UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOEL PEREIRA COSTA

UMA DISCUSSÃO SOBRE OS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E DE ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS RELATIVAS AO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º E 2º GRAU

CAMPINA GRANDE
2022

JOEL PEREIRA COSTA

UMA DISCUSSÃO SOBRE OS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E DE ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS RELATIVAS AO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º E 2º GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas.

CAMPINA GRANDE
2022

C838d Costa, Joel Pereira.
Uma discussão sobre os métodos de resolução e de estratégias didáticas relativas ao ensino de sistemas de equações de 1º e 2º grau [manuscrito] / Joel Pereira Costa. - 2022.
46 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Departamento de Matemática - CCT."

1. Sistemas de equações linerares. 2. Estratégias de ensino. 3. Metodologias didáticas. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

JOEL PEREIRA COSTA

UMA DISCUSSÃO SOBRE OS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E DE ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS RELATIVAS AO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º E 2º GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 06/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Luciana Freitas

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Mª. Katia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A minha família.

RESUMO

O conteúdo de sistemas de equações é de extrema importância dentro do ensino da matemática, pois desenvolve diversas habilidades nos alunos. Nesse sentido, objetiva-se nesse trabalho, expor de maneira sucinta e clara o conceito de sistemas de equações lineares de 1º e 2º grau, bem como seus métodos de resolução, além de trazer algumas aplicações práticas que podem ser utilizadas em sala de aula pelo professor. Tais aplicações consistem na discussão de questões de matemática contextualizadas, isto é, que relacionam a matéria com situações do cotidiano. A estratégia de resolução dessas questões consiste na aplicação de um passo a passo que contempla a comparação dos métodos de resolução de sistemas, além da representação gráfica feita no *software Microsoft Excel*. De modo geral, conclui-se que as estratégias de ensino aplicadas neste trabalho, especialmente, a discussão de questões práticas, a elaboração de etapas para solucionar um problema, a comparação de métodos resolutivos e o uso de metodologias mais dinâmicas, como uso de *softwares*, podem ser aplicadas não só ao conteúdo de sistemas lineares, mas ao ensino da matemática como um todo, sendo esse um caminho metodológico de extrema eficácia para professores e alunos.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares; Estratégias de ensino; Metodologias didáticas.

ABSTRACT

The content of equations systems is extremely important within the teaching of mathematics, since it develops different skills in students. In this sense, the aim of this work is to present in a succinct and clear way the concept of systems of linear equations, as well its resolution methods, in addition to bringing some practical applications that can be used in the classroom by teacher. Such applications consist of the discussion of contextualized questions of mathematics, in other words, which relate the subject to everyday situations. The strategy for solving these questions consists of the application of a step-by-step that includes the comparison of solving systems methods, in addition to the graphic representation made in Microsoft Excel software. In general, it is concluded that the teaching strategies applied in this work, especially the discussion of practical issues, the elaboration of steps to solve a problem, the comparison of solving methods and the use of more dynamic methodologies, such as the use of software can be applied not only to the content of linear systems, but to the teaching of mathematics as a whole, being that is an extremely effective methodological path for teachers and students.

Keywords: Systems of linear equations; Teaching strategies; Didactic methodologies.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 7

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 9

3 EQUAÇÕES DO 1º E 2º GRAU E SISTEMAS 13

3.1 Equações do 1º grau 13

3.2 Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas 15

3.2.1 Resolução geométrica 16

3.2.2 Resolução algébrica 18

3.2.3 Sistemas indeterminados e impossíveis e os métodos de resolução 21

3.3 Equações do 2º grau 24

3.3.1 Resolução de equações incompletas do 2º grau 24

3.3.2 Resolução de uma equação completa do 2º grau 26

3.4 Sistemas com equações do 2º grau 27

4 DISCUSSÃO DE QUESTÕES ENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES 29

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 44

REFERÊNCIAS 46

1 INTRODUÇÃO

Vinda do grego, a palavra "sistema" significa "combinar", "ajustar" ou "formar um conjunto" (Valenzuela, 2007). Na língua portuguesa, define-se sistema como sendo a reunião dos elementos que, concretos ou abstratos, se interligam de modo a formar um todo organizado[1].

Matematicamente falando, um sistema de equações pode ser definido como um conjunto de duas ou mais equações lineares interconectadas. Em um sistema de equações, há sempre dois ou mais valores desconhecidos (incógnitas) e, a solução para cada sistema é justamente descobrir o valor das incógnitas que satisfazem, em simultâneo, todas as equações presentes no sistema.

Os sistemas podem ser classificados em possíveis (compatíveis) ou impossíveis (incompatíveis). Os sistemas que possuem solução são chamados sistemas possíveis. Por outro lado, sistemas que não podem ser solucionados são chamados impossíveis. Os sistemas possíveis podem ainda ser classificados em sistemas determinados ou indeterminados. O primeiro caso é quando o sistema possui uma única solução, já o segundo caso refere-se a situação em que um mesmo sistema possui infinitas soluções. Os métodos de resolução de um sistema são variados e, de forma resumida, consistem em manipular as equações usando operações como adição, substituição ou comparação.

A área da Matemática na qual é estudado o conteúdo de sistema de equações lineares é a Álgebra Linear. O conteúdo de sistemas de equações é de extrema importância dentro do ensino da Álgebra, pois desenvolve a capacidade crítica e analítica do aluno ao explorar tarefas como: a contextualização de uma situação-problema, já que o aluno precisa compreender um enunciado e traduzi-lo para a linguagem matemática no processo de leitura de um sistema; discussão e interpretação do problema, uma vez que o aluno precisa distinguir entre os variados tipos de sistemas antes de resolvê-lo; e por fim, a resolução de sistemas propriamente dita, dado que aluno precisa decidir qual melhor técnica aplicar diante de uma situação-problema.

Segundo o Parâmetro Curricular Nacional (BRASIL, 1998), é fundamental no processo de aprendizagem de sistemas lineares a capacidade crítica para assimilação de conceitos e de identificação de parâmetros, incógnitas e variáveis. Em paralelo, recomenda-se que as situações de aprendizagem estejam centradas na construção de significados, isto é, que estimulem o desenvolvimento de processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução por parte dos alunos. Conforme coloca Domingues et al. (1982), devido o caráter abstrato da Álgebra, um curso dessa disciplina, mesmo que introdutório, deve explorar suas aplicações no cotidiano e não apenas se deter a uma exposição teórica.

[1]SISTEMA. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: https://www.dicio.com.br/sistema/. Acesso em: 15/08/2021.

Nesse sentido, pode-se dizer que a proposta do tratamento da Álgebra no Brasil, prioriza o desenvolvimento do pensamento algébrico-crítico, o que por sua vez, favorece a diversificação de tarefas e técnicas que tornem o processo de ensino-aprendizagem menos mecânico e que ao mesmo tempo promovam a compreensão dos conceitos adquiridos. Nesse contexto, destaca-se o papel da modelagem matemática em sala de aula e de outros recursos didáticos como a aplicação de jogos que elucidem o problema matemático e tornem o processo de aprendizagem menos pragmático, além de uso de softwares que ajudem os alunos a visualizarem o conteúdo da matéria de forma mais clara.

Diante desse contexto, objetiva-se nesse trabalho, expor de maneira clara e didática o conceito de sistemas de equações lineares de 1º e 2º grau, bem como seus métodos de resolução, além de trazer algumas aplicações práticas que podem ser utilizadas em sala de aula pelo professor. Para isto, buscando compreender como essa teoria é abordada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e em provas de concurso público, analisando questões de matemática contextualizadas, que abordam o conceito de sistemas de equações de uma forma mais palpável, isto é, que relacionam a matéria com situações do cotidiano. A discussão dos métodos de resolução de sistemas bem como de suas aplicações no cotidiano é de fundamental importância para contribuir com o debate a cerca da relevância da dinamicidade em aulas de matemática, a qual é responsável por tornar o processo de aprendizagem mais agradável e proveitoso.

Além dessa introdução, o presente trabalho conta com mais quatro capítulos. No segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica, a qual consiste em uma breve contextualização a cerca de sistemas lineares, sendo discutidos pontos relacionados a parte histórica da matéria, regulamentações do ensino no Brasil e o uso de recursos didáticos em salas de aula. No terceiro capítulo, são descritos os conteúdos de equações e sistemas do 1º e 2º grau, apresentando suas definições, resoluções, interpretação gráfica e exemplos. O quarto capítulo destina-se a discussão e resolução de situações-problema envolvendo sistemas de equações. E por fim, no quinto capítulo, são apresentadas as considerações finais e conclusões do presente trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conforme aponta Coulange (2000) o período entre o fim do século XV e o início do século XVI pode ser considerado a época da pré-história dos sistemas de equações, os quais eram associados as tradicionais situações-problemas de aritmética das civilizações antigas. Durante o referido período, inicia-se o estudo dos sistemas de equações de maneira muito elementar, isto é, sem o desenvolvimento imediato de uma teoria geral de sistemas.

> Começa neste tempo um estudo de sistema de equações, cujo objetivo principal resulta uma resolução efetiva e "particular" de equações obtidas a partir de problemas "concretos" do primeiro grau: o uso de letras para designar as grandezas ao mesmo tempo incomuns e comuns dentro da Arte Analítica de Viète, que marca para numerosos autores o "nascimento da Álgebra" e oferece a possibilidade de chegar a elas com as "práticas de modelagem algébrica". No entanto, não ocasiona imediatamente a gênese de uma teoria geral dos sistemas de equações (Coulange, 2000, p. 73).

Entre o início do século XVI e meados do século XVII, apesar da noção de sistema ainda voltar-se apenas para a resolução de problemas tradicionais da aritmética, já começavam a aparecer casos de sistemas impossíveis ou indeterminados como fatos particulares ou curiosos. Ainda no século XVII, quando a Álgebra Elementar (problemas mais básicos e do cotidiano) evoluiu para a Álgebra Linear (problemas matemáticos mais robustos), a noção de sistema também foi melhor desenvolvida. Marcam esse período a busca por uma solução geral ao sistema quadrado de ordem "n" e o estudo de sistemas não quadrados. Já a partir do século XIX, começou-se a desenvolver os métodos de cálculos efetivos, exatos ou aproximados (Valenzuela, 2007).

No Brasil, o ensino da Álgebra e, consequentemente, de sistemas de equações, recebeu maior rigor e formalização a partir da década de 1960. No entanto, o ensino da Álgebra faz parte do currículo educacional brasileiro desde 1799. Atualmente, o ensino da matemática nas escolas brasileiras é pautado pelo Parâmetro Curricular Nacional (PCN)[1], publicado em 1998, e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[2], publicado em 2017. O PCN é o documento normativo máximo da educação brasileira e tem como objetivo a orientação do trabalho de professores e especialistas em educação (BRASIL, 1998). A BNCC, por sua vez, também é um documento normativo, e tem como principal função definir o conjunto orgânico de aprendizagens essenciais da Educação Básica (BRASIL, 2017). De forma resumida, conforme Pereira (2018), ambos os documentos organizam os conteúdos de forma estratégica de acordo com o nível escolar dos alunos, determinando dessa forma,

[1] O PCN organiza seus objetivos de acordo com ciclos, são eles: números e operações; espaço e forma; e grandezas e medidas.

[2] A BNCC é dividida em eixos de aprendizagem, a saber: números; álgebra; geometria; grandezas e medidas; e probabilidade e estatística. A BNCC tem como principal critério os objetivos que devem ser alcançados em cada série escolar. Duas séries escolares da BNCC correspondem a um ciclo do PCN.

quais assuntos e metodologias os professores ou especialistas precisam abordar e praticar na sala de aula em cada fase do aprendizado do aluno. Na parte que cabe à Álgebra, de acordo com a BNCC, destina-se ao ensino de sistema de equações de 1º grau e do 2º grau, além de sistemas de equações, o 7º e 8º ano do ensino fundamental, o equivalente ao 4º ciclo do PCN.

De acordo com Miguel et al. (1992), apesar da Álgebra estar presente nas escolas brasileiras há um tempo, ela ainda não recebe o destaque que merece. Isso porque grande parte dos professores de matemática ainda trabalha a Álgebra de forma mecanizada, focando na memorização de regras e macetes, ao invés de interligar o ensino da disciplina com o mundo real, trazendo associações de significação lógica e social.

Devido ao excesso de pragmatismo no processo de aprendizagem, muitos alunos enxergam a Álgebra como algo negativo e de pouca aplicabilidade no cotidiano. Na maioria dos casos, os alunos possuem muitas dificuldades em aprender os conceitos da disciplina e pouco desenvolvem a capacidade crítica de resolução de problemas. Corrobora com essa constatação, a pesquisa desenvolvida por Araujo (1999) realizada com 378 alunos de Ensino Superior e Médio. Araujo (1999) verificou que grande parte dos alunos precisam seguir um protocolo padronizado de etapas para resolver equações simples, fazem uso indevido de incógnitas e não conseguem atribuir significados reais para as equações com que trabalha. Outra pesquisa mostrou que há bastante confusão em algumas operações como: "$a.a = 2a$" ou "$8a^2 + 216x^6 = 224a^2x^6$". Além disso, constatou-se que se essa confusão não for corrigida durante o Ensino Fundamental, ela pode perdurar no Ensino Médio ou até mesmo no Ensino Superior (Biazi, 2002).

O atual Parâmetro Curricular Nacional (PCN) chama atenção para o fato de ser necessário os professores utilizarem diferentes ferramentas em sala de aula a fim de dar significado as expressões algébricas, propriedades e fórmulas (BRASIL, 1998):

> O ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas) (BRASIL, 1998, p. 84).

Como propõe o PCN, o ensino da Álgebra deve priorizar o desenvolvimento do pensamento matemático-crítico, de modo que os alunos não façam do cálculo um exercício mecânico, mas compreendam os conceitos e motivações por trás de tal. Para Domingues et al. (1982), um curso de Álgebra deve ir além da exposição teórica, mostrando, de fato, as aplicações que podem ser feitas, já que pelo caráter abstrato da disciplina, essas não são percebidas pelos alunos de imediato.

Nesse contexto, destaca-se o papel da modelagem matemática em sala de aula. A modelagem matemática é uma estratégia de ensino que relaciona situações do dia a dia do estudante a conteúdos matemáticos. A ideia é abordar fenômenos das mais diferentes áreas científicas para educar matematicamente. Para Barbosa (2004), o ambiente de modelagem está relacionado as atividades de problematização e investigação. A problematização refere-se ao ato de criar perguntas, enquanto a investigação relaciona-se à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexões sobre os resultados obtidos por meio dessas. As duas atividades não são separadas, mas se articulam no processo de envolvimento dos alunos na atividade proposta.

Nesse sentido, os benefícios da modelagem matemática são: a compreensão entre a matemática e a realidade por parte do aluno; a valorização do "saber fazer" do estudante, o qual desenvolve a habilidade de construir modelos matemáticos em diferentes contextos; e a maior autonomia do aluno no processo de aprendizagem, já que o mesmo precisa elaborar hipóteses para solucionar os problemas dados.

Ainda no contexto de aulas mais didáticas, pode-se pensar na aplicação de jogos que elucidem o problema matemático para os alunos e tornem o processo de aprendizagem menos pragmático. Adotando essa estratégia, Rosa et al. (2020) aplicaram jogos visando estimular o aprendizado de sistemas de equações em uma turma do oitavo ano do ensino fundamental. Os jogos foram os seguintes: jogo da velha para o ensino do método da adição, jogo de tabuleiro chamado batalha algébrica para o ensino do método de substituição e jogo da memória para revisão da matéria. Os autores desse estudo perceberam que os alunos tiveram um maior rendimento escolar, maior aceitação de tarefas para casa, melhores notas na prova e maior motivação em buscar conhecimento de forma geral.

Uma outra alternativa que vem sendo utilizada para fins de maior dinamicidade nas aulas são o uso de *softwares* que ajudem os alunos a visualizarem o conteúdo da matéria de forma mais clara. No caso do ensino de sistemas de equações, um software bastante conhecido que pode ser utilizado é o *Microsoft Excel*. Esse *software* em específico, pode ajudar os alunos a elaborarem, de forma prática, representações gráficas das equações que compõem o sistema [3]. Ainda nesse contexto, destaca-se um estudo realizado por Valenzuela (2007) que utilizou o *software Aplusix*[4] versão 1.73, para a resolução de sistemas de equações em turmas de alunos do 5º e 6º ano do ensino fundamental. A autora identificou certa dificuldade dos alunos com o manuseio do *Aplusix*, sendo melhor o desempenho desses em atividades que envolviam sistemas determinados em detrimento de sistemas impossíveis. A autora justificou tais dificuldades pelo fato da matéria não ter sido abordada completamente antes da aplicação do *software* em sala de aula.

[3]A resolução algébrica, por sua vez, é realizada por meio de matrizes, que pode não ser o foco de aulas voltadas para o ensino fundamental.

[4]Esse *software foi criado pelo laboratório IMAG-Leibniz localizado na França para aplicações algébricas.*

Em suma, é de extrema importância a elaboração de aulas dinâmicas, que possam mesclar o conteúdo técnico e fundamental da disciplina com a parte prática, trazendo problemas do cotidiano que possam ser traduzidos em problemas matemáticos por meio da modelagem matemática. Além disso, é fundamental ainda sair do óbvio e utilizar recursos lúdicos e tecnológicos que possam contribuir no processo de aprendizagem, como por exemplo, o uso de *softwares* ou de jogos, conforme abordado nesse capítulo.

3 EQUAÇÕES DO 1º E 2º GRAU E SISTEMAS

Neste capítulo serão apresentados, de maneira sucinta, os conceitos de equações do 1º e 2º graus, sistemas e seus métodos de resolução. Além disso, tais conceitos serão trabalhados com exemplos para melhor entendimento do leitor.

3.1 Equações do 1º grau

As equações podem ser definidas como igualdades que possuem pelo menos um número desconhecido. Na Álgebra moderna, esse valor desconhecido é chamado incógnita e é representado por letras (Dante, 2015a). Em geral, utilizamos as últimas letras do alfabeto (x, y e z) para representar as incógnitas. Essa ideia surgiu na primeira metade do século XVII e teve como precursor o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650).

São exemplos de equações as seguintes sentenças:

1. $x + 8 = 31$; onde x é a única incógnita da equação;

2. $x + y = 25$; onde x e y são as incógnitas da equação;

3. $z^2 + 1 = z + 13$; onde z é a única incógnita da equação.

Conforme explicita Dante (2015a), uma equação é do primeiro grau com uma incógnita quando pode ser escrita na forma $ax = b$, sendo $a \neq 0$. Por exemplo:

1. $8x = 14$; é uma equação do 1º grau com incógnita x, já escrita na forma padrão $ax = b$;

2. $\frac{y}{3} = 2$; é uma equação do 1º grau com incógnita y (equivale a $\frac{1}{3}y = 2$ ou $1y = 6$).

Não são equações do 1º grau com uma incógnita, as seguintes sentenças: $x^2 = 25$, $0x = 10$, $4x + 2y = 18$.

Quando encontramos o valor desconhecido de uma equação do 1º grau, dizemos que descobrimos a solução ou a raiz da equação. O método de resolução de equações de 1º grau com uma incógnita é bastante simples. Muitas vezes, as equações podem ser resolvidas mentalmente. Como é o caso da expressão "$x + 8 = 31$". Não precisamos fazer muito esforço para saber que a solução dessa equação é 23, já que 23 mais 8 é igual a 31. Nos demais casos, podemos encontrar a solução das equações utilizando o método das operações inversas e algumas propriedades da matemática básica, como a propriedade distributiva ou a aplicação de mínimo múltiplo comum (M.M.C), nos casos de equações com frações.

Ainda segundo Dante (2015a), uma equação é do primeiro grau com duas incógnitas, x e y, quando pode ser escrita na forma $ax + by = c$, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Por exemplo:

1. $x + 2y = 10$; é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, x e y, já escrita na forma padrão, em que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 10$;

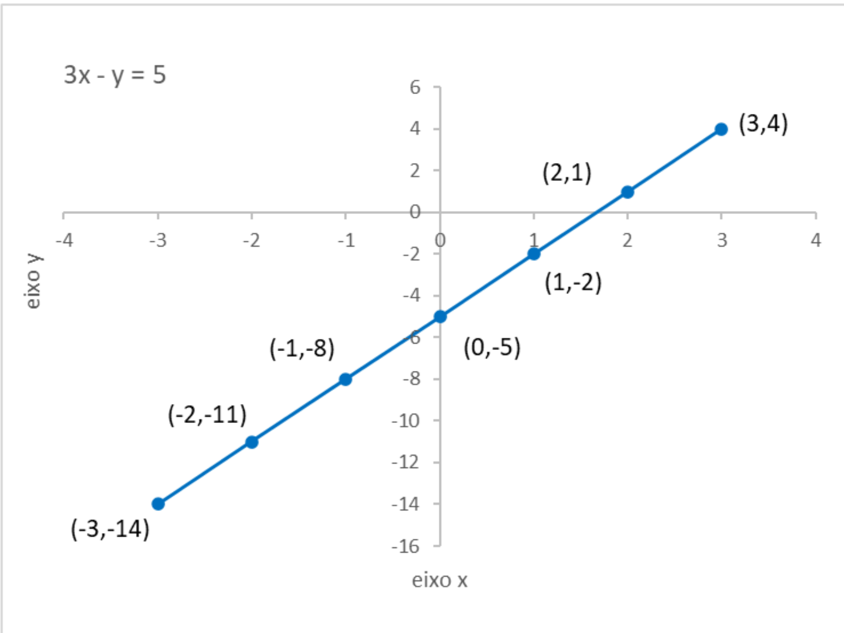
2. $3(x - 2) = 1 - 5y$; é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois equivale a $3x + 5y = 7$, sendo $a = 3$, $b = 5$ e $c = 7$.

Por outro lado, não se configura uma equação do 1º grau com duas incógnitas, a seguinte sentença: $xy = 22$, pois a mesma não pode ser escrita na forma $ax + by = c$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Nas equações do 1º grau com duas incógnitas, cada valor de x deverá ter um equivalente valor de y, resultando na formação do par ordenado (x,y). Sendo assim, para descobrir o valor da incógnita y, basta atribuir um valor qualquer para x. Os pares ordenados (x,y) são as soluções possíveis da equação. Uma só equação possui infinitos pares ordenados. Os pontos correspondentes às soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas estão sempre alinhados, ou seja, estão sobre uma mesma reta (Dante, 2015a).

A Figura 3.1 mostra alguns pares ordenados para a seguinte equação $3x - y = 5$. A reta, em azul, representa o locus dos pontos cujos pares são soluções da referida equação. Em outras palavras, todo ponto nessa reta tem seu par satisfazendo a equação e todo par que satisfaz a equação tem seu ponto nessa reta. Não havendo restrições, as equações de primeiro grau admitem infinitas soluções.

Figura 3.1 – Conjunto de pares ordenados da equação $3x - y = 5$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

.

3.2 Sistemas de duas equações do $1^{\underline{o}}$ grau com duas incógnitas

Um conjunto de equações com duas ou mais incógnitas é denominado sistema. Segundo Dante (2015a), para solucionar um sistema de duas equações do $1^{\underline{o}}$ grau com duas incógnitas, é preciso encontrar a solução comum a ambas equações, isto é, aquela capaz de satisfazer simultaneamente estas. Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$$

Nesse caso, apenas um único par ordenado satisfaz as duas equações ao mesmo tempo, ou seja, existe uma única solução comum às duas equações, a saber (15,5). Sistemas como esse são denominados sistemas possíveis e determinados (SPD), pois possuem um único par ordenado que satisfaz as equações simultaneamente. Por outro lado, quando há mais de um par ordenado que solucione as equações ao mesmo tempo, o sistema é classificado como sistema possível e indeterminado (SPI). Existem, ainda, sistemas que par ordenado algum satisfaz simultaneamente as duas equações. Esses são chamados sistemas impossíveis (SI).

Segundo Lopes (2015), é possível identificar quando o sistema é SPI, SI ou SPD, analisando as equações que o compõem, conforme descrito a seguir.

- Quando uma equação é múltipla uma da outra, o sistema é possível e indeterminado (SPI). Por exemplo:

  $$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x + 12y = 30 \end{cases}$$

  A segunda equação é igual a primeira multiplicada por três, portanto, o sistema é possível e indeterminado;

- Quando as duas equações não são múltiplas, mas os membros das equações que contêm as incógnitas são múltiplos um do outro, o sistema é indeterminado (SI). Exemplo:

  $$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x + 12y = 20 \end{cases}$$

  Nesse caso, apenas o $1^{\underline{o}}$ membro da segunda equação é múltiplo da primeira equação, portanto, o sistema é indeterminado.

- Quando os membros das equações que contêm as variáveis não são múltiplos um do outro, o sistema é possível e determinado (SPD). Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x - 12y = 30 \end{cases}$$

Percebe-se que, nesse caso, não há número real que torne as equações múltiplas uma da outra. Logo, o sistema é possível e determinado.

Os sistemas podem ser resolvidos de maneira geométrica ou algébrica. A forma geométrica consiste em desenhar o gráfico das equações do sistema no plano cartesiano e caracterizar as retas formadas em concorrentes, coincidentes ou paralelas distintas. Na forma algébrica, alguns métodos de resolução se destacam, são eles: o método da adição, o método da comparação e o método da substituição.

3.2.1 Resolução geométrica

Quando as equações de um sistema são representadas por retas concorrentes, o sistema é possível e determinado (SPD). Já quando as equações formam retas coincidentes, o sistema é possível e indeterminado (SPI). Por último, quando as equações resultam em retas paralelas distintas, o sistema é impossível (SI) (Lopes, 2015).

Considere o sistema exposto no Exemplo seguinte:

Exemplo 3.1: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Solução:

Para resolver esse sistema, será preciso isolar, nas duas equações, a incógnita y, da seguinte maneira:

- Equação 1: $y = 10 - x$
- Equação 2: $y = -4 + x$

Em seguida, atribui-se valores para x, nas equações acima:

- Equação 1:
  Para $x = 0$, tem-se: $y = 10$;
  Para $x = 1$, tem-se: $y = 9$.
- Equação 2:
  Para $x = 0$, tem-se $y = -4$;
  Para $x = 1$, tem-se $y = -3$.

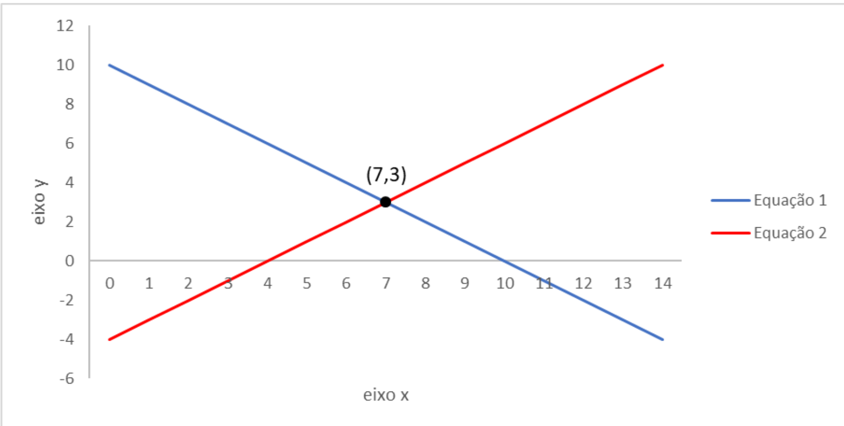
Nesse sentido, a reta que representa a Equação 1 passa pelos pontos $(0,10)$ e $(1,9)$. Já a reta que representa a Equação 2 passa pelos pontos $(0,-4)$ e $(1,-3)$. Plotando esses pontos no plano cartesiano, percebe-se que as equações formam retas concorrentes, como mostra na Figura 3.2. Para encontrar a solução do sistema, é preciso seguir atribuindo valores. De fato, a interseção ocorre quando:

$$10 - x = -4 + x.$$
$$2x = 14 \Rightarrow x = 7.$$

e, substituindo o valor encontrado de x na Equação 1 (ou 2), encontramos $y = 3$.

Segundo Lopes (2015), o ponto de interseção entre as retas é justamente o par ordenado que soluciona o sistema. Nesse caso, existe apenas um par ordenado onde as retas se interceptam: (7,3).

Figura 3.2 – Representação geométrica de um SPD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

.

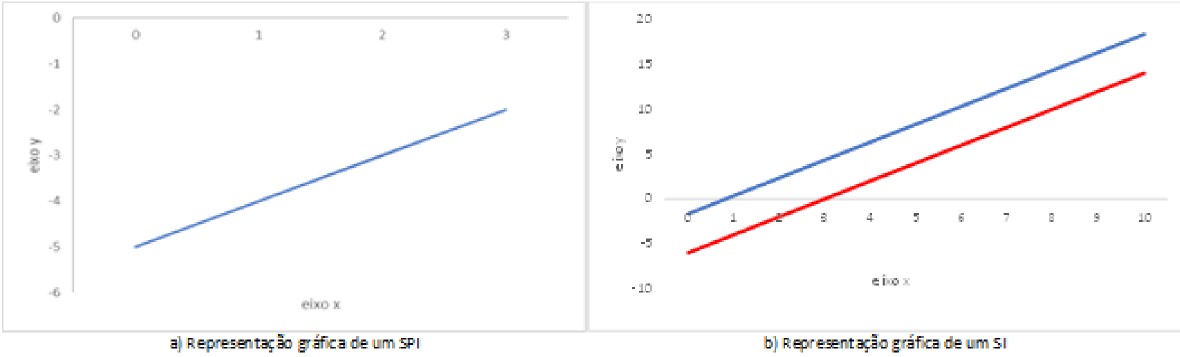
Exemplo 3.2: Os sistemas a seguir são exemplos de:

SPI: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

SI: $\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$

No plano cartesiano, esses formam retas coincidentes e paralelas distintas, respectivamente, que podem ser visualizadas na Figura 3.3. Como a solução é determinada por meio da interseção, no caso do SPI, temos infinitas soluções e as retas passam pelos mesmos pontos. Já no caso do SI, o sistema não possui soluções reais e as retas não se interceptam.

Figura 3.3 – Representação gráfica de casos de SPI e SI



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

3.2.2 Resolução algébrica

Na maioria dos casos, por ser pouco prático, o método geométrico não é o mais adequado. Em contrapartida, os métodos algébricos de resolução de sistemas permitem encontrar as soluções das equações de maneira mais precisa e eficiente, quando essas existem. Os principais métodos álgebricos de resolução de sistemas são descritos a seguir.

Método da adição

De maneira resumida, o método da adição consiste em somar as equações para encontrar a solução do sistema. De acordo com Lopes (2015), para utilizar esse método, deve-se:

- verificar se os coeficientes de alguma das variáveis são simétricos, isto é, números opostos. Caso isso não ocorra, pode-se efetuar multiplicações, de maneira que essa condição seja válida;
- adicionar os termos das equações e resolver a equação para a variável restante, e assim, encontrar seu respectivo valor;
- substituir o valor encontrado, em uma das equações do sistema, para descobrir o valor da segunda variável;
- expressar o conjunto-solução.

Exemplo 3.3: $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ -5x + y = 5 \end{cases}$

Solução:

Observando as equações, percebe-se que os coeficientes da variável x são números opostos, 5 e -5. Assim, efetua-se a adição das equações do sistema, obtendo uma única equação, com uma só variável:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ -5x + y = 5 \\ \overline{} \\ 3y = 15 \Rightarrow y = 5. \end{cases}$$

Em seguida, substitui-se o valor encontrado de y em uma das equações do sistema; escolhendo a primeira, por exemplo, temos:

$$5x + 2(5) = 10 \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Por fim, podemos representar o conjunto-solução do sistema da seguinte maneira:

$$S = \{(0, 5)\}.$$

Quando os coeficientes das variáveis são não simétricos, é preciso efetuar uma multiplicação de modo a tornar um desses coeficientes números opostos. Essa situação pode ser exemplificada com o sistema exposto no Exemplo 3.4:

Exemplo 3.4: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - 3y = -7 \end{cases}$

Solução:

Multiplicando a primeira equação por -2, tem-se:

$$\begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ 4x - 3y = -7 \end{cases}$$

Efetuando a soma das equações:

$$\begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ -4x - 3y = -7 \\ \overline{} \\ -5y = -15 \Rightarrow y = 3. \end{cases}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, tem-se:

$$2x + y = 4 \Rightarrow 2x + (3) = 4 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}.$$

Portanto, o conjunto-solução desse sistema é:

$$\text{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, 3\right)\right\}.$$

Método da comparação

O método da comparação consiste em comparar as equações do sistema uma com a outra. Segundo Lopes (2015), para utilizar esse método, deve-se:

- escolher uma variável e resolver ambas equações do sistema a fim de encontrar o seu valor em termos da outra variável;
- comparar as duas equações;
- obter os valores das variáveis;
- expressar o conjunto-solução.

Exemplo 3.5: $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

Solução:

Resolvendo as equações do sistema para encontrar o valor de x, tem-se:

$$x = 3y - 7 \text{ e } x = -\tfrac{2}{3}y + 4.$$

Comparando as duas equações:

$$3y - 7 = -\tfrac{2}{3}y + 4 \Rightarrow \tfrac{11}{3}y = 11.$$

ou seja,

$$11y = 33 \Rightarrow y = 3.$$

Por fim, substitui-se em uma das equações, o valor encontrado de y, para descobrir o de x:

$$x = -7 + 3(3) \Rightarrow x = 2.$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (2,3).

Método da substituição

O método da substituição baseia-se na substituição de uma das variáveis em função da outra. Conforme Lopes (2015), para resolver um sistema utilizando esse método, deve-se seguir o seguinte passo a passo:

- escolher uma das equações e isolar uma das variáveis na equação escolhida;
- substituir essa variável na outra equação e resolver a equação para a variável restante e assim, encontrar seu respectivo valor;
- substituir o valor encontrado em uma das equações, descobrindo o valor da segunda variável;
- expressar o conjunto-solução.

Exemplo 3.6: $\begin{cases} 6x + y = 2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

Solução:

Isolando a variável y, na primeira equação, tem-se:

$$y = -6x + 2.$$

Substituindo essa expressão, na segunda equação do sistema, obtém-se:

$$5x + 2(-6x + 2) = 11 \Rightarrow -7x = 7 \Rightarrow x = -1.$$

Descobrindo o valor de y:

$$y = -6(-1) + 2 \Rightarrow y = 8.$$

Sendo assim, o conjunto solução desse sistema de equações é dado pelo par ordenado (-1,8).

3.2.3 Sistemas indeterminados e impossíveis e os métodos de resolução

Os métodos de resolução de sistemas lineares descritos anteriormente são válidos para solucionar sistemas possíveis e determinados. Ao aplicar tais métodos para solucionar sistemas do tipo possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI), o resultado encontrado será uma igualdade (no caso de um SPI) ou uma falsa igualdade (no caso de um SI).

Considere o sistema exposto no Exemplo 3.7, que mostra um caso de SPI:

Exemplo 3.7: $\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

Como dito anteriormente, o SPI é caracterizado por possuir equações múltiplas uma da outra. Nesse caso, em particular, uma equação é o dobro da outra. Aplicando os métodos de resolução de sistema lineares para esse sistema, obtém-se o seguinte resultado:

- **Método da adição**
  Multiplicando a segunda equação por -2 e somando as equações, tem-se:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ -2x - 4y = -20 \\ \overline{\hphantom{0x + 0y = 0 \Rightarrow 0 = 0.}} \\ 0x + 0y = 0 \Rightarrow 0 = 0. \end{cases}$$

- **Método da comparação**
  Resolvendo as equações em termos de y, tem-se:

$$x = 10 - 2y \text{ e } x = 10 - 2y.$$

  Como as equações são iguais, compará-las resulta em anulação, como segue:

$$10 - 2y = 10 - 2y \Rightarrow 0 = 0.$$

- **Método da substituição**
  Isolando a variável x na primeira equação e substituindo na segunda equação, obtém-se:

$$(10 - 2y) + 2y = 10,$$

  ou seja,

$$10 - 2y + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Note que a aplicação dos métodos de resolução de sistemas lineares para sistemas do tipo SPI não resultam em solução, mas sim em uma igualdade $(0 = 0)$. Essa igualdade representa o fato do SPI não poder ser solucionado por meio de um único par ordenado, já que sua característica principal é de possuir infinitas soluções. Para determinar algumas soluções desse tipo de sistema, é válido lembrar que em um SPI, as equações são múltiplas uma da outra, sendo assim, qualquer par ordenado que satisfaça a primeira equação satisfará também a segunda. Dessa forma:

- (10,0) é solução das duas equações;

- (0,5) é solução das duas equações;
- (6,2) é solução das duas equações; e
- outras infinitas possibilidades.

Nesse caso, para representar o conjunto-solução, define-se o valor de x em termos de y em uma das equações. Assim, tem-se: $x = 10 - 2y$. Portanto,

$$S = \{(10 - 2y, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Considere agora o sistema exposto no Exemplo 3.8, que mostra um caso de SI:

Exemplo 3.8: $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x + 12y = 20 \end{cases}$

O SI é caracterizado por não possuir equações múltiplas uma da outra, embora os membros das equações que contêm as incógnitas sejam múltiplos. Como o próprio nome sugere, esse tipo de sistema não pode ser solucionado. No entanto, vejamos o que acontece ao aplicar os métodos de resolução:

- **Método da adição**
  Multiplicando a primeira equação por -3 e somando as equações, tem-se:

$$\begin{cases} -6x - 12y = -30 \\ 6x + 12y = 20 \\ \hline 0x + 0y = -10 \Rightarrow 0 = -10. \end{cases}$$

- **Método da comparação**

  Resolvendo as equações em termos de y, tem-se:

$$x = 5 - 2y \text{ e } x = \tfrac{10}{3} - 2y.$$

  Comparando as equações, obtém-se:

$$5 - 2y = \tfrac{10}{3} - 2y \Rightarrow 5 = \tfrac{10}{3} \Rightarrow 15 = 10.$$

- **Método da substituição**
  Isolando a variável x na primeira equação e substituindo na segunda equação, obtém-se:

$$6(5-2y)+12y=20,$$

logo,

$$30-12y+12y=20 \Rightarrow 30=20.$$

Ou seja, o resultado da aplicação dos métodos de resolução de sistemas lineares para sistemas SI é uma igualdade não-verdadeira ($0=-10$, $15=10$ e $30=20$), representando o fato dos sistemas desse tipo não terem solução. Nesse sentido, vale salientar que os métodos de resolução de sistemas se limitam a encontrar soluções para sistemas possíveis e determinados (SPD).

3.3 Equações do 2º grau

Segundo Dante (2015b), as primeiras situações envolvendo problemas de equações do 2º grau foram registradas nas civilizações da Babilônia. Há um antigo texto escrito em argila pelos babilônios com o seguinte problema: "quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?", o que significa: $x^2-x=870$ ou $x^2-x-870=0$, na linguagem matemática.

Uma equação é do segundo grau quando pode ser escrita na forma: $ax^2+bx+c=0$, sendo a, b e c números reais e, necessariamente, $a\neq 0$. O coeficiente a é diferente de zero para garantir a presença do termo ax^2, que define uma equação do 2º grau (Dante, 2015b).

Quando os coeficientes da equação (a, b e c) são todos diferentes de zero, a equação é chamada equação do segundo grau completa. Por outro lado, se pelo menos b ou c for nulo, a equação do segundo grau é dita incompleta. Isso é importante pois o método de resolução de uma equação do segundo grau difere a depender da sua completude.

São exemplos de equações do 2º grau as seguintes sentenças:

1. $3x^2-5x+8=0$, é uma equação do 2º grau completa, onde 3, -5 e 8 são os valores dos coeficientes a, b e c, respectivamente;

2. $x^2-25=0$, é uma equação incompleta do 2º grau, em que $a=1$, $b=0$ e $c=-25$;

3. $2x^2-4x=0$, é uma equação incompleta do 2º grau, onde $a=2$, $b=-4$ e $c=0$.

3.3.1 Resolução de equações incompletas do 2º grau

- **Equações do tipo $ax^2=0$, como por exemplo,** $9x^2=0$:
  Neste caso, apenas o coeficiente a é diferente de 0.
  Primeiramente, divide-se ambos os lados da equação por a, resultando em:

$$x^2=0.$$

Em segundo lugar, aplica-se raiz quadrada:

$$x = \pm\sqrt[2]{0} \to x = 0.$$

Nota: equações do tipo $ax^2 = 0$ sempre terão como resultado duas raízes reais e iguais a zero.

- **Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, como por exemplo, $4x^2 - 100 = 0$:**
  Neste caso, o coeficiente b é nulo.

  Para resolver essa equação, aplica-se a seguinte propriedade: $x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, que resulta em 2 soluções reais se $\frac{-c}{a} > 0$.

  Dessa forma, tem-se:

  $$x^2 = \frac{100}{4} \Rightarrow x^2 = 25.$$

  Aplicando a raiz quadrada en ambos os membros da equação, usando raízes positivas e negativas, tem-se:

  $$x = \pm\sqrt[2]{25} \to x = \pm 5.$$

  Portanto, as soluções para esta equação são 5 e -5.

- **Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, como por exemplo, $5x^2 - 3x = 0$:**
  Neste caso, o coeficiente c é nulo.
  Para resolver uma equação desse tipo é preciso usar fatoração. Sendo assim, o primeiro passo é colocar a incógnita em evidência na expressão, como segue:

  $$x(5x - 3) = 0.$$

  Desse modo, tem-se: $x = 0$ ou $5x - 3 = 0$.
  Calculando o valor de x na segunda expressão, obtemos: $x = \frac{3}{5}$.
  Portanto, as soluções para esta equação são 0 e $x = \frac{3}{5}$.
  Nota: equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ sempre terão duas raízes reais distintas, uma delas será zero e a outra, $\frac{-b}{a}$.

3.3.2 Resolução de uma equação completa do 2º grau

Existe uma fórmula para resolver qualquer equação do 2º grau. Amplamente conhecida, a fórmula de Bháskara[1], permite calcular o valor da incógnita, por meio dos coeficientes a, b e c. A referida fórmula pode ser visualizada na equação (3.1) abaixo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{\Delta}}{2a} \tag{3.1}$$

sendo, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Em consonância com Dante (2015b), o número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2º grau e determina quantas raízes solucionará a equação. Sendo assim,

- Quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais diferentes;
- Quando $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais;
- Quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais;

Exemplo 3.9: $3x^2 - 5x + 3 = 0$.

Solução:

Sendo, $a = 3$, $b = -5$ e $c = 3$, tem-se:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(3) \Rightarrow \Delta = -11.$$

Como sabemos, se o valor do discriminante for negativo, a equação não pode ser definida no conjunto dos números reais. Logo, nesse caso, a equação não possui soluções reais.

Exemplo 3.10: $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Solução:

Sendo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$, tem-se:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) \Rightarrow \Delta = 1.$$

[1] Apesar de Bháskara não ter sido o autor, essa fórmula leva o seu nome como forma de homenagem ao seu trabalho. Bháskara foi um dos mais importantes matemáticos do século XII e contribuiu bastante para o entendimento de equações de 1° e 2° graus. Um outro ponto a ser destacado é que apenas no Brasil o nome de Bháskara se encontra vinculado a essa fórmula (Dante, 2015b).

Sabe-se que essa equação tem duas soluções reais distintas, pois o valor do discriminante é positivo. Então,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 0,5.$$

Exemplo 3.11: $-x^2 + 10x - 25 = 0$.

Solução:

Sendo, $a = -1$, $b = 10$ e $c = -25$, tem-se:

$$\Delta = 10^2 - 4(-1)(-25) \Rightarrow \Delta = 0.$$

Logo, a equação possui duas soluções reais iguais:

$$x = \frac{-10 \pm 0}{-2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 5.$$

Uma observação a ser feita é que a fórmula de Bháskara serve para resolver toda e qualquer equação do 2º grau, seja ela completa ou não. No entanto, recomenda-se aplicar esse método de resolução apenas em equações completas, já que os demais métodos de resolução de equações incompletas são mais rápidos e práticos.

3.4 Sistemas com equações do 2º grau

Um sistema com equações do segundo grau precisa ter pelo menos uma equação do segundo grau em sua composição, como mostra o Exemplo 3.12:

Exemplo 3.12: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

Solução:

Para resolver esse sistema, será preciso aplicar o método da substituição. Dessa forma, o primeiro passo é encontrar uma relação entre x e y. Neste caso em particular, é preferível resolver y em termos de x, como segue:

$$2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x.$$

O segundo passo é substituir a expressão encontrada na segunda equação do sistema:

$$x^2 + (5 - 2x)^2 = 8 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 17 = 0.$$

Aplicando a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, tem-se:

$$\Delta = (-20^2) - 4(5)(17) \Rightarrow \Delta = 60.$$

Logo,

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{60}}{10} \Rightarrow x_1 = \frac{20+\sqrt{60}}{10} \text{ e } x_2 = \frac{20-\sqrt{60}}{10}.$$

Simplificando o valor de x, tem-se:

$$x_1 = \frac{10+\sqrt{15}}{5} \text{ e } x_2 = \frac{10-\sqrt{15}}{5}$$

O último passo é substituir os valores encontrados de x para descobrir y:
Para $x = \frac{10+\sqrt{15}}{5}$, tem-se:

$$y = 5 - 2(\frac{10+\sqrt{15}}{5}) \Rightarrow y = \frac{5-2\sqrt{15}}{5}.$$

E para $x = \frac{10-\sqrt{15}}{5}$, tem-se:

$$y = 5 - 2(\frac{10-\sqrt{15}}{5}) \Rightarrow y = \frac{5+2\sqrt{15}}{5}.$$

Portanto, são soluções do sistema os seguintes pares ordenados: $(\frac{10+\sqrt{15}}{5}, \frac{5-2\sqrt{15}}{5})$ e $(\frac{10-\sqrt{15}}{5}, \frac{5+2\sqrt{15}}{5})$.

Devido a complexidade da construção do gráfico desse sistema no *Excel*, optamos por não fazê-lo. Além disso, a resolução geométrica não parece ser muito útil para funções do 2º grau. Finalmente, apresentados os conceitos matemáticos a cerca de sistemas de equações lineares do 1º e 2º grau, analisaremos no capítulo a seguir questões sobre o referido conteúdo retiradas de provas de matemática em âmbito nacional.

4 DISCUSSÃO DE QUESTÕES ENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo serão discutidas algumas questões de matemática retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de provas elaboradas pela Comissão Permanente de Concursos (CPCON), da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), a cerca do assunto sistemas lineares de 1º e 2º grau. Também será discutida uma questão de elaboração própria. A análise de tais questões busca compreender como este conteúdo é abordado no ENEM e em concursos, e evidencia a importância de se trabalhar em sala de aula questões interdisciplinares e que contextualizam situações-problema do cotidiano. A primeira questão a ser discutida é proveniente da prova do ENEM de 2018, sendo a de nº 172, do caderno amarelo.

Questão 1 (ENEM - 2018):

> Uma loja vende automóveis em n parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade n de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

a) 20

b) 24

c) 29

d) 40

e) 58

Para resolver essa questão, em primeiro lugar, é preciso traduzir o enunciado da questão para a linguagem matemática, sendo assim:

1º passo - interpretar o enunciado e definir as equações:

A proposta inicial da loja pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{Valor Total} = n.x,$$

sendo n o número de parcelas do financiamento e x o valor da parcela a ser paga.

No entanto, o valor de cada parcela diminui 200 reais se o cliente quiser aumentar o prazo do financiamento em 5 meses. Desse modo,

$$\text{Valor Total} = (n + 5).(x - 200).$$

Uma outra possibilidade de pagamento é diminuir o prazo em 4 meses, mas aumentando o valor da parcela em 232 reais. Assim,

$$\text{Valor Total} = (n - 4).(x + 232).$$

Sabendo que o valor do automóvel é o mesmo em qualquer uma das possibilidades, podemos escrever o sistemas de equações da seguinte forma:

Equação 1: $(n + 5).(x - 200) = nx$
Equação 2: $(n - 4).(x + 232) = nx$

Em segundo lugar, como as equações possuem produto em sua composição, é preciso aplicar a propriedade distributiva, a fim de simplificá-las, desse modo:

2º passo - simplificar as equações:
Equação 1:

$$\begin{gathered} nx - 200n + 5x - 1000 = nx \\ -200n + 5x - 1000 = 0 \\ -40n + x - 200 = 0 \\ -40n + x = 200 \end{gathered}$$

Equação 2:

$$\begin{gathered} nx + 232n - 4x - 928 = nx \\ 232n - 4x - 928 = 0 \\ 58n - x - 232 = 0 \\ 58n - x = 232 \end{gathered}$$

Com as equações simplificadas, pode-se montar o sistema de equações, desse modo:

3º passo - montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} -40n + x = 200 \\ 58n - x = 232 \end{cases}$$

O último passo é solucionar o sistema e, portanto, é preciso escolher qual método de resolução é o mais adequado. No caso desse sistema em particular, recomenda-se utilizar o método da adição, já que a incógnita x é simétrica, podendo ser anulada. sendo assim:

4º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

Utilizando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} -40n + x = 200 \\ 58n - x = 232 \\ \overline{} \\ 18n = 432 \Rightarrow n = 24. \end{cases}$$

Ou seja, o número de parcelas a serem pagas é igual a 24, pois $n = 24$. Nesse caso, a alternativa correta é a letra B. Caso a questão pedisse o valor de x, isto é, do valor da parcela, seria preciso apenas substituir o valor encontrado de n em uma das equações do sistema, como segue:

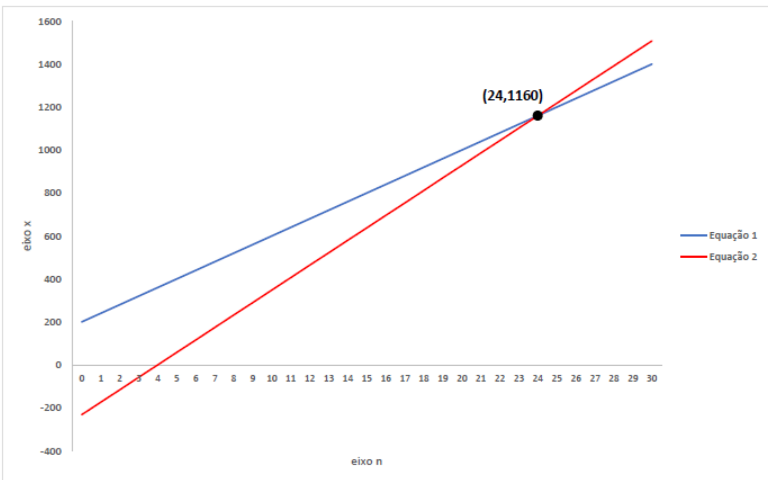
$$-40(24) + x = 200 \Rightarrow x = 200 + 960 \Rightarrow x = 1160.$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (24,1160).

Para tornar ainda mais claro a resolução do sistema e o entendimento do aluno, o professor pode ainda apresentar a resolução gráfica que pode ser feita por meio de um *software* como o *Microsoft Exel*, como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação gráfica da Questão 1 no Excel

Equação 1		Equação 2	
n	x= 200+40n	n	x=-232+58n
0	200	0	-232
1	240	1	-174
2	280	2	-116
3	320	3	-58
4	360	4	0
5	400	5	58
6	440	6	116
7	480	7	174
8	520	8	232
9	560	9	290
10	600	10	348
11	640	11	406
12	680	12	464
13	720	13	522
14	760	14	580
15	800	15	638
16	840	16	696
17	880	17	754
18	920	18	812
19	960	19	870
20	1000	20	928
21	1040	21	986
22	1080	22	1044
23	1120	23	1102
24	1160	24	1160
25	1200	25	1218
26	1240	26	1276
27	1280	27	1334
28	1320	28	1392
29	1360	29	1450
30	1400	30	1508



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Para chegar nesse resultado, o professor precisa apenas atribuir valores para a incógnita

n a fim de descobrir o valor de x. O segundo passo é plotar um gráfico de linha[1]. Como o sistema é possível e determinado, o ponto de interseção entre as retas é justamente o par ordenado que soluciona o sistema. Nesse caso, o par ordenado que soluciona o sistema é (24,1160).

Destaca-se que a questão analisada acima trabalha todas as habilidades necessárias para o entendimento do conteúdo de sistema lineares, a saber: capacidade de entender o enunciado e traduzir para a linguagem matemática; montagem do sistema; e sua resolução (algébrica e geométrica). Além disso, a questão trata de um assunto do cotidiano, onde as incógnitas n e x são entendidas como o número e valor de parcelas em um financiamento, facilitando assim a compreensão da situação-problema por parte dos alunos.

A próxima questão a ser discutida foi extraída do ENEM do ano de 2015, sendo a questão 153 do caderno cinza.

Questão 2 (ENEM - 2017):

> Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?
>
> **a)** 30
>
> **b)** 36
>
> **c)** 50
>
> **d)** 60
>
> **e)** 64

Para resolver essa questão, em primeiro lugar, é preciso escrever as equações. Vamos considerar que x seja o número de acertos e y o número de erros ao alvo.

1º passo - escrever as equações:

Equação 1: $20x - 10y = 100$

Equação 2: $x + y = 80$

[1]Para criar qualquer representação gráfica de sistemas no *Excel* basta construir a sequência de pares ordenados em ambas as equações, o que pode ser feito por meio da atribuição de valores, ou seja, definindo o valor de valor de x para descobrir o valor de y). Feito isso, plota-se um gráfico de linha. Não são utilizadas fórmulas nesse processo.

A primeira equação pode ser reduzida a fim de tornar o cálculo mais fácil. Sendo assim, o segundo passo é simplificá-la, desse modo:

2º passo - simplificar a equação 1:

Dividindo ambos os lados por 10, tem-se:

Equação 1: $2x - y = 10$

Com a equação simplificada, o próximo passo é montar o sistema de equações:

3º passo - montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

O quarto e último passo é escolher o método de resolução e solucionar o sistema:

4º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

Nesse caso, também recomenda-se o uso do método da adição, uma vez que a incógnita y pode ser anulada. Desse modo:

Efetuando a soma das equações, tem-se:

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 80 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 3x = 90 \Rightarrow x = 30. \end{cases}$$

Ou seja, o número de acertos ao alvo do participante foi igual a 30. Logo, a alternativa correta é a letra A. Se a questão pedisse também o número de erros, seria preciso apenas substituir o valor encontrado de x em uma das equações do sistema, como segue:

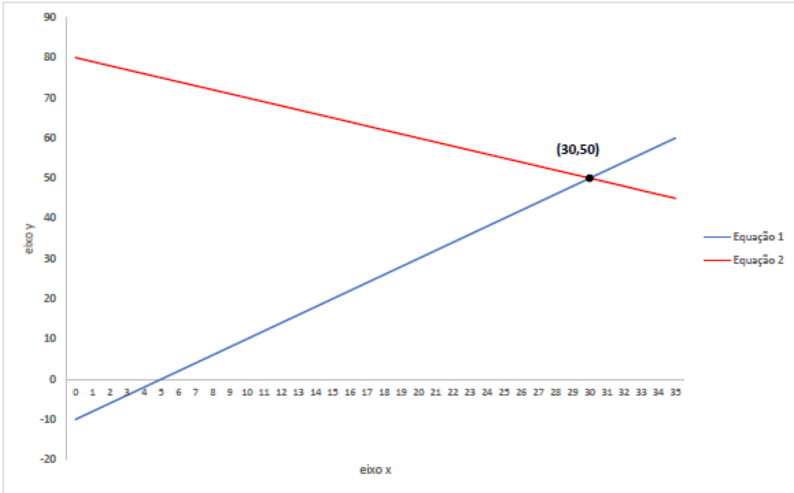
$$30 + y = 80 \Rightarrow y = 50.$$

Sendo assim, a solução do sistema é o par ordenado (30,50).

A representação gráfica, feita no *Microsoft Exel*, desse sistema pode ser visualizada na Figura 4.2. Como visto, o ponto de interseção entre as retas é justamente o par ordenado que soluciona o sistema. Nesse caso, o par ordenado que soluciona o sistema é (30,50).

Figura 4.2 – Representação gráfica da Questão 2 no Excel

Equação 1		Equação 2	
x	y=2x-10	x	y=80-x
0	-10	0	80
1	-8	1	79
2	-6	2	78
3	-4	3	77
4	-2	4	76
5	0	5	75
6	2	6	74
7	4	7	73
8	6	8	72
9	8	9	71
10	10	10	70
11	12	11	69
12	14	12	68
13	16	13	67
14	18	14	66
15	20	15	65
16	22	16	64
17	24	17	63
18	26	18	62
19	28	19	61
20	30	20	60
21	32	21	59
22	34	22	58
23	36	23	57
24	38	24	56
25	40	25	55
26	42	26	54
27	44	27	53
28	46	28	52
29	48	29	51
30	50	30	50
31	52	31	49
32	54	32	48
33	56	33	47
34	58	34	46
35	60	35	45



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Pelo fato dessa questão contextualizar uma situação mais lúdica, já que o enunciado faz referência a uma brincadeira em um parque de diversões, ela é excelente para trabalhar a habilidade do aluno em interpretar informações e traduzi-las para uma linguagem matemática. Além disso, por ser uma questão relativamente fácil de ser respondida, ela pode contribuir muito para fortalecer a confiança do aluno no uso das técnicas e métodos que envolvem o conteúdo de sistemas de equações.

A terceira questão a ser discutida foi extraída do ENEM Digital realizada no ano de 2020, sendo a questão de número 139.

Questão 3 (ENEM - 2020):

> Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos leves e médias acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.Qual é a razão entre o número de infrações do tipo leve e o número de infrações do tipo média cometidas por esse motorista?

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{17}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{7}{17}$

Seguindo o passo a passo, em primeiro lugar vamos escrever as equações do sistema. Trataremos a quantidade das infrações leve e média como x e y, respectivamente.

1º passo - escrever as equações:

Equação 1: $x + y = 5$

Equação 2: $3x + 4y = 17$

Nessa questão, as equações não precisam ser simplificadas. Sendo assim, o segundo passo é montar o sistema, como segue:

2º passo - montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$$

O terceiro e último passo é escolher o método de resolução e solucionar o sistema:

3º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

Já que as incógnitas não são simétricas, recomenda-se o uso do método da substituição para encontrar as soluções do sistema. Para isso, será preciso:

Isolar a variável x na primeira equação:

$$x = 5 - y.$$

Em seguida, substituir a expressão encontrada, na segunda equação do sistema, obtendo:

$$3(5 - y) + 4y = 17$$
$$15 - 3y + 4y = 17 \Rightarrow y = 2$$

E por fim, substituir o valor de y para encontrar o valor de x:

$$x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3.$$

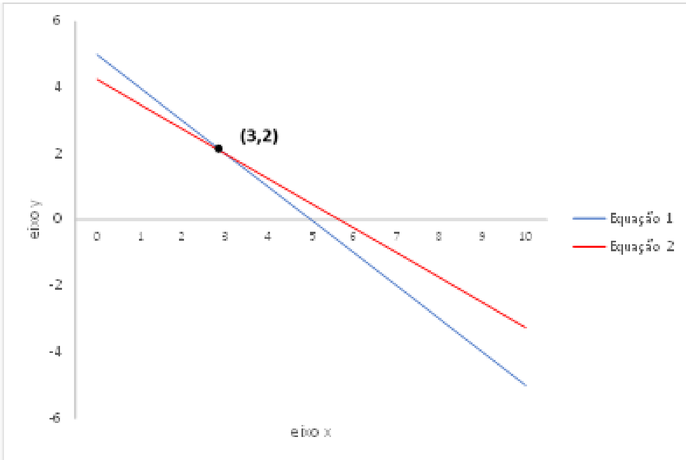
Portanto, $S = \{(3,2)\}$.

Nesse caso, o motorista cometeu 3 infrações leves, já que $x = 3$ e, 2 infrações médias, já que $y = 2$. Sendo assim, a solução do sistema é o par ordenado (3,2). Logo, a razão entre infrações leves (x) e médias (y) cometidas pelo motorista é igual a $\frac{3}{2}$. Ou seja, a resposta correta é a alternativa D.

A representação gráfica desse sistema pode ser visualizada na Figura 4.3. Como visto, o ponto de interseção entre as retas (3,2) representa o par ordenado que soluciona o sistema.

Figura 4.3 – Representação gráfica da Questão 3 no Excel

Equação 1		Equação 2	
x	y=5-x	x	y=(17-3X)/4
0	5	0	4,25
1	4	1	3,5
2	3	2	2,75
3	2	3	2
4	1	4	1,25
5	0	5	0,5
6	-1	6	-0,25
7	-2	7	-1
8	-3	8	-1,75
9	-4	9	-2,5
10	-5	10	-3,25



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A questão analisada, do mesmo modo que a questão 2, por ser de fácil entendimento, também pode ajudar bastante a aumentar a confiança dos alunos sobre o conteúdo de sistema de equações. Um ponto interessante a ser destacado é que geralmente o método da adição é o mais fácil quando há a presença de incógnitas simétricas. No entanto, pelo fato das equações do sistema não possuir essa característica, o método da substituição mostrou ser o mais adequado. Nesse sentido, se faz preciso estimular a capacidade crítica do aluno para escolher a técnica de resolução mais adequada a cada questão, isto é, aquela que envolverá menos esforço para solucionar o problema. Somente com a prática de exercícios o aluno terá esse olhar crítico sobre como resolver cada problema e, estimular a comparação entre os métodos de resolução em questões desse tipo pode ser uma estratégia de ensino extremamente assertiva.

A quarta questão a ser discutida é a de número 22, retirada da prova de matemática do Concurso da Prefeitura do município de Sousa, na Paraíba, realizado pela Comissão Permanente de Concursos (CPCON), em 2021.

Questão 4 (CPCON - 2021):

Em uma panificadora, o preço de cada pão é 1/8 do preço do panetone. Sabendo-se que Luís gastou R$ 18,00 com a compra de 8 pães e 2 panetones, quanto José pagou por 4 pães e 3 panetones?

a) 22 reais

b) 19 reais

c) 24 reais

d) 17 reais

e) 21 reais

1º passo - escrever as equações:

Pela leitura do enunciado, sendo x o preço do pão e y o preço do panetone, podemos escrever as seguintes equações:

Equação 1: $x = 1/8y$

Equação 2: $8x + 2y = 18$

Para tornar a resolução do sistema mais rápida, podemos escrever a Equação 1 da seguinte forma:

Equação 1:

$$x = \frac{1}{8}y$$
$$8x = y$$
$$8x - y = 0$$

Com as equações definidas, podemos montar o sistema de equações, desse modo:

2º passo - montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} 8x - y = 0 \\ 8x + 2y = 18 \end{cases}$$

3º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

O terceiro e último passo é resolver o sistema. Mais uma vez, o método de resolução mais adequado é o da adição. Mesmo as equações não tendo variáveis simétricas, com uma simples operação podemos tornar essa condição verdadeira. Para isso, multiplicaremos a primeira equação por -1, como segue:

Multiplicando a Equação 1 por -1:

$$\begin{cases} -8x + y = 0 \\ 8x + 2y = 18 \end{cases}$$

Efetuando a soma das equações:

$$\begin{cases} -8x + y = 0 \\ 8x + 2y = 18 \\ \overline{} \\ 3y = 18 \Rightarrow y = 6. \end{cases}$$

Substituindo o valor de y para encontrar o valor de x:

$$x = \frac{1}{8}y \Rightarrow x = \frac{6}{8} \Rightarrow x = 0,75.$$

Nesse caso, o par ordenado que soluciona o sistema é:

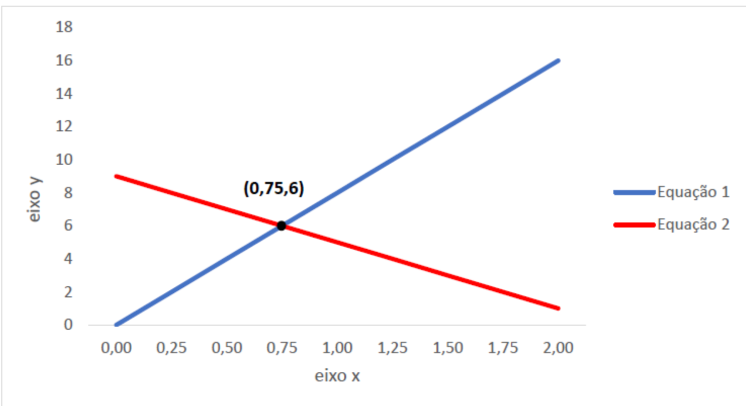
$$S = \{(0,75,6)\}.$$

Assim, José pagou R\$3,00 por quatro pães ($4 * 0,75 = 3$) e R\$18,00 ($3 * 6 = 18$) por 3 panetones, totalizando R\$21,00 gastos na padaria ($3 + 18 = 21$). Logo, a alternativa correta é a letra E.

A representação gráfica desse sistema pode ser visualizada na Figura 4.4. Como mostrado, o par ordenado que soluciona o sistema é $(0,75,6)$.

Figura 4.4 – Representação gráfica da Questão 4 no Excel

Equação 1		Equação 2	
x	y=8x	x	y=9-4x
0,00	0	0,00	9
0,25	2	0,25	8
0,50	4	0,50	7
0,75	6	0,75	6
1,00	8	1,00	5
1,25	10	1,25	4
1,50	12	1,50	3
1,75	14	1,75	2
2,00	16	2,00	1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Mais uma vez, a questão analisada trás uma situação de cotidiano, onde uma pessoa tenta calcular o preço dos produtos em uma padaria. Reforça-se aqui a importância de trabalhar questões com esse tipo de enunciado, ao passo que essas, despertam o interesse dos alunos, já que os mesmos podem perceber que o conteúdo matemático pode ser aplicado em seu dia a dia. Por sua vez, essa percepção, além de facilitar o processo de aprendizagem do conteúdo em si, pode estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico, processo em que um individuo, por meio de seus conhecimentos é capaz de solucionar problemas cotidianos. Outro ponto a ser destacado nessa questão é o fato de trabalhar a capacidade dos alunos de aplicar operações simples que facilitam a resolução do problema, como foi o caso da multiplicação por -1 em uma das equações do sistema.

A quinta questão a ser discutida também foi elaborada pela Comissão Permanente de Concursos (CPCON).

Questão 5 (CPCON):

> Em um evento comemorativo da páscoa na escola, a professora Clara levou uma certa quantidade de chocolates para distribuir entre os seus alunos. Clara calculou que, se fosse distribuir 3 chocolates para cada aluno, faltariam 6 chocolates. Sendo assim, ela distribuiu 2 chocolates para cada aluno e sobraram 8 chocolates. Quantos alunos têm na turma da professora Clara?

Pela leitura do enunciado, sendo x a quantidade de alunos e y o número total de chocolates distribuídos, podemos escrever as seguintes equações:

1º passo - escrever as equações:

Equação 1: $3x - 6 = y$
Equação 2: $2x + 8 = y$

Com as equações definidas, podemos montar o sistema de equações:

2º passo - montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x - 6 = y \\ 2x + 8 = y \end{cases}$$

3º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

Como o sistema foi montado já em função de y, podemos utilizar o método da comparação para solucioná-lo. Dessa forma:

Igualando as equações, temos:

$$3x - 6 = 2x + 8$$
$$3x - 2x = 8 + 6$$
$$x = 14.$$

Portanto, a turma da professora Clara é formada por 14 alunos. Já a quantidade total de chocolates levado para a turma foi:

$$y = 2x + 8 \Rightarrow y = 2(14) + 8 \Rightarrow y = 36.$$

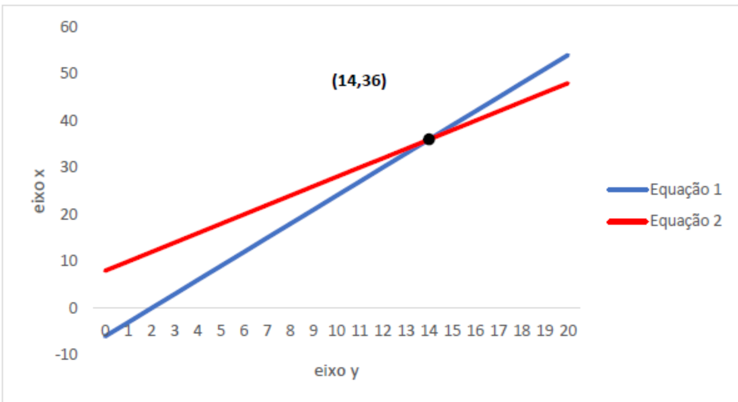
Ou seja, o par ordenado que soluciona o sistema é:

$$S = \{(14, 36)\}.$$

A Figura 4.5 mostra a representação das equações do sistema de equações da questão 5 e o par ordenado que soluciona o sistema. Vale salientar que essa questão, em específico, é excelente para trabalhar a capacidade crítica do aluno para escolher a técnica de resolução mais adequada. Nesse caso, a técnica que resultou em um menor esforço para solucionar o problema foi o método da comparação. Embora esse seja um método não muito utilizado, é de fundamental importância que o aluno o conheça e saiba as situações mais adequadas para aplicá-lo.

Figura 4.5 – Representação gráfica da Questão 5 no Excel

Equação 1		Equação 2	
x	y=3x-6	x	y=2x=8
0	-6	0	8
1	-3	1	10
2	0	2	12
3	3	3	14
4	6	4	16
5	9	5	18
6	12	6	20
7	15	7	22
8	18	8	24
9	21	9	26
10	24	10	28
11	27	11	30
12	30	12	32
13	33	13	34
14	36	14	36
15	39	15	38
16	42	16	40
17	45	17	42
18	48	18	44
19	51	19	46
20	54	20	48



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Por fim, a última questão apresentada nesse capítulo será destinada a discussão de sistemas de equações do segundo grau. Uma excelente estratégia é relacionar equações do segundo grau com geometria. Nesse sentido, foi elaborada uma questão tendo como proposta proporcionar ao aluno o desenvolvimento de habilidades como a interpretação de problemas, construção geométrica de figuras planas e resolução de equações e sistemas do 2º grau.

Questão 6 - Elaboração própria

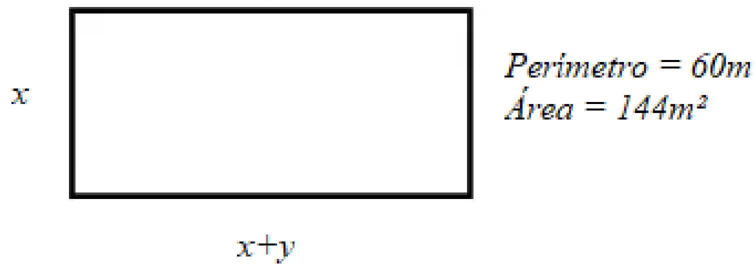
> Um terreno retangular cujo lado menor mede x e o lado maior mede $x + y$, possui $60m$ de perímetro e $144m^2$ de área. Determine a medida exata de seus lados.

Para resolver esse problema, como se trata de uma questão que envolve geometria, o primeiro passo é desenhar a figura.

1º passo - representando graficamente o problema:

A Figura 4.6 mostra a representação gráfica de um retângulo, conforme descrito pela questão 6.

Figura 4.6 – Representação do problema descrito na Questão 7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Tendo visualizado o problema, o segundo passo é calcular o que se pede. Sabendo que o perímetro é calculado somando todos os lados e que a área de um retângulo é obtido multiplicando base e altura, e que, o perímetro e a área desse terreno medem $60m$ e $144m^2$, respectivamente, podemos escrever as seguintes equações:

2º passo - escrever as equações:

Equação 1:

$$x + x + x + y + x + y = 60$$
$$4x + 2y = 60.$$

Equação 2:

$$x(x+y) = 144$$
$$x^2 + xy = 144.$$

Com as equações definidas, podemos montar o sistema de equações:

3º passo - montar o sistema de equações

$$\begin{cases} 4x + 2y = 60 \\ x^2 + xy = 144 \end{cases}$$

4º passo - escolher o método de resolução e solucionar o sistema de equações:

Para resolver esse sistema, será preciso aplicar o método da substituição. Desse modo, isolando a variável y na primeira equação, tem-se:

$$2y = 60 - 4x \Rightarrow y = 30 - 2x.$$

Substituindo essa expressão na segunda equação do sistema, obtém-se:

$$x^2 + x(30 - 2x) = 144$$
$$x^2 + 30x - 2x^2 = 144$$
$$-x^2 + 30x - 144 = 0.$$

Aplicando a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, tem-se:

$$\Delta = 30^2 - 4(-1)(-144) \Rightarrow \Delta = 324.$$

Logo,

$$x = \tfrac{-30 \pm 18}{-2} \Rightarrow x_1 = 6 \text{ e } x_2 = 24.$$

O último passo é substituir os valores encontrados de x para descobrir y:
Para $x = 6$, tem-se:

$$y = 30 - 2(6) \Rightarrow y = 18.$$

E para $x = 24$, tem-se:

$$y = 30 - 2(24) \Rightarrow y = -18.$$

Portanto, são soluções do sistema os seguintes pares ordenados: $(6, 18)$ e $(24, -18)$.

Desse modo, calculando as medidas dos lados do retângulo, temos:

Para o par ordenado $(6, 18)$:

$$\textbf{Lado menor: } x \Rightarrow 6$$
$$\textbf{Lado maior: } x + y \Rightarrow 6 + 18 = 24$$

Para o par ordenado $(24, -18)$:

$$\textbf{Lado menor: } x \Rightarrow 24$$
$$\textbf{Lado maior: } x + y \Rightarrow 24 - 18 = 6$$

Geometricamente, apenas o par ordenado $(6, 18)$ faz sentido. Logo, o lado de maior de comprimento do retângulo mede 24 metros e o de menor comprimento, 6 metros.

Em síntese, as questões discutidas ao longo desse capítulo possuem sempre uma contextualização de uma situação do cotidiano em sua construção, de modo a fazer despertar o interesse do aluno no conteúdo, além de estimular o uso de seu conhecimento prévio de dia a dia para solucionar os problemas apresentados em sala de aula. Destaca-se aqui, mais uma vez, a apresentação de questões com esse perfil em consonância com o uso de recursos metodológicos em sala de aula como uma estratégia que deve ser adotada pelo professor que visa a maximização do processo de aprendizagem dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Discutiu-se nesse trabalho o conteúdo de sistemas lineares de equações, o qual é considerado de suma importância no ensino da matemática, pois desenvolve habilidades diversas nos alunos durante o processo de aprendizagem. De acordo com o Parâmetro Curricular Nacional (PCN), é de fundamental importância desenvolver no aluno a capacidade crítica para a assimilação de conceitos e identificação de parâmetros, incógnitas e variáveis. No entanto, é preciso ainda, significar o conhecimento técnico, tornando-o mais palpável a partir de aplicações de situações no cotidiano.

As habilidades que podem ser desenvolvidas por meio da apropriação do conhecimento de sistemas lineares são: tradução do enunciado para a linguagem matemática; discussão e interpretação do problema, uma vez que o aluno precisa distinguir entre os variados tipos de sistemas antes de resolvê-lo; e por fim, a resolução de sistemas propriamente dita, ao passo que o aluno precisa decidir qual melhor técnica resolutiva aplicar diante de uma situação-problema. Nesse sentido, foram analisadas nesse trabalho questões que pudessem desenvolver nos alunos tais habilidades. Vale dizer ainda que as questões escolhidas possuem em comum a contextualização de situações cotidianas que podem tornar menos abstrato o entendimento do conteúdo de sistemas lineares em sala de aula.

As situações-problema analisadas foram retiradas do ENEM, da CPCON, além de contar com uma questão de elaboração própria. Essas versaram sobre questões de âmbito financeiro (como financiamento de um carro e preço de produtos), lúdico (premiação em um jogo de tiro ao alvo), institucional (leis de trânsito) e a relação entre a álgebra e a geometria (medidas de um terreno). Esses temas, embora não sejam o produto final do conhecimento a ser passado, pode despertar o interesse do aluno em procurar resolver o problema, já que ele passa a vê-lo como uma situação possível do seu cotidiano e não meramente um problema matemático. Em resumo, a resolução das questões analisadas foi realizada a partir da elaboração de um passo a passo, mediante o conhecimento teórico previamente debatido.

Uma outra estratégia aplicada nesse trabalho para tornar a visualização das questões de sistemas lineares menos abstrata foi a utilização da resolução geométrica feita no *Software Microsoft Excel*. Aqui evidencia-se a importância do uso de metodologias mais dinâmicas pelos professores de matemática em sala de aula.

De modo geral, conclui-se que as estratégias de ensino aplicadas neste trabalho, especialmente, a discussão de questões práticas, a elaboração de etapas para solucionar um problema, a comparação de métodos resolutivos e o uso de metodologias mais dinâmicas como uso de *softwares* podem ser aplicadas não só ao ensino do conteúdo de sistemas lineares, mas ao ensino da matemática como um todo. Acredita-se que esse seja o caminho a ser percorrido por professores que desejam despertar a paixão e o interesse da matemática em seus alunos, contribuindo assim, de forma extremamente significativa, para a formação desses.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, E. A. *Influências das habilidades e das atitudes em relação a matemática e a escolha profissional.* Tese (Doutorado), Unicamp, 1999.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004.

BIAZI, L. M. C. Erros e dificuldades na aprendizagem de Álgebra. Dissertação (Mestrado), Faculdades Integradas Católicas de Palmas (FACIPAL), 2002.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.* Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Ministério da Educação, 2017.

COULANGE, L. *Estude des pratiques du professeur du double point devue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmesd'équations et de la mise en équations en classe de Troisième.* Tese (Doutorado), Universite Joseph Fourier, 2000.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: matemática ensino fundamental 2 (7º ano).* Àtica, 2015a.

DANTE, L. R.. *Projeto Teláris: matemática ensino fundamental 2 (9º ano).* Ática, 2015b.

DOMINGUES, H. H; CALLIOLO, C. A; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações.* São Paulo: Atual, 1982.

LOPES, C. M. C. *Matemática: ponto de conexão (8º ano).* Base editorial, 2015.

MIGUEL, A; FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? *Pró-posições*, v.3, n.1, p.39–54, 1992.

PEREIRA, J. P. O; PEREIRA, J. P. O. O currículo e aprendizagem: uma análise comparatiVa entre a BNCC e o PNC no eixo de números e operações dos anos finais do ensino fundamental. *V CONEDU - Congresso Nacional de Educação*, 2018.

ROSA, A. S. M; OLIVEIRA, W. F; LYRA-SILVA, G. M. V; CEDRO, W. L. Brincando com a Álgebra: o uso de jogos no ensino de sistemas de equações lineares. *TANGRAM - Revista de Educacção Matemática*, v.3, n.4, p. 173–189, 2020.

VALENZUELA, S. T. F. O uso de dispositivos didático para o estudo de técnicas relativas a sistemas de equaões lineares no ensino fundamental. Dissertação (Mesrtrado), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. 2007.