UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARIA VANÚBIA DA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

PATOS - PB
2023

MARIA VANÚBIA DA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Esp. Marcos Thadeu Lúcio da Silva

PATOS - PB

2023

S586t Silva, Maria Vanubia da.
Teorema Fundamental das Curvas Planas [manuscrito] / Maria Vanubia da Silva. - 2023.
48 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2023.
"Orientação : Prof. Esp. Marcos Thadeu Lúcio da Silva , Coordenação do Curso de Ciências Exatas - CCEA. "

1. Curvas parametrizadas. 2. Curvatura. 3. Teorema fundamental das curvas planas. I. Título

21. ed. CDD 530.7

Elaborada por Edson M. A. Monteiro - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

MARIA VANÚBIA DA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada

Aprovada em 28 / 06 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Esp. Marcos Thadeu Lúcio da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Profª. Esp.ª Rosana Bandeira da Silva (Examinadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva de Oliveira (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Dedico este trabalho a meus fihos, João Miguel e Pedro Henrique, a meu esposo Augusto Laureano, a meus pais, José Roberto e Luzia Pereira, meus irmãos, Vanderlei, Vanderlândio, Vanderli e Valquíria, e a meus avôs, José Pereira e Maria Tereza.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por renovar minhas forças, quando parecia não ter mais.

A meu esposo Augusto Ferreira Laureano, por todo apoio. Sem você ao meu lado, esses anos teriam sido bem mais difícil.

Aos meus filhos, João Miguel da Silva Laureano e Pedro Henrique da Silva Laureano, motivos de minha dedicação.

Aos meus pais, José Roberto da Silva e Luzia Pereira da Silva e meus irmãos que sempre me incentivaram.

A meu avô, José Pereira da Silva pelo conforto em suas palavras, e a minha vó que tinha o desejo de me ver formada, porém faleceu antes desta realização.

A minha sogra, Maria Madalena pelo cuidado com o meu filho.

A minha amiga, Gessica Santos Sousa que desde o primeiro período esteve ao meu lado compartihando conhecimentos e com quem pude contar sempre.

A Rafaela Brilhante, Samuel, Andrêza, Gabriela e a todos os colegas de curso, que estiveram comigo durante esses anos.

Aos professores Marciel Medeiros, Tatiana RochaI, Sergio Cavalcanti, Arlandson Matheus, José Ginaldo, Carolina Coeli, enfim, a todo o corpo docente do curso de matemática da UEPB do campus de Patos, pela mediação de conhecimentos e pelas contribuições ao longo da graduação.

Ao meu orientador Marcos Thadeu por sua valiosa orientação.

A Atônio Eduardo, secretário da educação e aos colegas da EMSS pelo apoio.

Enfim, a todos que me desejaram sorte e que contribuíram para a minha formação.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura" (Bertrand Russell)

RESUMO

Neste trabalho recordaremos alguns dos principais conceitos da álgebra linear e da álgebra diferencial, com intuito de apresentar uma demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas. Para isso, foi realizado um estudo do ponto de vista da geometria diferencial, sobre curvas planas buscando entender os principais conceitos e resultados, tais como, curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, além do estudo da Teoria Local das Curvas Planas.

Palavras-chaves: Curvas Parametrizadas. Curvatura. Teorema Fundamental das Curvas Planas.

ABSTRACT

In this work we will recall some of the main concepts of linear algebra and differential algebra in order to present a demonstration of the Fundamental Theorem of Plane Curves. For this, a study was performed from the point of view of differential geometry, about plane curves seeking to understand the main concepts and results, such as curves parametrized by the arc length, referential of Frenet, in addition to the study of the Local Theory of Plane Curves.

Keywords: Parametrized curves. Curvature. Fundamental Theorem of plane curves.

Sumário

Introdução

A história da geometria diferencial teve início com o estudo das curvas. Um dos primeiros registros podem ser encontrados em *Os Elementos* de Euclides de Alexandria (323-283 a.C.). Euclides foi de grande importância para a história da geometria tendo resultados tanto em teoria como em organização da escrita matemática.

No século XVII, isaac Newton, Pierre de Fermat e Christiian Huygens deram início ao estudo da geometria diferencial atravé do cálculo infinitesimal, assim, pode-se dizer que eles foram os criadores dessa área. Leibniz e Newton, junto com o início do cálculo, lidaram com problemas de curvas planas. Em 1684, Leibniz tentou definir a curvatura de uma curva plana, entretanto, Euler foi o primeiro autor a encontrar a definição correta da curvatura. Assim, em 1736, deu inicio a chamada geometria intríseca, relacionado ao estudo das propriedades geométricas de uma superfície.

Em 1771, Gaspard Monge, engenheiro do exército francês, criou a teoria das curvas espaciais, mas apenas em 1795 publicou seus resultados em um trabalho que foi considerado o primeiro livro sobre geometria diferencial. Monge aplicou os métodos analíticos para o estudo de curvas, já introduzido por Euler. De fato, o primeiro a definir noções como curvatura e torção de uma maneira mais moderna, foi Augustin Cauchy.

Em 1846, foi publicada a primeira compilação completa de resultados, como um tratado sobre curvas planas espacias de Barré de Saint-Venant. A unificação de todos os esforços ateriores deve-se a Frenet e Serret. Eles descobriram independentemente as fórmulas Frenet-Serret por volta de 1847 e 1851, respectivamente.

Pode-se dizer que a geometria diferencial representa o estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies, por meio da álgebra linear e do cálculo diferencial e integral. A geometria diferencial de curvas, consiste na análise do comportamento das curvas, suas propriedades e características.

Quando estudamos as curvas parametrizadas, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\nvDash}$ de classe C^{∞}, quer dizer, infinitamente diferenciáveis, sempre podemos obter sua parametrização pelo comprimento do arco.O Teorema Fundamental das Curvas Planas permite que, dada uma função qualquer $k : I \to \mathbb{R}$, seja possível determinar uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco quando fixados $s_0 \in I$, $\alpha(s_0) = p_0$, $\alpha'(s_0) = v_0$ e $k_{\alpha(s_0)} = k_s$ $s \in I$ e v_0 um vetor unitário. Além disso, duas curvas α, β, parametrizadas pelo comprimento de arco e com mesma curvatura, diferem apenas por um movimento rígido, isto é, uma translação e/ou uma rotação no plano. Isto significa dizer que é possível reconstruir uma curva pela sua curvatura, ou seja, a curvatura determina a curva plana, a menos de sua localização no plano.

No **Capítulo 1**, são expostos resultados preliminares importantes para a compreensão da demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas: a primeira é destinada aos resultados da álgebra linear e a segunda é dedicada ao cálculo diferencial.

No **Capítulo 2** são abordados resultados de curvas parametrizadas; vetor tangente e curva regular; mudança de parâmetro e comprimento de arco; teoria local das curvas planas e formas de Frenet, definições fundamentais para o nosso estudo.

Por fim, no **Capítulo 3**, introduzimos o conceito de translação, rotação e o teorema de existência e unicidade para soluções de EDO's, para enfim enunciar e demonstrar o principal teorema do nosso trabalho, o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordamos alguns conceitos de Álgebra Linear que são necessários para compreender o assunto principal deste trabalho.

1.1 Álgebra Linear

Vamos considerar vetores no espaço, denotado por $\mathbb{R}^3$, cada ponto P do espaço formado pelo conjunto de termos ordenados de números reais $P = (x, y, z)$.

Definição 1.1. Dizemos que um conjunto V não vazio, munido de duas operações, (soma e multiplicação por escalar):

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha \cdot v, \end{aligned}$$

é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) quando satisfaz as seguintes propriedades:

1. $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$;

2. $(v + u) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$;

3. $0 + v = v, \ \forall v \in V$ e $\exists \ 0 \in V$, tal que ;

4. $v + (-v) = -v + v = 0, \forall v \in V$, e $\exists \ -v \in V$;

5. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \forall v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

6. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

7. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$;

8. $1v = v,\ \forall v \in V$.

Observações. Sejam V um espaço vetorial, u um vetor em V e a um escalar. Então as seguintes propriedades são satisfeitas

i) $0u = 0$

ii) $a0 = 0$

iii) $(-1)u = -u$

iv) Se $au = 0$, então $a = 0$ ou $u = 0$.

Demonstração. *i)* Sabemos que $0+0=0$ com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0u &= (0+0)u \\ &= 0u + 0u \end{aligned}$$

Somando $-(0u)$ em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} -(0u) + 0u &= -(0u) + 0u + 0u \\ 0 &= 0 + 0u \\ 0 &= 0u \end{aligned}$$

ii) Sabemos que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) \\ &= a \cdot 0 \end{aligned}$$

Então, existe $-(a \cdot 0) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0$$

E sendo

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$$

Temos que,

$$\begin{aligned} -(a\cdot 0)+a\cdot 0+a\cdot 0 &= -(a\cdot 0)+a\cdot 0\\ 0+a\cdot 0 &= 0\\ a\cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

iii) Para mostrar que $(-1)\cdot u=-u$, devemos mostrar que $(-1)\cdot u+u=0$. Observe que

$$\begin{aligned} (-1)\cdot u+u &= (-1)\cdot u+1\cdot u\\ &= (-1+1)\cdot u\\ &= 0\cdot u\\ &= 0 \end{aligned}$$

iv) Pelo item (*ii*), $a\cdot 0=0$ e por hipótese $a\cdot u=0$. Assim,

$$a\cdot u=a\cdot 0$$

Se $a=0$, então o resultado segue.
Se $a\neq 0$, então pela lei do cancelamento, temos

$$\begin{aligned} \cancel{a}\cdot u &= \cancel{a}\cdot 0\\ u &= 0. \end{aligned}$$

□

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto de V. Dizemos que W é um **subespaço** de V se W é um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 1.1. *Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto V. Então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.*

a) *Se u e v forem vetores em W, então $u+v$ está em W.*

b) *Se a for um escalar qualquer e u algum vetor de W, então au está em W.*

Demonstração. Se W for um subespaço de V, então todos os axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, que são exatamente as condições (a) e (b).

Reciprocamente, suponha que valham as condições (a) e (b). Como estas são $i)$ e $iii)$ e como os demais axiomas são herdados de V, basta mostrar que os axiomas da existência de vetor nulo em W e da existência de elemento oposto em W para cada vetor em w valem em W.
Para isso, seja u um vetor qualquer em W. Da condição (b) segue que, dado qualquer escalar a, o vetor au está em W. Em particular, $0u = 0$ e $(-1)u = -u$ estão em W, mostrando que os Axiomas valem em W. □

Agora veremos o conceito de combinação linear, conjuntos linearmente dependentes, independentes e suas principais propriedades.

Definição 1.3. Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então o vetor

$$\overrightarrow{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

é um elemento de V ao qual chamamos *Combinação Linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Proposição 1.1. *Fixados os vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V, que são combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$, o qual é denotado por $[v_1, \cdots, v_n]$ e é definido por*

$$\{v \in V : a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n : a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

é um subespaço de V e é chamado de ***subespaço gerado*** *por $v_1, \cdots, v_n$.*

Demonstração. $i)$ $0 \in W$, pois,

$$0 = 0v_1 + \cdots + ov_n.$$

$ii)$ Sejam $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $w = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \in W$. Então, pelas propriedades 1 e 2, podemos escrever:

$$v+w = (a_1v_1+\cdots+a_nv_n)+(b_1v_1+\cdots+b_nv_n) = (a_1+b_1)v_1+\cdots+(a_n+b_n)v_n \in W.$$

$iii)$ Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$. Então,

$$\alpha v = \alpha(a_1v_1+\cdots+a_nv_n) = \alpha(a_1v_1)+\cdots+\alpha(a_nv_n) = (\alpha a_1)v_1+\cdots+(\alpha a_n)v_n \in W.$$

Portanto, segue-se que $[v_1, \cdots, v_n]$ é um subespaço de V.

□

Definição 1.4. Seja V um espaço vetorial e $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Dizemos que o conjunto A é *Linearmente independente* (LI) ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são Linearmente

Independente, se a equação

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

admita apenas a solução trivial, isto é

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Caso exista $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que o conjunto A é *Linearmente Dependente* (LD) ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

Os vetores LD podem ser caracterizados de outra maneira:
$A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

Proposição 1.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

i) Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é LI;

ii) Se $0 \in A \subset V$, então A é LD;

iii) Se $B \subset A \subset V$ e B é LD, então A é LD.

iv) Se $A \subset V$ é LI, então $B \subset A$ também é LI.

Demonstração. *i)* Suponha que $\lambda v = 0$. Como $v \neq 0$, então, $\lambda = 0$. Logo, A é LI.

ii) Considere um conjunto $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \cdots, v_n\} \subset V$, então temos:

$$0v_1 + \cdots + 0v_{i-1} + a0 + 0v_{i+1} + 0v_n = 0,$$

se verifica para todo $a \neq 0$. O que mostra que o conjunto A é LD.

iii) Sejam $B = \{v_1, \cdots, v_r\}$ e $A = \{v_1, \cdots, v_r, v_n\}$. Se B é LD, então existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ não nulos, tais que

$$\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_rv_r = 0.$$

Agora, completando a equação com zeros, temos:

$$\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_rv_r + 0v_{r+1} + 0v_n = 0.$$

Assim, como nem todos os escalares desta última igualdade são não nulos, temos que A é LD.

iv) Se A fosse LD, então por *iii)*, teríamos que B também é, mas por hipótese A é LI. Logo, B só pode ser LI.

□

Definição 1.5. Sejam V for um espaço vetorial qualquer e $S = v_1, v_2, \cdots, v_n$ for um conjunto finito de vetores em V. Dizemos que S é uma **base** de V se valem as duas condições a seguir.

1. S é LI.

2. S gera V.

Teorema 1.2 (Unicidade da representação em base)**.** *Se $S = v_1, v_2, \cdots, v_n$ for uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso na forma $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ de exatamente uma única maneira.*

Demonstração. Como S gera V, então cada vetor de V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores em S. Suponhamos que um certo vetor v possa ser escrito como

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

e também como

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$0 = (c_1 - k_1)v_1 + (c_2 - k_2)v_2 + \cdots + (c_n - k_n)v_n$$

Como o lado direito dessa equação é uma combinação linear dos vetores em S, a independência linear de S implica

$$c_1 - k_1 = 0, c_2 - k_2 = 0, \cdots, c_n - k_n = 0$$

ou seja,

$$c_1 = k_1, c_2 = k_2, \cdots, c_n = k_n$$

Assim, as duas expressões para v são a mesma. □

Veremos o conceito de dimensão de um espaço vetorial.

Definição 1.6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se $dim\ V = n$.

- Se $V = \{0\}$, convenciona-se $dim\ V = 0$.
- Se V tem uma base com infinitos vetores, então a **dimensão de V é infinita** e anota-se $dim\ V = \infty$.

Teorema 1.3 (Teorema do completamento)**.** *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço veotorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Demonstração. Seja B um subconjunto LI de V. Se B gera V, então B é uma base para V. Se $[B]$ não gera V, então existe um $v \in V$, tal que $v \notin [B]$. Logo o conjunto $B' = B \cup \{v\}$ é LI. Se $[B'] = V$ a prova é imediata. Se $[B'] \neq V$ podemos repetir o processo para obter um subconjunto B'' de V LI, com mais vetores do que B'. Como a dimensão de V é finita esse processo deve parar, pois um conjunto com mais de n vetores em V será LD. Quando o processo terminar, obtemos um conjuto LI, denotado por B^*, que contém B e gera V. Portanto, B^* é uma base para V. □

Definição 1.7. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma **transformação linear** é uma função de V em W, $f : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Quaisquer que sejam u e v em V, $F(u + v) = F(u) + F(v)$.
2. Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ E $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

Definição 1.8. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. A **imagem** de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$ que satisfaz $T(v) = w$, ou seja

$$Im(t) = \{w \in W,\ T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observe que $Im(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W.

Definição 1.9. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado de **núcleo** de t, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é

$$ker(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}.$$

Veja que $ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V.

Definiremos um tipo de multiplicação vetorial que produz um vetor como produto, no entanto, é aplicável somente a vetores do espaço tridimensional.

Definição 1.10. Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores no espaço tridimensional, então o **produto vetorial** $u \times v$ é o vetor definido por

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

ou, em notação de determinante
$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Veremos agora o conceito de *Isomorfismo*, a palavra é composta dos termos gregos ”iso”(igual) e ”morphos”(forma). Em Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são, por assim dizer idênticos. Para entender melhor, é preciso de duas definições.

Definição 1.11. Se $T : V \subset W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação **injetora** se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.

Definição 1.12. Se $T : V \subset W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação **sobrejetora**, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor em V.

Agora, podemos definir isomorfismo.

Definição 1.13. Seja T uma transformação linear $T : V \subset W$ injetora e sobrejetora, dizemos que T é um **isomorfismo** e que os espaços vetoriais V e W são **isomorfos**.

Vamos estender a noção de produto escalar para espaços vetoriais, apresentando a seguinte definição.

Definição 1.14. Um **produto interno** num espaço vetorial real V é uma função que associa um número real u, v a cada par de vetores em V de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores u, v e w de V e qualquer escalar a.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

3. $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$

4. $\langle v, v\rangle \geq 0$ *e* $\langle v, v\rangle = 0,$ *se e soemente se*$, v = 0$

Definição 1.15. Seja V for um espaço com produto interno real, então a **norma** (ou **comprimento**) de um vetor v em V é definida por

$$|| v ||= \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

e a **distância** entre dois vetores é denotada por $d(u,v)$ e definida por

$$d(u,v) = \| u - v \| = \sqrt{\langle u-v \rangle \cdot \langle u-v \rangle}$$

Dizemos que um vetor de norma 1 é um **vetor unitário**.

Proposição 1.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer v, w em V e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

i) $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se, e somente se* $v = 0$.

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

iii) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. *(Desigualdade triangular)*

Demonstração. *i)* No primeiro caso, temos:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Como qualquer número real elevado ao quadrado é ≥ 0. Então,

$$\|v\| \geq 0$$

No segundo caso, temos:

$$\begin{aligned} Se\ \|v\| &= 0 \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Reciprocamente, se\ v &= 0 \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\|v\| = 0$.

ii) Usando a definição de norma, temos

$$\begin{aligned}\|\alpha v\| &= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle v, v\rangle}\\ &= |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle}\\ &= |\alpha|\|v\|\end{aligned}$$

iii) Se $v = 0$ ou $w = 0$ a desigualdade é imediata. Digamos que $v = 0$. Então,

$$|\langle 0, w\rangle| = \|0\| = 0 \ e \ \|0\|\|w\| = 0.$$

Agora, suponhamos que $v \neq 0$ e $w \neq 0$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale $\|v + \lambda w\|^2 \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}0 \leq \|v + \lambda w\|^2 &= \langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle\\ &= \langle v, v\rangle + \lambda\langle v, w\rangle + \lambda\langle w, v\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle\\ &= \lambda^2\|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle\lambda + \|v\|^2, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Observamos que $\lambda^2\|w\|^2+2\langle v, w\rangle\lambda+\|v\|^2$. Mas como $\|w\| \neq 0$, isto ocorre se, e somente se, seu discriminante for menor ou igual que zero. Logo, devemos ter

$$(2\langle v, w\rangle)^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\langle v, w\rangle)^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2.$$

Agora, considerando a raiz quadrada positiva de $(\langle v, w\rangle)^2 \leq (\|v\|^2\|w\|^2)$, obtemos:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$$

iv) Inicialmente notemos que $2\langle v, w\rangle \leq |2\langle v, w\rangle| = |2||\langle v, w\rangle| = 2|\langle v, w\rangle|$ A partir disso e usando a desigualdade de Schwars, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w\rangle \\
&= \langle v, v+w\rangle + \langle w, v+w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle \\
&\leq \langle v,v\rangle + 2|\langle v,w\rangle| + \langle w,w\rangle \\
&\leq \langle v,v\rangle + 2|\langle v\rangle\langle w\rangle| + \langle w,w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2
\end{aligned}$$

O que implica

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado** ou simplesmente **espaço normado**.

1.2 Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano

Agora veremos alguns conceitos básicos do cálculo diferencial em espaços euclidianos com o objetivo de reunir os resultados relevantes para o entendimento do objetivo principal deste trabalho.

Adiante, mostraremos as defifinições de funções quando se trata de função com duas, três ou mais variáveis.

Definição 1.16. Uma **função** f **de duas variáveis**, x e y, é uma regra que associa um único número real $f(x,y)$ a cada ponto (x,y) de algum conjunto D no plano xy.

Definição 1.17. Uma **função** f **de três variáveis**, x, y e z, é uma regra que associa um único número real $f(x,y,z)$ a cada ponto (x,y,z) de algum conjunto D no espaço tridimensional.

Definição 1.18. Seja F uma função de uma variável real a valores em n e seja t_0 um ponto do domínio de F ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de F. Dizemos que $F(t)$ tende a $L, L \in \mathbb{R}^n$, quando t tende a t_0, e escrevemos $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in D_F$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow || F(t) - L ||< \varepsilon.$$

Teorema 1.4. *Sejam f e g funções definidas numa vizinhança*[1] *V de a, mas não necessariamente em a, tais que*

- $\lim_{x\to a} F(x) = 0$
- $\exists M > 0$ *tal que* $\mid g(x) \mid < M,\ \forall x \in V,\ x \neq a.$
  Então

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Demonstração. Como $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, então vale

$$0 <\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) \mid < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Queremos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$. Isto é, para cada $\varepsilon' > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que, se $x \in V$, temos

$$0 <\mid x - a \mid < \delta' \Rightarrow \mid f(x) \mid < \varepsilon'.$$

Dado $\varepsilon' > 0$, fazemos $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M}$ e escolhemos para δ o mesmo δ que corresponde ao ε e torna a afirmação (1.1) verdadeira: $\delta' = \delta$. Assim, se $x \in V$ e $0 <\mid x - a \mid < \delta' = \delta$ então

$$\mid f(x) \cdot g(x) \mid \leq \mid f(x) \cdot M \mid <\ \varepsilon \cdot M = \frac{\varepsilon'}{M} \cdot M = \varepsilon'.$$

Ou seja, para cada ε' arranjamos um δ' tal que

$$0 <\mid x - a \mid < \delta' \Longrightarrow \mid f(x) \cdot g(x) \mid <\ \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

□

Definição 1.19. Sejam $F : A \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in A$. Definimos:

$$F \textit{ é contínua em } t_0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Proposição 1.4. *(Propriedades de limite) Se* $\lim\limits_{t\to h} f(t) = L_1$ *e* $\lim\limits_{t\to h} g(t) = L_2$ *então*

a) $\lim\limits_{t\to h} f(t) + g(t) = \lim\limits_{t\to h} f(t) + \lim\limits_{t\to h} g(t) = L_1 + L_2.$

b) $\lim\limits_{t\to h} k\ f(t) = k \lim\limits_{t\to h} f(t)$, *($k$ constante).*

[1] O conjunto X é uma vizinhança do ponto a, quando $a \in int(X)$. Em outras palavras, X é uma vizinhança do ponto a, se a estiver no interior de X.

c) $\lim_{t\to h} f(t)\ g(t) = \lim_{t\to h} f(t) \cdot \lim_{t\to h} g(t) = L_1 \cdot L_2.$

d) $\lim_{t\to h} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, *desde que* $L_2 \neq 0$.

Demonstração. *a)* Por hipótese temos que $\lim_{t\to h} f(t) = L_1$, logo para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |t-h| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\lim_{t\to h} g(t) = L_2$, logo para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |t-h| < \delta_2 \Rightarrow |g(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$|(f(t) + g(t)) - (L_1 + L_2)| = |f(t) - L_1 + g(t) - L_2|,$$

pela desigualdade triangular temos

$$|f(t) - L_1 + g(t) - L_2| \leq |f(t) - L_1| + |g(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) Se $k = 0,\ kf(t) = 0$ para todo $t \in Df$. logo

$$\lim_{t\to h} kf(t) = 0 = k \lim_{t\to h} f(t).$$

Se $k \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t-h| < \delta \Rightarrow |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

daí

$$0 < |t-h| < \delta \Rightarrow |kf(t) - L| < \varepsilon.$$

c) Pela definição de limite temos que, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |t-t_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - L_1| < \varepsilon$$

e

$$0 < |t-t_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(t) - L_2| < \varepsilon.$$

Queremos mostrar que

$$|f(t)\ g(t) - L_1 L_2| < \varepsilon$$

Então tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $0 < |t - t_0| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(t)\ g(t) - L_1 L_2| &= |(f(t) - L_1)(g(t) - L_2) + L_1(g(t) - L_2) + L_2(f(t) - L_1)| \\ &\leq |f(t) - L_1||g(t) - L_2| + |L_1||g(t) - L_2| + |L_2||f(t) - L_1|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(t) - L_1||g(t) - L_2| + |L_1||g(t) - L_2| + |L_2||f(t) - L_1| &\leq \varepsilon \cdot \varepsilon + |L_1|\varepsilon + |L_2|\varepsilon \\ &= \varepsilon(\varepsilon + |L_1||L_2|). \end{aligned}$$

Portanto, temos que o limite do produto é igual o produto dos limites.

$d)$ Pela propriedade $c)$ temos

$$\lim_{t \to h} \left(f(t) \cdot \frac{1}{g(t)} \right) = L_1 \cdot \frac{1}{L_2}.$$

Agora, basta mostrar que $\lim_{t \to h} \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{L_2}$ para todo $L_2 \neq 0$.
Dado $\varphi > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(t) - L_1| > \frac{|g(t)|}{2}$$

e

$$0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(t) - L_2| < \varepsilon.$$

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $0 < |t - t_0| < \delta$, daí temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(t)} - \frac{1}{L_2} \right| &= \left| \frac{L_2 - g(t)}{g(t) \cdot L_2} \right| \\ &= \frac{|L_2 - g(t)|}{|g(t)| \cdot |L_2|} \\ &< \frac{|L_2 - g(t)|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \\ &= \frac{2}{L_2^2} |L_2 - g(t)| \\ &< \frac{2}{L_2^2} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

O que implica que, $\lim_{t \to h} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{L_1}{L_2}$.
Assim concluimos as principais propriedades do limite. □

Definição 1.20. Sejam $F : A \to n$ e $t_0 \in A$. Definimos a derivada de F em t_0 por

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

desde que o limite exista

Teorema 1.5. *Sejam $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ e t_0 pertencente ao domínio de F. Então, F será derivável em t_0 se, e somente se, cada componente de F o for; além disso, se F for derivável em t_0*

$$F'(t_0) = (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \cdots, F_n'(t_0)).$$

Demonstração. Considerando

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{F_2(t) - F_2(t_0)}{t - t_0}, \cdots, \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Sabemos que $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ existirá se, e somente se, existirem e forem finitos os limites $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{F_i(t) - F_i(t_0)}{t - t_0}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Logo, F será derivável em t_0 se, e somente se, cada componente o for. Temos então:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \cdots, \lim_{t \to t_0} \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Ou seja,

$$F'(t_0) = (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \cdots, F_n'(t_0)).$$

□

Definição 1.21. Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ derivável em t_0, com $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Dizemos que é um vetor tangente à trajetória de F, em $F(t_0)$. A reta

$$X = f(T) + \lambda \frac{df}{dt}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se **reta tangente** à trajetória de F no ponto $F_{(t_0)}$.

Definição 1.22. Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando $\max \Delta x_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ que só depende de ε mas não da particular escolha de c_i, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon$$

para toda partição P de $[a,b]$ com $\max \Delta x_i < \delta$.

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se **integral (de Riemann)** de f em $[a,b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Então por definição,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Exemplo 1.1. Cacule $\int_0^1 [t+4+t^2]dt$.
Solução:

$$\begin{aligned}\int_0^1 [t+4+t^2]dt &= \int_0^1 t\ dt + \int_0^1 4\ dt + \int_0^1 t^2\ dt \\ &= \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Proposição 1.5. *Suponha F contínua em [a, b]. Prove que*

$$\left\|\int_a^b F(T)\ dt\right\| \leq \left\|\int_a^b F(t)\right\|\ dt.$$

Demonstração. Como por suposição F é contínua e $[a,b]$, $||\ F\ ||$ témbémm será. Logo, $\int_a^b ||\ \int_a^b F(t)\ ||\ \ dt$ existe, logo

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} F(c_i)\triangle t_i - \int_a^b F(t)\ dt\right\| \geq \left|\left\|\sum_{i=1}^{m} F(c_i)\triangle t_i\right\| - \left\|\int_a^b F(t)\ dt\right\|\right|$$

Assim

$$\lim_{\max \triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} F(c_i)\triangle t_i = \int_a^b F(t)\ dt$$

Segue que

$$\lim_{\max \triangle t_i \to 0} \left\|\sum_{i=1}^{m} F(c_i)\triangle t_i\right\| = \left\|\int_a^b F(t)\ dt\right\|.$$

Temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} F(c_i)\triangle t_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|F(c_i)\|\ \triangle t_i$$

então,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b F(t)\ dt \right\| &= \lim_{\max \triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \|F(c_i) \triangle t_i\| \\
&< \lim_{\max \triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \|F(c_i)\| \triangle t_i \\
&= \int_a^b \|F(t)\|\, dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \int_a^b F(t)\ dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\|\, dt.$$

$\square$

Capítulo 2

Curvas Planas

O conceito de curva plana é o principal objeto de estudo desse trabalho. Trazemos a definição formal com alguns exemplos práticos de curvas além de resultados importantes sobre as curvas planas. A principal referência desse capitulo é o livro Geometria Diferencial de Keti Tenenblat.

2.1 Curvas Parametrizadas

Descrevemos uma curva através das coordenadas de seus pontos, que são dadas por funções de uma variável independente, ou seja, expressamos as coordenadas em função de um parâmetro.

Definição 2.1. Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. Iremos denotar

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

As funções reais $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis, $t \in \mathbb{R}$ é o *parâmetro* da curva e o subconjunto $\alpha(t), t \in I$ é chamado *traço* da curva.

Exemplo 2.1. A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt),\ \ t \in \mathbb{R}$$

tem por traço uma hélice de passo $2\pi b$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ o parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O a projeção do ponto sobre o plano xy. (Veja a figura 2.1).

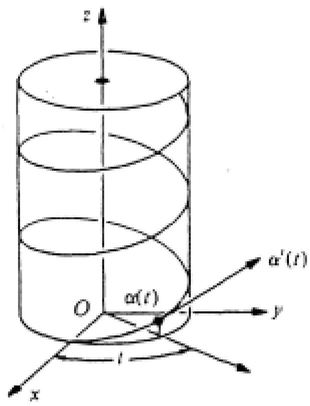

Figura 2.1

Perceba que as componentes de α têm derivadas de todas as ordens. Então,

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt),\ t \in \mathbb{R}$$

é uma curva parametrizada diferenciável.

Exemplo 2.2. A aplicação $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2),\ t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada, pois existem derivadas de todas as ordens. No entanto, quando $t = 0$ o vetor velocidade é nulo, pois, $\alpha'(t) = (t^3, t^2) = (0, 0)$. (Veja a figura 2.2)

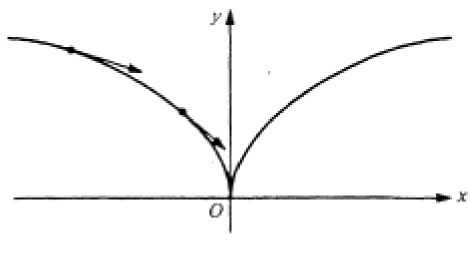

Figura 2.2

Exemplo 2.3. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, \mid t \mid),\ t \in \mathbb{R}$, não é uma curva diferenciável parametrizada, já que $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. (Figura 2.3)

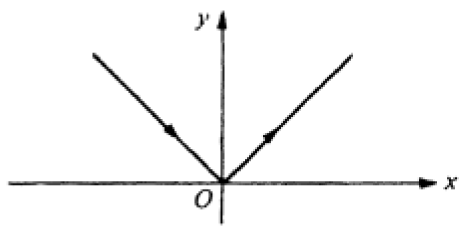

Figura 2.3

Exemplo 2.4. As duas curvas parametrizadas distintas

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

$$\beta(t) = (\cos 2(t), \sin 2(t)),$$

onde $t \in (0-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, possuem o mesmo traço, o circulo $x^2+y^2 = 1$. Observe que o vetor velocidade da segunda é o dobro da primeira. (Figura 2.4)

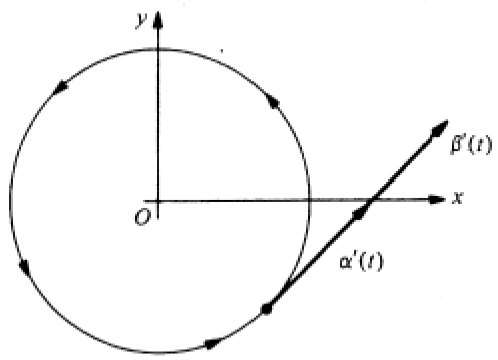

Figura 2.4

2.2 Vetor Tangente e Curva Regular

Definição 2.2. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) da curva $\alpha(t)$ em t.

Observe que, fixado $t \in I$ para $h \neq 0$ tal que $t+h \ \in I$,

$$\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$$

que é o vetor de $\alpha(t)$ a $\alpha(t+h)$ multiplicado pelo escalar $\frac{1}{h}$ temos,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$$

que é exatamente a definição da derivada da função α em t, observe a figura 2.5.

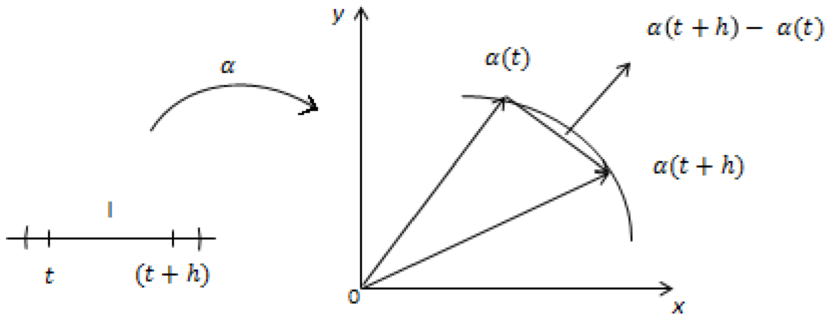

Figura 2.5

Definição 2.3. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita *regular* quando $\forall t \in I,\ \alpha'(t) \neq 0$.

Definição 2.4. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é a reta dada pela função

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0),\ r \in \mathbb{R}.$$

2.3 Mudança de Parâmetro e Comprimento de Arco

Já vimos que duas curvas planas podem ter o mesmo traço. Podemos obter várias curvas regulares que tenha o mesmo traço de uma curva regular dada.

Definição 2.5. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}, \alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \to I$ uma função diferenciável de classe(C^∞), isto é, todo ponto de J possui derivadas de qualquer ordem, e cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : j \to \mathbb{R}^2$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α, chamada *reparametrização* de α por h. A função h é dita *mudança de parâmetro.* (veja a figura 2.6)

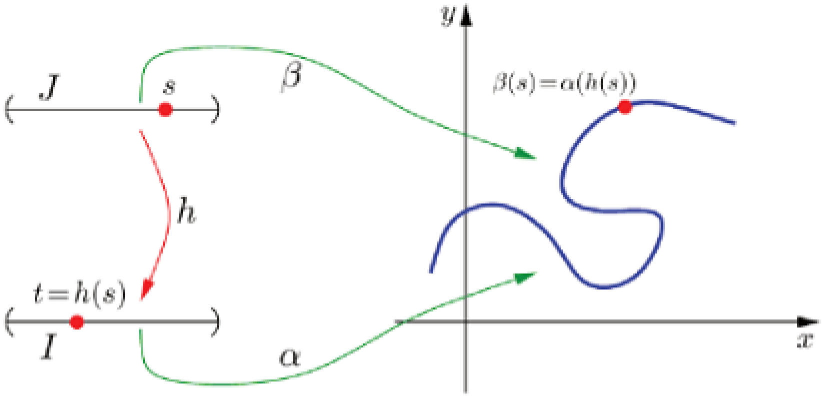

Figura 2.6

Observação. A *orientação* de uma curva regular plana α é um sentido de percurso do traço de α.

Observação. Seja $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α. Então, β e α têm a mesma orientação se $h'(s) > 0\ \forall s \in J$. E β e α têm orientação oposta se $h'(s) < 0\ \forall \in J$. Observe a figura 2.7.

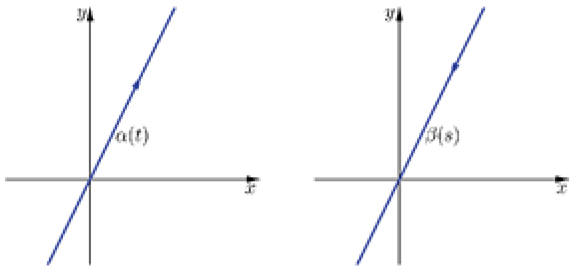

Figura 2.7

Exemplo 2.5. A curva

$$\beta(s) = (a\ \cos\frac{s}{a}, a\ \sin\frac{s}{a})$$

$a \neq 0$, é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = (a\ \cos t, a\ \sin t),\ t \in \mathbb{R}.$$

É só considerar a mudança de parâmetro $h(s) = \frac{s}{a},\ s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.6. A curva

$$\beta(r) = (-2r+1, -4r+2),\ r \in \mathbb{R}$$

é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = (t, 2t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Basta considerar a mudança de parâmetro $h(r) = (-2+1),\ r \in \mathbb{R}$.

Observe que β tem orientação oposta de α, pois $h'(s) = -2 < 0$.

Definição 2.6. Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável regular, a função $s : I \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} || \alpha'(t) || \, ds,$$

é chamada *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0, em que $t_0 \in I$. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se para todo $t_0, t_1 \in I,\ t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} || \alpha'(t) || \, dt = t_1 - t_0$$

Proposição 2.1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\forall\ t \in I, || \alpha'(t) ||= 1$.*

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t \in I$. Consideremos a função $s : I \to \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa $s(t) = \int_{t_0}^{t} || \alpha'(t) || \, dt$. Se $t_0 \leq t$, então por hipótese

$$\int_{t}^{t_0} || \alpha'(t) || \, dt = t_0 - t;$$

Se $t \leq t_0$, então

$$-s(t) = \int_{t}^{t_0} || \alpha'(t) || \, dt = -\int_{t}^{t_0} || \alpha'(t) || \, dt = -(t_0 - t) = t - t_0;$$

isto é, $s(t) = t - t_0,\ \forall\ t_0 \in I$. Logo, $s'(t) =|| \alpha'(t) || \, dt = 1$
Reciprocamente, se $|| \alpha'(t) || \, dt = 1,\ \forall\ t \in I$, então

$$\int_{t_0}^{t} || \alpha'(t) || \, dt = t - t_0.$$

$\square$

Exemplo 2.7. Considere a curva $\alpha(t) = (a\ \cos(t), a\ \sin(t)) + (a, b)$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $h(s) = \frac{s}{a}$. Então $\beta : \alpha \circ h = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\beta(s) = \alpha(t) = (a\ \cos(\frac{s}{a}) + a, a\ \sin(\frac{s}{a}) + b)$$

é uma reparametrização de α que tem a mesma orientação que α, pois $h'(s) = \frac{1}{a} > 0$.

Além disso, β está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\beta'(s)\| = \|(-a\ \sin(\frac{s}{a})\frac{1}{a}, a\ \cos(\frac{s}{a})\frac{1}{a})\| = \sin^2(\frac{s}{a}) + \cos^2(\frac{s}{a}) = 1,\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.8. Acurva regular $\alpha := \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ é chamda *Espiral Logarítmica.* Como

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t),$$

temos que $\|\ \alpha'(t)\ \| = \sqrt{2}\ e^t$. Logo a função comprimento de arco a partir de $t_0 = 0$ é dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\ e^{\xi}\ d\xi = \sqrt{2}\ e^t - \sqrt{2}.$$

Assim, $s(\mathbb{R}) = (-\sqrt{2}, \infty)$ e $h = s^{-1} : (-\sqrt{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $h(u) = \log\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right)$. Portanto, $\beta(u) = \alpha \circ h : -\sqrt{2}, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\beta(u) = \alpha(h(u)) = \left(\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \cos\left(\log\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right) \sin\left(\log\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

2.4 Teoria Local das Curvas Planas e Fórmulas de Frenet

Vimos que toda curva regular do plano pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. Com isso, vamos considerar uma curva regular

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in I,$$

parametrizada pelo comprimento de arco. Temos que para cada $s \in I$, o vetor tangente, $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ que denotamos por $t(s)$, é um vetor unitário pois , $\langle t(s), t(s)\rangle = 1$. Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação que a base canônica $\{e_1, e_2\}$ (Figura 2.8). Isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

pois $\|\ n(s)\ \| = 1$ e o produto usual, $\langle n(s), t(s)\rangle = 0$.

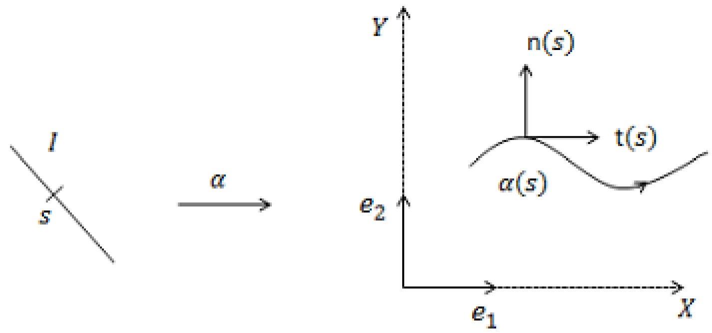

Figura 2.

Como $n(s)$ é unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto paralelo a $t(s)$, ou seja, existe uma funçãoI $k : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

a qual

$$k(s) = \langle t'(s), n(s)\rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$$

A definição a seguir é importante para o estudo do comportamento de uma curva regular.

Definição 2.7. A função *curvatura* $k(s) : I \to \mathbb{R}$ da curva $\alpha = (x(s), y(s))$ em $s \in I$, é

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s), \;\; \forall s \in I.$$

Analogamente, como $n(s)$ é unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto paralelo a $t(s)$. Como $\langle n(s), t(s)\rangle = 0$ daí temos,

$$\langle n'(s), t(s)\rangle = -\langle n(s), t'(s)\rangle,$$

$$-\langle n(s), k(s)n(s)\rangle = -k(s)$$

Concluímos que

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

Desse modo podemos definir o refencial de Frenet:

Definição 2.8. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então o *Referencial de Frenet* $t(s), n(s)$ satisfaz:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)t(s), \end{cases}$$

as quais chamamos de *Fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

A partir do vetor tangente e do vetor normal, podemos definir as retas determinadas por eles.

Definição 2.9. A reta $r_t(s_0)$ tangente a α em s_0 passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor tangente $t(s_0)$ é dada por

$$r_t(s_0) = \{\alpha(s_0) + \lambda t(s_0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

A reta $r_n(s_0)$ normal a α em s_0 passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor normal $n(s_0)$ é dada por

$$r_n(s_0) = \{\alpha(s_0) + \mu t(s_0) | \mu \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 2.9. Considere a curva

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0), \ s \in I,$$

onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. α é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor unitário (a, b). Como $t(s) = \alpha'(s) = (a, b)$ é constante, temos que $t'(s) = 0$ e portanto

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = 0 \ \forall s \in I.$$

Exemplo 2.10. Considere a curva

$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r} + a, r \sin \frac{s}{r} + b) \ s \in \mathbb{R}, \ r > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro (a, b) e raio r. Então,

$$t(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$$

e

$$n(s) = (-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}).$$

Logo

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{r} > 0$$

pois, $t'(s) = \frac{1}{r} n(s)$.

Proposição 2.2. *Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r))$. $r \in I$, uma curva regular. Então*

$$t(r) = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2, y'(r)^2}}$$

$$n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2, y'(r)^2}}$$
$$k(r) = \frac{(-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r))}{(x'(r)^2, y'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demonstração. Seja $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco. Sendo $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ obtemos

$$\beta'(s(r))s'(r) \;\; = \;\; \alpha'(r)$$

e assim

$$\beta''(s(r))s'(r)^2 + \beta'(s(r))s'(r) \;\; = \;\; \alpha''(r) \tag{2.1}$$

onde

$$s'(r) \;\; = \;\; || \; \alpha'(r) \; ||$$

e

$$s''(r) \;\; = \;\; \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|| \; \alpha'(r) \; ||}.$$

Considerando que $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ segue pela equação (2.1)

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{\alpha'(r)}{|| \; \alpha'(r) \; ||} \\ &= \beta'(r)\frac{(s(r))s'(r)}{(s'(r))} \\ &= \beta'(s(r)) \\ &= t_\beta(s(r)) = \frac{\alpha'(r)}{s'(r)} \\ &= \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} n(r) &= n_\beta(s(r)) \\ &= \frac{-y(r), x'(r)}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}} \end{aligned}$$

Então, como $k_\beta(s(r)) = \langle \beta''(s(r)), n_\beta(s(r))\rangle$, temos,

$$\begin{aligned} k(r) &= k_\beta(s(r)) \\ &= \frac{\langle \alpha''(r) - t_\beta(s(r)) \cdot s''(r), n_\beta(s(r))\rangle}{s'(r)} \\ &= \frac{\langle t'(r), n'(r)\rangle}{\| \alpha''(r) \|^2} \\ &= \frac{\frac{-x''(r)y'(r)}{\|\alpha''(r)\|} + \frac{x'(r)y''(r)}{\|\alpha''(r)\|}}{\| \alpha''(r) \|^2} \\ &= \frac{x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.11. Considere a espiral logarítmica

$$\alpha(r) = (e^r \cos r, e^r \sin r)\ r \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\alpha'(r) = e^r(\cos r - \sin r, \sin r + \cos r),$$

então

$$\begin{aligned} t'(r) &= e^r(\cos r - \sin r - \sin r, \sin r + \cos r + \cos r - \sin r) \\ &= e^r(-2\sin r, 2\cos r). \end{aligned}$$

Temos que $\| \alpha'(r) \| = \sqrt{2}e^2$ portanto,

$$\begin{aligned} k(r) &= \frac{(2\sin r e^r(e^r \sin r + e^r \cos r) + (e^r \cos r - e^r \sin r)2e^r \cos r)}{(\sqrt{2}e^r)^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{2\sqrt{2}e^{3r}}(\sin^2 r + \sin r \cos r + \cos^2 r - \sin r \cos r) \\ &= \frac{2e^{2r}}{2\sqrt{2}e^{3r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}e^r}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Teorema Fundamental das Curvas Planas

A partir das ideias vistas anteriormente, podemos apresentar o Teorema Fundamental das Curvas Planas que mostra que a partir de uma curva plana, parametrizada pelo comprimento de arco, determina uma curva a menos de um movimento rígido.

Antes de demonstrar o teorema é importante o conhecimento de algumas definições, assim como o Teorema de Existência e Unicidade de Sistemas de EDO's.

3.1 Movimentos Rígidos

Definição 3.1. Dada uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e um ponto $p = (x_1, y_1)$, a *translação* de α sobre p é aplicação $T_p \circ \alpha(s) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,dada por

$$T_p \circ \alpha(s) = \alpha(s) + p = (x(s), y(s)) + (x_1, y_1) = (x(s) + x_1, y(s) + y_1).$$

Ou seja, a tranlação é uma transformação que preserva distância, em outras palavras, ao transladarmos uma curva, esta não sofrerá qualquer deformação.

Exemplo 3.1. Seja $A : y = x^2 + 3$, uma parábola cujo vértice V corresponde ao ponto $(0, 3)$. Determine a equação da parábola B, obtida pela translação de A pelo vetor $v = (2, 1)$.

Solução: Sabemos que a translação T_v é a relação que, para cada ponto $P = (x, y)$ faz corresponder um ponto $P' = (\overline{x},\ \overline{y}) = (x + 2,\ y + 1)$. Isto é, $x = \overline{x} - 2$ e $y = \overline{y} - 1$. Com isso, substituindo esses valores de x e y na equação da parábola A, encontramos a equação de B, imagem de A, obtida através da translação pelo vetor v.

$$\begin{aligned} y &= x^2+3 \\ \Leftrightarrow \overline{y}-1 &= (\overline{x}-2)^2+3 \\ \Leftrightarrow \overline{y} &= \overline{x}^2-4\overline{x}+8 \end{aligned}$$

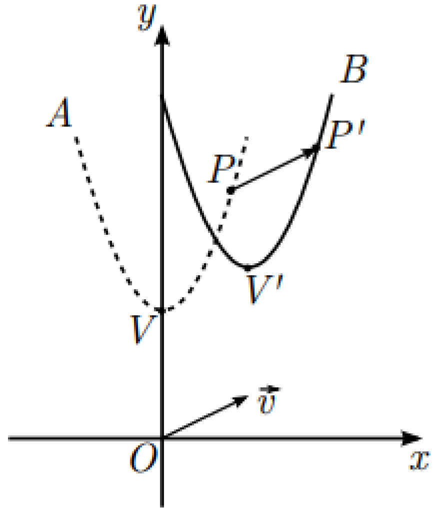

Figura 2.9

Ou seja, $y = x^2 - 4x + 8$ é a equação da parábola B, cujo vértice $V = (2,4)$. Observe que $V = (0,3)$ é o vértice da parábola A e $V' = T_v(V)$ com $v = (2,1)$, então $V' = (0+2, 3+1) = (2,4)$.

Definição 3.2. Uma *rotação* por um ângulo θ é uma aplicação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que a matriz associada à rotação R_θ é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, dado uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, a rotação de α sob um ângulo θ é dada por

$$R_\theta \circ \alpha(s) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = (\cos\theta\, x(s) - \sin\theta\, y(s), \sin\theta\, x(s) + \cos\theta\, y(s)).$$

Observe a figura abaixo, temos uma rotação aplicada em um quadrado.

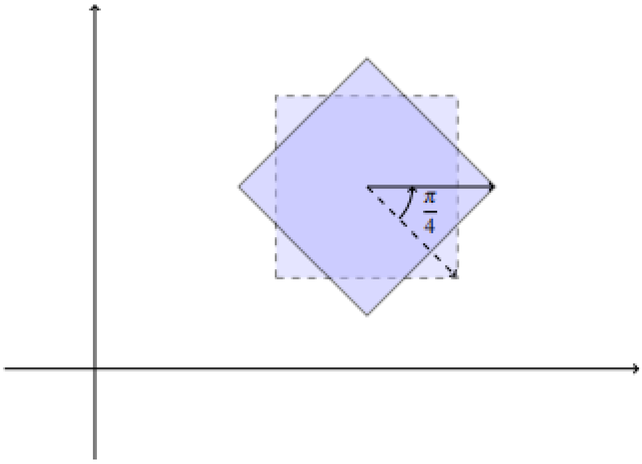

Figura 3

Exemplo 3.2. Sejam $A = (2, 4)$ e $B = (4, -2)$ em xOy. Determine as coordenadas de A e B em relação ao sistema de eixos $\overline{x}O\overline{y}$, obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos, no sentido anti-horário. Verifique que a rotação é uma transformação que preserva distâncias.

Solução: Queremos determinar as coordenadas $\overline{x}, \overline{y}$, de cada um dos pontos. Substituindo o valor de $\theta = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo, os valores das coordenadas (x, y) de cada caso, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 \\ -1+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ -2-\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\overline{A} = (\sqrt{3}+2, -1+2\sqrt{3})$ e $\overline{B} = (2\sqrt{3}-1, -2-\sqrt{3})$.

Agora, vamos verificar se a rotação preserva distâncias, ou seja, se $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(\sqrt{3}+2+1-2\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2} \\
&= (3-\sqrt{3})^2+(1+3\sqrt{3})^2 \\
&= 9-6\sqrt{3}+3+1+6\sqrt{3}+27 \\
&= 40.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
d(\overline{A},\overline{B}) &= \sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2} \\
&= 2^2+6^2 \\
&= 4+36 \\
&= 40
\end{aligned}
$$

Logo, a rotação, assim como a translação, preserva distâncias.

Com isso podemos definir um *movimento rígido* que é a composição de um movimento de translação e rotação.

Definição 3.3. Dada uma curva $\alpha(s)$, um *movimento rígido* é uma aplicação $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $M = T_p \circ R_\theta$ ou $M = R_\theta \circ T_p$ em que T_p é a translação de α sobre p e R_θ a rotação por um ângulo θ.

3.2 Teorema Fundamental das Curvas Planas

Enfim, agora podemos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Teorema 3.1. *Teorema fundamental das Curvas Planas*

a) *Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é $k(s)$;*

b) *A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$;*

c) *Se duas curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

Um resultado de grande importância para a demonstração desse teorema é o Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciáveis. Apresentamos uma versão desse resultado, sem demonstração. A demonstração e mais detalhes podem ser encontrados em 5.

Teorema 3.2. *(Existência e Unicidade) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \subset \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto[1] $I \ni t_0$ e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ com $(t, \phi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y'(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Demonstração. a) Seja $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(s)ds$, onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixaremos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos(\theta(s) + \lambda)ds \tag{3.2}$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(s) + \lambda)ds \tag{3.3}$$

Vamos verificar se a curva está parametrizada pelo comprimento de de arco:

$$t(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)).$$

O que implica que $|| \alpha'(s) ||= 1$, pois

$$|| \alpha'(s) ||= \sqrt{\cos^2(\theta(s) + \lambda) + \sin^2(\theta(s) + \lambda)} = 1.$$

Portanto, a norma do vetor velocidade é igual a 1. Logo, α está parametrizada pelo comprimento de arco.

[1]Diz que é o ponto A é interior ao conjunto X quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação *int* X. Quando $a \in$ *int* X diz que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A =$ *int* A, isto é, quando todos os pontos de A são anteriores a A.

Além disso,

$$t'(s) = (x''(s), y''(s)) \quad = \quad -\sin(\theta(s)+\lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s)+\lambda)\theta'(s))$$

e,

$$n(s) = (-\sin(\theta(s)+\lambda), \cos(\theta(s)+\lambda).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= -\sin(\theta(s)+\lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s)+\lambda)\theta'(s) \\ &= \theta'(s)(-\sin(\theta(s)+\lambda), \cos(\theta(s)+\lambda)) \\ &= \theta'(s)\ n(s). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} k_\alpha(s) &= \langle \alpha''(s), n(s)\rangle \\ &= \langle \theta'(s)\ n(s), n(s)\rangle \\ &= \theta'(s)\langle n(s), n(s)\rangle \\ &= \theta'(s). \end{aligned}$$

Sabemos que $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(s)ds$. Então,

$$\theta'(s) = k(s).$$

Portanto,

$$k_\alpha(s) = k(s).$$

b) Vamos provar agora a unicidade da curva α dada por (3.2) e (3.3). Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é $k(s)$. Vimos anteriormente que,

$$\alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s)+\lambda), \cos(\theta(s)+\lambda))$$

Então, segue das equações de Frenet que

$$t'(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)).$$

Isto é, $x(s)$ e $y(s)$ satisazem as equações

$$\begin{aligned} x''(s) &= -\theta'(s)\sin(\theta(s)+\lambda) = -k(s)y'(s) \\ y''(s) &= \theta'(s)\cos(\theta(s)+\lambda) = k(s))x'(s) \end{aligned}$$

Portanto segue pelo Teorema de Unicidade do Sitema de Equaçoes Dierenciáis que, fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ a curva α é única.

$c)$ Seja $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que $k_\alpha = k_\beta = k(s)$. Então, existem funções $\theta, \overline{\theta} : I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (\cos\theta(s), \sin(\theta(s)), \\ \beta'(s) &= (\cos\overline{\theta}(s), \sin\overline{\theta}(s)), \\ \theta'(s) &= \overline{\theta}'(s) = k(s) \end{aligned}$$

$\forall s \subset I$. Logo existe um $c_0 \subset \mathbb{R}$ tal que $\overline{\theta} = \theta + c_0$. Então, sendo $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\beta(s_0) = p_1 = (x_1, y_1)$ temos:

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)ds,\ y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(s)ds\right)$$

$$\beta(s) = \left(x_1 + \int_{s_0}^{s} \cos\overline{\theta}(s)ds,\ y_1 + \int_{s_0}^{s} \sin\overline{\theta}(s)ds\right)$$

Mas, como $\overline{\theta} = \theta + c_0$, utizando a soma e subtração de arcos, obtemos,

$$\begin{aligned} \beta(s = &\left(x_1 + \int_{s_0}^{s} \cos(c_0)\sin(\theta(s)) - \sin(c_0)\cos(\theta(s))ds\right), \\ &\left(y_1 + \int_{s_0}^{s} \cos(c_0)\sin(\theta(s)) + \sin(c_0)\cos(\theta(s))ds\right). \end{aligned}$$

Dessa maneira

$$\beta(s) = p_1 + (\cos(c_0)(x(s)-x_0) - \sin(c_0)(y(s)-y_0), \cos(c_0)(y(s)-y_0) + \sin(c_0)(x(s)x_0)).$$

Logo, $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s) - p_0)$ em que $R_{c_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação positiva do ângulo c_0 em torno da origem, cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} \cos c_0 & -\sin c_0 \\ \sin c_0 & \cos c_0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s)) - R_{c_0}(p_0) = T_a \circ R_{c_0}(\alpha(s))\ \forall s \in I$, em que $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a translação dada por $T_a(p) = p + a$ com $a = p_1 - R_{c_0}(p_0)$.

Ou seja,

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

□

Veremos a seguir uma aplicação do *Teorema Fundamental das Curvas Planas.*

Exemplo 3.3. (Espiral de Cornu) Seja $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, definida por $k(s) = 1+s$ (ver Figura 2.9). Determinaremos uma curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que a função curvatura de α em $s \in \mathbb{R}$ é dada por k.

Solução: Quando $p_1 = (0,0)$ e $v_0 = (1,0)$. De fato, visto que

$$\int_{s_0}^{s} k(\xi)d\xi = \int_{0}^{\tau} (1+\xi)d\xi = \tau + \frac{\tau^2}{2} \text{ e } \theta(0) = 0,$$

Temos, usando (3.2) e (3.3)

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\tau + \frac{\tau^2}{2})d\tau, \int_{s_0}^{s} (\sin \tau + \frac{\tau^2}{2})d\tau \right).$$

O traço de α descreve uma espiral de Cornu(ver Figura 2.9).

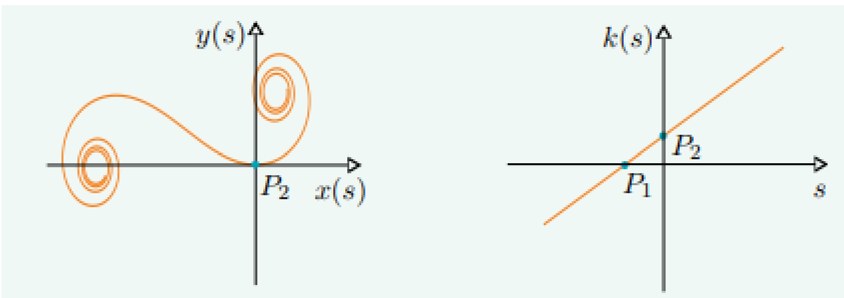

Figura 3.1

Concluímos imediatamente que a função curvatura de α em s é k, definida por $k(s) = 1 + s$.

Considerações Finais

A geometria diferencial das curvas planas, é de grande importância para mostrar resultados que não podem ser provados utilizando a geometria euclidiana.

O presente trabalho além de possibilitar um contato com a Geometria Diferencial, foi possível aperfeiçoar conhecimentos aprendidos no decorrer do curso, mostrando a importância de uma boa formação acadêmica.

O principal objetivo foi estudar curvas planas, com enfoque em curva parametrizada diferenciável e curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, curvatura e principalmente no Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Para esse fim, tendo como base o livro Introdução À Geometria Diferencial da autora Keti Tenenblat, foi realizado pesquisa bibliográfica em livros de Geometria Diferencial, além de trabalhos na área.

As reflexões deste trabalho podem levar os leitores a descobrirem o quanto os resutados matemáticos, em suas diferentes subáreas, são belos, o quão vasto são suas riquezas e que instigue os alunos a quererem conhecer um pouco a geometria diferencial.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, Hilário et al. *Geometria diferencial de curvas no* $\mathbb{R}^2$. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

[2] BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra Linear*. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1980.

[3] CAMPOLINO, Marcio Lopes. *Translação e rotação de cônicas em* $\mathbb{R}^2$. 2014. Disponível em:

[4] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6 ed.Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. 5 ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científica, 2001.

[6] HOWARD, Anton. *Calculo*. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[7] MONTIEL, Sebastián. *Curvas e superfícies*. American Mathematical Soc., Graduate Studies in Math. 69 2009.

[8] OLIVEIRA, Marcos Felipe de. *Curvas planas, curvas no espaço e aplicação*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.2021. Disponível em:

[9] PINHEIRO, Maria Eduarda et al. *O teorema dos quatro vértices*. Blumenau, 2019.
Disponível em:

[10] TENENBLAT, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2008.