 2.9.** Um conjunto  $A$  será dito aberto quando  $A = \text{int}A$ , isto é, se todos os seus pontos forem pontos interiores.

**Exemplo 2.10.** A bola aberta  $B(a, r)$  é um conjunto aberto. De fato, seja  $b \in B(a, r)$ , então temos que  $\|b - a\| < r$ . Agora, considere  $0 < \delta < r - \|b - a\|$ , e seja a bola aberta  $B(b, \delta)$ . Queremos mostrar que  $B(b, \delta) \subset B(a, r)$ . Seja  $x \in B(b, \delta)$ , então  $\|b - x\| < \delta$ . Agora, note que

$$\|a - x\| \leq \|a - b\| + \|b - x\| < \|a - b\| + \delta < \|a - b\| + r - \|a - b\|$$

ou seja,  $\|a - x\| < r$ .

### 2.1.3 Sequências em $\mathbb{R}^n$

**Definição 2.11.** Uma sequência em  $\mathbb{R}^n$  é uma função

$$\begin{aligned} x &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\mapsto x_k \end{aligned}$$

com  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$ ;  $x_{k_i} \in \mathbb{R}$ ;  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Sejam  $x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $a \in \mathbb{R}^n$ . O  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $k > k_0$  implica  $\|x_k - a\| < \varepsilon$ , ou seja,  $\forall k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a, \varepsilon)$ .

**Teorema 2.12.** Sejam  $x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $a \in \mathbb{R}^n$ .  $x_k = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$  converge para  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  se, e somente se,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_1} = a_1, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_2} = a_2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_n} = a_n.$$



### 2.1.4 Conjunto fechado

**Definição 2.13.** Sejam  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $a$  é um ponto aderente a  $X$  se existir  $x_n$  em  $X$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . O conjunto de pontos aderentes a  $X$  será denotado por  $\overline{X}$  (fecho de  $X$ ).

**Definição 2.14.**  $X$  é dito um conjunto fechado quando  $X = \overline{X}$ .

**Observação 2.15.** Se  $a \in X$ , então  $a$  é aderente a  $X$ .

**Teorema 2.16.** Um ponto  $a \in \overline{X}$  se, e somente se, toda bola  $B(a, r) \cap X \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Se  $a \in \overline{X}$ , então existe  $x_k \in X$  tal que  $x_k \rightarrow a$ , para todo  $r > 0$  e existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0$ . Logo,  $\|x_k - a\| < r$ , assim  $x_k \in B(a, r)$ , ou seja,  $B(a, r) \cap X \neq \emptyset$ . Agora, se existe  $x_k \in X$ , então  $x_k \rightarrow a$ , logo,  $a \in \overline{X}$ . ■

**Definição 2.17.** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . A distância do ponto  $a$  até  $X$  será:

$$d(a, X) := \inf\{\|x - a\|; x \in X\}$$

**Observação 2.18.**  $d(a, X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|$ .

**Definição 2.19.** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $a$  é ponto de acumulação de  $X$  se para todo  $r > 0$  tal que  $B(a, r)$  contém pontos de  $X - \{a\}$ .

**Observação 2.20.** Seja  $X' = \{\text{conjunto dos pontos de acumulação de } X\}$ . Se  $a \notin X'$ , então  $a$  é dito ponto isolado, isto é, existe  $r > 0$ , tal que  $B(a, r) \cap X = \{a\}$ .

**Teorema 2.21.** Seja  $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ . São equivalentes:

1.  $a$  é ponto de acumulação;
2.  $a$  é limite de uma sequência  $x_k \in X - \{a\}$ ;
3. Toda bola de centro  $a$  tem uma infinidade de pontos de  $X$ .

### 2.1.5 Fronteira ou bordo

**Definição 2.22.** A fronteira (ou bordo) de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $\partial X$ , onde

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$$

**Observação 2.23.**  $a \in \partial X$  se, e somente se, toda bola aberta de centro  $a$  contém pontos de  $X$  e pontos de  $X^C$ .  $a \in \partial X$  se, e somente se, para todo  $r > 0$ ,  $B(a, r) \cap X \neq \emptyset$  e  $B(a, r) \cap X^C \neq \emptyset$ .

**Observação 2.24.**  $\partial X$  é um conjunto fechado.

**Observação 2.25.**  $\mathbb{R}^n = \text{int}X \dot{\cup} \text{int}X^c \dot{\cup} \partial X$ .

**Observação 2.26.**  $A$  é aberto se, e somente se,  $\partial A \cap A = \emptyset$ .  $F$  é fechado se, e somente se,  $\partial F \subset F$ .

**Exemplo 2.27.**  $\partial B[a, r] = \overline{B[a, r]} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus B[a, r]} = B[a, r] \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(a, r)) = S[a, r]$ , portanto, a esfera é um conjunto fechado.

### 2.1.6 Conjuntos compactos

**Definição 2.28.** Um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto quando for limitado e fechado.

**Exemplo 2.29.**  $B[a, r]$  e  $S[a, r]$  são conjuntos compactos.

**Exemplo 2.30.**  $\mathbb{Z}^n$  é um conjunto fechado, mas não é limitado, logo, não é compacto.

### 2.1.7 Cobertura

**Definição 2.31.** Uma família  $\mathcal{C}$  de conjuntos  $C_\lambda$  cuja reunião contém um conjunto  $X$  é chamada *cobertura* de  $X$ . A condição  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  significa que, para cada  $x \in X$ , deve existir (pelo menos) um  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ . Uma cobertura é dita *aberta* quando todos os conjuntos  $C_\lambda$  são abertos. Quando  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  é um conjunto finito, diz-se que  $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$  é uma *cobertura finita*. Se  $L' \subset L$  é tal que ainda se tem  $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$ , diz-se que  $\mathcal{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$  é uma *subcobertura* de  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 2.32.** (Borel-Lebergue) Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $A_\lambda$  conjuntos abertos, com  $\lambda \in L$ . Toda cobertura de  $K$  admite subcobertura finita, ou seja,

$$K \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

## 2.2 Aplicações contínuas

**Definição 2.33.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e uma aplicação

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \end{aligned}$$

onde  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $a \in X$ , se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Equivalente à (2.1), temos:

$$\forall B(f(a), \varepsilon), \text{ existe } B(a, \delta) \text{ tal que } f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

**Observação 2.34.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua se, e somente se, para todo aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $X$ .

**Observação 2.35.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua se, e somente se, as funções-coordenadas  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , são contínuas.

**Exemplo 2.36.** A aplicação

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (\text{sen}(x), \text{cos}(x)) \end{aligned}$$

é contínua. De fato, defina

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{e} & & f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{sen}(x) & & & x &\longmapsto \text{cos}(x) \end{aligned}$$

são funções contínuas, segue pela observação 2.35 que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é contínua.

### 2.3 Homeomorfismos

Os homeomorfismos são aplicações que preservam estruturas topológicas dos conjuntos.

**Definição 2.37.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Dizemos que a bijeção  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo se  $f$  e  $f^{-1}$  forem contínuas.

**Observação 2.38.** Se  $f : X \rightarrow Y$  for um homeomorfismo, então os conjuntos  $X$  e  $Y$  são ditos homeomorfos.

**Exemplo 2.39.** As bolas  $B(0, 1)$  e  $B(a, r)$  são homeomorfas. De fato, defina as funções

$$\begin{aligned} f : B(0, 1) &\longrightarrow B(a, r) & \text{e} & & g : B(a, r) &\longrightarrow B(0, 1) \\ x &\longmapsto xr + a & & & y &\longmapsto \frac{1}{r}(y - a). \end{aligned}$$

Observe que  $f$  e  $g$  são contínuas, e mais,  $g = f^{-1}$ , pois

$$g(f(x)) = g(xr + a) = \frac{1}{r}((xr + a) - a) = \frac{1}{r}(xr + a - a) = \frac{xr}{r} = x$$

e

$$f(g(y)) = f\left(\frac{1}{r}(y - a)\right) = \left(\frac{1}{r}(y - a)\right)r + a = y - a + a = y.$$

Logo,  $B(0, 1)$  e  $B(a, r)$  são homeomorfas.

**Observação 2.40.** Quaisquer bolas abertas no  $\mathbb{R}^n$  são homeomorfas

**Exemplo 2.41.** A aplicação

$$\begin{aligned} f &: [0, 2\pi) \rightarrow S^1 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned}$$

não é um homeomorfismo. Note que  $S^1$  é um conjunto compacto, já o intervalo  $[0, 2\pi)$  não é compacto. Logo,  $f$  não é homeomorfismo.

## 2.4 Aplicações diferenciáveis

**Definição 2.42.** Seja  $U$  um conjunto aberto, com  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $x \in U$ , se existir uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e uma aplicação  $r = r(h)$  tal que

$$f(x+h) - f(x) = T_h + r(h) \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

**Exemplo 2.43.** Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|^2. \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \|x+h\|^2 - \|x\|^2 \\ &= \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle \\ &= \cancel{\langle x, x \rangle} + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle - \cancel{\langle x, x \rangle} \\ &= 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Sendo  $r(h) = \|h\|^2$ , temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Com isso, podemos concluir que  $f$  é diferenciável.

## 2.5 Difeomorfismo

**Definição 2.44.** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos abertos, com  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é um difeomorfismo se  $f$  for bijetiva, onde  $f$  e  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  forem diferenciáveis.

**Observação 2.45.** Se  $f : X \rightarrow Y$  for um difeomorfismo, então para todo  $a \in X$  temos que  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será um *isomorfismo* (em particular,  $m = n$ ).

**Exemplo 2.46.** Seja

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3. \end{aligned}$$

Para que  $f$  seja um difeomorfismo,  $f$  e  $f^{-1}$  devem ser diferenciáveis. Como  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ , e  $f^{-1}$  não é diferenciável na origem, podemos concluir que  $f$  não é um difeomorfismo.

**Definição 2.47.** Seja  $U$  um conjunto aberto com  $U \subset \mathbb{R}^n$ .  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um *difeomorfismo local* se para todo  $x \in U$  existem abertos  $V \subset U$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $x \in V$  e  $f(x) \in W$ , onde  $f|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo.

**Teorema 2.48. (Teorema da aplicação inversa)** Seja  $U$  um conjunto aberto com  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável. Suponha que para todo  $a \in U$ ,  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja isomorfismo, então vai existir  $V$ , um conjunto aberto, com  $V \subset U$ , onde  $a \in V$  e  $f(V) = W$  aberto e  $f|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo.

**Exemplo 2.49.** Seja

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (e^x \cos(y), e^x \sin(y)). \end{aligned}$$

$f$  é um difeomorfismo local. De fato, defina  $f_1(x, y) = e^x \cos(y)$  e  $f_2(x, y) = e^x \sin(y)$ , temos

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Agora, note que

$$\det(J_f(x, y)) = e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) = e^{2x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Isso implica que  $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é isomorfismo. Pelo teorema da aplicação inversa,  $f$  é um difeomorfismo local.

**Exemplo 2.50.** Seja  $U$  um conjunto aberto, com  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável. Se  $(a, b) \in U$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} \varphi & : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, f(x, y)). \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local. Note que

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_\varphi(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

Como  $\det(J_\varphi(x, y)) \neq 0$ , temos que  $\varphi'(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é isomorfismo. Daí, pelo teorema da aplicação inversa,  $\varphi$  é um difeomorfismo local.

### 3 CURVAS PARAMETRIZADAS

Neste capítulo veremos alguns conceitos básicos de geometria diferencial, começando com curvas parametrizadas diferenciáveis, sendo elas regulares, simples e planas, passando por mudanças de parâmetros e parametrização pelo comprimento de arco e finalizando com a Base de Frenet e suas fórmulas. Os resultados apresentados nesse capítulo podem ser vistos com mais detalhes em [1], [2] e [3].

#### 3.1 Curvas parametrizadas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

##### 3.1.1 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis

**Definição 3.1.** Uma **curva parametrizada diferenciável no  $\mathbb{R}^2$**  é uma aplicação

$$\begin{aligned}\alpha &: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha(t) &\longmapsto (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

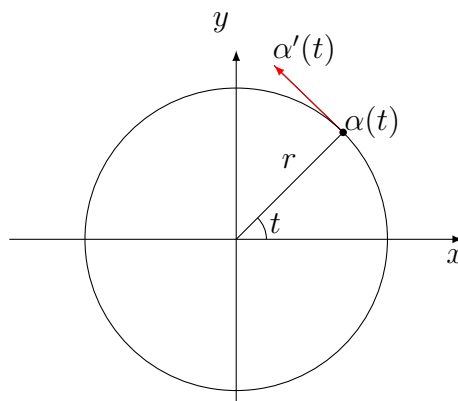
de classe  $C^\infty$ , definida num intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , com  $t \in I$ . Ou seja, suas funções coordenadas  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  têm derivadas de todas as ordens. Dizemos que  $t$  é o *parâmetro* da curva,  $\alpha(I)$  é o *traço* de  $\alpha$  e  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é o *vetor tangente* a  $\alpha$  em  $t \in I$ . Em  $\mathbb{R}^3$  a definição é similar, mudando somente a quantidade de coordenadas.

**Exemplo 3.2.** A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , com  $r > 0$ , é uma curva parametrizada diferenciável, pois suas funções coordenadas

$$t \mapsto r \cos t \text{ e } t \mapsto r \sin t$$

têm derivada de todas as ordens para todo  $t$  em  $\mathbb{R}$ . O traço de  $\alpha$  é um círculo de centro na origem e raio  $r$ , já  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$  é o vetor tangente a  $\alpha$  em  $t \in \mathbb{R}$ .

**Figura 3.1** – Círculo  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$



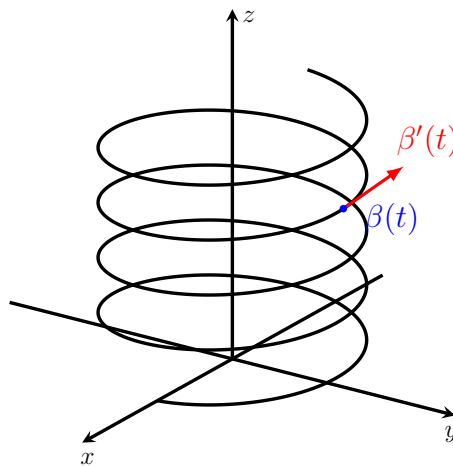
Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Exemplo 3.3.** A curva  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , com  $a > 0$  e  $b \neq 0$ , é uma curva parametrizada diferenciável, pois suas funções coordenadas

$$t \mapsto a \cos t, t \mapsto a \sin t \text{ e } t \mapsto bt$$

têm derivadas de todas as ordens para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O traço de  $\beta$  é uma hélice circular.  $\beta'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  é o vetor tangente a  $\beta$  em  $t \in \mathbb{R}$ .

**Figura 3.2** – Hélice Circular



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

### 3.1.2 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Regulares

**Definição 3.4.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) é dita *regular* em  $t = t_0 \in I$  quando  $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$ . Um *ponto singular* de  $\alpha$  é um valor do parâmetro  $t$  tal que  $\alpha'(t) = \vec{0}$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma *curva parametrizada diferenciável regular* se  $\alpha$  for regular em todos os pontos  $t \in I$ , ou seja, se  $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ , para todo  $t \in I$ .

**Exemplo 3.5.** Note que  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , com  $r > 0$  e  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , com  $a > 0$  e  $b \neq 0$  são exemplos de curvas parametrizadas diferenciáveis regulares. De fato, já vimos nos exemplos anteriores que elas são curvas parametrizadas diferenciáveis. Lembrando que  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$  e  $\beta'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e observando que as funções  $t \mapsto \cos t$  e  $t \mapsto \sin t$  nunca se anulam simultaneamente, segue que  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$  e  $\beta'(t) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$  são regulares.

**Exemplo 3.6.** A curva parametrizada

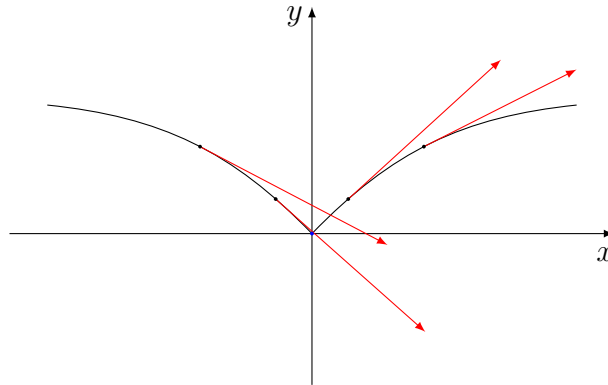
$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^3, t^2)$$

é diferenciável, pois suas funções coordenadas  $t \mapsto t^3$  e  $t \mapsto t^2$  possuem derivadas de todas



as ordens para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Enquanto,  $\gamma$  não é regular, pois  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t) = (0, 0)$  para  $t = 0$ . Isto é  $t = 0$  é um ponto singular de  $\gamma$ .

**Figura 3.3** – Curva com bico



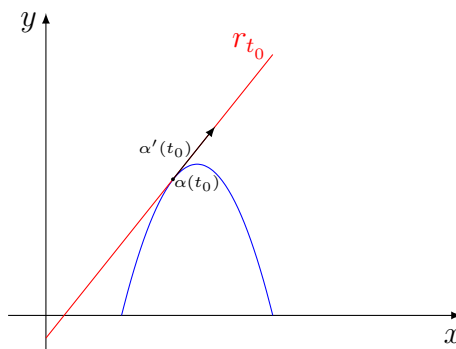
Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

### 3.1.3 Reta Tangente

**Definição 3.7.** Se uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) for regular em  $t = t_0 \in I$  (ou seja,  $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$ ), definimos a *reta tangente* a  $\alpha$  em  $t_0$  como sendo a reta  $r_{t_0}$  que passa por  $\alpha(t_0)$ , na direção do vetor tangente  $\alpha'(t_0)$ . Ou seja,

$$r_{t_0} = \{\alpha(t_0) + \tau\alpha'(t_0) | \tau \in \mathbb{R}\}.$$

**Figura 3.4** – Reta tangente à parábola



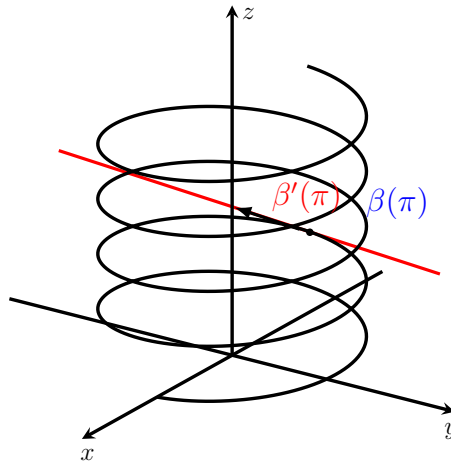
Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Exemplo 3.8.** Vamos determinar a equação da reta tangente à curva parametrizada diferenciável regular  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , com  $a > 0$  e  $b \neq 0$  em  $t = \pi$ . Temos:  $\beta'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\beta(\pi) = (a \cos \pi, a \sin \pi, b\pi) = (-a, 0, b\pi)$  e  $\beta'(\pi) = (-a \sin \pi, a \cos \pi, b) = (0, -a, b)$ . Logo a reta tangente a  $\beta$  em  $t = \pi$

é

$$r_\pi = \{(-a, 0, b\pi) + \tau(0, -a, b) \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(-a, -a\tau, b\pi + b\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

**Figura 3.5** – Reta tangente à hélice circular



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

### 3.1.4 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Simples

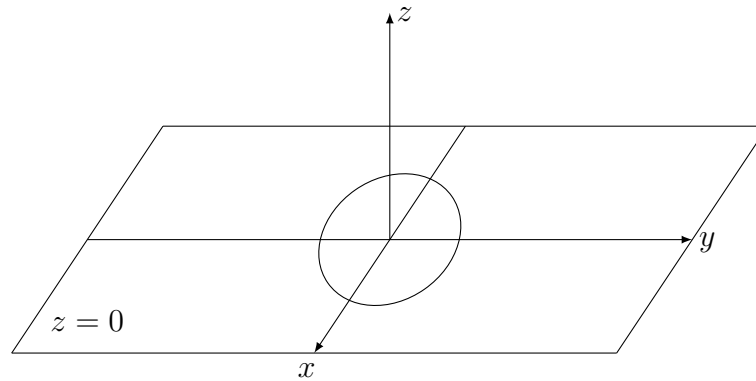
**Definição 3.9.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) é dita **simples** se a aplicação  $\alpha$  é injetora, ou seja, se  $t_1 \neq t_2$  então  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in I$ . Intuitivamente, numa curva parametrizada diferenciável simples  $\alpha$ , cada um dos pontos do seu traço  $\alpha(I)$  é percorrido uma única vez.

**Exemplo 3.10.** As curvas parametrizadas diferenciáveis  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , com  $a > 0$  e  $b \neq 0$  e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$  são exemplos de curvas simples. Já, a curva parametrizada diferenciável  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , com  $r > 0$  não é uma curva simples, pois ela é periódica, com período  $2\pi$ . (Por exemplo,  $\alpha(2k\pi) = \alpha(0) = (r, 0)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ).

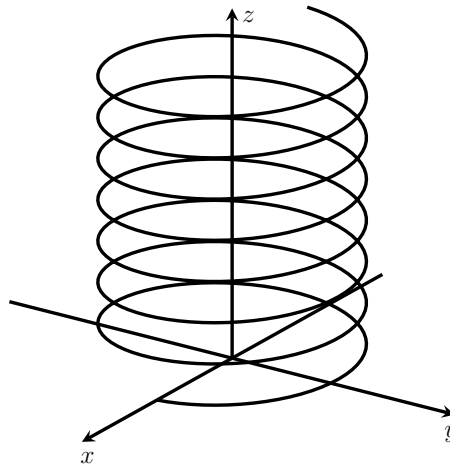
### 3.1.5 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Planas

**Definição 3.11.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita *plana* se existe um plano  $\pi$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha(I) \subset \pi$ .

**Exemplo 3.12.** A curva parametrizada diferenciável  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$ , com  $r > 0$ , é um exemplo de curva plana, cujo traço é um círculo de centro  $(0, 0, 0)$ , raio  $r$ , contido no plano  $z = 0$ . Entretanto, a curva parametrizada diferenciável  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , com  $a > 0$  e  $b \neq 0$ , não é uma curva plana.

**Figura 3.6** – Círculo contido no plano  $z = 0$ 

Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Figura 3.7** – Curva não plana

Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

## 3.2 Mudança de parâmetros e orientação de curvas

### 3.2.1 Mudança de Parâmetros

**Exemplo 3.13.** Considere as seguintes curvas parametrizadas regulares:

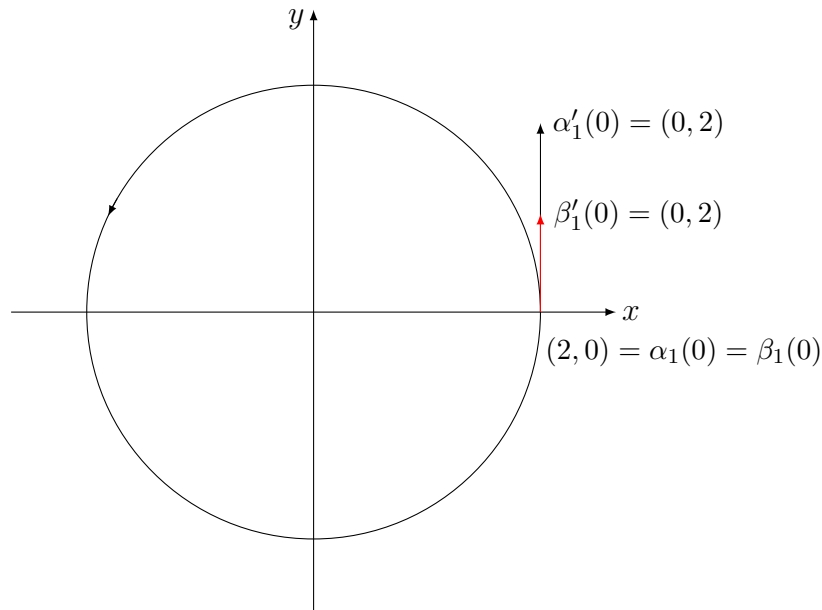
$$\alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad \text{e} \quad \beta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta_1(s) = (2 \cos(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2})).$$

Note que,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1(s) = (2 \cos(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2})) = \alpha_1(\frac{s}{2})$ . Logo  $\alpha$  e  $\beta$  tem o mesmo traço. Porém,

$$\alpha_1'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t), \forall t \in \mathbb{R};$$

$$\beta_1'(s) = \frac{1}{2}(-2 \sin(\frac{s}{2}), 2 \cos(\frac{s}{2})) = \frac{1}{2}\alpha_1'(\frac{s}{2}), \forall s \in \mathbb{R}.$$

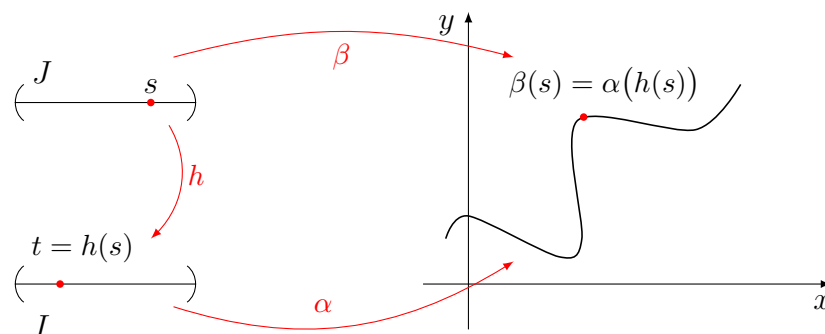
**Figura 3.8** – Curva Circular Parametrizada



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Proposição 3.1.** Sejam  $I, J \subset \mathbb{R}$  intervalos abertos,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) uma curva diferenciável regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$  tal que  $h(J) = I$  e  $h'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in J$ . Então a aplicação  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ), definida por  $\beta = \alpha \circ h$ , é uma curva diferenciável regular que tem o mesmo traço de  $\alpha$ .  $\beta$  é chamada *reparametrização* de  $\alpha$  por  $h$ .  $h$  é chamada *mudança de parâmetro*.

**Figura 3.9** – Diagrama da Mudança de Parâmetros



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Observação 3.14.** A mudança de parâmetro  $h : J \rightarrow I$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .

**Observação 3.15.** Se  $\beta$  for uma parametrização de  $\alpha$  por  $h : J \rightarrow I$ , isto é,  $\beta(s) = (\alpha \circ h(s))$  para todos  $s \in J$ , então  $\alpha$  será uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1} : I \rightarrow J$ , pois  $(\beta \circ h^{-1})(t) = \alpha(t)$  para todo  $t \in I$ .

### 3.2.2 Orientação de curvas

**Definição 3.16.** A *orientação* de uma curva regular  $\alpha$  é o sentido de percurso do traço de  $\alpha$ .

**Observação 3.17.** Seja  $\beta = \alpha \circ h$  uma reparametrização da curva  $\alpha$ . Então:  $\beta$  e  $\alpha$  têm a *mesma orientação* se  $h'(s) > 0$  para todo  $s \in J$ .  $\beta$  e  $\alpha$  têm *orientações opostas* se  $h'(s) < 0$  para todo  $s \in J$ .

Voltemos ao exemplo [3.13](#):

$$\alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad \text{e} \quad \beta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta_1(s) = (2 \cos(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2})).$$

Tomando  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(s) = \frac{s}{2}$ , note que  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Além disso, para todo  $s \in \mathbb{R}, h'(s) = \frac{1}{2} > 0$  e  $\beta_1(s) = \alpha_1(\frac{s}{2}) = \alpha_1(h(s)) = (\alpha_1 \circ h)(s)$ . Logo,  $\beta_1$  é uma reparametrização de  $\alpha_1$ , que tem a mesma orientação de  $\alpha_1$ .

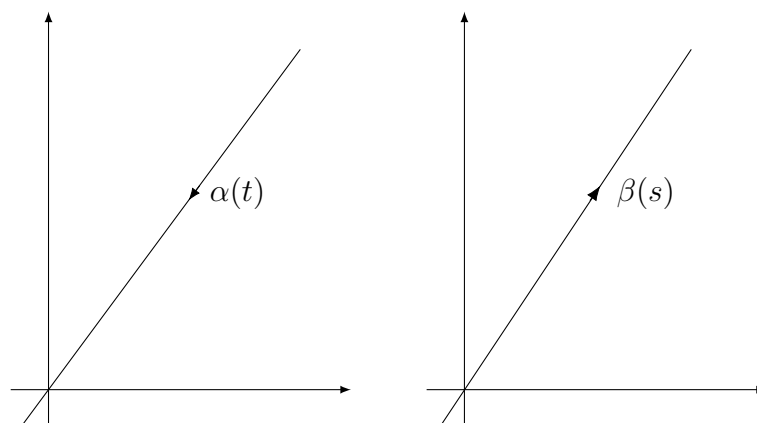
**Exemplo 3.18.** Considere as seguintes curvas diferenciáveis regulares:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t, 2t);$$

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2).$$

Note que  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(s) = -2s + 1$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Além disso, para todo  $s \in \mathbb{R}, h'(s) = -2 < 0$  e  $\beta(s) = \alpha(-2s + 1) = \alpha(h(s)) = (\alpha \circ h)(s)$ . Logo,  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , que tem orientação oposta a  $\alpha$ .

**Figura 3.10** – Curvas Parametrizadas com orientações opostas



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.;

### 3.3 Comprimento de Arco e Parametrização pelo comprimento de arco

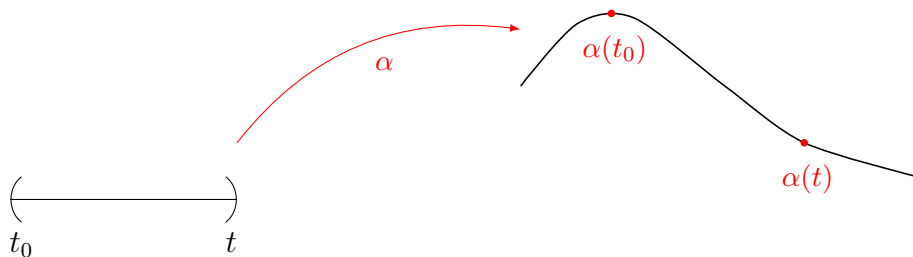
#### 3.3.1 Comprimento de Arco

**Definição 3.19.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) uma curva diferenciável regular. A função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

é denominada *função comprimento de arco* da curva  $\alpha$ , a partir de  $t_0$ , onde  $t_0 \in I$ .

**Figura 3.11** – Função comprimento de arco



Fonte: Adaptado de Delgado e Frensel, 2017.

**Observação 3.20.** A função comprimento de arco  $s : I \rightarrow J$ , onde  $J = s(I)$ , é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  sobre o intervalo aberto  $J$ .

#### 3.3.2 Parametrização pelo comprimento de arco

**Definição 3.21.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) uma curva diferenciável regular. Dizemos que  $\alpha$  está *parametrizada pelo comprimento de arco* (p.p.c.a.) se

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = t - t_0$$

para todos  $t_0, t \in I, t_0 \leq t$ . Em outras palavras, o comprimento de arco da curva  $\alpha$ , de  $t_0$  a  $t$  é igual ao comprimento do intervalo  $[t_0, t]$ .

**Proposição 3.2.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ .

**Exemplo 3.22.** Considere a curva diferenciável regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}))$ , onde  $r > 0$  é uma constante. Temos que  $\alpha'(s) = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}))$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\|\alpha'(s)\|^2 = (-\sin(\frac{s}{r}))^2 + (\cos(\frac{s}{r}))^2 = 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\|\alpha'(s)\| = 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Segue da Proposição [3.2](#) que  $\alpha$  está p.p.c.a.

**Proposição 3.3.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) uma curva diferenciável regular e  $s : I \rightarrow J$ , onde  $J = s(I)$ , a função comprimento de arco de  $\alpha$ , a partir de  $t_0$ . Então, existe a função inversa de  $s$ , denotada por  $h = s^{-1}$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Observação 3.23.** A aplicação  $\beta$  da Proposição 3.3 é dita uma *reparametrização* de  $\alpha$  pelo comprimento de arco. Note que esta reparametrização não é única, pois depende da função comprimento de arco que, por sua vez, depende de que  $t_0$  foi fixado em  $I$ .

**Exemplo 3.24.** Tomemos a curva regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ . Ela é conhecida como *espiral logarítmica*. Vamos obter uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

**1º passo:** Obtenhamos uma função comprimento de arco de  $\alpha$ . Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2]$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = e^{2t}[\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t]$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = 2e^{2t} \Leftrightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}e^t, t \in \mathbb{R}.$$

Optamos por obter a função comprimento de arco de  $\alpha$ , a partir de  $t_0 = 0$ :

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{2}e^\tau d\tau = \sqrt{2}e^\tau \Big|_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1), t \in \mathbb{R}$$

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}, t \in \mathbb{R}.$$

**2º passo:** Obtenhamos  $h = s^{-1}$ . Como

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}, t \in \mathbb{R},$$

temos

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}e^t = s(t) + \sqrt{2} \Leftrightarrow e^t = \frac{s(t) + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \ln \left( \frac{s(t) + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Note que

$$h(s) = \ln \left( \frac{s(t) + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), s \in (-\sqrt{2}, +\infty),$$

pois  $s$  é contínua e crescente, já que  $s'(t) = \sqrt{2}e^t > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} s(t) = -\sqrt{2} \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty.$$

**3º passo:** Obtenhamos  $\beta = \alpha \circ h$ . Para  $s \in (-\sqrt{2}, +\infty)$ , temos  $h(s) = \ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$  e

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(h(s)) \\ &= \left( \left( \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \cos \left[ \ln \left( \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right], \left( \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \text{sen} \left[ \ln \left( \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Segue da Proposição [3.3](#) que a curva  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

### 3.4 A Base de Frenet; Curvatura; Torção; Fórmulas de Frenet

#### 3.4.1 Curvatura

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. A velocidade com que as retas tangentes a  $\alpha$  mudam de direção é denominada *curvatura de  $\alpha$* , precisamente temos:

**Definição 3.25.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. A *curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$*  é o número real

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

**Exemplo 3.26.** Seja  $a > 0$  constante. Considere a curva regular:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{a} \right), a \text{sen} \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right), s \in \mathbb{R}.$$

O traço de  $\alpha$  é um círculo com centro na origem, raio  $a$ , contido no plano  $xy$ . Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\alpha'(s) = \left( -\text{sen} \left( \frac{s}{a} \right), \cos \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right), \|\alpha'(s)\|^2 = \text{sen}^2 \left( \frac{s}{a} \right) + \cos^2 \left( \frac{s}{a} \right) + 0^2 = 1.$$

Logo,  $\|\alpha'(s)\| = 1$ , para todos  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\alpha$  está p.p.c.a. Além disso, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha''(s) = \left( -\frac{1}{a} \cos \left( \frac{s}{a} \right), -\frac{1}{a} \text{sen} \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right), \|\alpha''(s)\|^2 = \frac{1}{a^2} \left[ \cos^2 \left( \frac{s}{a} \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{s}{a} \right) \right] = \frac{1}{a^2}$$

Logo,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , a curvatura de  $\alpha$  em  $s$  é  $k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{a}$ .

A proposição a seguir caracteriza as retas como sendo as únicas curvas regulares com curvatura identicamente nula.

**Proposição 3.4.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. Então  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e somente se  $k(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .



*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\alpha(I)$  é um segmento de reta então, temos  $\alpha(s) = P_0 + s\vec{v}$ ,  $s \in I$ , onde  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $\vec{v}$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$  (pois  $\alpha$  está p.p.c.a.). Assim, para todo  $s \in I$ ,  $\alpha'(s) = \vec{v}$  e  $\alpha''(s) = \vec{0}$ . Logo, para todo  $s \in I$ ,  $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $k(s) = 0$ , ou seja,  $\|\alpha''(s)\| = 0$  para todo  $s \in I$ . Logo,  $\alpha''(s) = \vec{0}$  e  $\alpha'(s) = \vec{v}$ , para todo  $s \in I$ . Como  $\alpha$  está p.p.c.a., então  $\|\vec{v}\| = 1$ , e com isso temos  $\alpha$  da forma  $\alpha(s) = P_0 + s\vec{v}$ , para todo  $s \in I$ , onde podemos finalmente concluir que  $\alpha(I)$  é um segmento de reta. ■

### 3.4.2 A Base de Frenet

**Observação 3.27.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular p.p.c.a. então  $\|\alpha'(s)\| = 1$ , para todo  $s \in I$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|^2 &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1, \forall s \in I \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \forall s \in I \\ \Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0, \forall s \in I. \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I. \end{aligned}$$

Portanto, nos pontos  $s \in I$  onde  $k(s) \neq 0$ , isto é,  $\alpha''(s) \neq \vec{0}$ , podemos definir um vetor unitário na direção de  $\alpha''(s)$ .

**Definição 3.28.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. e  $s_0 \in I$  tal que  $k(s_0) > 0$ . O vetor

$$\vec{n}(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{k(s_0)}$$

é denominado *vetor normal a  $\alpha$  em  $s_0$* .

A *reta normal a  $\alpha$  em  $s_0 \in I$*  é a reta  $r_{\vec{n}(s_0)}$  que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção do vetor  $\vec{n}(s_0)$ , ou seja,

$$r_{\vec{n}(s_0)} = \{\alpha(s_0) + \tau\vec{n}(s_0) | \tau \in \mathbb{R}\}.$$

**Observação 3.29.** Denotando por  $\vec{t}(s_0) = \alpha'(s_0)$ , temos:

$$\|\vec{t}(s_0)\| = 1, \text{ pois } \alpha \text{ está p.p.c.a.,}$$

$$\|\vec{n}(s_0)\| = \frac{\|\alpha''(s_0)\|}{k(s_0)} = \frac{k(s_0)}{k(s_0)} = 1$$

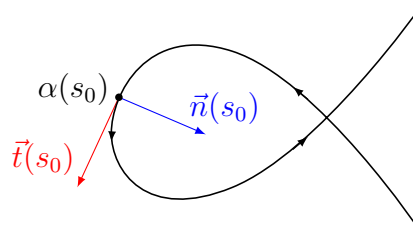
e

$$\langle \vec{t}(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle = \left\langle \alpha'(s_0), \frac{\alpha''(s_0)}{k(s_0)} \right\rangle = \frac{1}{k(s_0)} \langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = 0.$$

Logo,  $\vec{t}(s_0)$  e  $\vec{n}(s_0)$  são vetores ortonormais e  $\vec{t}'(s_0) = \alpha''(s_0) = k(s_0) \cdot \vec{n}(s_0)$ , ou seja,

$$\vec{t}'(s_0) = k(s_0) \cdot \vec{n}(s_0).$$

**Figura 3.12** – Vetores ortonormais



Fonte: Adaptado de Barbosa, 2021.

Observe que nos pontos  $s \in I$  onde  $k(s) = 0$ , o vetor normal  $\vec{n}(s)$  não está definido. Para prosseguirmos com a análise local de curvas regulares p.p.c.a., devemos garantir a existência desse vetor em cada  $s \in I$ . Nesse sentido, temos a seguinte definição:

**Definição 3.30.** Dizemos que  $s \in I$  é um *ponto singular de ordem 1* se  $\alpha''(s) = \vec{0}$ . Os pontos  $s \in I$  onde  $\alpha'(s) = \vec{0}$ , são denominados *pontos singulares de ordem 0*.

**Observação 3.31.** De agora em diante, só trabalharemos com curvas regulares p.p.c.a., sem pontos singulares de ordem 1.

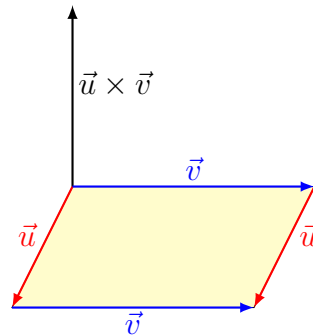
A seguir, definimos um terceiro vetor que, juntamente com  $\vec{t}$  e  $\vec{n}$ , formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.32.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $k(s) > 0$ , para todo  $s \in I$ . O *vetor binormal* a  $\alpha$  em  $s$  é

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s).$$

**Observação 3.33.** Lembre que se  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  são vetores não nulos tais que  $\vec{u}$  não é paralelo a  $\vec{v}$ , então  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ ,  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$  e  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{área do paralelogramo gerado por } \vec{u} \text{ e } \vec{v}$ . Logo, para todo  $s \in I$ ,  $\vec{b}(s) \perp \vec{t}(s)$ ,  $\vec{b}(s) \perp \vec{n}(s)$  e  $\|\vec{b}(s)\|$  é igual a área do paralelogramo gerado por  $\vec{t}(s)$  e  $\vec{n}(s)$ , ou seja, igual a área do quadrado de lado 1, que é 1.

**Figura 3.13** – Comprimento do vetor igual a área do paralelogramo



Fonte: Adaptado de Barbosa, 2021.

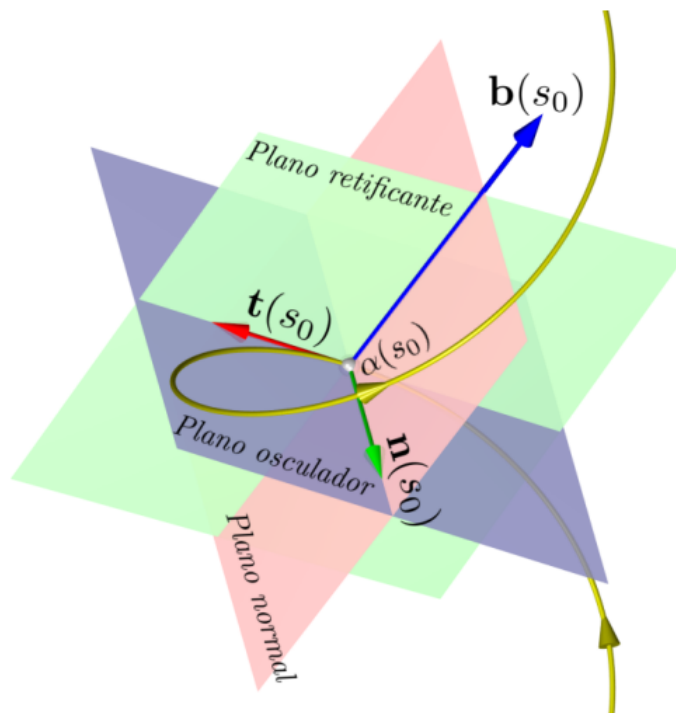
Para cada  $s \in I$ , a base ortonormal  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  é denominada *base (ou triedro) de Frenet de  $\alpha$  em  $s$* .

O plano que passa por  $\alpha(s)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{t}(s)$  e  $\vec{n}(s)$  é denominado *plano osculador de  $\alpha$  em  $s$* .

O plano que passa por  $\alpha(s)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{n}(s)$  e  $\vec{b}(s)$  é denominado *plano normal a  $\alpha$  em  $s$* .

O plano que passa por  $\alpha(s)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{t}(s)$  e  $\vec{b}(s)$  é denominado *plano retificante de  $\alpha$  em  $s$* .

**Figura 3.14** – Triedro de Frenet de  $\alpha$  em  $s_0$



Fonte: Delgado e Frensel, 2017.

**Observação 3.34.** Para cada  $s \in I$ , o vetor  $\vec{b}'(s)$  é paralelo ao vetor  $\vec{n}(s)$ .

*Demonstração.* De fato, para cada  $s \in I$ , temos:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{b}'(s) &= \frac{d}{ds} [\vec{t}(s) \times \vec{n}(s)] \\ &= \vec{t}'(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \\ &= (k(s)\vec{n}(s)) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \text{ (segue da observação 7)} \\ &= 0 + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \text{ (pois } k(s)\vec{n}(s) \text{ é paralelo à } \vec{n}(s))} \\ &= \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s). \end{aligned}$$

Logo, para todo  $s \in I$ ,  $\vec{b}'(s) \perp \vec{t}(s)$ . Além disso, para todo  $s \in I$ ,

$$\|\vec{b}(s)\| = 1 \Rightarrow \langle \vec{b}(s), \vec{b}(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \vec{b}'(s), \vec{b}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{b}'(s), \vec{b}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \vec{b}'(s) \perp \vec{b}(s).$$

Daí, para todo  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned} \vec{b}'(s) \perp \vec{t}(s) \text{ e } \vec{b}'(s) \perp \vec{b}(s) &\Rightarrow \vec{b}'(s) \perp \text{ plano paralelo a } \vec{t}(s) \text{ e } \vec{b}(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{b}'(s) \perp \text{ plano retificante de } \alpha \text{ em } s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{b}'(s) \text{ paralelo à } \vec{n}(s) \Leftrightarrow \vec{b}'(s) = \tau(s)\vec{n}(s), \text{ com } \tau(s) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

### 3.4.3 Torção

**Definição 3.35.** Para cada  $s \in I$ , o número real  $\tau(s)$  definido por

$$\vec{b}'(s) = \tau(s)\vec{n}(s)$$

é denominado torção da curva  $\alpha$  em  $s$ .

**Observação 3.36.** Note que  $\tau(s) = \langle \vec{b}'(s), \vec{n}(s) \rangle, \forall s \in I$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{b}'(s), \vec{n}(s) \rangle &= \langle \tau(s)\vec{n}(s), \vec{n}(s) \rangle \\
 &= \tau(s)\langle \vec{n}(s), \vec{n}(s) \rangle \\
 &= \tau(s)\|\vec{n}(s)\|^2 \\
 &= \tau(s) \cdot 1 \\
 &= \tau(s), \forall s \in I.
 \end{aligned}$$

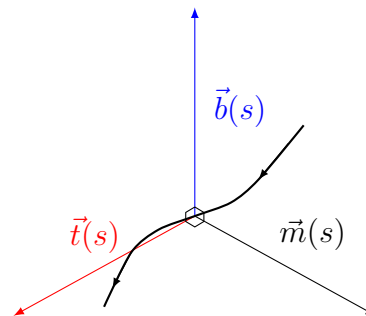
■

Disso segue que, numa curva regular  $\alpha$  p.p.c.a. sem pontos singulares de ordem 1,  $\tau(s)$  pode ser positiva, negativa ou zero. Entretanto,  $k(s) > 0, \forall s \in I$ , pois  $k(s) = \|\alpha''(s)\| > 0, \forall s \in I$  ( $\alpha''(s) \neq \vec{0}, \forall s \in I$ ).

Observando que  $\|\vec{b}'(s)\|$  mede a taxa de variação de  $\vec{b}$  numa vizinhança de  $s$  e  $\vec{b}(s) \perp$  plano osculador de  $\alpha$  em  $s$ , logo  $|\tau(s)| = \|\vec{b}'(s)\|$  mede o quão rápido a curva  $\alpha$  se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , do plano osculador de  $\alpha$  em  $s$ .

**Observação 3.37.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $k(s) > 0, \forall s \in I$ . Uma vez que, para cada  $s \in I$ ,  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ , então podemos escrever os vetores  $\vec{t}'(s), \vec{n}'(s)$  e  $\vec{b}'(s)$  como combinação linear de  $\vec{t}(s), \vec{n}(s)$  e  $\vec{b}(s)$  em  $s \in I$ .

**Figura 3.15** – Vetores como combinação linear



Fonte: Adaptado de Barbosa, 2021.

Segue da observação [3.34](#) e definição [3.35](#) que  $\vec{t}'(s) = k(s) \cdot \vec{n}(s)$  e  $\vec{b}'(s) = \tau(s) \cdot \vec{n}(s)$ , para todo  $s \in I$ . Falta escrever  $\vec{n}'(s)$  como combinação linear de  $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ .

Para cada  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(s) &= \vec{b}(s) \times \vec{t}(s) \Rightarrow \vec{n}'(s) = \vec{b}'(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{t}'(s) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \vec{n}'(s) = \tau(s)\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times k(s)\vec{n}(s) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{n}'(s) = \tau(s) \cdot (-\vec{b}(s)) + k(s)(-\vec{t}(s)) \Rightarrow \vec{n}'(s) = -k(s)\vec{t}(s) - \tau(s)\vec{b}(s),$$

onde usamos

$$\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) = -\vec{b}(s) \quad \text{e} \quad \vec{b}(s) \times \vec{n}(s) = -\vec{t}(s).$$

Em suma:

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular p.p.c.a. tal que  $k(s) > 0$ , para todo  $s \in I$ , então a base de Frenet de  $\alpha$  em  $s$ , definida por  $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ ,  $\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$  e  $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$  satisfaz as equações

$$\begin{cases} \vec{t}'(s) &= k(s) \cdot \vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) &= -k(s)\vec{t}(s) - \tau(s)\vec{b}(s) \\ \vec{b}'(s) &= \tau(s) \cdot \vec{n}(s) \end{cases}$$

Essas equações são denominadas *fórmulas de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$* .

**Exemplo 3.38.** Vamos obter, para cada  $s \in \mathbb{R}$ , a base de Frenet, a curvatura e a torção da curva regular p.p.c.a.

$$\alpha(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), s \in \mathbb{R},$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são constantes,  $a > 0$ .

**Solução:** Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \alpha'(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \right), \end{aligned}$$

que é o vetor tangente a  $\alpha$  em  $s$ . Agora, calculemos o módulo da derivada segunda de  $\alpha$  para encontrarmos a curvatura:

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left( -a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right) \\ &= -\frac{a}{a^2 + b^2} \left( \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\alpha''(s)\|^2 &= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \left[ \cos^2 \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \sin^2 \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right] \\ &= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, a curvatura de  $\alpha$  em  $s$  é dada por

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Com esse valor, temos o vetor normal a  $\alpha$  em  $s$ :

$$\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left( -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right).$$

O que nos leva ao vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$ :

$$\begin{aligned} \vec{b}(s) &= \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \vec{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \vec{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -b \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \right), \end{aligned}$$

e sua derivada

$$\vec{b}'(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left( b \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right),$$

que nos é útil para calcularmos finalmente a torção de  $\alpha$  em  $s$ :

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \langle \vec{b}'(s), \vec{n}(s) \rangle \\ &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \left[ \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 0^2 \right] \\ &= -\frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

## 4 SUPERFÍCIES REGULARES

Neste capítulo abordaremos um dos principais objetos da Geometria Diferencial, a saber, as superfícies regulares. Definiremos plano tangente, vetor normal, campo e superfícies orientáveis, e por fim a Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental. Usaremos nesse capítulo, além das referências já citadas, resultados de cálculo que podem ser vistos com maior riqueza de detalhes e demonstrações em [9] e [10].

### 4.1 Superfícies Regulares; Imagens inversas de valores regulares

**Definição 4.1.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que

1.  $X$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

2.  $X$  é um homeomorfismo. Como  $X$  é contínua pela condição 1, isto significa que  $X$  tem inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.
3. (condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

**Proposição 4.1.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.

*Demonstração.* Basta mostrar que a aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição 1 é verificada sem problemas, e a condição 3 também não oferece dificuldade, uma vez que  $\partial(x, z)/\partial(u, v) \equiv 1$ . Finalmente, cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $X$  de um único ponto  $(u, v) = (x, y) \in U$ . Consequentemente,  $X$  é bijetiva, e como  $X^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção (contínua) de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ ,  $X^{-1}$  é contínua, isto é

$$X^{-1} = \Pi|_{G_r(f)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \Pi|_{G_r(f)}(x, y, z) = (x, y).$$



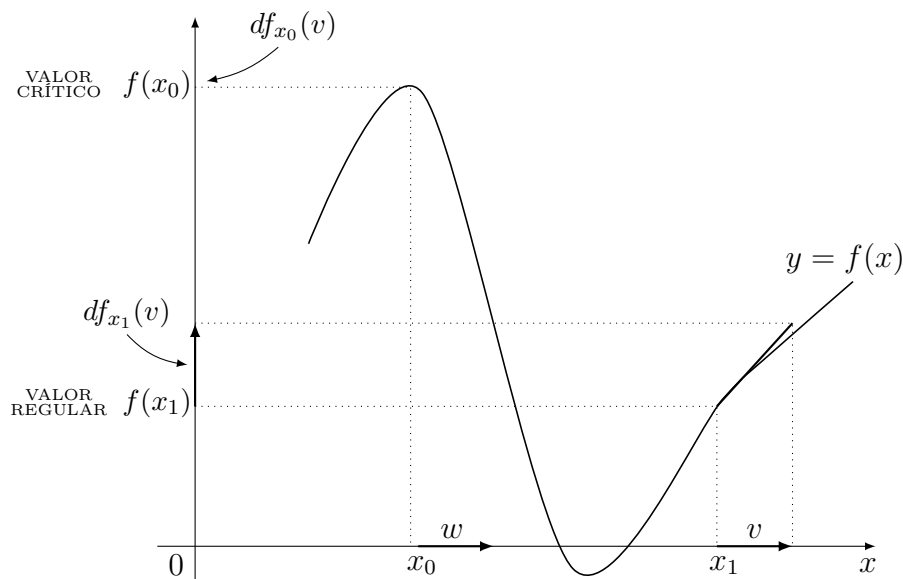


**Definição 4.2.** Seja  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável definida no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $p_0 \in U$  é um *ponto crítico de  $F$*  se a diferencial  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é sobrejetora. Um ponto  $b \in \mathbb{R}^m$  é um *valor crítico de  $F$*  se existe um ponto crítico  $p_0 \in U$  tal que  $F(p_0) = b$ . Um ponto  $a \in \mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico de  $F$  é chamado um *valor regular de  $F$* , isto é,  $dF_p$  é sobrejetora para todo  $p \in F^{-1}(a)$ .

**Observação 4.3.** Pela própria definição, se  $a \notin F(U)$ , então  $a$  é um valor regular de  $F$ .

**Observação 4.4.** A terminologia é evidentemente motivada pelo caso particular em que  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real de uma variável real. Um ponto  $x_0 \in U$  é crítico se  $f'(x_0) = 0$ , isto é, se a diferencial  $df_{x_0}$  leva todos os vetores em  $\mathbb{R}$  no vetor nulo. Note que qualquer ponto  $a \notin f(U)$  é, trivialmente, um valor regular de  $f$ .

**Figura 4.1** – Ponto crítico de  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Fonte: Adaptado de Carmo, 2005.

Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então  $df_p$  aplicada ao vetor  $(1, 0, 0)$  é obtida calculando-se o vetor tangente em  $f(p)$  à curva

$$x \longrightarrow f(x, y_0, z_0).$$

Decorre daí que

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

e, analogamente, que

$$df_p(0, 1, 0) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = f_z.$$

Concluimos que a matriz de  $df_p$  na base  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Note que nesse caso, dizer que  $df_p$  não é sobrejetiva é equivalente a dizer que  $f_x = f_y = f_z = 0$  em  $p$ . Portanto,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se e somente se  $f_x, f_y$  e  $f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}.$$

**Observação 4.5.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então  $df_p(e_1) = f_x(p)$ ,  $df_p(e_2) = f_y(p)$  e  $df_p(e_3) = f_z(p)$ . Portanto, dizer que  $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  não equivale a dizer que  $f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$ . Logo,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$  se, e só se,  $f_x, f_y$  e  $f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto do conjunto  $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = a\}$ , chamado a *pré-imagem* ou *imagem inversa* do ponto  $a$ .

**Teorema 4.6. (Teorema da Aplicação Inversa)** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^k, k \geq 1$ , tal que, num ponto  $p_0 \in U$ ,  $df_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo linear. Então existe um aberto  $V \subset U$  tal que  $p_0 \in V$ ,  $W = f(V)$  é aberto e  $f : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Proposição 4.2.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável definida no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Seja  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a)$ . Como  $a$  é um valor regular de  $f$ , temos que

$$\nabla f(p_0) = (f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)) \neq (0, 0, 0).$$

Suponhamos que  $f_z(p_0) \neq 0$  e consideremos a aplicação  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Como

$$dF_{p_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p_0) & f_y(p_0) & f_z(p_0) \end{pmatrix},$$

temos que  $\det(dF_{p_0}) = f_z(p_0) \neq 0$ . Logo,  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe um aberto  $V \subset U$  tal que  $p_0 \in V$ ,  $W = F(V)$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ , com  $F(p_0) = (x_0, y_0, a) \in W$ , e  $F : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .

Então  $F^{-1} : W \rightarrow V$ , dada por

$$F^{-1}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)),$$

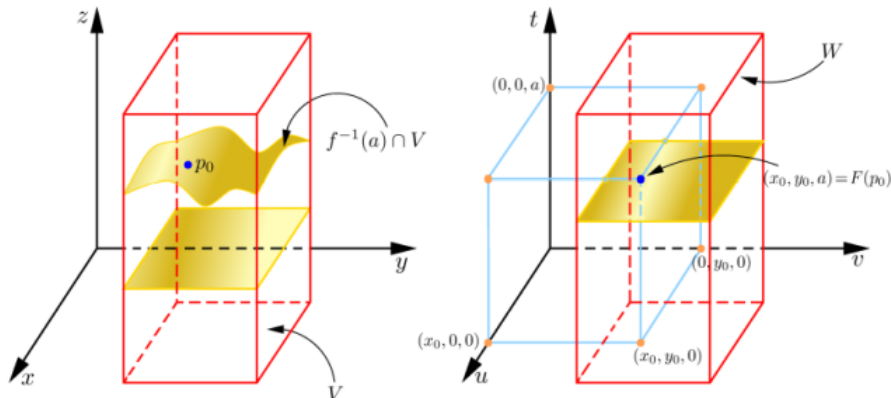
é diferenciável e  $x(u, v, t) = u$ ,  $y(u, v, t) = v$ , pois

$$(u, v, t) = F \circ F^{-1}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))),$$

para todo  $u, v, t \in W$ .

**Afirmção:**  $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) | t = a\}$ .

**Figura 4.2** – F diferenciável



Fonte: Delgado e Frensel, 2017.

De fato, seja  $(u, v, a) \in W \cap \{(u, v, t) | t = a\}$ . Então existe  $(x, y, z) \in V$  tal que  $(u, v, a) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ . Logo,  $f(x, y, z) = a$ , ou seja,  $(x, y, z) \in f^{-1}(a) \cap V$ . Portanto,  $u, v, a) = F(x, y, z) \in F(f^{-1}(a) \cap V)$ . Seja  $(x, y, z) \in f^{-1}(a) \cap V$ . Assim,  $F(x, y, z) = (x, y, a) \in W \cap \{(u, v, t) | t = a\}$ . Diminuindo  $V$ , se necessário, podemos tomar  $W = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$ . Seja  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  a função diferenciável dada por  $h(x, y) = z(x, y, a)$ , onde

$$U_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Logo,  $f^{-1}(a) \cap V$  é o gráfico da função  $h$ , pois

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) \cap V &= F^{-1}(W \cap \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 | t = a\}) = \{F^{-1}(x, y, a) | (x, y) \in U_0\} \\ &= \{(x, y, h(x, y)) | (x, y) \in U_0\} = \text{Graf}(h). \end{aligned}$$

Assim,  $f^{-1}(a) \cap V$  é um aberto de  $f^{-1}(a)$  e a aplicação  $X : U_0 \rightarrow f^{-1}(a) \cap V$ , dada por  $X(x, y) = (x, y, h(x, y))$  é, pela proposição 1.1, uma parametrização de  $f^{-1}(a)$  em  $p_0$ . Portanto,  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular, pois todo ponto  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberto por uma vizinhança coordenada. ■

**Exemplo 4.7.** O elipsóide

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

é uma superfície regular.

De fato, considere a função diferenciável  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x, y, z) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1.$$

Então

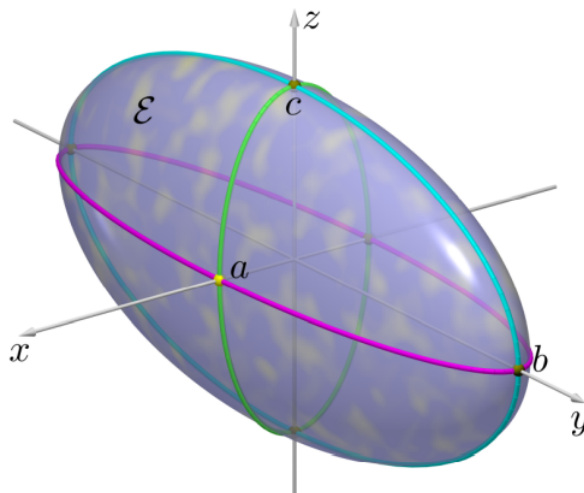
$$\nabla F(x, y, z) = \left( \frac{2(x - x_0)}{a^2}, \frac{2(y - y_0)}{b^2}, \frac{2(z - z_0)}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$$

se, e somente se,  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ .

Logo,  $F^{-1}(0) = \mathcal{E}$  é uma superfície regular, pois 0 é um valor regular de  $F$ , uma vez que o ponto crítico de  $F$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$ , não pertence a  $F^{-1}(0)$ .

Em particular,  $\mathcal{E}$  é a esfera de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r > 0$  quando  $a = b = c = r$ .

**Figura 4.3** – Elipsóide  $\mathcal{E}$

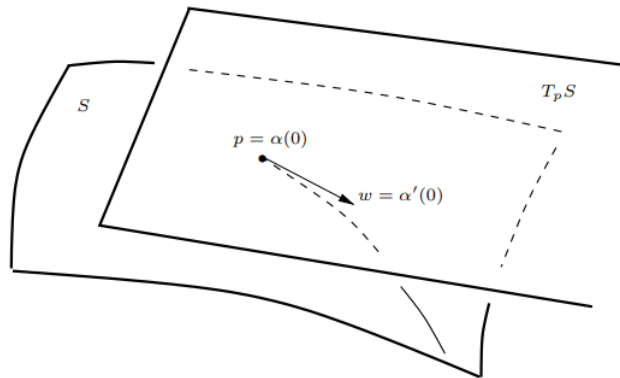


Fonte: Delgado e Frensel, 2017.

## 4.2 Plano Tangente

**Definição 4.8.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Dizemos que  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  é um *vetor tangente* a  $S$  em  $p$  se existe uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \vec{w}$ . Isto é,  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p$  se  $\vec{w}$  é tangente a alguma curva diferenciável de  $S$  no ponto  $p$ .

**Figura 4.4** – Plano tangente



Fonte: Lima, 2016.

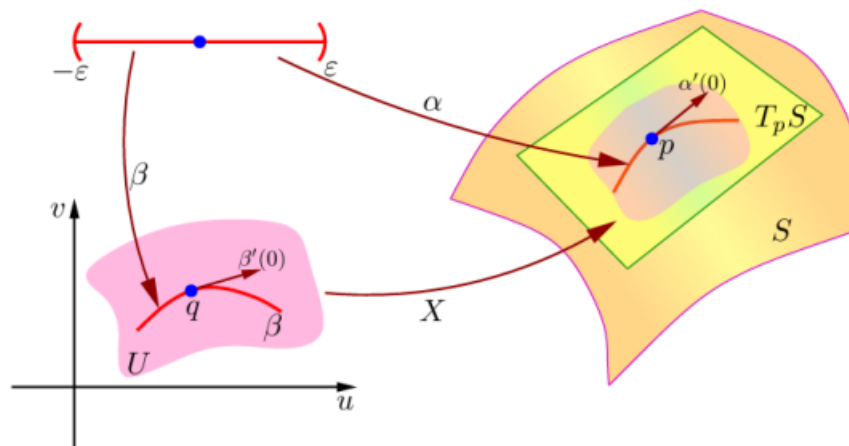
**Proposição 4.3.** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular,  $p \in S$  e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , com  $X(q) = p$ ,  $q \in U$ . Então, o subespaço vetorial de dimensão 2

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $p$ , ou seja,

$$dX_q(\mathbb{R}^2) = \{\text{vetores tangentes a } S \text{ em } p = X(q)\}.$$

**Figura 4.5** – Representação da curva diferencial



Fonte: Delgado e Frensel, 2017.

**Observação 4.9.** Segue da Proposição anterior que o conjunto dos vetores tangentes a  $S$  em  $p$  é um espaço vetorial de dimensão 2 e que o subespaço vetorial  $dX_q(\mathbb{R}^2)$  não depende da parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ , com  $X(q) = p$ ,  $q \in U$ , ou seja, se  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y(V) \subset S$  é outra parametrização de  $S$  em  $p$ , com  $Y(r) = p$ ,  $r \in V$ , então

$$dY_r(\mathbb{R}^2) = dX_q(\mathbb{R}^2) = \{\text{vetores tangentes a } S \text{ em } p\}.$$

**Definição 4.10.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular, com  $p \in S$ . O *plano tangente* a  $S$  em  $p$  é o plano que passa por  $p$  e esse plano é denotado por

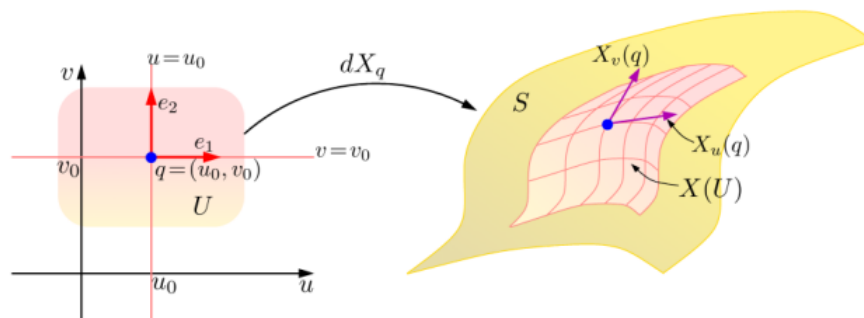
$$T_pS = dX_q(\mathbb{R}^2),$$

onde  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p = X(q)$ ,  $q \in U$ .

**Observação 4.11.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular, com  $p \in S$ . Se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$ , com  $X(q) = p$ ,  $q \in U$ , como  $T_pS = dX_q(\mathbb{R}^2)$ , segue que  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  é uma base de  $T_pS$ , denominada base de  $T_pS$  associada a  $X$ . Seja  $\vec{v} \in T_pS$ . Então  $\vec{v} = dX_q(\vec{w})$ , para algum  $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ . Além disso,

- $\vec{w} = (w_1, w_2) = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2$ , onde  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .
- $\vec{v} = dX_q(\vec{w}) = dX_q(w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2) = w_1dX_q(\vec{e}_1) + w_2dX_q(\vec{e}_2) = w_1X_u(q) + w_2X_v(q)$ .

**Figura 4.6** – Vetores tangentes as curvas



Fonte: Delgado e Frensel, 2017.

### 4.3 Vetor normal

**Definição 4.12.** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Dizemos que um vetor  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  é *normal* a  $S$  em  $p$  se ele for ortogonal a  $T_pS$ , isto é, se ele for ortogonal a todos os vetores tangentes a  $S$  em  $p$ .

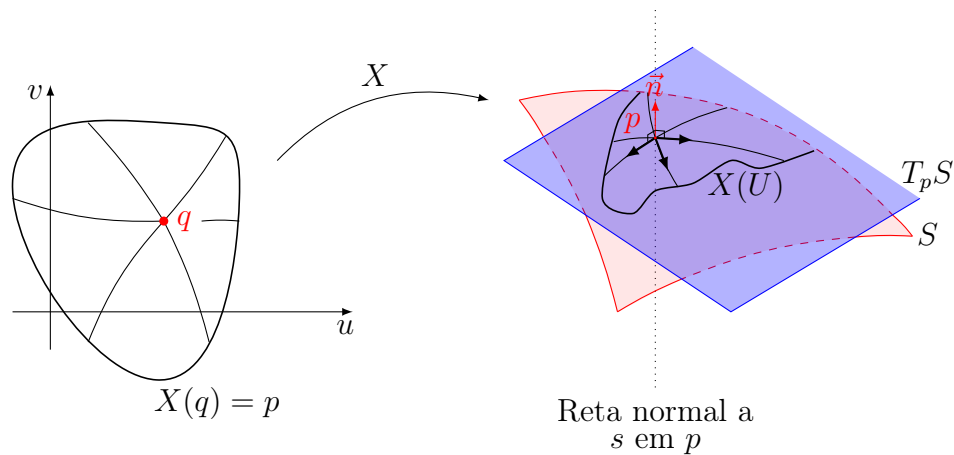
Dado  $p \in S$ , existe uma única direção normal a  $T_pS$ . Segue que existe exatamente dois vetores unitários normais a  $S$  em  $p$ . Fixada uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$

em  $p \in S$ , podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada  $\tilde{p} \in X(U)$  por

$$N(\tilde{p}) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(\tilde{q}),$$

onde  $X(\tilde{q}) = \tilde{p}$ . A outra possibilidade é  $-N(\tilde{p})$ .

**Figura 4.7** – Vetor normal



Fonte: Adaptado de Barbosa, 2021.

#### 4.4 Superfícies Orientáveis

A fim de introduzir apropriadamente o conceito de curvatura de superfícies, faz-se necessário considerar a noção topológica de orientabilidade, a qual pode ser introduzida de diversas maneiras. Por estarmos lidando com superfícies regulares, optaremos por aquela que se utiliza do conceito de campo normal diferenciável, conforme as definições que se seguem.

**Definição 4.13.** (Campos). Dada uma superfície regular  $S$ , chama-se *campo* em  $S$ , a toda aplicação  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Um tal campo é dito:

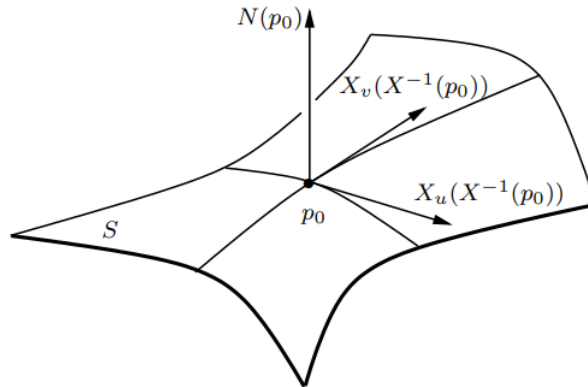
- *Unitário*, se  $\|f(p)\| = 1, \forall p \in S$ ;
- *Tangente*, se  $f(p) \in T_p S, \forall p \in S$ ;
- *Normal*, se  $f(p) \in T_p S^\perp, \forall p \in S$ .

De modo geral, designa-se um campo normal unitário e diferenciável numa superfície  $S$  por  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Para todo ponto  $p_0$  de uma superfície regular  $S$ , existe uma vizinhança aberta de  $p_0$  em  $S$ , na qual pode-se definir um campo normal unitário e diferenciável. Com efeito, basta considerar uma parametrização de  $S$  em  $p_0$ ,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ , e definir  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$N(p) = \frac{X_u(X^{-1}(p)) \wedge X_v(X^{-1}(p))}{\|X_u(X^{-1}(p)) \wedge X_v(X^{-1}(p))\|}$$

**Figura 4.8** – Campo normal



Fonte: Lima, 2016.

**Definição 4.14.** (Superfície Orientável). Diz-se que uma superfície regular  $S$  é *orientável*, quando nela pode-se definir um campo normal unitário e diferenciável. Feita a escolha de um tal campo, diz-se que o mesmo define uma *orientação* em  $S$  e que  $S$  está *orientada* pelo mesmo.

Segue das considerações que precedem a Definição anterior que:

- Toda superfície regular é localmente orientável;
- Toda superfície regular, a qual pode ser coberta pela imagem de uma única parametrização, é orientável.

Vejam, nos exemplos seguintes, que as superfícies regulares usuais são orientáveis.

**Exemplo 4.15.** (Planos). Seja  $S = \Pi(p_0, w)$  o plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém o ponto  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  e é ortogonal ao vetor unitário  $w \in \mathbb{R}^3$ . Claramente,  $S$  é orientável, pois a aplicação constante  $N(p) = w$ ,  $p \in S$ , é um campo normal unitário e diferenciável em  $S$ .

**Exemplo 4.16.** (Esferas). Dado um ponto  $p$  de uma esfera  $S$  de raio  $r > 0$  e centro  $c$ , conforme constatamos anteriormente,  $T_p S = p - c^\perp$ . Logo, a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $N(p) = \frac{p-c}{\|p-c\|}$ , define em  $S$  um campo normal unitário diferenciável, donde se infere que  $S$  é orientável.

Verifiquemos agora que uma superfície regular conexa orientável admite duas, e somente duas, orientações distintas.

**Proposição 4.4.** Sejam  $S$  uma superfície regular conexa e  $N_1, N_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos normais unitários e diferenciáveis definidos em  $S$ . Então,  $N_1 = N_2$  ou  $N_1 = -N_2$ .

*Demonstração.* Dado  $p \in S$ , temos que  $N_1(p) = N_2(p)$  ou  $N_1(p) = -N_2(p)$ , pois, ambos,



$N_1(p)$  e  $N_2(p)$ , são vetores unitários e ortogonais a  $T_p S$ . Logo,  $S$  é a união dos conjuntos

$$A = \{p \in S; N_1(p) = N_2(p)\} \text{ e } B = \{p \in S; N_1(p) = -N_2(p)\}.$$

Uma vez que  $N_1$  e  $N_2$  são aplicações contínuas, tem-se que  $A$  e  $B$  são fechados em  $S$ . Assim, uma vez que  $S$  é convexa, devemos ter  $A = S$  e  $B = \emptyset$  ou  $A = \emptyset$  e  $B = S$ . ■

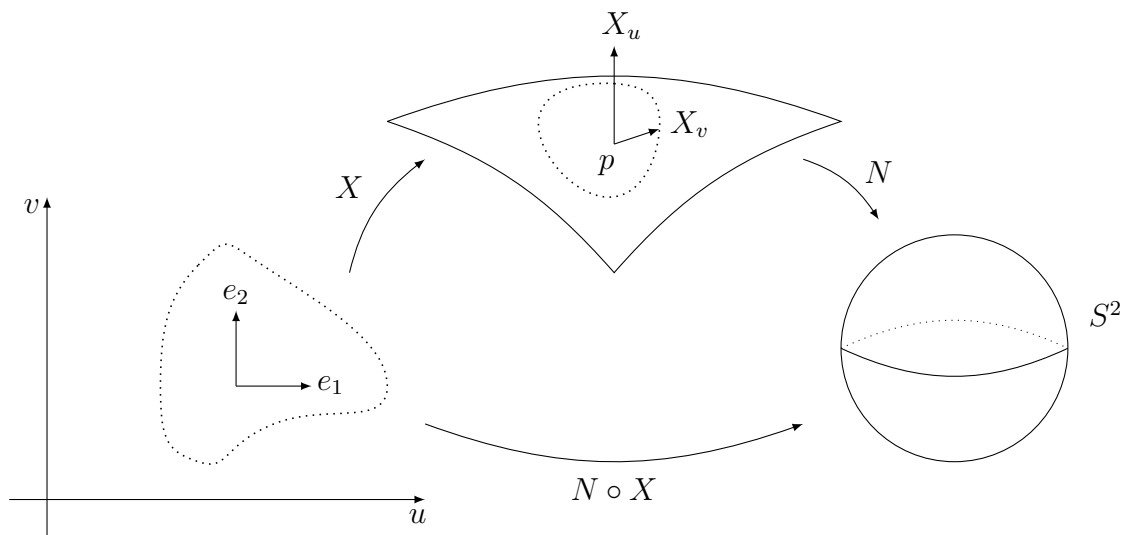
#### 4.5 Aplicação de Gauss e Segunda Forma Fundamental

Sejam  $S$  uma superfície regular orientável e  $N$  um campo normal unitário diferenciável definido em  $S$ . Assim, temos que  $\|N(p)\| = 1$ , para todo  $p \in S$ , isto é,  $N$  toma valores na esfera unitária  $S^2$ . A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$  é dita, então uma *aplicação normal de Gauss* de  $S$  (note que, pela proposição anterior, toda superfície regular orientável admite duas aplicações de Gauss).

Observando-se que, para todo  $p \in S$ ,  $T_p S = \{N(p)^\perp\} = T_{N(p)} S^2$ , temos que  $dN_p$  é um operador linear de  $T_p S$ . Constatemos na proposição seguinte, que esse operador é bastante especial.

**Observação 4.17.**  $A$  é auto-adjunta se  $\langle Aw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Aw_2 \rangle$ .

**Figura 4.9** –  $dN_p$  Autoadjunta



Fonte: O Autor, 2022

**Observação 4.18.**

- (i)  $(N \circ X)(u, v) = N(X(u, v))$ ;
- (ii)  $X_u = dX(e_1)$  e  $X_v = dX(e_2)$ ;
- (iii)  $N_u = \frac{\partial N}{\partial u}$  e  $N_v = \frac{\partial N}{\partial v}$ .

**Proposição 4.5.**  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  é auto-adjunta.

*Demonstração.* É suficiente mostrar que vale para uma base (vamos fazer para a base  $\{X_u, X_v\}$ ), então, basta mostrar que:

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle$$

Lembre que  $dN_p(X_u) = N_u$  e  $dN_p(X_v) = N_v$ . Logo,

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle.$$

Assim,

$$\langle N, X_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle.$$

Analogamente,

$$\langle X_u, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_u, N_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle.$$

Como pelo Teorema de Schwartz  $X_{uv} = X_{vu}$ , segue

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle$$

ou seja,

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle.$$

■

Considere uma superfície regular orientável  $S$  com orientação  $N$ . Conforme deixaremos claro adiante, faz-se conveniente considerarmos, para cada ponto  $p \in S$ , o operador  $-dN_p$ , ao invés de  $dN_p$ , o qual pela Proposição 4.5, é auto-adjunto. Daí e do Teorema Espectral, segue-se que  $-dN_p$  é diagonalizável, isto é, existem reais  $k_1 = k_1(p) \leq k_2 = k_2(p)$  (os autovalores de  $-dN_p$ ), e uma base ortonormal de  $T_pS$ ,  $\{w_1, w_2\}$ , a qual é formada pelos autovetores associados a  $k_1$  e  $k_2$ , isto é,

$$-dN_p w_1 = k_1 w_1 \quad \text{e} \quad -dN_p w_2 = k_2 w_2.$$

Os autovalores  $k_1$  e  $k_2$  são chamados de *curvaturas principais* de  $S$  em  $p$ , enquanto as direções determinadas por  $w_1$  e  $w_2$  são chamadas de *direções principais* de  $S$  em  $p$ ,  $H(p)$  e  $K(p)$ , são definidas por

- $K(p) = \det(-dN_p) = k_1(p)k_2(p)$ ;
- $H(p) = \frac{1}{2}\text{traço}(-dN_p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$ .

Em particular,  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  são raízes do polinômio característico de  $-dN_p$ ,

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p),$$

ou seja,

$$\begin{cases} k_1(p) = H(p) - \sqrt{H^2(p) - K(p)} \\ k_2(p) = H(p) + \sqrt{H^2(p) - K(p)} \end{cases}$$

Note que  $H^2(p) - K(p) = \frac{(k_1(p) - k_2(p))^2}{4} \geq 0$ , donde

$$K(p) \leq H^2(p) \quad \forall p \in S.$$

Deve-se observar também que as curvaturas principais,  $k_1(p) = k_2(p)$ , mudam de sinal quando se troca a orientação de  $S$  e, portanto, o mesmo ocorre com a curvatura média, enquanto a curvatura gaussiana permanece invariante.

Os pontos  $p \in S$  para os quais vale a igualdade  $H^2(p) = K(p)$ , isto é, que cumprem  $k_1(p) = k_2(p)$ , são ditos *umbílicos*. Uma superfície regular orientável é dita *totalmente umbílica* quando todos os seus pontos são umbílicos.

**Exemplo 4.19.** (Planos). Consideremos o plano  $S = \Pi(p_0, w)$  e a aplicação normal de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ ,  $N(p) = w$ , a qual, por ser constante, tem derivada identicamente nula. Logo, com essa orientação, tem-se que  $k_1(p) = k_2(p) = 0$ , para todo  $p \in S$ , isto é,  $S$  é totalmente umbílica e suas curvaturas média e gaussiana são identicamente nulas.

Antes de iniciarmos o capítulo em que focaremos no tema de nosso trabalho, temos que definir os conceitos da segunda forma fundamental e seção normal, dois conceitos que usaremos mais a frente e que podem ser vistos mais detalhadamente em [7].

**Definição 4.20.** (Segunda forma fundamental). Sejam  $S$  uma superfície regular orientável e  $N$  uma aplicação normal de Gauss de  $S$ . A *segunda forma fundamental* de  $S$  num ponto  $p \in S$ , relativa à orientação  $N$ , é a forma quadrática de  $T_p S$  determinada pelo operador  $-dN_p$ , isto é,

$$II_p(w) = \langle -dN_p w, w \rangle, w \in T_p S.$$

**Definição 4.21.** (Seção Normal). Sejam  $p$  um ponto de uma superfície regular orientável,  $S$ , e  $N$  uma aplicação normal de Gauss definida em  $S$ . A *seção normal* de  $S$  em  $p$  determinada por um vetor unitário  $w \in T_p S$  é a interseção de  $S$  com o plano afim  $II_w + p$ , em que  $II_w$  é o plano gerado por  $w$  e  $N(p)$ .

## 5 EXISTÊNCIA DE PONTO ELÍPTICO EM SUPERFÍCIES COMPACTAS.

Por meio da curvatura gaussiana, podemos fazer uma classificação dos pontos de uma superfície regular qualquer. Esse tipo de classificação nos permite verificar o comportamento de curvas em vizinhanças de um determinado ponto. No entanto, vamos apenas atentar para a definição de pontos elípticos, ou seja, pontos cuja curvatura gaussiana é positiva, ou ainda, pontos em que as curvaturas principais têm sinais iguais, isto é, todas as curvas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano tangente.

### 5.1 Classificação dos pontos de uma superfície regular

**Definição 5.1.** Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado

1. Elíptico, se  $\det(dN_p) > 0$  ( $k > 0$ )
2. Hiperbólico, se  $\det(dN_p) < 0$  ( $k < 0$ )
3. Parabólico, se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$
4. Planar, se  $dN_p = 0$  ( $k = 0$ ).

### 5.2 Existência de ponto elíptico

A seguir, apresentaremos alguns resultados que serão de suma importância para provar o principal resultado deste trabalho, a saber, o Teorema 5.4, que garante a existência de pelo menos um ponto elíptico em toda superfície compacta, ou seja, a curvatura gaussiana nesse ponto será positiva.

**Lema 5.2.** Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular plana. Se existe  $t_0$ ,  $a < t_0 < b$ , tal que a distância  $\|\alpha(t)\|$  do traço de  $\alpha$  à origem seja máxima em  $t_0$ , então a curvatura  $k$  de  $\alpha$  em  $t_0$  satisfaz  $\|k(t_0)\| \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$ .

*Demonstração.* Considere  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  p.p.c.a. Por hipótese, temos que

$$\|\alpha(t_0)\| \geq \|\alpha(t)\|,$$

para todo  $t \in (a, b)$ . Agora, considerando  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(t) = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = \|\alpha(t)\|^2$$

temos

$$f''(t) = 2(\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle), \quad (5.1)$$

pois,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle \\ &= 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + 2\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= 2(\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle). \end{aligned}$$

Agora, como  $t_0$  é ponto de máximo de  $f$ , teremos  $f''(t) \leq 0$ . Assim, de (5.1), tem-se

$$\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle \leq 0,$$

isto é,

$$\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) \rangle + \|\alpha'(t_0)\|^2 \leq 0.$$

Ora, como  $\|\alpha'(t_0)\| = 1$ , temos

$$1 \leq -\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) \rangle.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) \rangle\| \\ &\leq \|\alpha''(t_0)\| \cdot \|\alpha(t_0)\| \\ &= \|k(t_0)\| \cdot \|\alpha(t_0)\| \end{aligned}$$

ou seja,

$$k(t_0) \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|}.$$

■

**Lema 5.3.** Seja  $C$  uma curva plana contida no interior de um disco de raio  $r$ . Existe um ponto  $p \in C$  tal que a curvatura  $k$  de  $C$  em  $p$  satisfaz

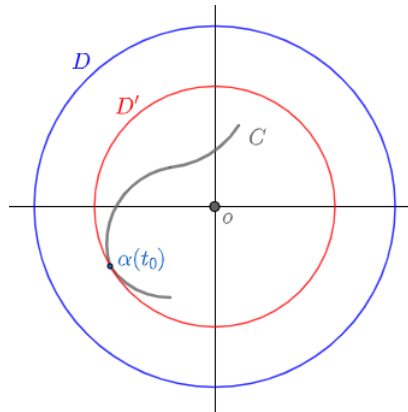
$$|k| \geq \frac{1}{r}.$$

*Demonstração.* Seja  $C$  o traço de  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $D$  um disco de centro  $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  e de raio  $r$ , onde contém a curva  $C$ . Daí,

$$\|\alpha(t)\| \leq r, \forall t \in I.$$

Diminuindo continuamente o raio de  $D$  através de círculos concêntricos<sup>1</sup>, de modo que, a fronteira desse novo disco, por exemplo, o disco  $D'$ , toque a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  pela primeira vez no ponto  $p = \alpha(t_0)$ . Observe:

**Figura 5.1** – Curva entre discos



Fonte: O Autor, 2022.

Daí, segue que

$$\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(t_0)\| \leq r$$

Assim, pelo Lema (5.2), tem-se

$$\|k(t_0)\| \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|} \geq \frac{1}{r}.$$

Logo,  $|k| \geq \frac{1}{r}$  em  $p \in C$ . ■

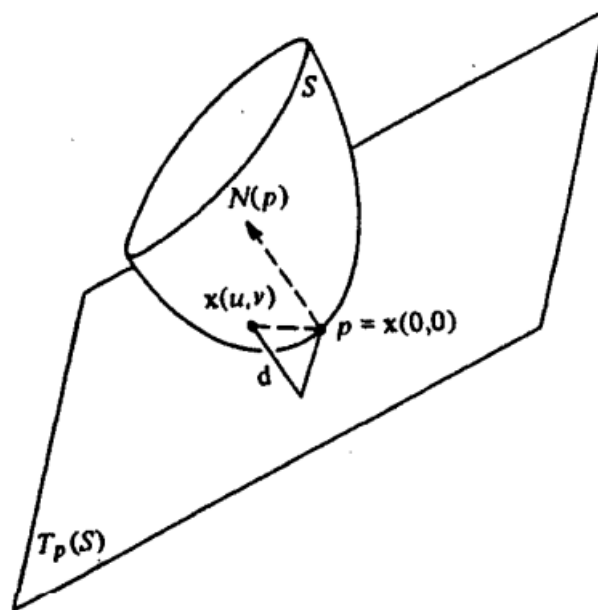
**Proposição 5.1.** Seja  $p \in S$  um ponto elíptico de uma superfície  $S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que todos os pontos de  $V$  estão do mesmo lado do plano tangente  $T_p S$ . Seja  $p \in S$  um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança de  $p$  existem pontos de ambos os lados de  $T_p S$ .

*Demonstração.* Seja  $X(u, v)$  uma parametrização em  $p$ , com  $X(0, 0) = p$ . A distância  $d$ , de um ponto  $q = X(u, v)$  ao plano tangente  $T_p S$  é dada por (figura 5.2)

$$d = \langle X(u, v) - X(0, 0), N(p) \rangle.$$

<sup>1</sup>Dois círculos são concêntricos quando compartilham do mesmo centro.

**Figura 5.2** – Distância  $d$  do ponto  $p$  ao plano tangente



Fonte: Carmo, 2005.

Como  $X(u, v)$  é diferenciável, temos a fórmula de Taylor:

$$X(u, v) = X(0, 0) + X_u u + X_v v + \frac{1}{2}(X_{uu}u^2 + 2X_{uv}uv + X_{vv}v^2) + \bar{R},$$

onde as derivadas são calculadas em  $(0, 0)$  e o resto  $\bar{R}$  satisfaz a condição

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}}{u^2 + v^2} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d &= \langle X(u, v) - X(0, 0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle X_{uu}, N(p) \rangle u^2 + 2 \langle X_{uv}, N(p) \rangle uv + \langle X_{vv}, N(p) \rangle v^2 \} + R \\ &= \frac{1}{2} (eu^2 + 2fuv + gv^2) + R = \frac{1}{2} II_p(w) + R, \end{aligned}$$

onde  $w = X_u u + X_v v$ ,  $R \langle \bar{R}, N(p) \rangle$ ,  $\lim_{w \rightarrow 0} (R/|w|^2) = 0$ .

Em um ponto elíptico  $p$ ,  $II_p(w)$  tem sinal fixo. Portanto, para todo  $(u, v)$  suficientemente próximo a  $p$ ,  $d$  tem o mesmo sinal que  $II_p(w)$ ; isto é, todos os pontos  $(u, v)$  estão do mesmo lado de  $T_p S$ .

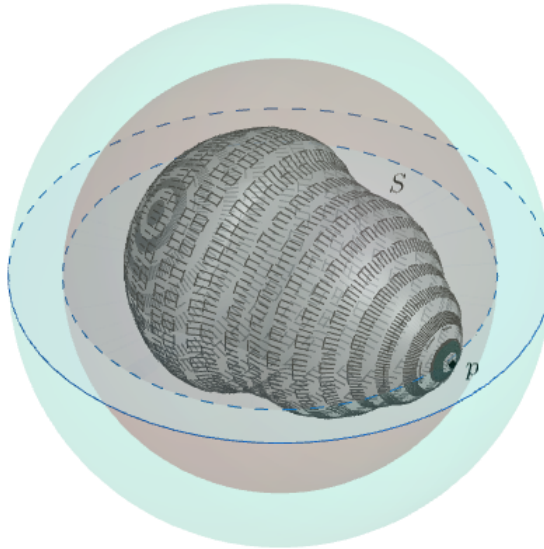
Para um ponto hiperbólico  $p$ , em cada vizinhança de  $p$  existem pontos  $(u, v)$  e

$(\bar{u}, \bar{v})$  tais que  $II_p(w/|w|)$  e  $II_p(\bar{w}/|\bar{w}|)$  têm sinais opostos (aqui  $\bar{w} = X_u\bar{u} + X_v\bar{v}$ ); tais pontos pertencem, portanto, a lados distintos de  $T_pS$ . ■

**Teorema 5.4** (Existência de ponto elíptico em superfícies compactas). Qualquer superfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ , possui algum ponto elíptico.

*Demonstração.* Considere  $S$  uma superfície compacta. Pela limitação de  $S$ , existirá um número real  $r > 0$  tal que  $S \subset S^2(r)$ , ou seja,  $S$  encontra-se em alguma esfera de centro zero e raio  $r$ . Assim, diminuindo continuamente o raio da esfera, de modo que,  $p$  seja o ponto (ou os pontos) onde a esfera, com centro na origem e de raio  $r_1$ , toca a superfície  $S$  pela primeira vez.

**Figura 5.3** – Superfície  $S$  contida pelas esferas de raio  $r$  e  $r_1$



Fonte: O Autor, 2022.

Sejam  $C_S$  e  $C_{S^2(r_1)}$  as seções normais de  $S$  e  $S^2(r_1)$ , respectivamente, isto é,  $C_{S^2(r_1)}$  é um disco de raio  $r$  que contém  $C_S$ . Consequentemente, pelo Lema 5.3, tem-se que

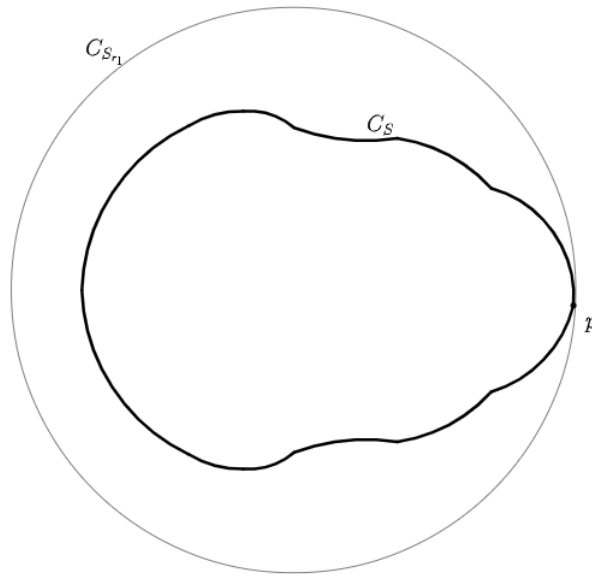
$$|K_n(p)| = |K(p)| \geq \frac{1}{r} > 0,$$

onde  $K$  é a curvatura de  $C_S$ . Portanto,  $p$  não pode ser parabólico ou planar. Note que, pela proposição anterior,  $p$  não pode ser um ponto hiperbólico, logo segue que  $p$  será um ponto elíptico. ■

Como exemplo imediato deste resultado, mostraremos que todos os pontos de uma esfera, que é uma superfície compacta, tem apenas pontos elípticos.



**Figura 5.4** – Seções normais de  $S$  e  $S^2(r_1)$



Fonte: O Autor, 2022.

**Exemplo 5.5.** (Curvatura da esfera) Seja  $S^2(r)$  a esfera de  $\mathbb{R}^3$  com raio  $r > 0$ . A aplicação normal de Gauss  $N$ , definida para todo  $x \in S^2(r)$  será dada por:

$$\begin{aligned} N : S^2(r) &\longrightarrow S^2 \\ x &\mapsto N(x) = \frac{x}{r} \end{aligned}$$

Daí, para todo  $v \in T_x S$ , segue que

$$dN_v(x) = \frac{v}{r}$$

Assim, concluímos que  $K_1 = K_2 = \frac{1}{r}$  para todo  $x \in S^2(r)$ . Portanto, seja qual for o ponto  $p$  da esfera sua curvatura será positiva, ou seja,

$$K(p) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} > 0.$$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para entender este trabalho foi necessário estudar e relembrar vários temas vistos durante o curso de graduação em Matemática, como cálculo diferencial e integral, análise real, álgebra linear e geometria analítica. O método de estudo, apresentado pelo orientador, facilitou bastante o processo de aprendizagem. Encontros virtuais semanais, sobre os temas iniciais de análise, cálculo diferencial e integral e topologia, para que pudesse ser criada uma maior maturidade no assunto, fizeram total diferença. Foi necessário bastante empenho para entender os conceitos "básicos" como curvas e suas propriedades para avançarmos aos poucos em superfícies. Acredito que o estudante de matemática ou áreas afins que queiram aprender mais sobre os assuntos apresentados nesse texto deveriam ter como meta de leitura os livros e trabalhos citados nas referências. Admito que no início, quando foi me apresentado o tema do trabalho, não conseguia nem imaginar o que seria um ponto elíptico de uma superfície compacta, hoje sou grato ao professor Geovane por ter me apresentado tão belo resultado. Para finalizar, acreditamos que o objetivo central foi alcançado.

## REFERÊNCIAS

- [1] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio De Janeiro, 2005.
- [2] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. *Geometria Diferencial I*. Universidade Federal Fluminense: [s.n.], 2017. 393 p. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2022.
- [3] Geometria Diferencial - Profa. Aline Mauricio Barbosa. [S. I.: s. n.], 2021. 20 vídeos (452 min). Publicado pelo canal Aline Mauricio Barbosa. Disponível em: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLwrfdhMyXahfbJSNLpt7xJ78IFTGjdBOh>. Acesso em: 21 jun. 2022.
- [4] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável*. 12 ed. vol 1. Coleção Matemática Universitária, Impa, Rio de Janeiro, 2014.
- [5] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de n variáveis*. 6 ed. vol 2. Coleção Matemática Universitária, Impa, Rio de Janeiro, 2016.
- [6] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 13 ed. vol 1. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [7] Lima, R. F. *Introdução à Geometria Diferencial*. 1 ed. SBM, Macapá, 2016.
- [8] Lima, R. F. *Topologia e Análise no  $R^n$* . Textos universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [9] Lourêdo, A. T.; Oliveira, A. M.; Lima, O. A. *Um Primeiro curso de Álgebra Linear*. Eduepb, Campina Grande, 2015.
- [10] Lourêdo, A. T.; Oliveira, A. M.; Lima, O. A. *Cálculo Avançado*. Eduepb, Campina Grande, 2010.