UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUANDRO ALVES CARDOSO CORDEIRO

O ENSINO DOS POLINÔMIOS E SUA APLICABILIDADE NA GEOMETRIA

CAMPINA GRANDE
2022

LUANDRO ALVES CARDOSO CORDEIRO

O ENSINO DOS POLINÔMIOS E SUA APLICABILIDADE NA GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2022

C794e Cordeiro, Luandro Alves Cardoso.
O ensino dos polinômios e sua aplicabilidade na geometria [manuscrito] / Luandro Alves Cardoso Cordeiro. - 2022.
51 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Departamento de Matemática - CCT."

1. Polinômios. 2. Geometria. 3. Ensino de Matemática. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

LUANDRO ALVES CARDOSO CORDEIRO

O ENSINO DOS POLINÔMIOS E SUA APLICABILIDADE NA GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em: 22/09/2022

BANCA EXAMINADORA

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana medeiros Graciano

Profa. Me. Katia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Joselma Soares dos Santos

Prof. Me. Joselma Soares dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia e a meus pais, Leonardo Cordeiro e Maria da Salete(in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer este momento importante na minha carreira profissional, primeiramente a Deus, pois sem ele eu não teria tido forças em meio a tantos obstáculos impostos pela vida para concluir o curso.

A toda minha família que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À minha esposa, pessoa com quem amo partilhar a vida. Sempre me apoiando e me dando forças para continuar. Com você tenho me sentido mais vivo de verdade. Obrigado pelo carinho, a paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia a dia.

Agradeço a minha colega de curso Maria da Guia, pela parceria que tivemos em todo o decorrer da nossa formação, nos tornamos grandes amigos.

Agradeço de coração a minha professora orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas que abraçou esse projeto com muita paciência e compromisso e por sua competência, não mediu esforços para estar sempre me ajudando a concluir este trabalho.

Agradeço também a todos os professores desta instituição de ensino que foram muito importantes na minha vida acadêmica, que me ensinaram e me mostraram o quanto a matemática é fascinante.

"A beleza da matemática só se mostra aos seguidores mais pacientes."

Maryam Mirzakhani

RESUMO

O estudo dos polinômios é imprescindível para o ensino da matemática, uma vez que, é possível associar o seu aprendizado com várias coisas que acontecem no nosso dia a dia, como por exemplo, relacionando com o estudo da geometria, podemos identificar aplicações práticas. Tanto a BNCC como os PCN trazem em suas diretrizes a importância do ensino da matemática, em particular, dos polinômios, estando presente nas outras áreas de estudo, mesmo que indiretamente. Por isso, o objetivo desse trabalho é fazer um estudo dos polinômios relacionando-o com a geometria, afim de poder observar como sua aplicabilidade pode ser interessante quando se pensa além da matemática abstrata, sendo uma ferramenta muito importante para o aprendizado dos alunos. Esse trabalho justifica-se pelo fato de abordar como o ensino pode ser mais simples com as ferramentas corretas, uma vez que traz aplicações mostrando como elas podem facilitar o aprendizado dos polinômios. Metodologicamente trata-se de um trabalho de cunho qualitativo, exploratório e bibliográfico, sendo amparado pelas referências Boyer (1974), Dante (2016), Eves (2011), entre outros.

Palavras-chave: Polinômios; Matemática; Geometria.

ABSTRACT

The study of polynomials is a fundamental example for the teaching of mathematics, since it is possible to identify its learning with things that happen in our daily lives, such as, relating to the study, we can identify practical applications. Both the BNCC and the PCN, even if in their particular guidelines, of the polynomial, are present as attributions of mathematics teaching, even if in other areas of commitment. Therefore, the objective of this work is to make a study of polynomials relating it to geometry, in order to be able to observe how its applicability can be interesting when thinking beyond abstract mathematics, being a very important tool for student learning. This is justified by the fact that it addresses how the simplest job can be with the right tools, since it brings teaching applications as they can facilitate polynomial learning. Methodologically, it is a qualitative, exploratory and bibliographic work, supported by the references Boyer (1974), Dante (2016), Eves (2011), among others.

Keywords: Polynomials; Math; Geometry.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

α Alfa

β Beta

$\in$ Pertence

$\Rightarrow$ Implica

$=$ Igual

$\Leftrightarrow$ Se, e somente se

Σ Somatório

$\forall$ Para todo

$\exists$ Existe

$<$ Menor que

$>$ Maior que

$\leqslant$ Menor ou igual

$\geqslant$ Maior ou igual

∂ Grau

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da matemática sempre foi um desafio para os professores, por ser uma disciplina que requer muita concentração e atenção, por isso, é necessário que o professor saiba utilizar meios para que o aluno consiga absorver a informação que é dada na sala de aula. Sua história traz uma carga de conhecimento muito grande, nomes importantes fazem parte do seu histórico de conquistas e feitos que foram sendo adquiridos através de mentes brilhantes que até hoje são conhecidas. A matemática foi evoluindo aos poucos, até se tornar mais complexa e seus números se transformarem em letras e, consequentemente, seu alcance não ter fim, pois ela é infinita e sua beleza está nos números e letras que a abordam.

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo sobre a teoria dos polinômios e destacar a sua aplicabilidade através de situações relacionadas a geometria.

A matemática está presente no nosso dia a dia e nos outros componentes acadêmicos, vez ou outra serão utilizados os números para algo, dessa maneira, a geometria pode utilizar suas formas para demonstrar como esses cálculos podem ser vistos de maneira mais acessível para o aprendizado.

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.(BNCC, p. 267)

Esse trabalho justifica-se pela capacidade de elencar outras possibilidades nas quais a matemática pode ser aplicada, já que a utilizamos em diferentes áreas. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), é importante o professor saber demonstrar como esse ensino pode ser aplicado em diferentes situações do cotidiano do aluno, seja escolar ou social. O estudante passa por diferentes mudanças todos os dias e muitas dessas coisas tem a matemática envolvida, nessa situação, é de extrema importância que o docente saiba mediar o ensino dentro do que o alunado vivencia no seu cotidiano, para que ele possa associar essa mudanças e novidades ao que ele vê em sala de aula.

A geometria tem um papel muito importante no ensino dos polinômios, pois seu estudo mesmo sendo completo se torna mais acessível ao aprendizado quando pode ser associado a imagens. Nesse trabalho traremos algumas aplicações que demonstram tal informação.

A matemática com o tempo passou a contar com auxílio da tecnologia que possibilita seu uso através de softwares. Depois da pandemia do COVID-19, o uso de tecnologias como auxílio didático ficou ainda mais ativo, revelando a diversidade que seu uso pode trazer, como por exemplo, o *software Geogebra*, que possibilitou ainda mais o aprendizado dos polinômios por meio da geometria.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo este da introdução. Em seguida, temos o capítulo 2 contendo o contexto histórico sobre como a matemática é baseada em papiros do antigo Egito. O terceiro capítulo aborda o ensino de polinômios, o que diz a BNCC e os PCNs no contexto do ensino e desenvolvimento educacional, a importância de interligar a área de geometria e álgebra e o uso de recursos tecnológicos como ferramenta para o ensino e aprendizagem. O quarto capítulo é onde abordamos os resultados e os principais conceitos sobre a teoria básica dos polinômios com exemplos e gráficos. Por fim, temos no capítulo 5 algumas aplicações para podermos apresentar os resultados do conteúdo previamente abordado com imagens e interpretações no contexto da geometria.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo, vamos apresentar um breve histórico sobre a origem e os principais matemáticos que contribuíram para desenvolvimento do pensamento algébrico.

Uma parte do que se sabe historicamente sobre a matemática é baseado em dois grandes papiros: o Papiro de Rhind e o Papiro de Moscou. Encontrado no antigo Egito, o papiro Rhind ou Ahmes foi comprado pelo arqueólogo escocês Rhind [1], onde supostamente teria sido descoberto nas ruínas de um antigo edifício de Tebas. Datado aproximadamente no ano 1650 a.C., este papiro foi encontrado na forma de um manual contendo 85 problemas em escrita hierática, pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O Papiro foi adquirido pelo British Museum, Museu Britânico de Londres.

Figura 2.1 – Uma parte do papiro Rhind (Museu Britânico de Londres).

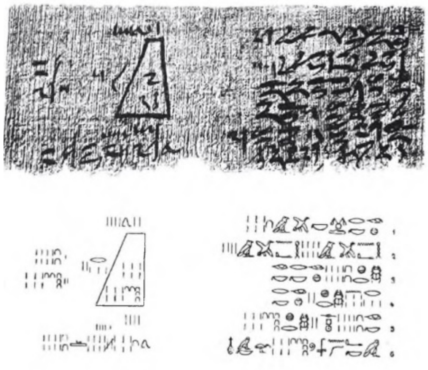
Fonte:https://www.matematica.br/historia/prhind.html, Acesso em: 20 de julho de 2022.

O papiro de Moscou também chamando de Golenischev em homenagem ao egiptólogo e colecionador russo Abraão V.S. Golenishchev, foi datado aproximadamente no ano de 1850 a.C.; ele o comprou no Egito em 1893 e alguns anos depois, em 1917, o Museu de Belas Artes de Moscou o adquiriu, nomeando-o como Papiro de Moscou.

Uma de suas curiosidades é que neste papiro foi encontrado uma forma de cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada.

[1] Alexander Henry Rhind (1833–1863) foi um arqueólogo escocês pioneiro – sua experiência em escavar sítios pré-históricos na Escócia tornou seu trabalho inovador no Egito.

Figura 2.2 – Problema 14 do papiro Moscou



Fonte: Eves (2011, p. 86).

Esses papiros são compostos por vários problemas e suas resoluções. Foi através deles que hoje conhecemos o ensino da matemática no Egito:

> O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão. Os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informações, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências no ensino de matemática no Egito. (BOYER, 1974, p.16).

Os papiros são uma fonte primária sobre a matemática egípcia antiga, em sua maioria descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso de frações unitárias, emprega a regra da falsa posição, entre outras aplicações na matemática e problemas práticos. EVES (2011, p.70)

O papiro de Ahmes ou Rhind, é um documento que marca a origem da álgebra, destacando como surgiu o polinômio na nossa história, já que ele faz parte da álgebra. Os papiros possuíam contas matemáticas que usavam como exemplos acontecimentos do cotidiano, assim como as equações polinomiais, que mostram problemas matemáticos através de coisas do dia a dia.

A origem dos polinômios é bem antiga. O cálculo de equações polinomiais era um dos vários desafios que a álgebra clássica possuía; os primeiros registros existentes das equações de primeiro e segundo grau foram expostas por Al-Khowarizmi, em suas obras ele trouxe um significado para palavra álgebra,"trocar os membros"no termo de uma equação.

Com o passar do tempo, outros matemáticos foram aparecendo, como: Girolamo[2],

[2]Girolamo Cardano(1501-1576) foi um matemático, físico e médico italiano, lembrado principalmente por seu trabalho Ars Magna - tratado dedicado exclusivamente à álgebra e publicado em 1545.

Niccolo[3] e Ludovico Ferrari[4], que deram início aos estudos sobre equações de terceiro e quarto graus. Muitos deles trouxeram demonstrações que são de grande importância até hoje para matemática, como o aperfeiçoamento de equações polinomiais de grau n, com o n pertencendo ao conjunto dos números naturais. Para encontrar o valor numérico de um polinômio, sempre foi necessário apenas usar os métodos de operações simples - adição, subtração, multiplicação e divisão - claro que em cada uma das operações o processo para saber o resultado será diferente.

As equações polinomiais surgiram através da importância de se ter resultados com mais precisão em cálculos, fazendo com que ela se aperfeiçoasse cada vez mais.

No próximo capitulo abordamos a importância e as diretrizes que norteiam o ensino de polinômios no contexto atual.

[3]Niccolo Tartaglia (1500-1557) foi um matemático italiano que ficou famoso por sua solução algébrica de equações cúbicas que acabou sendo publicada no Ars Magna de Cardan.

[4]Ludovico Ferrari(1522-1560) foi o mais famoso dos discípulos de Cardano, nasceu em Bologna, descobriu que a equação de quarto grau poderia ser reduzida a equações cúbicas e um vez resolvida por raízes quadráticas e cúbicas.

3 ENSINO DOS POLINÔMIOS

Neste capítulo iremos abordar como podemos interligar o ensino de polinômios e a geometria, mostrando a importância de associar essas duas áreas. Iremos compreender o que diz a Base Nacional Comum Curricular(BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs) em relação ao ensino de polinômios. Vamos falar um pouco sobre uso de recursos tecnológicos como auxílio didático no ensino de Matemática.

3.1 Polinômios através da BNCC e PCNs

A Base Nacional Comum Curricular, como documento de caráter normativo, busca definir o conjunto de aprendizagens essenciais que o aluno deve desenvolver durante toda a sua história acadêmica na educação básica; a matemática está dentro das cinco áreas do conhecimento que assim como as outras áreas busca com que o aluno vá aprendendo de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo, o professor tem que levar o estudante a associar os acontecimentos de sua vida com as representações matemáticas – tabelas, figuras e esquemas. Desde os anos iniciais do infantil, até os anos finais do Ensino Médio, o aluno é levado a incluir a matemática na sua vida aos poucos, fazendo aquela adequação com outras áreas, por isso, com o passar do tempo, ele aprende, consolida o conhecimento adquirido e amplia aquele conhecimento para tornar-se um ser humano dentro dos padrões estabelecidos pela educação.

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BNCC, p. 267).

Todo esse processo de aprendizagem fica muito difícil para o aluno se o mesmo não tiver uma cultura educacional de praticar sobre o que é aprendido em sala de aula, o professor afim de deixar o conteúdo mais apto ao aprendizado, pode trazer assuntos que possam ser mediados de maneira mais lúdica, para que o alunado possa aprender com menos dificuldade, uma vez que, nem todo aluno tem o desenvolvimento educacional igual, fazendo com que seu aprendizado seja mais dificultoso.

Infelizmente nem todos os alunos conseguem firmar-se dentro desse mundo de mudanças, fazendo com que sintam-se ressentidos e, consequentemente, junto com as modificações, virá a exigência de um nível maior de aprendizado e esforço, ao qual o docente deve ajudar o aluno a enfrentar para que não haja a ruptura no processo de aprendizagem, por isso, é muito importante fortalecer a autonomia dos estudantes para deixá-los mais seguros de si.

> As mudanças próprias dessa fase da vida implicam a compreensão do adolescente como sujeito em desenvolvimento, com singularidades e formações identitárias e culturais próprias, que demandam práticas escolares diferenciadas, capazes de contemplar suas necessidades e diferentes modos de inserção social. (BNCC, p. 62).

Muito trouxe para a matemática o estudo dos polinômios para se saber sobre grandezas partindo do que não se conhece; por isso que os polinômios misturam números com incógnitas, para que através das incógnitas essas grandezas que não podem ser simplesmente definidas possam ser encontradas, claro que o aprendizado em tal área não é tão fácil como parece, mas existem recursos que podem facilitar esse aprendizado.

Os PCNs, assim como a BNCC, destacam que a matemática é essencial, não só na área de exatas, mas ela também é igualmente importante nas outras áreas ajudando-as a organizar, qualificar, ordenar, entre outras coisas nas quais essa disciplina é indispensável; pois ao associar a matemática com outras áreas pode-se ir muito além do que a realidade descreve e da elaboração específica de modelos, no entanto, o professor deve buscar meios específicos para que seus alunos aprendam, de maneira que eles não absorvam demasiadamente, prejudicando seu aprendizado estudantil, é importante que o alunado tenha um pensamento crítico em torno do que é matemática e como essas grandezas que são transmitidas por ela podem ser aplicadas.

O papel da matemática de maneira geral é fazer com que o aluno tenha uma mente aberta que o leve a pensar não só no que os cálculos trazem, mas também na grandeza de possibilidades que ela traz, fazendo com que o meio social em que esses estudantes estão inseridos possa ser visto de maneira diferente, não só para aplicar nessa área, mas também em outras áreas do conhecimento.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCN, p. 40).

Umas das coisas que os PCNs mais falam é sobre a necessidade de unir o ensino da matemática as práticas que são vivenciadas diariamente pelo aluno, além da integração da matemática as outras áreas do ensino como biologia, química entre outras; o único problema é que para fazer esse tipo de interação é necessário ter um conhecimento muito avançado das duas áreas afins e principalmente um domínio sobre as fórmulas necessárias em cada área. Os PCNs buscam trazer a solução para problemáticas através de metodologias com o ensino padrão, o professor como mediador tem que saber associar o ensino para o aluno conseguir construir o seu conhecimento através de problemas que possam estimular seu lado crítico e os levem a ter pensamentos racionais e façam com que esses alunos cheguem a resolução dos problemas e possam crescer dentro do seu aprendizado formal. Além disso, os parâmetros buscam mostrar a importância da história para o educando, uma vez que, seu contexto histórico é muito importante para saber sobre a contribuição daquela área dentro do aprendizado que está sendo levado em sala de aula.

Sobre o ensino dos polinômios ou funções polinomiais muito se é falado sobre as funções de primeiro e segundo grau, seu contexto histórico é de grande valia sobre grandes estudiosos que mudaram o rumo da matemática e trouxeram inúmeras contribuições para área, esse tipo de ensino é mais abordado nos anos finais de aprendizado do aluno, como principal foco para que o estudante possa ter um conhecimento com gráficos e seja aprovado na prova no ENEM. A matemática é uma área muito difícil de ser interpretada, mas seu estudo pode ficar mais acessível com a associação de áreas que ela traz, por exemplo, a geometria pode contribuir para o aprendizado dos polinômios, uma vez que, pode-se usar as formas geométricas para poder representar as grandezas através de gráficos geométricos, isso auxilia a achar os resultados das equações polinomiais além de ajudar a ter várias possibilidades de chegar a esses resultados.

A tecnologia tem sido muito importante para o desenvolvimento educacional, pois proporciona ao professor trazer possibilidades lúdicas de ensino que fogem do livro didático e deixam o alunado mais curioso sobre esse mundo de aprendizado que foge do padrão, por isso foram criados *softwares* educacionais que oportuniza que o aluno possa desenvolver-se em certa área. O *software GeoGebra* é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica. Para o aprendizado dos polinômios essa ferramenta auxilia o professor a ter uma aula mais interessante e propicia um aprendizado amplo, dando aos alunos a chance de se aventurar em algo diferente do que vê apenas em livros.

No capítulo seguinte apresentamos a teoria básica dos polinômios, com os principais conceitos e resultados.

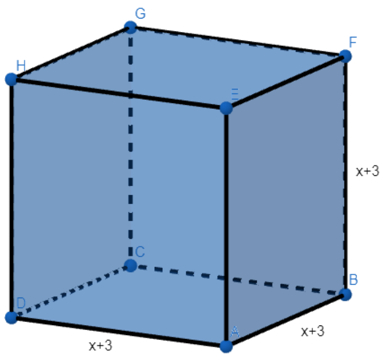
4 POLINÔMIOS

Neste capítulo iremos abordar o conteúdo de polinômios com suas definições, notações básicas, exemplos e principais resultados, os quais serão fundamentais para o desenvolvimento da teoria. O conteúdo abordado pode ser encontrado nas seguintes referências: IEZZI (2013) e DANTE (2016).

4.1 Função polinomial ou polinômio

É comum que em determinadas situações a compreensão e interpretação de problemas matemáticos nos leve a formular expressões e equações algébricas as quais nos ajudam a resolver o problema. Para ilustrar isso considere a seguinte figura:

Figura 4.1 – Cubo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

No cubo, temos arestas com medidas $a = x + 3$, e queremos determinar a expressão da área e do volume deste cubo:

O volume do cubo é dado por:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (x+3)^3 \Rightarrow \text{V}= x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

A área do cubo é dado por:

$$A = 6a^2 \Rightarrow A = 6(x+3)^2 \Rightarrow A = 6(x^2 + 6x + 9) \Rightarrow A = 6x^2 + 36x + 54.$$

Portanto, temos como volume, $V = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ e a área, $A = 6x^2 + 36x + 54$ como soluções do problema, essas expressões são chamadas de **expressões polinomiais** ou **polinômios**.

Definição 4.1. Dada uma sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, consideremos a função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$$

A função p é denominada **função polinomial** ou **polinômio** associado à sequência dada.

Os números $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ são denominados **coeficientes** e cada parte do polinômio $a_0, a_1x, a_2x^2, \cdots, a_nx^n$ são chamados **termos** do polinômio p.

Uma função polinomial de um único termo é denominada **função monomial** ou **monômio**.

Exemplo 4.1: São polinômios as seguintes funções.

- $f(x) = 1 + 2x + 8x^2 - 16x^3$, onde $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 8$ e $a_3 = -16$;
- $h(x) = 8 - 3x^2 - 9x^3$, onde $a_0 = 8, a_1 = 0, a_2 = -3$ e $a_3 = -9$;
- $g(x) = 2 + 10x^5$, onde $a_0 = 2, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ e $a_5 = 10$;

4.2 Valor numérico e raiz de um polinômio

Definição 4.2. Dados um número complexo a e o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, chama-se **valor numérico de** p **em** a a imagem de a pela função p, ou seja,

$$p(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n.$$

Assim, por exemplo, se $p(x) = 4 + x + x^2 + 4x^3$, temos:

- $p(3) = 4 + 3 + 3^2 + 4.3^3 = 124$;
- $p(-4) = 4 + (-4) + (-4)^2 + 4.(-4)^3 = -240$;
- $p(1+i) = 4 + (1+i) + (1+i)^2 + 4.(1+i)^3 = 4 + 1 + i + 1 + 2i - 1 + 4 + 12i - 12 - 4i = -3 + 11i$;

Muitas vezes, para simplificar a notação, escrevemos apenas

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

para simbolizar um polinômio p na variável x. Neste caso, p é o mesmo que $p(x)$.

Em específico, se a é um número complexo e p é um polinômio tal que $p(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz ou um zero de p.

Por exemplo, o número 1 é raíz de $p(x) = -1 - 2x + 2x^2 + x^3$. De fato,

$$p(1) = -1 - 2(1) + 2(1)^2 + (1)^3 = 0.$$

4.3 Interpretação geométrica

Se $y = p(x)$ é uma função polinomial de coeficientes reais e variável real x, podemos, a cada par (x, y) da função, associar um ponto do plano cartesiano e, assim, obter o seu gráfico.

Exemplo 4.2: Gráfico de $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Solução: Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta, vamos atribuir a x dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de $y = 3x - 1$.

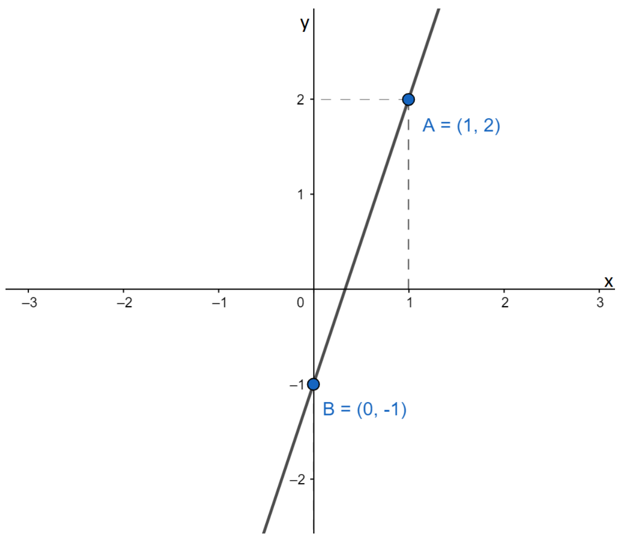
Tabela 4.1 – Tabela do gráfico da função $y = 3x - 1$

x	$y = 3x - 1$
0	-1
1	2

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Traçando o gráfico da função, temos.

Figura 4.2 – Gráfico da função $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Atribuindo $x = 1$ e $x = 0$, obtemos, respectivamente, os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (0, -1)$ e traçamos a reta AB, que é precisamente o gráfico da função dada.

Exemplo 4.3: Gráfico de $y = x^2 + 2x - 8, x \in \mathbb{R}$.

Solução: O gráfico desta função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, eixo de simetria vertical, vértice no ponto V tal que

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(1)} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad \text{e} \qquad Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(2)^2 - 4.1.(-8)}{4(1)} = -\frac{36}{4} = -9.$$

Assim, o vértice dessa parábola é o ponto: $V = (-1,-9)$. Alem disso, calculando as raízes pela fórmula de Baskara, obtemos

$$y = x^2 + 2x - 8$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$x' = -4 \text{ e } x'' = 2$$

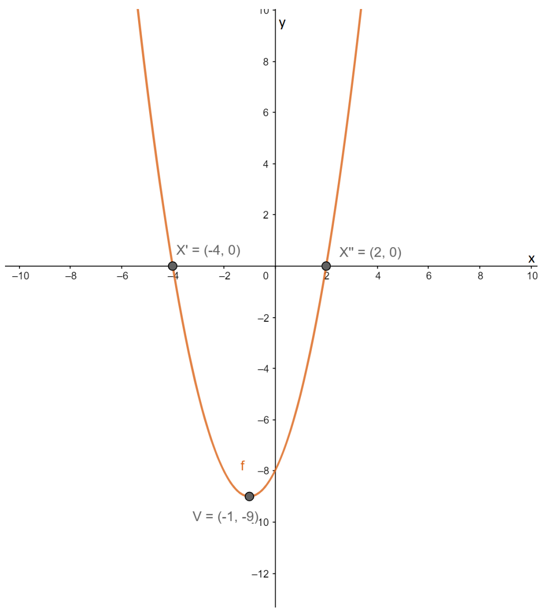
Tabela 4.2 – Tabela do gráfico da função $y = x^2 + 2x - 8$

x	$y = x^2 + 2x - 8$	ponto
-4	0	x'
2	0	x''
-1	-9	V

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Traçando o gráfico da função, temos.

Figura 4.3 – Gráfico da função $y = x^2 + 2x - 8, x \in \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Exemplo 4.4: Gráfico de $y = x^3, x \in \mathbb{R}$.

Solução: Construindo a tabela, temos:

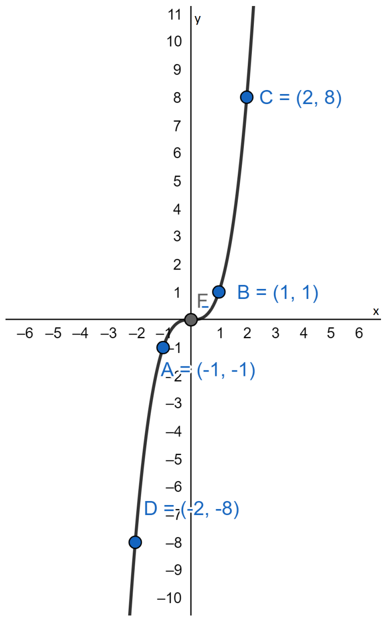
Tabela 4.3 – Tabela do gráfico da função $y = x^3$

x	$y = x^3$	ponto
2	8	C
1	1	B
0	0	E
-1	-1	A
-2	-8	D

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Traçando o gráfico da função, temos.

Figura 4.4 – Gráfico da função $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.



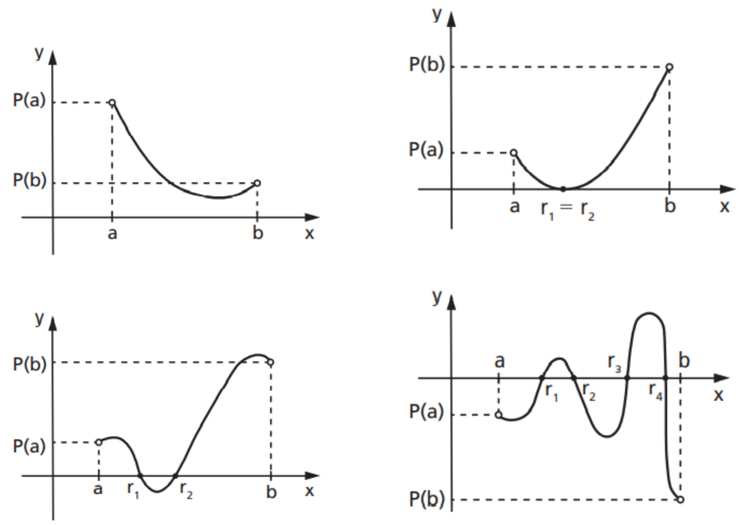
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Nestas condições, pesquisar as raízes reais de uma equação polinomial $p(x) = 0$ é localizar (quantos e onde) os pontos em que o gráfico cartesiano da função $y = p(x)$ intercepta o eixo das abscissas $(y = 0)$.

Assim, podemos considerar uma interpretação geométrica baseada, em resumo, no seguinte:

i. Sinal de $p(a)$ = sinal de $p(b) \Rightarrow$ número par de raízes reais em $]a, b[$

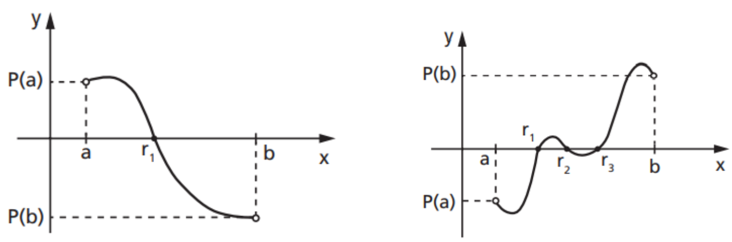
Figura 4.5 – Exemplo de número par de raízes.



Fonte: IEZZI GELSON (2013 p.137).

ii. Sinal de $p(a) \neq$ sinal de $p(b) \Rightarrow$ número ímpar de raízes reais em $]a, b[$.

Figura 4.6 – Exemplo de número ímpar de raízes.



Fonte: IEZZI GELSON (2013 p.137).

4.4 Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio p é **nulo** ou **identicamente nulo** quando p assume o valor numérico zero para todo x complexo. Em símbolos, temos:

$$p = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}.$$

Teorema 4.1. *Um polinômio p é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de p forem nulos. Em símbolos, sendo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ temos:*

$$p = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 \cdots = a_n = 0.$$

Demonstração:
$(\Leftarrow)$ É imediato que $a_0 = a_1 = a_2 \cdots = a_n = 0$ acarreta:

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0, \forall x \in \mathbb{C}.$$

($\Rightarrow$) Se p é nulo, então existem $n+1$ números complexos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, distintos dois a dois, que são raízes de p, isto é:

$$\begin{array}{c} p(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \cdots + a_n\alpha_0^n = 0 \\ p(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \cdots + a_n\alpha_1^n = 0 \\ p(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \cdots + a_n\alpha_2^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \cdots + a_n\alpha_n^n = 0 \end{array}$$

Assim, estamos diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1)$ x $(n+1)$ cujas incógnitas são $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. Como o determinante deste sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

não nulo por tratar-se do determinante de uma matriz de Vandermonde[1] cujos elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ todos distintos, o sistema tem uma única solução, que é a solução trivial:

$$a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Exemplo 4.5: Determine os reais a, b, c de modo que $f(x) = (a-1)x^3 + (4-b)x + (c+3)$ seja o polinômio nulo, ou seja $f(x) = 0$.

Solução: Pelo teorema 4.1, vamos igualar os coeficientes da função a zero e encontrar os valores de a, b e c:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4 \\ c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados de a, b e c na função, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-1)x^3 + (4-4)x + (-3+3) \\ &= 0, (\forall x \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

[1]É chamada matriz de Vandermonde, em referência a Alexandre-Théophile Vandermonde, que viveu na França entre 1735 e 1796. Chamamos matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, em que suas colunas são potências de mesma base, com expoente inteiro, variando de 0 à n–1 ou seja os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1.

4.5 Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios p e g são **iguais** ou **idênticos** quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos, temos:

$$p = g \Leftrightarrow p(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Teorema 4.2. *Dois polinômios p e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de p e g forem ordenadamente iguais. Em símbolos, considerando:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i,$$

temos:

$$p = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

■

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_i = b_i &\Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_i - b_i)\, x^i = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)\, x^i = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \\
&\Leftrightarrow p(x) = g(x).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.6: Determine os valores de a, b, c, d de modo que os polinômios sejam iguais. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

Solução: Para que os polinômios sejam iguais, pelo teorema 4.2, devem ser de mesmo grau e devem ter os coeficientes iguais. De fato:

$$p(x) = q(x)$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2.$$

Com isso, podemos afirmar que:

$$a = 2, b = 3, c = 5 \text{ e } d = 2.$$

4.6 Operações com polinômios

4.6.1 Adição

Dados dois polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i,$$

chama-se **soma** de p com g o polinômio

$$(p+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n,$$

isto é:

$$(p+g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.$$

Exemplo 4.7: Somar os polinômios $p(x) = x^2 + 4x + 8$ e $g(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5$.

Solução: Vamos somar os coeficientes dos termos das funções que tem o mesmo expoente, perceba que a função $p(x)$ tem o maior expoente 2, e a função $g(x)$ tem o maior expoente 3, assim iremos somar o coeficiente de x^3 com 0, que é o coeficiente x^3 do polinômio $p(x)$, logo:

$$\begin{aligned}(p+g)(x) &= (0+4)x^3 + (1+2)x^2 + (4+7)x + (8+4)\\ &= 4x^3 + 3x^2 + 11x + 12.\end{aligned}$$

Portanto, a soma das funções $p(x) + g(x)$ é $(p+g)(x) = 4x^3 + 3x^2 + 11x + 12$.

Teorema 4.3. *A operação de adição define no conjunto P dos polinômios de coeficientes complexos, uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:*

i. **Propriedade associativa**

ii. **Propriedade comutativa**

iii. **Existência de elemento neutro**

iv. **Existência de inverso aditivo**

Demonstração: i. Propriedade associativa: $f + (g+h) = (f+g) + h, \forall f, g, h \in P$.
Fazendo:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$$

$$(f + (g + h))(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i \text{ e } ((f + g) + h))(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i,$$

temos:

$$d_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = e_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

ii. Propriedade comutativa: $f + g = g + f, \forall f, g \in P$.
Fazendo:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, (f + g)(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \text{ e } (g + f)(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i,$$

temos:

$$c_i = a_i + b_i = b_i + a_i = d_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

iii. Existência de elemento neutro: $\exists e_a \in P \mid f + e_a = f, \forall f \in P$.
Fazendo:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ e_a(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \text{ e } (f + e_a)(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$$

temos:

$$f + e_a = f \Leftrightarrow \beta_i = a_i \Leftrightarrow a_i + \alpha_i = a_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Logo, $\alpha_i = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, portanto e_a (**elemento neutro** para adição de polinômios) é o polinômio nulo.
iv. Existência de inverso aditivo: $\forall f \in P, \exists f' \in P | f + f' = e_a$.
Fazendo:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ e } f'(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i \text{ e } (f + f')(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

temos:

$f + f' = e_a \Leftrightarrow b_i = 0 \Leftrightarrow a_i + a_i' = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ e então $a_i' = -a_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, portanto:

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i = -a_i - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_n x^n$$

é o **inverso aditivo** de f, ou seja, é o polinômio que somado com f resulta o polinômio nulo.

4.6.2 Subtração

Tendo em vista o Teorema 4.3, dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \text{ e } g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n,$$

definimos **diferença** entre f e g como o polinômio $f - g = f + (-g)$, isto é:

$$(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_n - b_n)x^n.$$

Exemplo 4.8: Calcular a diferença entre $f(x) = x^3 + 4x + 8$ e $g(x) = x^2 + 8x + 10$.

Solução: Usando a definição de diferença de f e g, temos

$$\begin{aligned}
(f - g)(x) &= (x^3 + 4x + 8) - (x^2 + 8x + 10)\\
&= x^3 + 4x + 8 - x^2 - 8x - 10\\
&= (1 - 0)x^3 + (0 - 1)x^2 + (4 - 8)x + (8 - 10)\\
&= x^3 - x^2 - 4x - 2.
\end{aligned}$$

4.6.3 Multiplicação

Dados dois polinômios:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \text{ e } g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n,$$

o produto fg é o polinômio

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n},$$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Notemos ainda que fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de f por cada termo b_jx^j de g, segundo a regra $(a_ix^i)\cdot(b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Exemplo 4.9: Multiplicar $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$ por $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$.

Solução: Observe que,

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= (4x^3 + 3x^2 + 2x)(2x^2 + 6x + 3)\\
&= 4x^3(2x^2 + 6x + 3) + 3x^2(2x^2 + 6x + 3) + 2x(2x^2 + 6x + 3)\\
&= 8x^5 + 24x^4 + 12x^3 + 6x^4 + 18x^3 + 9x^2 + 4x^3 + 12x^2 + 6x\\
&= 8x^5 + 30x^4 + 34x^3 + 21x^2 + 6x.
\end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação

Teorema 4.4. *A operação de multiplicação em P (conjunto dos polinômios de coeficientes complexos) verifica as seguintes propriedades:*

i. **Propriedade associativa** $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h, \quad \forall f, g, h \in P.$

ii. **Propriedade comutativa** $f \cdot g = g \cdot f, \quad \forall f, g \in P.$

iii. **Existência do elemento neutro** $\exists e_m \in P \mid f \cdot e_m = f, \quad \forall f \in P.$

iv. **Propriedade distributiva** $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \quad \forall f, g, h \in P.$

Demostração: Ver MUNIZ (2016, p.35 e 36).

4.7 Grau

Definição 4.3. Seja $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se **grau** de f, e representa-se por ∂f ou gr f o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para $i > n$.

$$\partial f = n \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > n \end{cases}$$

Assim, grau de um polinômio f é o índice do maior expoente cujo coeficiente é não nulo.

Exemplo 4.10: Identifique o grau dos polinômios a seguir.

$$f(x) = 3x^5 + x^3 - 2x^2 - 5x + 9 \qquad \Rightarrow \partial f = 5$$

$$g(x) = 7x^2 - 2x + 5 \qquad \Rightarrow \partial f = 2$$

Se o grau do polinômio f é n, então a_n é chamado **coeficiente dominante** de f. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, f é chamado **polinômio unitário**.

Grau da soma

Teorema 4.5. *Se $f + g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g. Ou seja,*

$$\partial(f + g) \leqslant \text{máx } \{\partial f, \partial g\}.$$

Demonstração: Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$, $\partial f = m$ e $\partial g = n$, com $m \neq n$ admitamos, por exemplo, $m > n$. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, um coeficiente qualquer de $f + g$, como:

$$\begin{cases} a_m \neq 0 & a_i = 0; \forall i > m \\ b_n \neq 0 & b_j = 0; \forall j > n \end{cases}$$

sendo $m > n$, daí

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0, \text{ pois } i > m > n.$$

e

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall i > m.$$

Portanto,

$$\partial(f + g) = m = \text{máx } \{\partial f, \partial g\}.$$

Se admitirmos $m = n$, temos:

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall i > m,$$

$c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então:

$$\partial(f + g) \leqslant \text{máx } \{\partial f, \partial g\}.$$

■

Exemplo 4.11: Determine o grau dos polinômios e da sua soma.

$$f(x) = x^2 + 3x - 2 \text{ e } g(x) = 7x - 5.$$

Solução: somando os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + (3 + 7)x + (-2 - 5), \\ &= x^2 + 10x - 7. \end{aligned}$$

Portando o grau da soma dos polinômios é 2.

Sabemos que $\partial f = 2$ e $\partial g = 1$, logo

$$\partial(f + g) = 2 = \text{máx } \{\partial f, \partial g\}.$$

Grau do produto

Teorema 4.6. *Se f e g são dois polinômios não nulos, então o grau de fg é igual à soma dos graus de f e g. Ou seja,*

$$\partial(fg) = \partial f + \partial g.$$

Demonstração: Se

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j,\ \partial f = m \text{ e } \partial g = n,$$

seja

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0,$$

um coeficiente qualquer de $(fg)(x)$. Temos, $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, $a_i = 0, \forall i > m$ e $b_i = 0, \forall i > n$, daí,

$$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0, \text{ pois } a_m \neq 0 \text{ e } b_n \neq 0$$

$$c_k = 0, \forall k > m+n, \text{ pois } k > m+n \Rightarrow k > m \text{ e } k > n.$$

e então:

$$\partial(fg) = m + n = \partial f + \partial g.$$

■

Exemplo 4.12: Calcule o produto dos polinômios e o seu grau.

$$f(x) = 7x^5 + 8x^3 + 5x \text{ e } g(x) = 2x^4 + 4x + 1$$

Solução: multiplicar $f(x)$ por $g(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= 14x^9 + 16x^7 + 10x^5 + 28x^6 + 32x^4 + 20x^2 + 7x^5 + 8x^3 + 5x,\\ &= 14x^9 + 16x^7 + 28x^6 + 17x^5 + 32x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 5x.\end{aligned}$$

Portando o grau do produto dos polinômios é 14.

Sabemos que o $\partial f = 5$ e o $\partial g = 4$, temos

$$\partial(f \cdot g) = 14 = \partial f + \partial g.$$

4.8 Divisão

Definição 4.4. Dados dois polinômios f(**dividendo**) e $g \neq 0$ (**divisor**), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (**quociente**) e r (**resto**) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes.

i) $q \cdot g + r = f$;
ii) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata).

Exemplo 4.13: Quando dividimos $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 2$ por $g(x) = x^2 + 2x + 4$ obtemos $q(x) = x^2 - 2x + 3$ e $r(x) = 4x - 10$, que satisfazem as duas condições.

(i) $qg + r = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) + (4x - 10) = x^4 + 3x^2 + 2x + 2 = f$.
(ii) $\partial r = 1$ e $\partial g = 2 \Rightarrow \partial r < \partial g$.

Divisões imediatas

Há dois casos em que a divisão de f por g é imediata.
1º caso: O dividendo f é o polinômio nulo ($f = 0$).
Neste caso, os polinômios $q = 0$ e $r = 0$ satisfazem as condições (i) e (ii) da definição de divisão, pois $qg + r = 0 \cdot g + 0 = 0 = f$ e $r = 0$. Logo,

$$f = 0 \Rightarrow q = 0 \textbf{ e } r = 0.$$

2º caso: O dividendo f não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor g ($\partial f < \partial g$).
Neste caso, os polinômios $q = 0$ e $r = f$ satisfazem as condições (i) e (ii) da definição de divisão, pois $qg + r = 0 \cdot g + f = f$ e $\partial r = \partial f < \partial g$. Logo,

$$\partial f < \partial g \Rightarrow q = 0 \textbf{ e } r = f.$$

Existência e unicidade do quociente e do resto

Teorema 4.7. *Dados os polinômios*

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad (a_m \neq 0)$$

e

$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0. \qquad (b_n \neq 0)$$

existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que $qg + r = f$ e $\partial r < \partial g$(ou r = 0).

Demostração: Ver IEZZI(2013, p.73).

Método de Descartes

Este método, também conhecido por **método dos coeficientes a determinar**, baseia-se nos seguintes fatos:
(1) $\partial q = \partial f - \partial g$, o que é consequência da definição, pois:

$$qg + r = f \Rightarrow \partial(qg + r) = \partial f \text{ e como } \partial r < \partial q \Rightarrow \partial(q \cdot g + r) = \partial(q \cdot g) = \partial q + \partial g = \partial f.$$

(2) $\partial r < \partial g$(ou $r = 0$)
O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:
i) calculam-se ∂q e ∂r;
ii) constroem-se os polinômios q e r, deixando incógnitos os seus coeficientes;
iii) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $qg + r = f$.

Exemplo 4.14: Dividir $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 14x + 4$ por $2x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

Solução: Veja que o grau do quociente $q(x)$ da divisão será a diferença entre o grau de $f(x)$ por $g(x)$, com isso o quociente terá grau 1 e será do tipo $ax + b$, isto é:

$$\partial q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow q = ax + b, \text{ com } a \neq 0,$$

como o grau do resto é menor que 3, então ele será igual ou menor que 2, logo o resto será da forma $cx^2 + dx + e$, isto é:

$$\partial r < 3 \Rightarrow \partial r \leqslant 2 \Rightarrow r = cx^2 + dx + e,$$

daí

$$(ax + b)(2x^3 - 4x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e) = 2x^4 - 4x^3 + 14x + 4.$$

Desenvolvendo, temos para todo x:

$$\begin{aligned} qg + r = f &\Rightarrow 2ax^4 - 4ax^3 + 4ax^2 - ax + 2bx^3 - 4bx^2 + 4bx - b + (cx^2 + dx + e) = 2x^4 - 4x^3 + 14x + 4 \\ &\Rightarrow 2ax^4 + (2b - 4a)x^3 + (4a - 4b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) = 2x^4 - 4x^3 + 14x + 4. \end{aligned}$$

Então, por igualdade de polinômios igualando os coeficientes referentes a cada expoente, temos:

$$\begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 2b - 4a = -4 \Rightarrow 2b = -4 + 4(1) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4a - 4b + c = 0 \Rightarrow c = 4(0) - 4(1) \Rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 14 \Rightarrow d = 1 - 4(0) + 14 \Rightarrow d = 15 \\ e - b = 4 \Rightarrow e = b + 4 \Rightarrow e = 4 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados nos coeficientes de q e r, obtemos

$$q = x \text{ e } r = -4x^2 + 15x + 4.$$

onde q é o quociente e r é o resto do polinômio.

Método da chave

A prova da existência de q e r citada na existência e unicidade do quociente e do resto nos ensina como construir esses dois polinômios a partir de f e g. Vejamos por exemplo como proceder se:

$$f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \text{ e } g = x^2 - 2x + 3.$$

1º grupo de operações

Formamos o primeiro termo de q pela operação $\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e construímos o primeiro resto parcial $r_1 = f - (3x^3)g = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior que ∂g .

2º grupo de operações

Formamos o segundo termo de q pela operação $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ e construímos o segundo resto parcial $r_2 = r_1 - (4x)g = -x^2 - x - 1$, que tem grau igual a ∂g .

3º grupo de operações

Formamos o terceiro termo de q pela operação $\frac{-x^2}{x^2} = -1$ e construímos o terceiro resto parcial $r_3 = r_2 - (-1)g = 3x + 2$, que tem grau menor que ∂g, encerrando, portanto, a divisão.

Desta forma, obtemos: $q = 3x^2 + 4x - 1$ e $r = -3x + 2$.

A disposição prática dessas operações é a seguinte:

$$\begin{array}{r|l}
3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-3x^5 + 6x^4 \quad - 9x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & 3x^3 + 4x - 1 \\ \cline{1-1}
4x^3 - 9x^2 + 11x \quad\;\; & \\
-4x^3 + 8x^2 - 12x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
-x^2 \quad - x - 1 & \\
x^2 \quad - 2x + 3 & \\ \cline{1-1}
-3x + 2 &
\end{array}$$

Exemplo 4.15: Dividir $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 2x - 5$ por $g(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Solução:

$$\begin{array}{r|l}
2x^5 - 5x^4 \quad + 3x^3 \qquad\qquad + 2x \quad - 5 & x^3 + x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-2x^5 - 2x^4 \quad + 6x^3 \quad - 4x^2 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 - 7x + 16 \\ \cline{1-1}
-7x^4 \quad + 9x^3 \quad - 4x^2 \quad + 2x \qquad\; & \\
7x^4 \quad + 7x^3 - 21x^2 + 14x \qquad\; & \\ \cline{1-1}
16x^3 - 25x^2 + 16x \quad - 5 & \\
-16x^3 - 16x^2 + 48x - 32 & \\ \cline{1-1}
-41x^2 + 64x - 37 &
\end{array}$$

Logo,

$$q = 2x^2 - 7x + 16 \text{ e } r = -41x^2 + 64x - 37.$$

Teorema 4.8 (Teorema do resto)**.** *O resto da divisão de um polinômio f por $x-a$ é igual ao valor numérico de f em a.*

Demonstração: De acordo com a Definição 4.4, temos:

$$q \cdot (x-a) + r = f,$$

em que q e r são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x-a$ tem grau 1, o resto r ou é nulo ou tem grau zero; portanto, r é um polinômio constante.

Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em a:

$$q(a) \cdot \underbrace{(a-a)}_{0} + \underbrace{r(a)}_{r} = f(a).$$

Então; como r é um polinômio constante, concluímos que

$$r = f(a) \ , \forall x \in \mathbb{C}.$$

∎

Exemplo 4.16: O resto da divisão de $f = x^4 - 2x^3 + 4x - 2$ por por $g = x - 2$ igual a 6, pois.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^4 - 2(2)^3 + 4(2) - 2 \\ &= 16 - 16 + 8 - 2 = 6. \end{aligned}$$

O resto da divisão de $f = 2x^5 - 3x^4 + 6x - 4$ por por $g = x - 3$ igual a 257, pois:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2(3)^5 - 3(3)^4 + 6(3) - 4 \\ &= 486 - 243 + 18 - 4 = 257. \end{aligned}$$

Teorema 4.9 (D'Alembert)**.** *Um polinômio f é divisível por $x-a$ se, e somente se, a é raiz de f.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.8, temos $r = f(a)$. Então:

$$r = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow \text{a é raiz de } f.$$

∎

Teorema 4.10 (Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.))**.** *Todo polinômio p de grau $n \geqslant 1$ admite ao menos uma raiz complexa.*

Demostração: Ver SEELEY (1974, p. 445 a 448)

Exemplo 4.17: Verificar se $f = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ é divisível por $g = x - 3$.

Solução: temos que

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 \\ &= 81 - 4 \cdot 27 + 4 \cdot 9 - 12 + 3 \\ &= -3 + 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $r = f(3) = 0$, então f é divisível por g.

Teorema 4.11 (Decomposição)**.** *Todo polinômio p de grau n $(n \geqslant 1)$*

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$p = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n),$$

em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são as raízes de p.

Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Demostração: Ver IEZZI(2013, p.106).

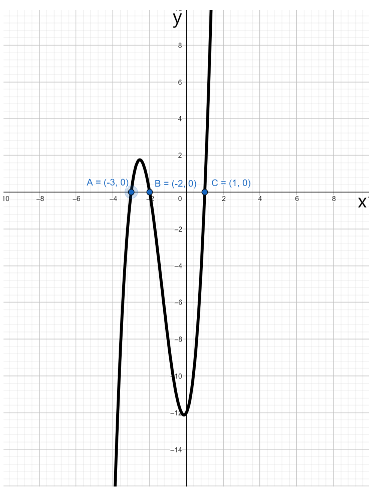
Exemplo 4.18: Fatorar o polinômio $p = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12 = 0$, sabendo que suas raízes são $-3, -2$ e 1.

Solução: Pelo teorema 4.10, temos:

$$p = (x + 3)(x + 2)(x - 1).$$

Geometricamente temos as raízes do polinômio:

Figura 4.7 – Raizes da função $p = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12 = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Dentre outros métodos usados nas operações com polinômios, temos também o algorítimo de Briot-Ruffini que é bastante prático na divisão de polinômios, resolvemos destacar aqui alguns mais utilizados.

No capítulo seguinte apresentamos algumas aplicações de polinômios, e seus principais resultados.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, vamos resolver algumas aplicações envolvendo polinômios aplicados à geometria, iremos usar *software GeoGebra* como recurso didático no estudo das aplicações.

Existem diversas maneiras as quais os polinômios podem ser utilizados no cotidiano de uma sociedade, uma vez que, sendo uma área da matemática pode ser usado em outros seguimentos de maneiras diversas, como no mercado de ações, prevendo os preços e sua variação ao longo do tempo, podem ser usados na física para descrever a trajetória de um projétil, usados também para expressar conceitos como energia, inércia e diferença voltaica. Vamos ver a seguir algumas aplicações do nosso cotidiano:

Aplicação 1:

Uma grande fábrica de materiais recicláveis deseja produzir cestos em formato cilíndrico reto. Os cestos tem altura medindo 0,5 cm e foi gasto na sua produção o valor de $R\$$ 4,00 $/cm^2$. Qual deve ser a função polinomial que representa o custo em função do raio do cesto?

Solução: Iremos calcular o custo C do cesto em função de r, isto é $C(r)$

A área total do cilindro corresponde ao dobro da área da base somando a área lateral, onde a área da base é dada por

$$A_b = \pi r^2.$$

e em um cilindro reto, a área lateral é obtido por

$$A_l = 2\pi rh.$$

Como foi gasto na sua produção $R\$4,00$ por cm^2, o custo é dado por

$$\begin{aligned} C(r) &= (2A_b + A_l).4 \\ &= (8\pi r^2 + 8\pi rh). \end{aligned}$$

Sabendo que a altura do cesto é $0,5cm$, substituindo o valor $h = 0,5cm$ em $C(r)$, obtemos

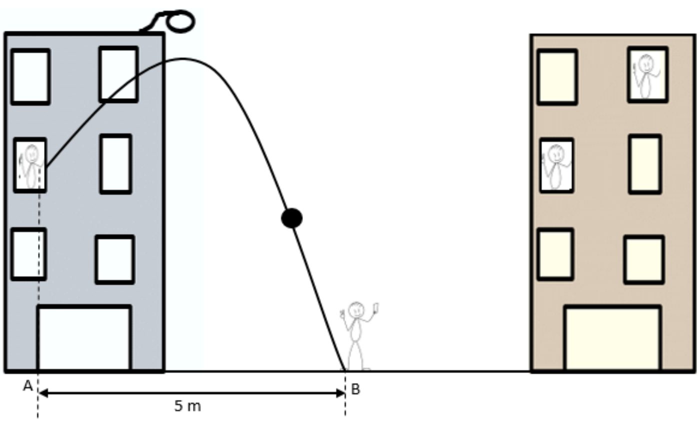
$$\begin{aligned} C(r) &= (8\pi r^2 + 8\pi rh) \\ &= (8\pi r^2 + 8\pi r \cdot 0.5) \\ &= 8\pi r^2 + 4\pi r. \end{aligned}$$

Portanto, a função polinomial que representa o custo em função do raio do cesto é $C(r) = 8\pi r^2 + 4\pi r$.

Aplicação 2:

A trajetória de uma bola feita por José da janela de seu apartamento para Pedro que está sobre um piso plano e horizontal do estacionamento, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical. Como mostra a figura:

Figura 5.1 – Trajetória de uma bola.

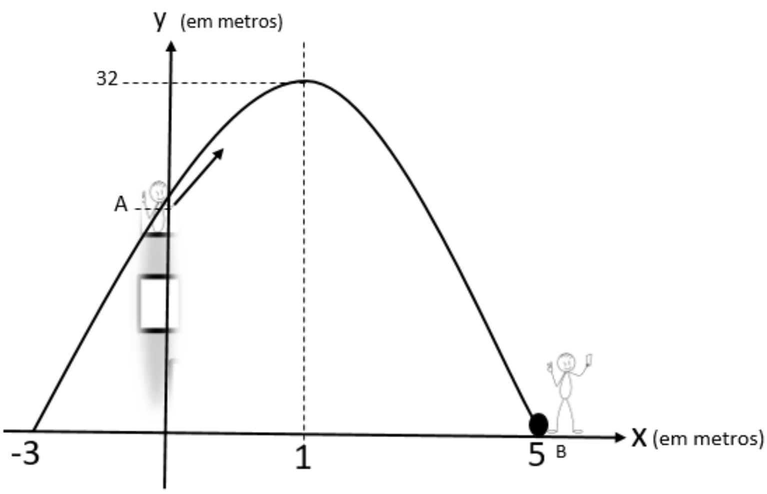


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Como mostra a Figura 5.1 ao ser arremessada, a bola se movimenta a uma distância de $5m$ desde o instante do lançamento até o momento em que ela atinge o solo. Após ser lançada, ela se movimenta a uma distância de $1m$ até atingir a altura máxima, que é de $32m$ em relação ao piso do estacionamento, conforme a Figura 5.2. Quantos metros acima do piso do estacionamento estava José quando foi lançada a bola?

Solução: Aplicando o problema no plano cartesiano temos:

Figura 5.2 – Representação da trajetória da bola.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Temos que a equação da parábola é do tipo:

$$y = a(x-5)(x+3),$$

pois as raízes da função dada são -3 e 5. Como no problema diz que quando altura máxima é de $32m$ e o ponto em que a bola se movimentou foi de $1m$, logo quando $x = 1$ temos $y = 32$.

Substituindo os valores na equação:

$$\begin{aligned} 32 &= a(1-5)(1+3) \\ &= a(1-5)(1+3) \\ &= a(-4)(4) \\ &= a(-16), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{32}{16} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Com isso a equação da trajetória da bola fica:

$$\begin{aligned} y &= (-2)(x-5)(x+3) \\ &= (-2)(x^2-2x-15) \\ &= -2x^2+4x+30. \end{aligned}$$

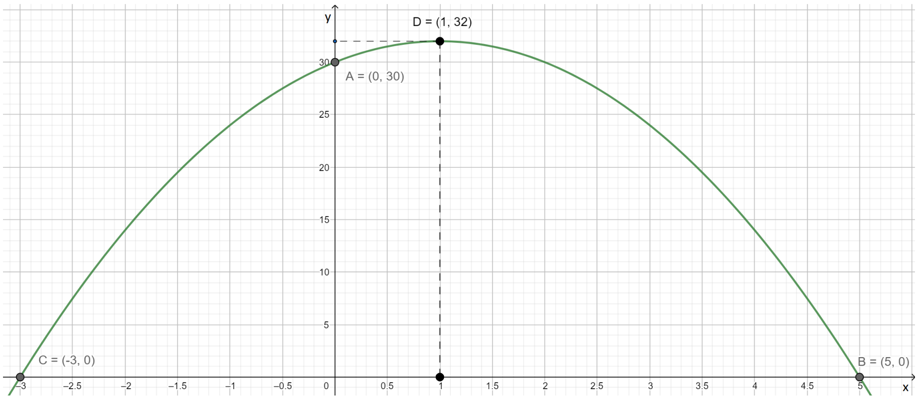
Aplicando agora na equação polinomial da trajetória, no instante em que José arremessa a bola, ou seja o instante $x = 0$, temos:

$$\begin{aligned} y &= -2(0)^2+4(0)+30 \\ y &= 30. \end{aligned}$$

Portanto, José estava a $30m$ acima do piso do estacionamento quando lançou a bola para Pedro.

Perceba no gráfico da parábola com concavidade para baixo, ou seja com $a < 0$,(ver Figura 5.3) os pontos C e B que são as raízes da equação, o ponto A é onde José estava quando lançou a bola para Pedro e por fim o ponto D que é o eixo de simetria vertical da parábola.

Figura 5.3 – Gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 4x + 30$.

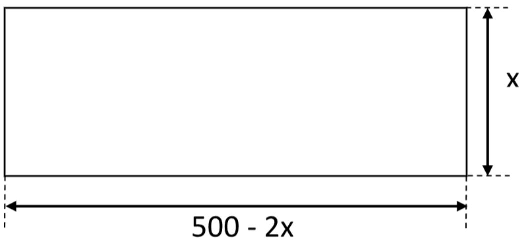


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Aplicação 3:

Os diretores de uma empresa de calçados decidiram construir um novo depósito para guardar suas mercadorias, pois a demanda das suas lojas estava em crescimento, o espaço disponibilizado para a construção tem formato retangular, como mostra a Figura 5.4. Os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno para que a área construída seja a maior possível.

Figura 5.4 – Área do terreno.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Solução: A área do terreno é dada por base vezes a altura, logo:

$$\begin{aligned} A &= b.h \\ &= (500 - 2x)x \\ &= -2x^2 + 500x. \end{aligned}$$

Sabemos que toda função do segundo grau com $a < 0$ possui **ponto de máximo**, ou seja, o ponto de máximo somente é possível em funções com a concavidade voltada para baixo, do mesmo modo ou seja, o ponto de minimo existe apenas para funções com concavidade voltada para cima, toda função do segundo grau com $a > 0$ irá possuir um **ponto de mínimo**, apenas para concavidades voltadas para cima.

A área máxima procurada é o valor máximo da função polinomial:

$$f(x) = -2x^2 + 500x.$$

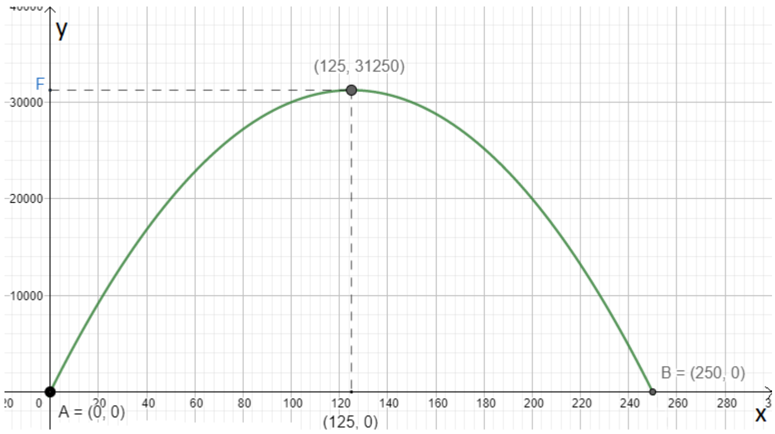
A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja, quando:

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-500}{2(-2)} \\ &= \frac{500}{4} \\ &= 125. \end{aligned}$$

Portanto, a área construída será máxima se as dimensões do terreno forem $125m$ e $250m$.

O gráfico da equação $f(x) = -2x^2 + 500x$, que tem sua concavidade voltada para baixo, nos mostra os pontos A e B que são a raízes da equação e o ponto de máximo de $125m$ da origem.

Figura 5.5 – Gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 500x$.

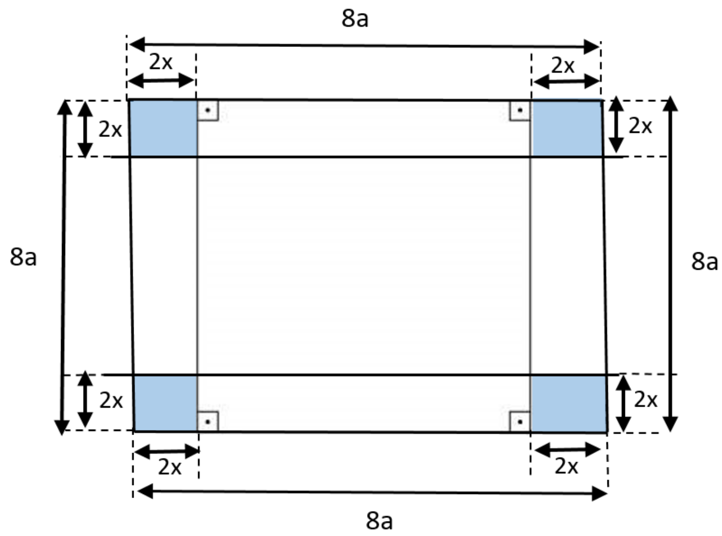


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Aplicação 4:

Um arquiteto foi contratado para construir uma piscina em um hotel da sua cidade, ele desenhou em uma cartolina quadrada de lado $8a$, o formato de uma caixa quadrada. Foi retirado quadrados de lado $2x < a$ de cada canto do quadrado, como mostra a figura abaixo.

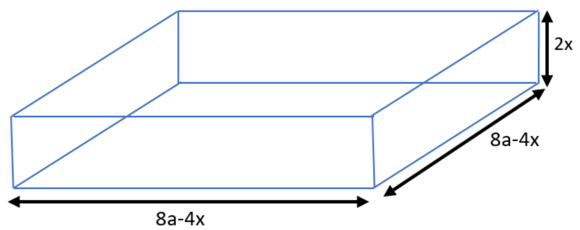
Figura 5.6 – Desenho na cartolina.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Em outra cartolina o arquiteto construiu a maquete da piscina, onde foi dobrando as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado $L = 8a - 4x$ e altura $h = 2x$, como mostra a Figura 5.7. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?

Figura 5.7 – Maquete da piscina.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Solução: Observe que o volume da caixa é dado por

$$V = L \cdot L \cdot h,$$

desta forma,

$$V = (8a - 4x) \cdot (8a - 4x) \cdot 2x.$$

Vamos determinar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica [1], logo

Considerando os números $8a - 4x$, $8a - 4x$ e $2x$, as médias aritméticas e geométricas são dadas respectivamente por

[1]Sabemos que a média geométrica é menor ou igual a média aritmética, Disponivel em https://brasilescola.uol.com.br/matematica/media-geometrica.htm

$$\frac{(8a-4x)+(8a-4x)+(8x)}{3} \text{ e } \sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(8a-4x)(8a-4x)(8x)}$$

Assim, como v= $(8a - 4x \cdot 8a - 4x \cdot 2x)$, temos

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(8a-4x)(8a-4x)(8x)} \leq \frac{(8a-4x)+(8a-4x)+(8x)}{3} = \frac{16a}{3}.$$

Por conseguinte, o valor máximo para o volume da caixa retangular ocorre quando

$$\sqrt[3]{4V} = \frac{16a}{3},$$

ou, quando

$$8a - 4x = 8x,$$

Logo, o valor de x para que a piscina tenha volume máximo é

$$x = \frac{2a}{3}.$$

substituindo esse valor de x em $V = (8a-4x)^2 \cdot 2x$, temos

$$V = (8a - \frac{8a}{3})^2 \cdot \frac{4a}{3}.$$

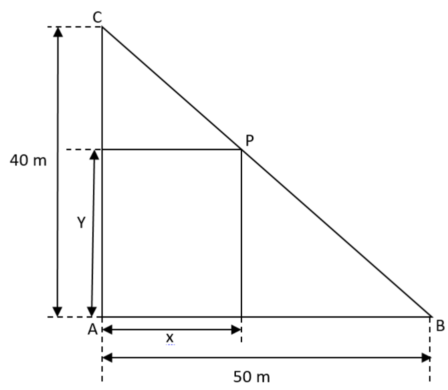
Portanto, o volume da caixa

$$V = \frac{1024a^3}{27}.$$

Aplicação 5:

Francisco possui um terreno no formato de um triângulo retângulo cujos catetos medem $40m$ e $50m$ (ver Figura 5.8). Ele pretende construir um galpão retangular em seu terreno. Quais devem ser as dimensões x e y do galpão para que sua área seja máxima.

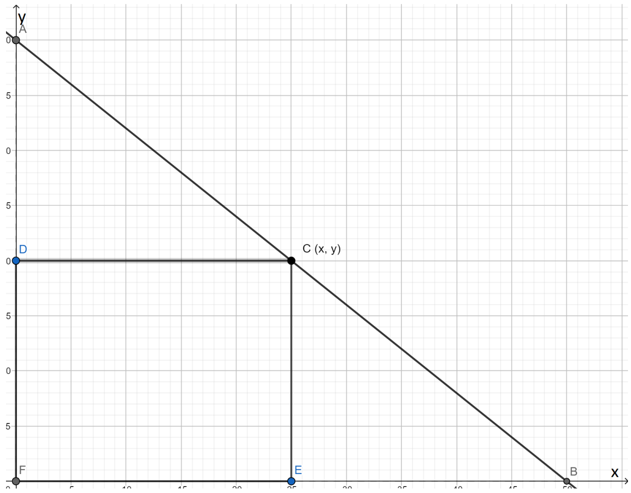
Figura 5.8 – Terreno em formato de um triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Solução: Aplicando o problema no plano cartesiano nos eixos x e y, temos

Figura 5.9 – Plano cartesiano do terreno.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

A reta que contém o segmento AB, possui a equação

$$y = -\frac{40}{50}(x - 50),$$

ou

$$y = -\frac{4}{5}x + 40. \tag{5.1}$$

Vamos encontrar os valores de x e y para que a área do galpão, dada por

$$A(x, y) = x.y, \tag{5.2}$$

seja a maior possível. Para isso, considere o ponto C de coordenadas (x, y), pertencente ao segmento de reta AB, como mostra Figura 5.9, vamos substituir o valor de y de (5.1) em (5.2) e encontrar a área em função de x, ou seja,

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x.(-\frac{4}{5}x + 40), \\ &= -\frac{4}{5}x^2 + 40x. \end{aligned}$$

A equação representa uma parábola com concavidade voltada para baixo pois $a = -\frac{4}{5} < 0$, o máximo de $A(x, y)$ é dado por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a}, \\ &= \frac{-200}{8}, \\ &= 25. \end{aligned}$$

Iremos substituir o valor de $x = 25$ para encontrarmos o valor de y em (5.1), ou seja

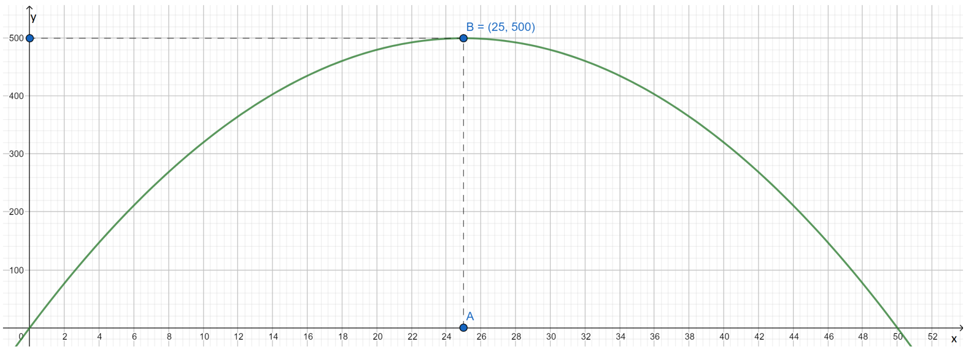
$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{5}25 + 40, \\ &= 20. \end{aligned}$$

Portanto, para $x = 25m$ e $y = 20m$ a área do galpão é a máxima

$$A = 500m^2.$$

Usando o *Geogebra* vamos construir o gráfico da função $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 40x$.

Figura 5.10 – Gráfico da função $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 40x$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Com o *Geogebra* conseguimos determinar as raízes da função polinomial e seu ponto de máximo, que é a área máxima que o galpão pode atingir.

Vimos que através das aplicações os polinômios podem ser demonstrados para os alunos elencando a facilidade do aprendizado de um assunto jugado difícil torna-se fácil.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho procurou destacar que a matemática, mais especificamente, a teoria dos polinômios é muito importante nas nossas vidas. A BNCC e PCN trazem em suas diretrizes a importância que tal área tem na vida dos estudantes, principalmente nos anos finais, quando o aprendizado está mais focado nas equações do 1º, 2º, 3º e 4º grau, principalmente elencando as dificuldades do aprendizado e como ele pode ser mediado de forma mais acessível quando é associado com outras ferramentas. O uso das aplicações é muito importante, pois traz a geometria como meio de mostrar como esses polinômios podem ser aplicados, facilitando o aprendizado do aluno.

Com este trabalho pudemos aprofundar o aprendizado sobre polinômios e como a geometria pode ajudar no aprendizado desse assunto que no ensino básico é considerado bastante difícil, além de aperfeiçoar o conhecimento sobre aplicações e como fazê-las, afim de mostrar que existe possibilidade de entendimento sem muitas dificuldades.

Elenquei também a importância do uso das tecnologias na sala de aula, para que o aluno consiga ver a matemática de uma maneira mais didática, dando o exemplo do *software Geogebra*, que tem ferramentas amplas para uma boa prática que pode ser feita junto com o livro didático.

Neste trabalho, buscamos seguir o que a BNCC orienta sobre trabalhar com atividades e situações em que o aluno está inserido no dia a dia, para facilitar seu entendimento e saber utilizar as ferramentas que lhe são apresentadas de maneira correta.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE HENRIQUE RHIND. Disponível em: https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/world-cultures/ancient-egyptian-collection/ancient-egyptian-collection/alexander-henry-rhind/. Acesso em: 15 de julho de 2022.

BOYER, Carl Bejamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL; Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular; 2a versão revista; Brasília : Ministério da Educação, (2018).

BRASIL; Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática : contexto e aplicações : ensino médio**. 3. ed. São Paulo : Ática, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo, 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 16 de julho de 2022

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 6: complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Nobel, 8. ed, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: polinômios**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SEELEY, Robert T. **Cálculo de uma variável**. vol.2. Tradução de João B. Pitombeira. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1974.