



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**RODRIGO FELIPE DOS SANTOS**

**A PERFEIÇÃO DE UM NÚMERO: A PROPORÇÃO ÁUREA E SEUS PADRÕES  
ESTÉTICOS PRESENTES EM NOSSO UNIVERSO**

**CAMPINA GRANDE – PB**

**2023**

**RODRIGO FELIPE DOS SANTOS**

**A PERFEIÇÃO DE UM NÚMERO: A PROPORÇÃO ÁUREA E SEUS PADRÕES  
ESTÉTICOS PRESENTES EM NOSSO UNIVERSO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado ao Curso de Licenciatura em  
Matemática da Universidade Estadual da Paraíba  
como requisito para obtenção do título  
Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:**

**Orientadora:** Profa. Dra. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)

**CAMPINA GRANDE – PB**

**2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237p Santos, Rodrigo Felipe dos.  
A perfeição de um número [manuscrito] : a proporção áurea e seus padrões estéticos presentes em nosso universo / Rodrigo Felipe dos Santos. - 2023.  
38 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Dra. Abigail Fregni Lins, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Número de ouro. 2. Secção áurea. 3. Número áureo. 4. Educação básica. I. Título

21. ed. CDD 372.7

**RODRIGO FELIPE DOS SANTOS**

**A PERFEIÇÃO DE UM NÚMERO: A PROPORÇÃO ÁUREA E SEUS PADRÕES  
ESTÉTICOS PRESENTES EM NOSSO UNIVERSO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado ao Curso de Licenciatura em  
Matemática da Universidade Estadual da Paraíba  
como requisito para obtenção do título  
Licenciado em Matemática.

Área de concentração:

Aprovado em: 28/04/2023

**BANCA EXAMINADORA**



**Profa. Dra. Abigail Fregni Lins (orientadora)**

Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande- UEPB



**Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (membro interno)**

Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande- UEPB



**Profa. Ms. Danielly Barbosa de Sousa (membro externo)**

Escola Municipal de Ensino Fundamental Roberto Simonsen – Campina Grande  
Escola Municipal de Ensino Fundamental Irmão Damião – Lagoa Seca

este trabalho primeiramente a Deus. Segundo à minha mãe e ao meu pai, por terem me ensinado coisas boas e as coisas corretas da vida e por terem me mostrado que sou uma pessoa capaz de conseguir meus objetivos. À Maria Eduarda, uma pessoa muito especial em minha vida e também a todos meus familiares e colegas de turma. À uma colega em especial, Rosa Mística, por ter nos tornados amigos compartilhando o mesmo objetivo durante esses anos de graduação e por servir de motivação para que eu fosse até o fim e não desistir dessa jornada, DEDICO.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por me concedido a vida e ter me capacitado e instruído em todas as circunstâncias até aqui.

À minha orientadora, Dra. Abigail Fregni Lins, pela dedicação e paciência durante as sábias orientações. Aos membros da banca de defesa pelas valiosas contribuições.

Agradeço aos meus pais, Edimilson Noberto dos Santos e Maria do Socorro Felipe dos Santos, que me educaram com amor, carinho e me deram muito apoio durante toda minha jornada acadêmica.

Aos professores que não mediram esforços para nos ensinar e passarem seus conhecimentos e que deles obtive vários conhecimentos para a minha formação profissional. Agradeço todos os coordenadores e funcionários da UEPB.

Enfim, aos meus colegas de Curso, que me incentivaram a não desistir e estiveram nos momentos alegres, difíceis, divertidos e que me ensinaram que precisar do outro é trivial para o nosso crescimento, e está tudo ótimo!

*Matemática é o alfabeto com o qual Deus criou  
o universo.*

Galileo Galilei

## RESUMO

O presente trabalho investigou a presença do número áureo em diferentes situações, mostrando onde podemos encontrar os padrões estéticos da proporção áurea na Matemática, nas Artes e na Natureza. Desenvolvida na modalidade de pesquisa bibliográfica, primeiramente dissertamos sobre proporção áurea na Matemática, nas Artes e na Natureza, trazendo alguns fatos sobre a proporção áurea e algumas imagens ilustrativas. Por fim, apresentamos algumas atividades didáticas relacionadas ao tema abordado. As perguntas que nortearam nosso trabalho: Podemos identificar as formas geométricas da proporção áurea nos seres vivos? É possível identificar a proporção áurea nas Artes e na Natureza? A partir dos resultados, podemos afirmar que para termos um conhecimento mais amplo sobre o tema na educação básica, professores e outros profissionais necessitam se aprofundar sobre a proporção áurea e expor para seus alunos, tornando um tema presente na vida escolar dos alunos. Assim, afirmamos que a proporção áurea está presente na Matemática, nas Artes e na Natureza. Esperamos que nosso trabalho desperte interesse pelo tema, tanto aos alunos quanto aos professores, para que conheçam cada vez mais a proporção áurea.

**Palavras-chave:** proporção áurea; número de ouro; secção áurea; regra de ouro; número áureo.

## ABSTRACT

The present work investigated the presence of the golden number in different situations, showing where we can find the aesthetic standards of the golden ratio in Mathematics, Arts and Nature. Developed in the form of bibliographical research, we first discussed the golden ratio in Mathematics, Arts and Nature, bringing some facts about the golden ratio and some illustrative images. Finally, we present some didactic activities related to the topic addressed. The questions that guided our work: Can we identify the geometric shapes of the golden ratio in living beings? Is it possible to identify the golden ratio in Arts and Nature? From the results, we can say that in order to have a broader knowledge on the subject in basic education, teachers and other professionals need to delve into the golden ratio and expose it to their students, making it a present theme in the students' school life. Thus, we affirm that the golden proportion is present in Mathematics, in the Arts and in Nature. We hope that our work will arouse interest in the subject, both in students and in teachers, so that they become increasingly aware of the golden ratio.

**Keywords:** golden ratio; golden number; golden section; golden rule; golden number.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Pentagrama.....	15
Figura 2: Segmento áureo.....	17
Figura 3: Pentágono e pentagrama.....	19
Figura 4: Estrela de cinco pontas.....	19
Figura 5: Retângulo áureo.....	20
Figura 6: Divisões de retângulos áureos.....	20
Figura 7: Olho de Deus.....	20
Figura 8: Triângulo áureo no pentágono.....	21
Figura 9: Triângulo áureo.....	21
Figura 10: Espiral no retângulo.....	22
Figura 11: Espiral no triângulo.....	22
Figura 12: A última ceia de Leonardo da Vinci.....	24
Figura 13: O nascimento de Vênus de Sandro Botticelli.....	24
Figura 14: A última ceia de Salvador Dalí.....	25
Figura 15: Azaléia.....	26
Figura 16: Petúnia e o Jasmim-estrela.....	27
Figura 17: Proporção áurea no Parthenon.....	27
Figura 18: Proporção áurea em logotipo de marca.....	28
Figura 19: Concha de Caramujo.....	28
Figura 20: Concha do Nautilus.....	29
Figura 21: Girassol.....	29
Figura 22: Pinhas e espiral áurea.....	29
Figura 23: Couve-flor românica.....	30
Figura 24: Flor.....	30
Figura 25: Flor de cera.....	30
Figura 26: Proporção áurea no corpo humano.....	31
Figura 27: Segmento áureo no braço humano.....	31
Figura 28: Proporção áurea em peixes.....	31
Figura 29: Monalisa.....	34

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CCT - Centro de Ciências e Tecnologia

UEPB - Universidade Estadual da Paraíba

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEF - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental

TCC - Trabalho de Conclusão de Curso

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>A PROPORÇÃO ÁUREA NA MATEMÁTICA.....</b>	<b>13</b>
2.1	POUCO DE SUA HISTÓRIA.....	13
2.2	A RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA.....	14
2.3	A GEOMETRIA E A PROPORÇÃO ÁUREA.....	16
<b>3</b>	<b>A PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES.....</b>	<b>21</b>
3.1	IDENTIFICAR A PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES.....	21
3.2	FIGURAS E IMAGENS ILUSTRATIVAS.....	22
<b>4</b>	<b>A PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA.....</b>	<b>24</b>
4.1	CONHECER A PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA.....	24
4.2	FIGURAS E IMAGENS ILUSTRATIVAS.....	26
<b>5</b>	<b>PROPOSTAS DIDÁTICAS.....</b>	<b>31</b>
5.1	PROPORÇÃO ÁUREA NA MATEMÁTICA.....	31
5.2	PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES.....	31
5.3	PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA.....	32
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>34</b>
	<b>REFERÊNCIA.....</b>	<b>35</b>
	<b>ANEXO A: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NA MATEMÁTICA.....</b>	<b>36</b>
	<b>ANEXO B: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NAS ARTES.....</b>	<b>37</b>
	<b>ANEXO C: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NA NATUREZA.....</b>	<b>38</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde meu início na escola sempre gostei mais da disciplina de Matemática, em comparação as outras disciplinas. Sempre tive facilidade de entender as explicações dadas pelos professores, mas nunca passou pela minha mente terminar o Ensino Médio e ingressar em um Ensino Superior para aprender e conhecer mais sobre a Matemática.

Fiz a prova do ENEM após quase dois anos depois de concluir o Ensino Médio. Em seguida me inscrevi no SISU e fiz uma pontuação que deu para ingressar na universidade. Fiquei meio indeciso se iniciaria quando percebi que tinha sido classificado para entrar na Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, em 2016. Então pessoas próximas me incentivaram e acabei resolvendo ingressar naquela nova jornada.

No início foi bem difícil pra mim, pois entrei muito relaxado e perdi alguns componentes, mas logo consegui focar mais nos estudos e fazer as coisas com clareza. Os componentes que exigiam mais dos cálculos eu sempre gostava, pois sempre ficava curioso para saber como se daria o caminho para chegarmos aos resultados finais. Já os componentes da educação matemática eu não gostava muito, sempre tive dificuldade pra ler os textos enormes, mas no decorrer do curso fui me adaptando e tendo uma visão melhor sobre esses componentes, que no futuro teriam uma grande importância para mim.

Então, em uma determinada aula do componente curricular História da Matemática, o professor propôs uma aula para a turma. Ele passaria um vídeo em sala e nós, alunos, iríamos discutir sobre tal na aula seguinte. No decorrer dessa aula, enquanto estávamos assistindo o vídeo, um assunto chamou muito minha atenção, a Proporção Áurea. Esse foi o meu primeiro contato com o tema, me causando muito interesse. A partir dessa aula assisti outros vídeos sobre o assunto e pesquisei mais algumas coisas. Daí por diante percebi que esse seria o tema em meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Com isso, durante uma aula falei com a professora Abigail Fregni Lins (Bibi Lins). Ela me falou que tinha um de seus horários disponíveis e poderia me orientar neste estudo. Desde então estou me debruçando mais sobre este tema, procurando entendê-lo um pouco mais e aprendendo mais algumas coisas a fim de descobrirmos onde podemos enxergar a Proporção Áurea na Matemática, nas Artes e na Natureza. As perguntas que norteiam o TCC são: *Podemos identificar as formas geométricas da proporção áurea nos seres vivos? É possível identificar a proporção áurea nas Artes e na Natureza?*

Pretendemos também em nosso TCC sugerir propostas didáticas a serem trabalhadas em sala de aula. Com isso, nosso TCC compõe-se de seis capítulos. No Capítulo 2 abordamos a Proporção Áurea na Matemática. No Capítulo 3 a Proporção Áurea nas Artes. No Capítulo 4 a Proporção Áurea na Natureza. Já no Capítulo 5 trazemos propostas didáticas sobre os assuntos abordados nos capítulos anteriores. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos nossos comentários finais.

## 2 A PROPORÇÃO ÁUREA NA MATEMÁTICA

Este capítulo foi subdividido em três seções; apresentamos um pouco da história da proporção áurea, algumas características que possamos relacioná-las à Matemática e também mostramos um pouco da Geometria presente na proporção áurea.

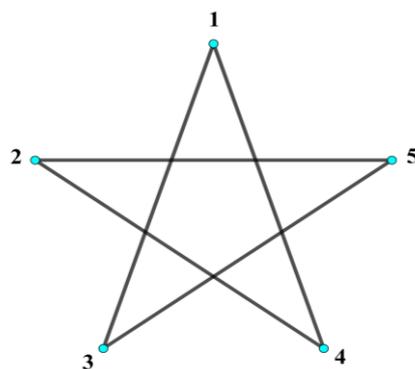
### 2.1 POUCO DE SUA HISTÓRIA

Os números sempre estão chamando a atenção do ser humano desde muito tempo, como também nos dias atuais, devido suas belezas estética e harmônica, por características únicas que só existem nos números. Um desses números que atraiu a atenção de vários pesquisadores e estudiosos na história da humanidade foi o *Número de Ouro* (FRANCISCO, 2017).

O filósofo grego Pitágoras (569-500 a. c), profeta místico, conseguiu observar que na natureza existem várias combinações e relações entre números, que foram estudados no decorrer da história. Durante suas viagens religiosas, Pitágoras conseguiu adquirir não só ideias religiosas, mas também ideias matemáticas e astronômicas que futuramente iriam ser muito valiosas para a humanidade. Durante uma dessas viagens, uma sociedade secreta foi criada por ele, em Crotona, na costa sudeste, onde hoje é a Itália. Essa sociedade secreta, devido às suas bases matemáticas e filosóficas, se assemelhava a um culto órfico (FRANCISCO, 2017).

Os pitagóricos se reuniam secretamente para discutir suas descobertas matemáticas, onde só os membros dessa sociedade podiam entrar nesses encontros. Todos usavam um emblema secreto, o *pentagrama*, que também era chamado de triângulo triplo:

**Figura 1:** Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Podemos dizer que o Número de Ouro não é só um número, mas sim uma equação comum, pois seu resultado está presente em lugares que não imaginamos que estejam.

“Conhecido desde a antiguidade, o número que recebeu no século XIX o título honorífico de *Número Áureo, Razão Áurea e Seção Áurea*” (LIVIO *apud* FRANCISCO, 2017, p. 19).

O número é resultado obtido de uma equação, tal resultado é uma dízima, que quando arredondando obtém-se um número 1,6180339887..., considerado por muitos estudiosos antigos e atuais como o número perfeito:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} = \varphi$$

A partir do século XX, o resultado começou a ser representado pela letra grega  $\varphi$  *phi*, pelo norte americano Mark Barr, em homenagem ao arquiteto, e também matemático Phideas (BELLINE, 2015), que viveu no século V a.c, quem teria usado e estudado essa mesma medida para a construção de várias outras obras, que chamam à atenção pelos seus padrões estéticos.

Assim como os já citados anteriormente, outros estudiosos e matemáticos estudaram a proporção áurea, como o monge Lucas Pacioli (1445-1517), e também o matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci, que nasceu (1175-1250) em Pisa, na Itália. Fibonacci ficou conhecido pela brilhante sequência numérica, que mais tarde, no século XIX, seria denominada Sequência de Fibonacci pelo francês e também matemático Édouard Lucas (1842-1891). Sequência essa que foi obtida pelo problema matemático.

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês (CONTADOR. *apud* BARBOSA, 2012, p. 6).

A observação do problema foi feita por meio do crescimento de uma população de coelhos que compõe-se em uma sequência infinita de números. Sequência essa gerada por elementos em que cada um dos termos subsequente é a soma dos dois termos anteriores, adquirindo a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... onde  $f_1 = f_2 = 1$  e que no  $n$ -ésimo termo determinaremos por  $f_n$  assim teremos que  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

## 2.2 A RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA

A Matemática trata de algo que vai além da nossa imaginação, e que se define por uma infinidade de combinações numéricas, fórmulas, dados, entre outros, que nos ajuda diariamente, ou seja, a Matemática vai muito além do básico, e pode estar relacionada com várias outras coisas.

Sabemos que a Matemática é repleta de descobertas e até hoje algumas ainda continuam adormecidas. Porém, uma descoberta matemática encontrada pelos pitagóricos, a Proporção Áurea, até hoje é algo que intriga muitos matemáticos e pesquisadores, pois ela pode estar presente em vários lugares, causando grande curiosidade para aqueles que a estudam.

Sua relação com a Matemática é muito visível, pois há vários elementos encontrados na proporção áurea presentes também na Matemática. Desde seu resultado representado por uma letra grega  $\varphi$  “phi” à figuras geométricas, como o pentágono, retângulo e triângulo de ouro.

A partir de um segmento de reta orientado podemos representar o número de ouro, “ $\varphi$ ”, geometricamente, supondo que os pontos A e B são extremidade de uma reta e o ponto X localizado entre as duas extremidades. Tal que a medida do segmento  $\overline{AX} = a$  é maior que o segmento  $\overline{XB} = b$  e menor do que o segmento  $\overline{AB} = a + b$  :

**Figura 2** - Segmento áureo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Observe que, se x divide o segmento de reta AB em média razão então:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \varphi \text{ ou seja, } \frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} = \varphi$$

Multiplicando em cruz, ou seja, meio pelos extremos temos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow a \cdot a = b \cdot (a+b) \Leftrightarrow a^2 = ab + b^2$$

Passando tudo para o primeiro membro da igualdade obtemos:

$$a^2 + ab + b^2 = 0$$

Dividindo tudo por  $b^2$ , teremos:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Pela definição acima  $\frac{b}{a} = \varphi$ , então substituindo obtém-se:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação por Bhaskara temos que:

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) \Leftrightarrow \Delta = 1 + 4 \Leftrightarrow \Delta = 5$$

$$\varphi = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como  $\varphi$  é um quociente entre comprimentos então  $x > 0$ , logo  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Portanto:

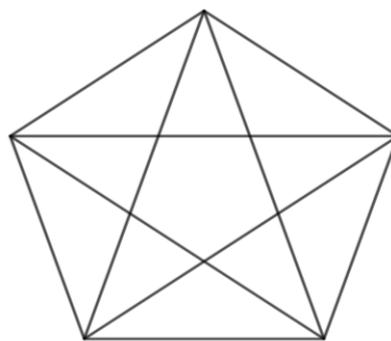
$$\varphi = 1,6180339887\dots$$

### 2.3. A GEOMETRIA E A PROPORÇÃO ÁUREA

Diante de diversas características e aspectos, podemos denotar e representar a proporção áurea geometricamente por meio de alguns conceitos matemáticos da Geometria, tais como segmento de reta, algumas figuras geométricas como retângulo, triângulo e também o pentágono, citadas anteriormente. Todas essas figuras apresentam o número áureo, presente tanto em construções como também na própria natureza. Essas figuras geométricas possuem algumas características distintas e outras iguais, mas que sempre tem a presença da divina proporção.

A seguir vamos identificar algumas dessas características em cada uma das figuras: pentágono, retângulo e triângulo:

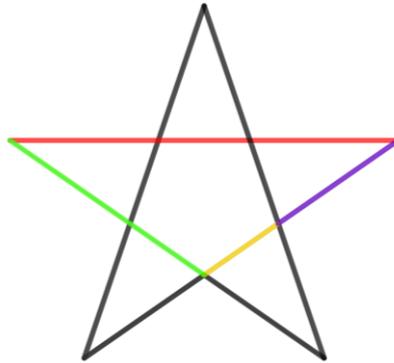
**Figura 3:** Pentágono e Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

No pentágono podemos observar que ao traçarmos as suas diagonais obtemos o pentagrama, ou estrela de cinco pontas. Assim podemos identificar tanto o retângulo áureo como o triângulo áureo com os segmentos que formam a estrela:

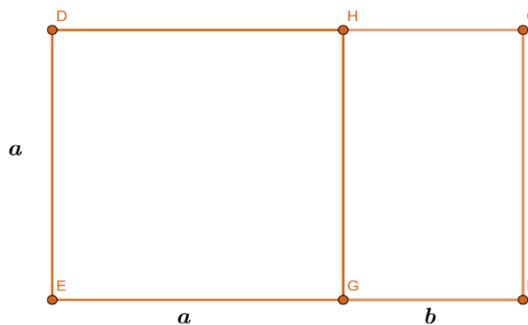
**Figura 4:** Estrela de cinco pontas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Pitágoras descobriu que o pentagrama usado por ele, e pelos membros de sua Instituição, estava repleto de informações matemáticas, ou seja, ele descobriu que as duas linhas mais curtas do pentagrama combinada daria igual a uma terceira linha maior do que as duas anteriores e a segunda unida com essa terceira daria igual a linha maior identificada no pentagrama, ou seja, teríamos assim a proporção áurea ou regra de ouro. Podemos dizer que escondido dentro do pentagrama está o segredo do retângulo áureo:

**Figura 5:** Retângulo áureo



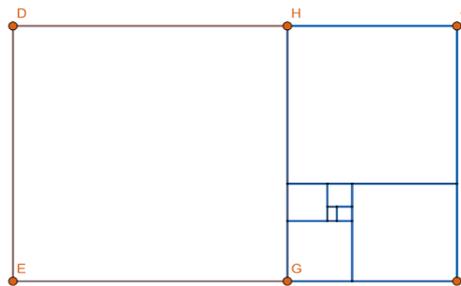
Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

O retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerado uma das figuras geométricas que representa a proporção divina, ou seja, podemos associá-lo ao número *phi*, onde podemos denotar tal retângulo de lados A e B, em que ao dividimos ele estará na razão áurea, considerado o retângulo mais belo e agradável ao olho humano (BARBOSA, 2012), ou seja, ao ser dividido

ele pode ser reproduzido matematicamente infinitas vezes, tal que o retângulo formado da divisão terá a mesma proporção que o retângulo anterior.

Uma das características do retângulo áureo é que ao ser dividido infinitas vezes podemos identificar uma espiral que repete as proporções da regra de ouro ao infinito. Os gregos representavam o retângulo de ouro como a lei da beleza matemática, pois podia ser identificada em suas obras, na arquitetura clássica e em suas esculturas. Hoje em dia esse retângulo também faz parte do nosso mundo moderno, onde também podemos encontrar essa proporção em nossa própria vida.

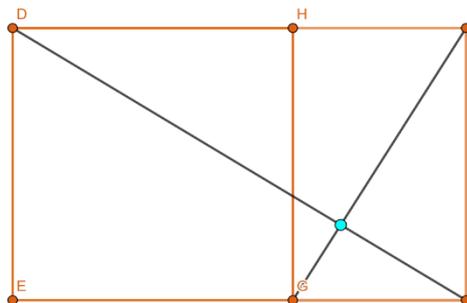
**Figura 6:** Divisões do Retângulo áureo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Outra característica que podemos observar no retângulo áureo é que podemos obter um ponto, denominado de *Olho de Deus*, obtido através da interseção de duas diagonais em um par de retângulos da sequência, obtidos da divisão do primeiro retângulo áureo:

**Figura 7:** Olho de Deus

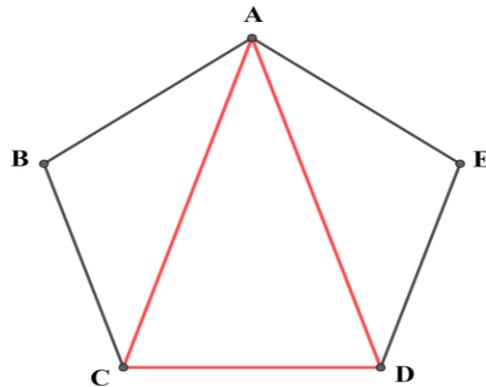


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Segundo Lívio [10], tal sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável que, devido às propriedades “divinas” atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como “O Olho de Deus”. Tal ponto é chamado, na literatura matemática, de foco ou polo (FRANCISCO, 2017, p. 38).

Outra figura geométrica que podemos identificar no pentágono e que emite os padrões de beleza da proporção divina é o triângulo áureo. Segundo Lauro (2005, p. 41) tal triângulo é chamado “triângulo isósceles áureo”. Esse triângulo é obtido do traçamento das diagonais principais do pentágono e que podemos visualizá-lo logo após as retas serem traçadas:

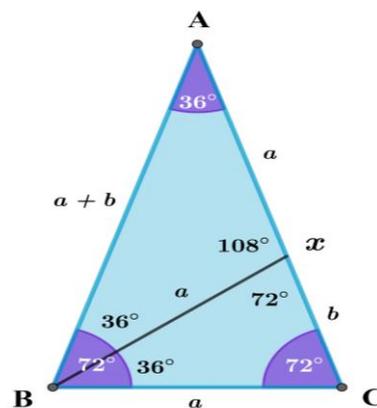
**Figura 8:** Triângulo áureo no pentágono



Fonte Elaborado pelo autor, 2023.

Um triângulo será considerado áureo se ele for um triângulo isósceles tal que seus ângulos internos sejam  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  (FRANCISCO, 2017):

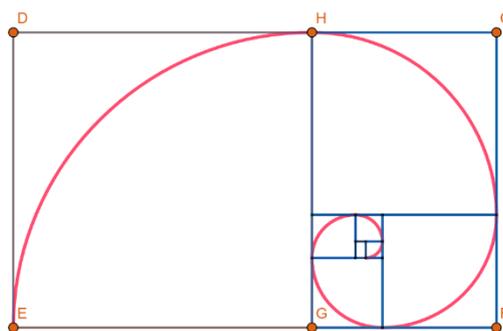
**Figura 9:** Triângulo áureo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

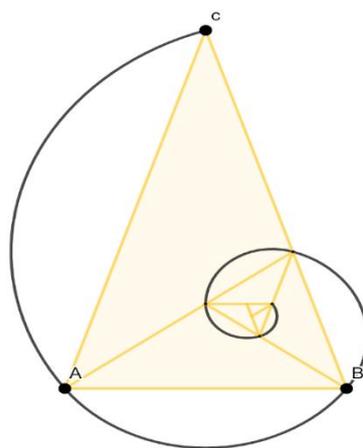
Assim como no retângulo, no triângulo áureo podemos repeti-lo infinitas vezes. Assim podendo identificar a mesma espiral obtida no retângulo, ou seja, a espiral logarítmica, ou espiral equiangular, que pode ser obtida de duas formas diferentes, tanto pelo retângulo como pelo triângulo áureo.

**Figura 10:** Espiral no Retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

**Figura 11:** Espiral no Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Percebe-se que existem várias maneiras de representar e identificar a Geometria presente na proporção áurea, onde algumas delas foram mostradas anteriormente, fazendo com que as pessoas compreendam a proporção como algo presente, não só na Geometria mas em várias outras situações.

Com a compreensão dos conceitos da proporção áurea, mostrando algumas de suas relações com a Matemática e identificando algumas coisas da Geometria presentes na proporção, além de ser algo descoberto por alguns estudiosos e matemáticos, esta proporção era algo que já estava presente em todo universo.

### 3 A PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES

Neste capítulo, de duas seções, identificamos onde podemos encontrar a proporção áurea nas artes e também mostramos algumas imagens e figuras ilustrativas.

#### 3.1 IDENTIFICAR A PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES

Sabemos que a arte é algo que prende muito a atenção das pessoas e que pode estar relacionada com várias culturas do nosso planeta. Sabemos também que não é de hoje que ela está presente em nossas culturas, pois temos vários registros que nos comprova que ela existe desde os primórdios. Alguns desse registros são pinturas rupestres e desenhos primitivos. Assim, com passar do tempo o homem foi conhecendo novos conceitos e formas, evoluindo cada vez mais seus desenhos e pinturas:

Muitos autores ressaltam que a evolução dessas observações se deu exatamente como a evolução de conceitos geométricos percebidos pelas crianças que mesmo sem ter a noção de matemática conseguem criar seus primeiros desenhos. Também mais tarde passou a desenvolver de forma consciente os conceitos e definições de formas, mas das que a natureza oferecia, seja por prazer ou necessidade (BARBOSA, 2012, p. 10).

Muitas das pinturas abordadas no passado estavam ligadas à algumas religiões devido a estarem presentes em igrejas e outros lugares que representavam outras religiões. Pinturas essas consideradas por muitos como pinturas medievais:

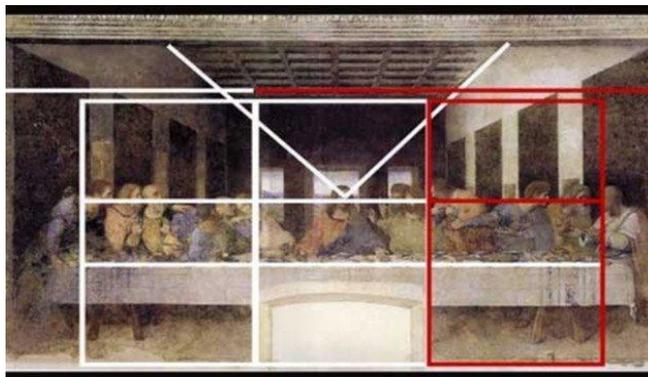
As pinturas medievais sofreram influência do cristianismo, já que eram produzidas na Europa, elas não tinham a função de decorar e embelezar mosteiro e igrejas, mas de alguma forma ensinar a população um pouco de religião, já que a escrita e a leitura somente os filhos dos nobres tinham acesso, Logo os pintores tiveram que educar os olhos dos homens através dessas figuras (BARBOSA, 2012, p. 10).

Com o passar do tempo, após o período greco-romano e o aprimoramento das técnicas, a proporção áurea passou a ser utilizada nas obras, criando um novo método de pintura, deixando de ser apenas um ente matemático. Assim, os pintores descobriram que a proporção era um método onde eles podiam exprimir as proporções do corpo humano e chegar em um trabalho que alcançasse a proporcionalidade, estética e beleza nas suas obras (BARBOSA, 2012).

#### 3.2 FIGURAS E IMAGENS ILUSTRATIVAS

Abaixo algumas imagens com detalhes da proporção áurea que possam nos fazer perceber que ela também pode estar nas artes:

**Figura 12:** A última ceia de Leonardo da Vinci



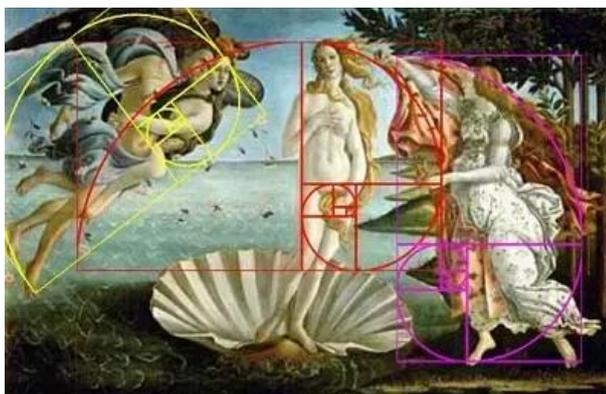
Fonte: <https://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>.

Acesso em 08 de dezembro de 2022.

Na obra de Leonardo da Vinci *A última ceia*, um dos conceitos da proporção áurea que podemos observar que podem ter sido utilizados nessa obra foi o retângulo e o seguimento áureos. Observe que na imagem que podemos criar três retângulos áureos, onde as cabeças dos discípulos estão sobre a divisão dos retângulos áureos. Mais acima o retângulo áureo no teto da pintura nos quadrados da decoração traçando segmentos de reta se intersectarem no centro da pintura, onde se encontra a imagem de Jesus, considerado o centro de tudo.

Na obra de Sandro Botticelli, *Nascimento de Vênus*, a perfeição da obra pode ser determinada pela proporção áurea e pela deusa Afrodite, localizada tanto no centro da obra quanto no da proporção áurea, que serve de orientadora para pontos de interesse da pintura:

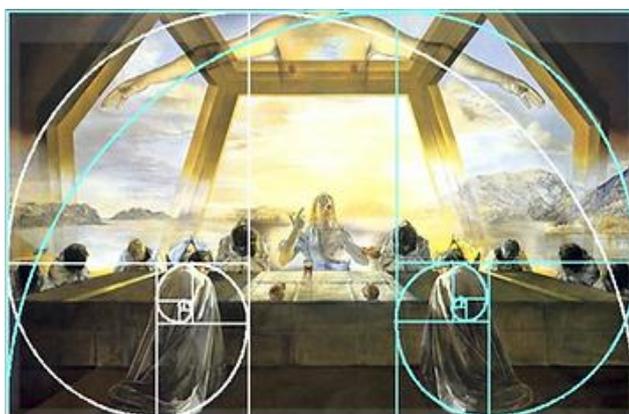
**Figura 13:** O nascimento de vênus de Sandro Botticelli



Fonte: <https://www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea/>. Acesso em 08 de dezembro de 2022.

Na obra de Salvador Dali, *A Última Ceia*, pode-se observar que tem a presença da proporção áurea, dividindo a imagem em dois retângulos áureos, tanto para a esquerda quanto para a direita. Ao dividirmos os retângulos várias vezes, criamos a espiral áurea que fica sobre os dois discípulos ajoelhados de costa à mesa:

**Figura 14:** A última ceia de Salvador Dali



Fonte: <https://www.terceiralei.com.br/post/arte-fora-do-padr%C3%A3o-hist%C3%B3rico>. Acesso em 08 de dezembro de 2022.

Várias obras artísticas representam algumas características que encontramos na proporção áurea em seu planejamento. Evidenciando assim cada vez mais a presença da proporção áurea nas Artes.

Através de algumas obras citadas acima, podemos perceber que seus criadores de alguma forma utilizaram a proporção áurea, fazendo com que suas pinturas apresentassem as características encontradas na proporção, deixando-as mais bonitas e perfeitas possível.

## 4 A PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA

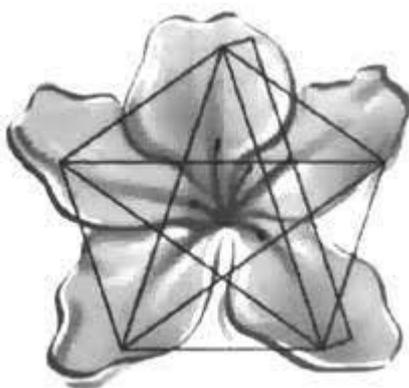
Neste capítulo, de duas seções, relatamos sobre a divina proporção na natureza, trazendo algumas informações da natureza que contém a proporção divina e algumas imagens, ajudando a perceber a presença da proporção na natureza.

### 4.1 CONHECER A PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA

Sabemos que na natureza há várias belezas naturais e misteriosas, também coisas que não imaginamos estar presente nela, a matemática é uma delas. Podemos representar a Matemática na natureza pela divina proporção, pelo número de ouro e as figuras geométricas que representam este número, como também a espiral de ouro.

Podemos dizer que a natureza usa essa forma matemática em várias espécies como em árvores, conchas do mar, entre outras. Assim, podemos destacar que existem literalmente centenas de membros de destaque na sociedade pitagórica da estrela na natureza. Nas flores, por exemplo, podemos identificar um pentágono estrelado que contém a proporção divina, sobrepondo um pentágono estrelado sobre algumas espécies. Podemos identificar a presença da proporção áurea em alguns tipos de flores, como a azaléia, petúnia, jasmim-estrela e a flor de cera (LAURO, 2005).

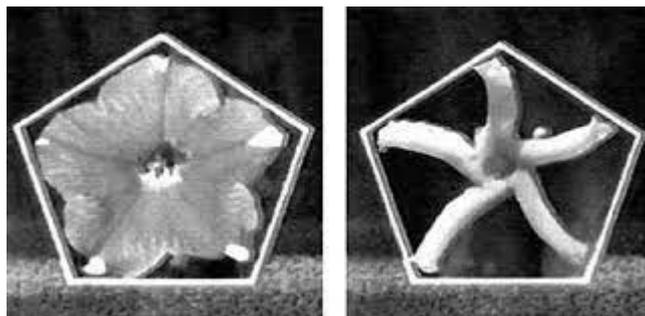
**Figura 15:** Azaléia



Fonte: [https://encrypted-](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQjyS8sqmmjl4pvOPFPqRcMFiCYWPgR_jxAchWvO87C-aKHZXz7mahEBAEgKmLVNJ0avk&usqp=CAU)

[tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQjyS8sqmmjl4pvOPFPqRcMFiCYWPgR\\_jxAchWvO87C-aKHZXz7mahEBAEgKmLVNJ0avk&usqp=CAU](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQjyS8sqmmjl4pvOPFPqRcMFiCYWPgR_jxAchWvO87C-aKHZXz7mahEBAEgKmLVNJ0avk&usqp=CAU). Acesso em 06 de maio de 2023

**Figura16:** Petúnia e o Jasmim-estrela

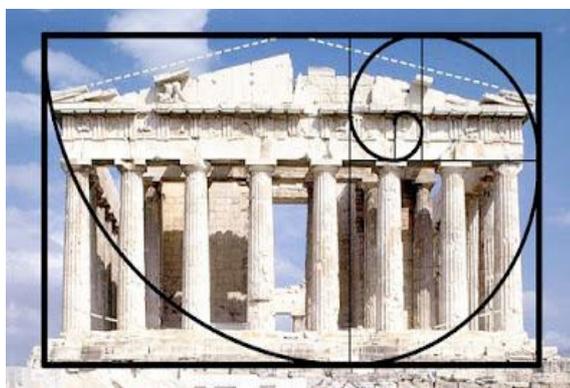


<https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR4NRBICgrmQIir7ZOcAmPmHUSYzriTSQ6n3NaWxvjpg&s>.  
Acesso em 06 de maio de 2023.

Sempre encontramos as proporções mágicas da regra de ouro nas espirais dos desenhos da natureza. No girassol podemos observar que a espiral está no centro, onde estão localizadas as novas sementes produzidas, formadas através do seu desenvolvimento, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário. As sementes do girassol, ou as florzinhas que formam a configuração dos flósculos da margarida-do-campo, estão dispostas em dois conjuntos de espirais sobrepostos, irradiando-se nos sentidos horário e anti-horário (LAURO, 2005, p. 46).

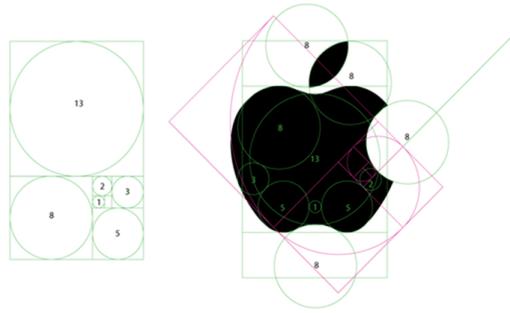
Também podemos observar algumas estruturas nas conchas através de padrões matemáticos fornecidos. Em espiral, e também de uma progressão linear, que o crescimento das conchas é regulado por princípios lógicos em que seu formato não mudará com seu crescimento (LAURO, 2005). Assim, todas as obras da natureza, e do universo, tem lógica matemática e seus padrões podem ser considerados ilimitados:

**Figura 17:** Proporção áurea no Parthenon



Fonte: <http://loscopiadores.blogspot.com/2017/12/o-que-e-proporcao-aurea-e-para-que-serve.html>. Acesso em 06 de maio de 2023.

**Figura18:** Proporção áurea em Logotipo de marca



Fonte: <https://chiefdesign.com.br/proporcao-aurea/>. Acesso em 13 de maio de 2023.

#### 4.2 FIGURAS E IMAGENS ILUSTRATIVAS

Abaixo algumas imagens com detalhes referentes à proporção áurea, como pentagrama, espiral áurea, que nos ajudará a perceber que ela está presente também em elementos da natureza.

A espiral áurea está presente em diversos lugares de nossa natureza, conchas, pinhas e girassol, tal que nas pinhas as quantidades de espirais encontradas dá em um número encontrado na sequência de Fibonacci, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. No girassol vemos claramente no agrupamento das sementes o formato da espiral áurea:

**Figura 19:** Concha de caramujo



Fonte: <https://www.significados.com.br/proporcao-aurea/>. Acesso em 08 de dezembro de 2022.

**Figura 20:** Concha do Nautilus



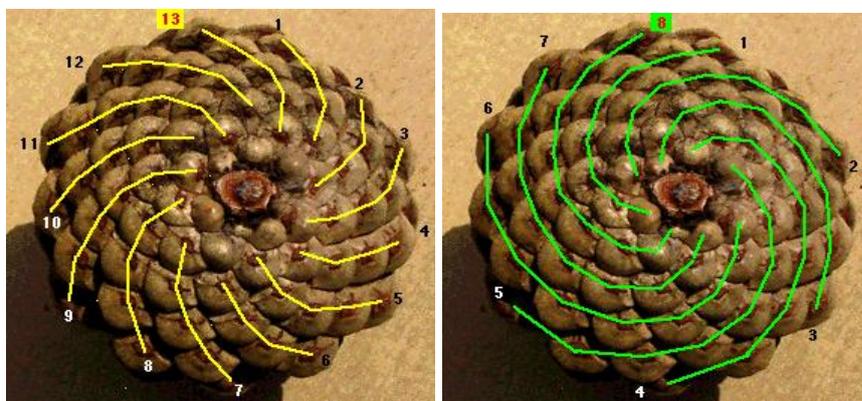
Fonte: Belini, 2015

**Figura 21:** Girassol



Fonte: <http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em 09 de dezembro de 2022.

**Figura 22:** Pinhas e espiral áurea



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mce12/fibo.html>. Acesso em 09 de dezembro de 2022.

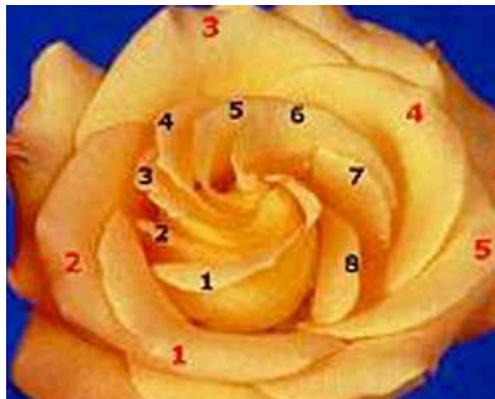
Em plantas como o couve-flor românica dá pra ver claramente o formato da espiral em sua estética e no crescimento das pétalas das flores. Já na flor de cera podemos identificar o formato do pentagrama, que contém todas as características da proporção áurea:

**Figura 23:** Couve-flor românica



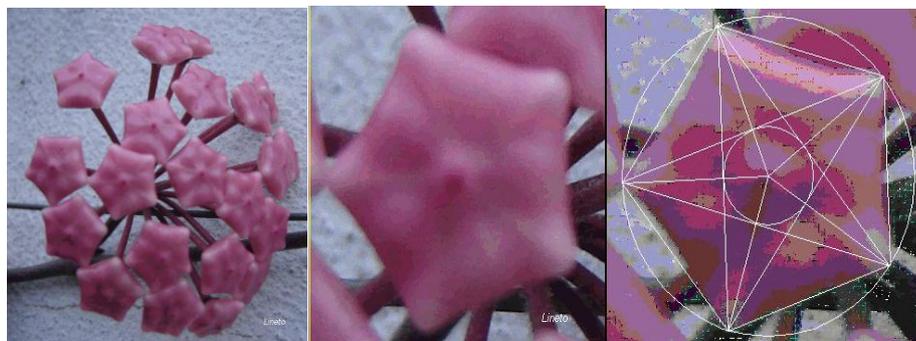
Fonte: <https://blog.usenatureza.com/a-matematica-da-natureza/>. Acesso em 09 de dezembro de 2022.

**Figura 24:** Flor



Fonte: <http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em 09 de dezembro de 2022.

**Figura 25:** Flor de cera



Fonte: [https://caraipora2.tripod.com/flor\\_de\\_cera\\_.htm](https://caraipora2.tripod.com/flor_de_cera_.htm). Acesso em 09 de dezembro de 2022.

Na misteriosa Natureza vimos que nela também está presente a misteriosa proporção áurea, seja através de plantas, animais, ou outros seres vivos. “Do mesmo modo que a proporção áurea está presente no corpo humano, pode-se observar a mesma proporção nos animais. A

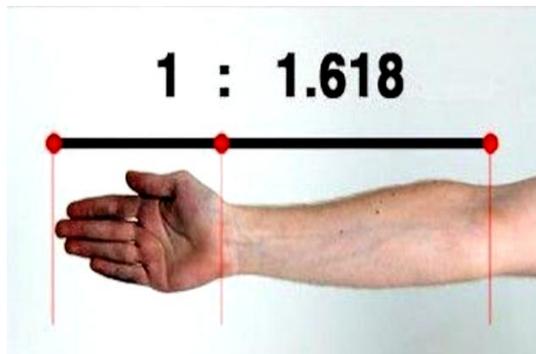
proporcionalidade nos animais varia de local, dependendo da espécie” (BEDESCHI, AMARAL e COSTA, 2009, p. 5).

**Figura 26:** Proporção no corpo humano



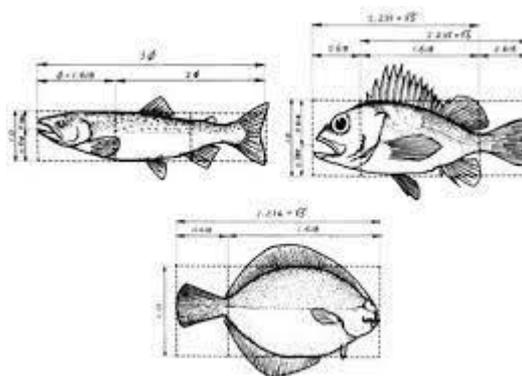
Fonte: <https://funcional.com.br/funcional/o-ser-humano-como-medida-de-excelencia/>. Acesso em 03 de maio de 2023.

**Figura 27:** Seguimento áureo no braço humano



Fonte: <https://www.paulojorge.art.br/proporcao-aurea/>. Acesso em 03 de maio de 2023.

**Figura 28:** Proporção áurea em peixes



Fonte: <https://encrypted->

[tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSA11\\_pgNPWEKBMpgr5leCXFgouphz1iN3bOqNBhgGkXPHnZzfH  
WIMW-eZYtkQ0pCBUGz8&usqp=CAU](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSA11_pgNPWEKBMpgr5leCXFgouphz1iN3bOqNBhgGkXPHnZzfHWIMW-eZYtkQ0pCBUGz8&usqp=CAU). Acesso em 06 de maio de 2023.

Assim, através de algumas formas geométricas e números encontrados na proporção áurea, podemos concluir que por meio dessas características, a Natureza representa a proporção áurea de diversas maneiras e formas.

## 5 PROPOSTAS DIDÁTICAS

Neste capítulo apresentamos três propostas didáticas com relação à proporção áurea na Matemática, nas Artes e na Natureza.

### 5.1 PROPORÇÃO ÁUREA NA MATEMÁTICA

A partir do aplicativo GeoGebra pode-se construir algumas formas geométricas que está presente na proporção áurea, tais como o pentagrama, retângulo áureo, espiral áurea e o *Olho de Deus*. Mostrando o passo a passo da atividade e o material que será preciso para desenvolvê-la. Teremos a seguinte atividade:

1. A partir da plataforma digital GeoGebra, construir as formas geométricas com proporção áurea:
  - I - Pentagrama
  - II - Retângulo Áureo
  - III - Espiral áurea
  - IV - *Olho de Deus*

O objetivo geral é trazer um conteúdo desconhecido por alguns dos alunos, realizando uma atividade individual através de uma plataforma digital GeoGebra, desenvolvendo noções sobre algumas figuras geométricas aos alunos, mostrando que as descobertas da proporção áurea são verdadeiras através do aplicativo. Como objetivos específicos, pode-se construir o pentagrama, retângulo áureo, espiral áurea e o olho de Deus, utilizando as definições da proporção áurea e a plataforma digital GeoGebra.

Os conteúdos abordados na atividade são figuras geométricas, polígonos regulares, quadriláteros e proporção áurea. Utilizar os seguintes materiais para a realização da atividade: aparelho celular ou computador.

No desenvolvimento da atividade, construir primeiramente o pentagrama. Em seguida, o retângulo áureo e a espiral áurea. Por fim, obterá o *Olho de Deus*.

### 5.2 PROPORÇÃO ÁUREA NAS ARTES

A partir da imagem de uma obra de arte, o aluno deverá criar um retângulo áureo sobre a imagem e em seguida recriar a imagem localizada dentro do retângulo que foi criado. Para

recriar a imagem, deverá criar outro retângulo áureo maior para ampliar ou menor para diminuir a imagem ou do mesmo tamanho, em uma folha em branco. A atividade:

1. Dada a imagem abaixo de uma obra de arte, crie um retângulo áureo sobre a imagem dividindo o retângulo quantas vezes quiser. Pegue uma folha em branco e faça os retângulos, maior, menor ou igual ao feito na imagem e a mesma quantidade. Por fim, recrie a imagem que está dentro dos retângulos feitos:

**Figura 29:** Monalisa



Fonte: <https://www.revistabula.com/5854-as-10-obras-de-arte-mais-importantes-de-todos-os-tempos/>.

Acesso em 09 de dezembro de 2022.

O objetivo geral da atividade é o de fazer com que os alunos possam perceber que através da proporção áurea podemos criar obras de artes, realizando uma atividade individual e trabalhar com alguma figura geométrica e conceitos da proporção áurea observando suas características e aprender a construir um retângulo áureo. O objetivo específico é criar um retângulo áureo sobre a imagem e dividi-lo quantas vezes quiser. Fazer os mesmos retângulos em uma folha em branco. Em seguida, recriar a imagem localizada nos retângulos.

Os conteúdos abordados na atividade são: figuras geométricas e conceitos da proporção áurea. Utilizar os seguintes materiais: imagem da obra de arte impressa, régua, borracha, canetas e folha.

### 5.3 PROPORÇÃO ÁUREA NA NATUREZA

A partir de medidas corporais dos alunos pode-se encontrar o número áureo. Como o ser humano é um ser vivo e está presente na natureza, algumas medidas determinarão o número

de ouro. Percebendo assim, que este número está presente também na natureza, mostrando o passo a passo da atividade e indicando materiais a serem utilizados. A atividade:

1. Preencha a Tabela a seguir e responda as questões:

Participantes (Nome)	Sexo	Idade	Altura(A)	Comprimento – do umbigo ao chão (U)	A / U	U / A

Formar grupos de cinco alunos, onde um ficará responsável por tirar as medidas de cada integrante do grupo. Preencher a Tabela com os dados solicitados, efetuar os cálculos e responder:

- a) Qual participante mais se aproximou do número perfeito?
- b) O que você conseguiu entender sobre esse número?

O objetivo geral da atividade é o de fazer com que o aluno perceba que a proporção áurea pode estar presente na natureza, através de características de um ser vivo, realizando uma atividade em grupo de cinco integrantes, trabalhando conceitos de comprimento e divisão de números decimais. Como objetivos específicos, obter as medidas solicitadas de cada participante do grupo, utilizando fita métrica, papel, lápis e borracha. Assim os seguintes conteúdos na atividade são abordados: operações com números decimais, unidades de medidas, juntamente com a proporção áurea.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notável que algumas pessoas não conhecem o tema proporção áurea. Algumas das características dessa proporção estão presentes nas próprias pessoas.

Lembrando nossas perguntas norteadoras: *Podemos identificar as formas geométricas da proporção áurea nos seres vivos? É possível identificar a proporção áurea nas Artes e na Natureza?*

Para que possamos ter um conhecimento mais amplo sobre o tema na educação básica precisamos que pesquisadores, professores e profissionais se aprofundem sobre proporção áurea cada vez mais e exponham para seus alunos, descrevendo suas características e seus conceitos, para que possamos compreender e conhecer mais a razão áurea, tornando ela um tema mais presente na vida escolar dos alunos.

Em nosso TCC procuramos mostrar algumas coisas e lugares onde podemos encontrar a proporção áurea, trazendo um pouco da história e mostrando que ela pode estar presente na Matemática, nas Artes e na Natureza. Trouxemos algumas imagens que nos permite perceber sua presença em cada um dos locais citados anteriormente.

Além destes, apresentamos três propostas didáticas a serem trabalhadas em sala de aula de Matemática. Acreditamos que nosso trabalho de TCC possa vir a possibilitar que os professores obtenham um conhecimento maior sobre a proporção áurea, fazendo com que seus alunos e outras pessoas percebam que a Matemática está presente em tudo por meio da proporção áurea.

## REFERÊNCIAS

BEDESCHI, Leonardo Paes Leme; AMARAL, Lucinea do; COSTA, Wilson José Vieira da. A Aplicação da Proporção Áurea no Processo de Desenvolvimento de Produtos. **ANAIS V SAEPRO**. Universidade Federal de Viçosa, 2009.

BARBOSA Grande: Realize Editora, 2012., Edcarlos Jose de Oliveira. História da Proporção Áurea. **ANAIS VII EPBEM**. Campina

BELLINI, Marcelo Manechine. **A Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - São Carlos, 67p, 2015.

COLLISELLI, Naiara. Matematicamente Perfeito: A Proporção Áurea no Universo. **ANAIS XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo - SP, 2016.

FRANCISCO, Samuel Vilela de Lima. **Entre o fascínio e a realidade da razão áurea**. Dissertação (Mestrado Profissional) -Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 119 f, 2017.

LAURO, Maira Mendias. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.

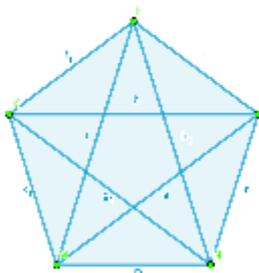
## ANEXO A: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NA MATEMÁTICA

### RESULTADO FINAL DA ATIVIDADE

#### I - PENTAGRAMA

Construção Geométrica: Construir o pentagrama através do GeoGebra.

Figura 1: Pentagrama



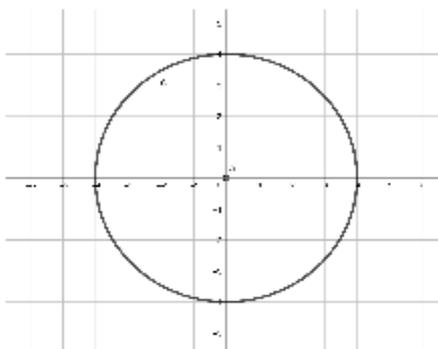
A seguir temos o passo a passo de como construir a (figura 1).

#### Desenvolvimento da atividade

O aluno deverá construir o pentagrama utilizando o aplicativo GeoGebra. Seguindo os seguintes passos na sua construção.

**1º Passo:** Marque um ponto no plano, em seguida crie uma circunferência  $c$  com centro no ponto em que escolheu e o tamanho do raio de sua escolha (Figura 1).

Figura 1: Circunferência com centro em um ponto



**2º Passo:** Trace um segmento de reta obtendo um diâmetro horizontal na circunferência  $c$  feita no (1º Passo), obtendo os pontos B e C (Figura 2).

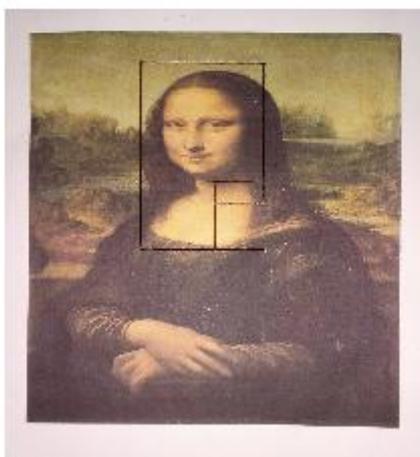
## ANEXO B: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NAS ARTES

### RESULTADO FINAL DA ATIVIDADE

#### Desenvolvimento da atividade

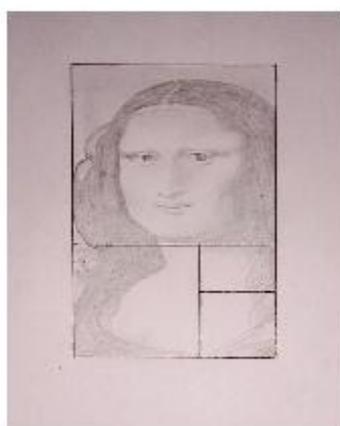
O aluno deverá criar os retângulos áureos na imagem e depois em uma folha e por fim recria a imagem dentro dos retângulos, seguindo os seguintes passos.

1º Passo: Criar os retângulos áureos sobre a imagem impressa e dividi-los quantas vezes quiser.



2º Passo: Criar os mesmos retângulos feitos sobre a imagem em uma folha em branco.

3º Passo: Recriar a imagem que está dentro dos retângulos áureos nos retângulos feitos na folha em branco.



## ANEXO C: RESPOSTAS DA ATIVIDADE NA NATUREZA

### RESULTADO FINAL DA ATIVIDADE

#### Desenvolvimento da atividade

O aluno deverá responder as perguntas feitas na atividade, preenchendo a tabela seguindo os seguintes passos.

1º Passo: Escolher os participantes, tirar as medidas pedidas na tabela e a preencha, fazendo também as divisões pedidas.

Preencha a Tabela com os dados que você recolheu

Participantes (Nome)	Sexo	Idade	Altura(A)	Comprimento – do umbigo ao chão (U)	A/U	U/A

2º Passo: Preenchida a tabela observe-a e responda às perguntas sugeridas.