



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VIII  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLOGIA E SAÚDE  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**JOSÉ ONE DE OLIVEIRA**

**CARACTERIZAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA MEIOS FRATURADOS:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E NÚMERO DE POISEUILLE**

**ARARUNA-PB  
2023**

JOSÉ ONE DE OLIVEIRA

**CARACTERIZAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA MEIOS FRATURADOS:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E NÚMERO DE POISEUILLE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em Licenciatura Plena em Física.

**Área de concentração:** Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

**Orientador:** Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior

**ARARUNA-PB  
2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

O48c Oliveira, Jose One de.  
Caracterização do fator de forma para meios fraturados: análise do perfil de velocidade e número de poiseuille [manuscrito] / Jose One de Oliveira. - 2023.  
70 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior, Coordenação do Curso de Física - CCTS. "

1. Mecânica de fluidos. 2. Engenharia mecânica. 3. Softwares. I. Título

21. ed. CDD 532

JOSÉ ONE DE OLIVEIRA

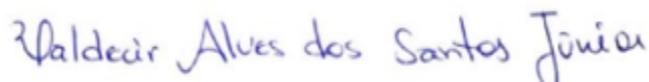
**CARACTERIZAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA MEIOS FRATURADOS:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E NÚMERO DE POISEUILLE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em Licenciatura Plena em Física.

Área de concentração: Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

Aprovada em: 20 / 06 /2023.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. Raoni Sávio de Negreiros Moreira  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho à minha mãe Elione, aos meus Avós, Manoel Paulino de Oliveira, Maria de Lourdes Macedo de Oliveira, por sempre me ajudarem sempre que precisei.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro momento, quero agradecer a minha mãe, Elione, por tudo que me proporcionou, e aos sacrifícios que foram feitos para que eu chegasse até aqui, quero agradecer ao meu avô Manoel Paulino e minha avó, Maria de Lourdes, por me ensinarem a ser o melhor de mim, e sempre querer o melhor de todos, em seguida, aos meus irmãos Janicarla, Janielly, Janilson, e Ana Cristina por sempre estarem por perto, mesmo com as arengas. Quero agradecer a todos os meus amigos da UEPB, Elaine, Merien, Beatriz, Marcelly, Victor, Dave, Otávio, Weverson, Amaral, Eduarda, Josenaldo, Alines, Cristina, Fabiolas, Joedson, Erivânia, Aldaísa, Miltinho, Daniese, e tantos outros que por falta de espaço, não dará para nomeá-los, os quais acompanharam de perto toda essa jornada, que me motivaram a chegar até o fim, e que sempre estiveram por perto para ajudar ou conversar. Quero agradecer aos amigos da vida, Yasmin, Lívia, Danilo, Raiany, Tânia, Matheus, que sempre me apoiaram e ajudaram em tempos difíceis. Só tenho a agradecer ao Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior, por toda oportunidade que me deu, pelos conselhos, ensinamentos e pela ótima orientação, que possibilitou este trabalho. Quero agradecer a todos os professores, que tiveram papel fundamental na minha formação, em especial aos Professores, Thiago, Jamilton, Josyclesio, Nara, Aline, Thaís, Gabio, César e tantos outros, por me inspirarem e me motivarem a ser um melhor profissional a cada dia. Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba, por possibilitar uma ótima formação. Agradeço ao CNPq, pelo fomento necessário que foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Estruturas como meios porosos e fraturados, são objetos de estudo há décadas em diversas áreas de pesquisa. Ter o entendimento de como o escoamento de fluidos age nesses meios pode favorecer a coleta de informações importantes, que caracterizam o escoamento, que podem ser aplicadas em diversos setores, industriais, comerciais, e entre outros. O fator de forma, se torna uma destas informações, pois a partir dele podemos caracterizar a geometria de um meio poroso. Sabe-se que existem inúmeros estudos que visam a predição desses fatores de forma, exclusivamente para escoamentos em geometrias regulares. Porém, quando tratamos de geometrias arbitrárias o número de estudos são limitados. Com esta motivação o trabalho visa apresentar um estudo do perfil de velocidade e fatores de forma, em geometrias arbitrárias que simulem fraturas ou fendas, tendo o objetivo de generalizar a obtenção destes para estas estruturas complexas. Para isso utilizaremos pesquisas recentes que caracterizam o fator de forma em termos do número de Poiseuille. O método integral baseado em Galerkin é aplicado à equação de momento linear e por seguinte apresentamos os gráficos das geometrias escolhidas. Toda a abordagem numérica e computacional é realizada nos softwares *Maple 22* e *Grapher 21*, para assim termos a obtenção de parâmetros do escoamento como, perfil de velocidade, velocidade média, número de Poiseuille e o fator de forma, que são apresentados e discutidos para cada uma das geometrias.

**Palavras-Chave:** Meio poroso fraturado; Perfil de velocidade; Fator de forma de Val; Método GBI.

## ABSTRACT

Structures such as porous and fractured media have been studied for decades in several research areas. Understanding how fluids flow in these media can facilitate the collection of important information characterizing the flow, which can be applied in various sectors, industrial, commercial, and others. The form factor is one of these pieces of information because it allows us to characterize the geometry of a porous medium. It is well known that numerous studies have aimed at predicting these shape factors, exclusively for flows in regular geometries. However, when dealing with arbitrary geometries, the number of studies is limited. With this motivation, the aim of this work is to present a study of the velocity profile and shape factors, in arbitrary geometries that simulate fractures or cracks, in order to generalize the obtaining of these for these complex structures. We will use recent research that characterizes the shape factor in terms of the Poiseuille number. The Galerkin-based integral method is applied to the linear momentum equation, and we then present the plots of the selected geometries. The entire numerical and computational approach is carried out in Maple 22 and Grapher 21 software, allowing us to obtain flow parameters such as velocity profile, mean velocity, Poiseuille number, and form factor, which are presented and discussed for each of the geometries.

**Keywords:** Fractured porous media; Velocity profile; Val form factor; GBI method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1:</b> Meio poroso	17
<b>Figura 2:</b> Meio poroso fraturado	18
<b>Figura 3:</b> Perfis de velocidade de um escoamento laminar em desenvolvimento	20
<b>Figura 4:</b> Duto com geometria genérica	22
<b>Figura 5:</b> Funções base na Geometria	33
<b>Figura 6:</b> Interface da ferramenta software <i>Grapher 21</i>	38
<b>Figura 7:</b> Interface da ferramenta software <i>Grapher 21</i> (worksheet)	38
<b>Figura 8:</b> Interface do <i>Maple 22</i>	39
<b>Figura 9:</b> Geometria de placas paralelas	41
<b>Figura 10:</b> Perfil de velocidade adimensional	41
<b>Figura 11:</b> Geometria da Fratura a	43
<b>Figura 12:</b> Curvas que representam a Fratura a	43
<b>Figura 13:</b> Pares de Curvas	44
<b>Figura 14:</b> Perfil de velocidade da fratura a	44
<b>Figura 15:</b> Geometria da Fratura b	45
<b>Figura 16:</b> Curvas que representam a Fratura b	46
<b>Figura 17:</b> Perfil de velocidade da fratura b	46
<b>Figura 18:</b> Geometria da Fratura c	47
<b>Figura 19:</b> Curvas que representam a Fratura c	47
<b>Figura 20:</b> Perfil de velocidade da fratura c	48
<b>Figura 21:</b> Geometria da Fratura d	49
<b>Figura 22:</b> Curvas que representam a Fratura d	49
<b>Figura 23:</b> Perfil de velocidade da fratura d	50
<b>Figura 24:</b> Geometria da Fratura 2f	50
<b>Figura 25:</b> Curvas que representam a Fratura 2f	51
<b>Figura 26:</b> Perfil de velocidade da fratura 2f	51

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Valores de parâmetros de interesse (placas paralelas).....	42
<b>Tabela 2:</b> Valores de parâmetros de interesses Fratura (a).....	45
<b>Tabela 3:</b> Valores de parâmetros de interesses Fratura (b).....	46
<b>Tabela 4:</b> Valores de parâmetros de interesses Fratura (c).....	48
<b>Tabela 5:</b> Valores de parâmetros de interesses Fratura (d).....	50
<b>Tabela 6:</b> Valores de parâmetros de interesses Fratura (2f).....	52
<b>Tabela 7:</b> Valores dos fatores de Forma.....	53

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	Elemento da matriz $A$ (constantes)
$A, B, C$	Matrizes
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$A_c$	Área da seção transversal dimensional/adimensional que escoia o fluido, ( $m^2$ /adimensional)
$A_p$	Área da seção transversal do poro
$b_j$	Elemento da matriz $B$ (constantes)
$c'_i$	Coefficientes constantes, elementos da matriz $C$
$d_h$	Diâmetro hidráulico dimensional, (m)
$\frac{dp}{dz}$	Gradiente de pressão, (Pa/m)
$D_h$	Diâmetro hidráulico adimensional
$f$	Fator de atrito Fanning, (adimensional)
$f_i$	Funções básicas; funções Galerkin
$fRe$	Número de Poiseuille, (adimensional)
$f_{val}$	Fator de forma de Val
$\phi$	Porosidade do meio poroso
$g$	Função de parametrização
$g_r$	Componente gravitacional
$L$	Comprimento característico, (m)
$L_h$	Comprimento hidráulico
$L[ ]$	Operador linear
$N$	Número de funções básicas (adimensional)
$p$	Pressão, (Pa)
$P$	Perímetro, (m)
$q$	Vazão que passa por um meio poroso
$Re$	Número Reynolds, (adimensional)
$S_{vgr}$	Área da superfície por unidade de volume do grão
$\tau$	Tortuosidade
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento

$u(x, y)$	Velocidade bidimensional desenvolvida na seção transversal
$\bar{u}$	Solução aproximada
$u_m$	Velocidade média, (m/s)
$u _{\Gamma}$	Valor da função $u$
$U$	Velocidade normalizada, (adimensional)
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$X, Y, Z$	Coordenadas adimensionais
$W(X, Y)$	Velocidade adimensional
$\varepsilon$	Erro diferente de zero
$\mu$	Viscosidade do fluido, (Pa·s)
$\rho$	Densidade do fluido
$\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$	Derivadas parciais (X, Y)
$\Gamma$	Fronteira e $\Omega$
$\Omega$	Domínio de estudo, subconjunto de $R^n$
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$	Parametrização das curvas

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2 OBJETIVOS .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Geral .....</b>	<b>16</b>
<i>2.1.1 Específicos.....</i>	<i>16</i>
<b>3 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>17</b>
<b>3.1 Meios porosos .....</b>	<b>17</b>
<i>3.1.1 Fraturas .....</i>	<i>17</i>
<i>3.1.2 Meios porosos fraturados.....</i>	<i>19</i>
<i>3.1.3 Camada Limite.....</i>	<i>19</i>
<i>3.1.4 escoamento completamente desenvolvido.....</i>	<i>20</i>
<i>3.1.5 Equação da quantidade de momento linear .....</i>	<i>21</i>
<b>4 PARÂMETROS ADIMENSIONAIS .....</b>	<b>23</b>
<b>4.1 Adimensionalização da equação do momento linear .....</b>	<b>23</b>
<b>5 PARÂMETROS DO ESCOAMENTO.....</b>	<b>25</b>
<b>5.1 Adimensionalização da equação do momento linear .....</b>	<b>25</b>
<i>5.1.1 Fator de atrito.....</i>	<i>25</i>
<i>5.1.2 Número de Reynolds.....</i>	<i>25</i>
<i>5.1.3 Número de Poiseuille .....</i>	<i>26</i>
<i>5.1.4 Correlação de Kozeny-Carman.....</i>	<i>26</i>
<i>5.1.5 Equação de Darcy e a vazão para meios porosos.....</i>	<i>27</i>
<i>5.1.6 Fator de forma de Val .....</i>	<i>29</i>
<b>6 MÉTODO DA INTEGRAL BASEADO EM GALERKIN .....</b>	<b>31</b>
<b>6.1 Método para encontrar funções base.....</b>	<b>33</b>
<b>6.1.1 Funções base .....</b>	<b>33</b>
<b>7 METODOLOGIA .....</b>	<b>35</b>
<b>7.1 Perfil de velocidade pelo método GBI .....</b>	<b>35</b>
<i>7.1.1 Procedimento numérico .....</i>	<i>37</i>
<i>7.1.2 Ferramenta de software Grapher 21 .....</i>	<i>37</i>

<i>7.1.3 Ferramenta de software Maple 2022</i> .....	39
<b>8 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>40</b>
8.1 Para placas paralelas.....	40
<i>8.1.1 Fraturas com geometrias arbitrarias</i> .....	<i>42</i>
<b>9 CONCLUSÕES</b> .....	<b>55</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>58</b>
<b>APÊNDICE A– ALGORÍTIMO DE CÁLCULO: PERFIL DE VELOCIDADE E NÚMERO DE POISEUILLE E OUTROS PARÂMETROS DA FRATURA (A)</b> .....	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, os estudos para compreender o comportamento do escoamento em meios porosos fraturados vêm sendo um tema de grande interesse de diversas pesquisas. Entender como um fluido pode atravessar os espaços vazios de uma determinada estrutura pode dar respostas para alguns problemas, por exemplo, na extração de matérias naturais, como gás e petróleo, e, também, casos de escoamento em reservas de água subterrâneas. Logo, um melhor entendimento do escoamento para esses meios significa compreender as melhores abordagens para lidar com problemas associados, podendo servir para diminuir gastos e buscar melhores estratégias para utilização de vantagens e desvantagens.

Um meio poroso é uma região sólida que contém uma determinada quantidade de vazios em seu meio. Estes vazios são comumente conhecidos como poros e em geral apresentam uma geometria irregular em sua seção transversal. Em relação a estes fatores, podemos perceber que a geometria influencia diretamente ao cálculo de alguns parâmetros relacionados ao escoamento de fluidos, seja em meios porosos ou meios porosos fraturados.

Como observa Shafiei (2018), torna-se explícito a importância do estudo do escoamento em fraturas. Quando falamos de meios fraturados, sabe-se que estes podem ter formações associadas a diversos fatores de criação, e estes meios possuem características específicas em relação ao escoamento em seu interior. Sabemos que os reservatórios carbonáticos são comuns e boa parte desses reservatórios são naturalmente fraturados. Pode-se destacar que cerca de 50% das reservas de petróleo convencional globais, estão em reservatórios carbonáticos fraturados. Segundo Shafiei (2018), cerca de 1/3 da produção de petróleo mundial são obtidos nos reservatórios carbonáticos fraturados sendo 1/5 nestes de óleo pesado e óleo extrapesado.

Pesquisas relacionadas à extração de gás natural através de fraturas também foram feitas no intuito de minimizar os gastos. O trabalho de Yu (2019), mostra a importância da reativação de fraturas naturais já existentes para criar redes de fraturas complexas com o objetivo de extrair o gás natural de xisto. Foram observados que ao utilizarem as fraturas mais complexas, a produtividade e extração nessas fraturas, quando comparadas ao escoamento em estruturas mais simples é muito maior.

Como abordado por Telles (2006, pg.32) as características mais comuns das fraturas, são a baixa resistência cisalhante, resistência à tração quase nula, permitindo assim ter uma alta condutividade hidráulica. Ainda aponta as necessidades de estudar esses meios tendo em vista a alta condutividade de um fluido numa matriz rochosa permite um maior fluxo, tendo em vista

que estruturas fraturadas geralmente estão conectadas entre si formando redes de fluxo. Telles (2006) ressalta a importância desses estudos quando relacionado a contaminação de aquíferos devido à algum contaminante em meios fraturados.

Trabalhos como o de Obrzut (2015), enfatiza a importância do aprofundamento nos estudos do escoamento em fraturas em áreas industriais, como em petrolíferas, onde muitos dos processos de perfuração da matriz rochosa pode desencadear um fraturamento no leito poroso, causando assim um fluxo indesejado do fluido ou gás que será coletado. O estudo do autor tem como síntese o depósito de partículas com maior massa específica preenchendo a fratura reduzindo o fluxo indesejado.

Fraturas naturais e fraturas induzidas são zonas de alta permeabilidade e dificultam o processo de fluxo direcionado, causando a perda de circulação em alguns pontos, provocando assim um maior custo e o tempo para a construção de poços de coleta. Portanto, a criação de modelos matemáticos numéricos é de grande ajuda para tentar trazer uma descrição aproximada de como ocorrerá o escoamento. Diversos estudos relacionados aos métodos numéricos surgiram para tentar modelar problemas relacionados ao escoamento de fluidos.

Um trabalho que pode ser citado foi o feito por Andreatta (2011), que estudou a influência de parâmetros geométricos e hidráulicos no comportamento do escoamento, no qual considerou alguns parâmetros como a quantidade de fraturas e distância entre elas. Com o objetivo de observar as questões relacionadas aos perfis de velocidade e como o fluido escoava. Assim, foi desenvolvido um modelo matemático e numérico para escoamento em canal parcialmente poroso e fraturado.

É possível construir alguns modelos matemáticos que descrevam o escoamento. Quando se trata de uma amostra porosa, podemos considerar um meio formado por feixes de tubos, construindo, dessa forma, uma formulação matemática plausível a partir dos conhecimentos de escoamento de Poiseuille, equação de momento linear e junto com a Lei de Darcy.

Aplicação de alguns destes conceitos em métodos numéricos, levando em conta as características dos meios fraturados, estão cada vez mais evoluídos, podendo contribuir no desenvolvimento de novos modelos matemáticos para obter previsões das características do escoamento. A utilização de modelos numéricos/ analíticos tem um papel fundamental.

A clássica equação de Kozeny-Carman é um exemplo de formulação que dá respostas sobre parâmetros como porosidade e permeabilidade de um meio poroso. Esta formulação é devido aos estudos de Kozeny (1927) e Carman (1937).

Podemos entender sobre o desenvolvimento da compreensão de escoamentos em meios foi formulado há muito tempo. Diversos trabalhos vieram contribuir para o entendimento do

escoamento em meios porosos. Yang e Aplin (1998), elaboraram um modelo de permeabilidade utilizando a forma do poro, que é formado por dois troncos de cones conectados em sua base, a distribuição do tamanho da garganta e o alinhamento dos poros são tomadas como entradas principais. Patzek e Silin (2001), desenvolveram expressões analíticas para bissetriz de cantos aleatórios que satisfazem um determinado fator de forma calculado a partir das imagens microscópicas do meio poroso e obtiveram as condutâncias hidráulicas de dutos triangulares arbitrários semi-analíticos usando mapeamento conforme a condutância dos dutos com formato de triângulos equiláteros, retângulos e elipses são calculadas analiticamente.

Srisutthiyakorn e Mavko (2015), estudaram o escoamento monofásico através de tubos com diversas seções transversais, incluindo seções circular, elíptica, quadrada e triangular equilátera, e desenvolveram uma modificação para a equação de Kozeny-Carman usando o conceito de raio aparente.

Observar que o estudo da forma do poro pode influenciar parâmetros como porosidade e permeabilidade nos permite admitir que conforme a geometria do poro se torna mais complexa maiores serão as dificuldades para encontrar estes parâmetros. Levando em conta geometrias que simulam fraturas e fendas esses parâmetros serão alterados. Pesquisas como as feitas em Santos Junior (2018,2020,2021) contribuíram imensamente para o estudo e análise do escoamento de fluidos em geometrias não convencionais, pois os mesmos apresentam parâmetros como perfis de velocidade, velocidade média, número de Poiseuille, fator de forma em dutos de seções transversais com geometrias arbitrárias. Os trabalhos citados utilizaram como base o método integral baseado em Galerkin, (GBI) para a obtenção desses parâmetros através da solução da equação do momento linear utilizando métodos numéricos.

Diante disto, este trabalho tem como intuito apresentar fatores de forma em termos do número de Poiseuille e aprofundar os estudos hidrodinâmicos em geometrias que simulam fraturas e fendas para assim obter os parâmetros de escoamento, como número de Poiseuille, perfil de velocidade, velocidade média, e o fator de forma, sendo este último baseado nos estudos do Fator de Val que permite o cálculo numérico do fator de forma para geometrias arbitrárias. Estes parâmetros são encontrados a partir de métodos numéricos. Este estudo traz novas abordagens que permitem aprofundar os conhecimentos sobre o escoamento em meios fraturados.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Geral

Neste sentido este trabalho tem por finalidade estudar o comportamento do perfil de velocidade, número de Poiseuille, fator de forma, para geometrias que simulem um meio fraturado.

#### 2.1.1 *Específicos*

- Utilizar o método integral de Galerkin para apresentar aproximações de soluções para a equação de momento linear;
- Utilizar métodos numéricos no intuito de generalizar o cálculo de parâmetros do escoamento para geometrias mais complexas;
- Apresentar perfis de velocidade e parâmetros como fator de forma, número de Poiseuille, velocidade média adimensional em estruturas fraturadas.

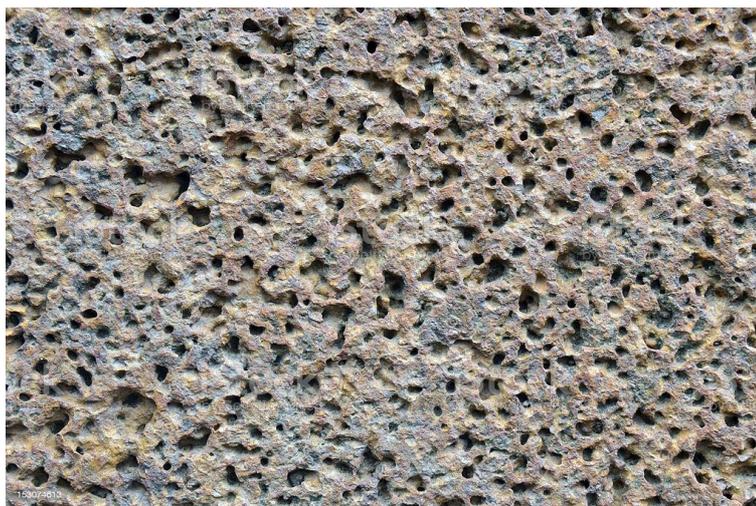
### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Para que possamos entender o escoamento em fraturas e meios fraturados, temos que compreender alguns conceitos básicos nos quais são de total importância para o estudo e desenvolvimento de questões relacionadas ao escoamento de fluidos. Assim, a próxima seção apresentamos tais conceitos fundamentais.

#### 3.1 Meios Porosos

Meios porosos são caracterizados por maciços nos quais são compostos por uma série de espaços vazios denominados de poros, sendo estes interconectados formando redes compostas aleatoriamente por estes espaços vazios, por onde um fluido pode escoar. Como é apresentado na Figura 1.

**Figura 1:** Meio Poroso



Fonte: Petropet (2017).

A passagem de um fluido através deste domínio pode ser facilitada ou dificultada dependendo das características do próprio fluido e do meio poroso (THOMAS,1999, apud ANDREATTA, 2011, p.45).

##### 3.1.1 Fraturas

As fraturas podem surgir de diversas formas, tanto em choques mecânicos, quanto em falhas geológicas. Marin (2011), define bem o que são rupturas de corpos:

Fraturas são rupturas na crosta terrestre ou de corpos rochosos sem que haja deslocamento dos blocos resultantes. Falhas geológicas ou somente falhas, são

fraturas planares em rochas onde houve deslocamento de um bloco em relação a outro. Estes deslocamentos podem ser de poucos centímetros a dezenas de quilômetros. (MARIN, 2011, p.32)

A caracterização das fraturas ocorre de diversas maneiras. Temos que a geometria e as dimensões de fraturas são variadas, sendo estas criadas de diversas formas. Um dos motivos para a geração de fraturas pode estar ligado a fenômenos tectônicos e outros, como erosão e choques mecânicos como exemplifica Marin (2011). Sendo assim, suas caracterizações dependem de diversos fatores, e estas podem ter grandes variações em seu tamanho, podendo ser muito pequenas, a fraturas muito grandes tendo quilômetros de extensão. Outras características abordadas pelo autor são alguns parâmetros que caracterizam fraturas individuais. Podemos destacar o tamanho da abertura da fratura, rugosidade das paredes, comprimento, orientação, densidade, conectividade e estabilidade. Estes parâmetros estão diretamente ligados com as diferentes formas na qual o fluido vai escoar, tendo escoamento mais facilitado ou dificultado dependendo das características do meio.

**Figura 2-** Meio Poroso Fraturado



Fonte: Thiago Luíz de Feijó, 2016. Disponível em:< <http://dx.doi.org/10.21168/rbrh.v21n1.p11-24> > . Acesso em: 01 de junho de 2023.

Os grupos e famílias de fraturas, quando interligados num meio poroso fraturado, podem ser de maior preferência ao escoamento dos fluidos, tendo maior fluxo hidráulico, sendo considerados locais de maior permeabilidade que superam o escoamento num meio poroso. Sendo assim, estudos mais aprofundados são extremamente necessários para um melhor entendimento desse tipo de escoamento.

### ***3.1.2 Meios Porosos Fraturados***

Como apresenta Paitan (2013), podemos definir um meio fraturado como sendo uma série de fraturas que se interligam em um meio contínuo onde as fraturas podem se cruzar, sendo que estas, estão agrupadas em famílias de fraturas.

As famílias de fraturas e as fraturas em meios fraturados podem estar interconectadas podendo então formar uma rede de escoamento. Telles (2011), mostra que:

Nos meios fraturados, as fraturas são entrecortadas por diversas famílias de fraturas, cada uma com suas características que lhes são particulares. Em geral o fluxo, nestes meios, não ocorre somente em uma única fratura ou família de fraturas, mas sim em uma rede de fraturas que se conectam e que fazem com que o fluido passe de uma fratura para outra. (TELLES,2011, pg.28).

Quando se trata de escoamento de fluidos vemos que as fraturas são caminhos preferencias ao escoamento do fluido por terem alta condutividade hidráulica. Diversos artigos culminam e mostram os benefícios e os malefícios dessa alta condutividade hidráulica. Em petrolíferas podemos notar que a extração de petróleo e gás podem ser facilitadas. Segundo Telles (2011):

O óleo, a água e o gás foram formados, por diversos processos, e estão armazenados na matriz porosa. A presença das fraturas nestes reservatórios exerce um papel fundamental no que diz respeito à exploração do petróleo. Nos reservatórios, a matriz rochosa apresenta altos valores de armazenamento, no entanto baixo valor de condutividade hidráulica. Já as fraturas, estas apresentam condutividade hidráulica altíssima, dependendo da abertura hidráulica. (TELLES 2011, p.30-31).

### ***3.1.3 Camada Limite***

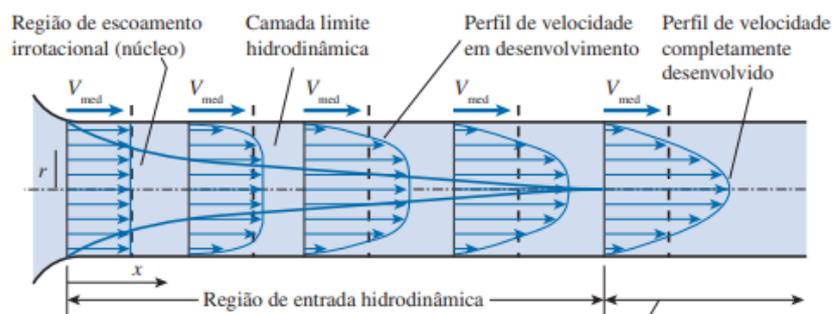
Quando falamos de escoamento temos o conceito de camada limite que é dada por uma região, na qual o fluido está totalmente confinado. As forças viscosas que atuam nas camadas laminares de um fluido com fluxo completamente desenvolvido são zero quando aderidas a superfície em que esse fluido está escoando. Se tomarmos como superfície um duto na qual o fluido escoar nas paredes, a velocidade desse fluido será zero, e como se trata de um escoamento laminar, as interações viscosas das camadas adjacentes à superfície na qual o fluido está acabam por consequente diminuindo a velocidade deste por razão da tensão cisalhante do fluido. Segundo (ÇENGEL, 2012)

A camada aderente à superfície atrasa a camada de fluido adjacente por causa das forças viscosas entre as camadas de fluidos, que atrasam a camada seguinte, e assim sucessivamente. Portanto, a condição de não deslizamento é responsável pelo desenvolvimento do perfil de velocidade. A região do escoamento adjacente à parede em que os efeitos viscosos (portanto, gradientes de velocidade) são significativos é chamada camada limite. (ÇENGEL, 2012, pg.469)

### 3.1.4 Escoamento completamente desenvolvido

O escoamento completamente desenvolvido de um fluido incompressível e com características constantes numa região completamente desenvolvida de maneira laminar, sendo cada partícula que se movimenta no fluido apresentando uma movimentação constante na axial  $z$ . O fluido é geralmente confinado por uma superfície, e esta, influencia sua velocidade, que varia de forma pontual, sendo menores quando próximas das paredes do duto, e maiores no centro devido às forças viscosas e tensão de cisalhamento. A Figura 3, mostra o desenvolvimento do perfil de velocidade entre placas paralelas.

**Figura 3:** Perfil de velocidade de um escoamento laminar em desenvolvimento



Fonte: ÇENGEL, 2012, p 469.

Quando tratamos do escoamento em dutos de geometria circular, vemos que o perfil de velocidade é dado de forma parabólica, isso ocorre pela influência da geometria do duto em relação à tensão cisalhante que atua no fluido. Nesse movimento o fluido está em escoamento laminar, não tendo variação do movimento das partículas no eixo perpendicular ao movimento do fluido. Vale destacar que a geometria do perfil de velocidade irá variar dependendo da região de abertura desse conduto, ou seja, quanto mais complicada a região de geometria de um conduto por onde o fluxo passa, maior será a dificuldade de descrever as características desse escoamento, pois teremos um perfil de velocidade cada vez mais complexo. Então, sabendo

que em relação ao eixo axial  $z$  será sempre constante invariável, podemos descrever de forma que:

$$\frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} u(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, z) = u(x, y). \quad (2)$$

Neste trabalho temos por objetivo estudar o perfil de velocidade e suas propriedades em geometrias arbitrárias como fraturas, logo, a utilização de métodos numéricos para o cálculo da equação do momento linear são indispensáveis, dada a complexibilidade destes escoamentos.

Para melhor compreensão, utilizaremos o conceito de velocidade média do fluido, sendo esta, a velocidade em uma seção transversal da geometria escolhida:

$$u_m = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} u(x, y) dA_c, \quad (3)$$

onde  $u(x, y)$  é a velocidade local,  $A_c$ , é dada pela área em que o fluido escoar.

### 3.1.5 Equação da quantidade de movimento linear

Quando falamos da equação do momento linear, estamos falando da equação de Navier-Stokes, sendo esta, muito importante não só para o estudo do escoamento de fluidos, mas em diversas outras áreas. Esta equação é uma equação parcial de segunda ordem, conhecida também como equação da continuidade, seguindo da seguinte maneira para:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_r + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (4)$$

Onde  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , é o gradiente de pressão,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $g_r$  é a componente gravitacional, e  $\mu$  a viscosidade do fluido sendo então esta, a componente  $x$  da equação de Navier-Stokes incompressível. Nota-se que teremos equações equivalentes para as outras duas componentes,  $y$ , e  $z$ .

Ao Manipularmos a equação, considerando apenas as velocidades em relação as componentes de  $x$  e  $y$ , podemos notar que ao longo do eixo  $z$ , não teremos variação na velocidade, logo, devemos considerar os termos de  $g_r$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ , sendo zero, desconsiderando os efeitos gravitacional. Portanto,

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Desta forma teremos a seguinte igualdade:

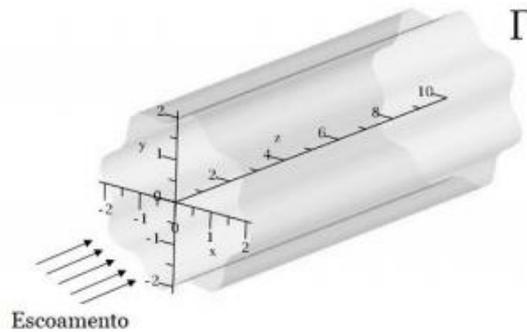
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = c_1, \quad (6)$$

Com  $\mu$  sendo a viscosidade do fluido,  $u = u(x, y)$  sendo a velocidade local do fluido e  $p$  a pressão, tendo a condição de fronteira dada por:

$$u(x, y) = 0 \text{ em } (x, y) \in \Gamma. \quad (7)$$

Temos  $x$  e  $y$  sendo as coordenadas da seção transversal do conduto com a direção do escoamento do fluido ao longo do eixo axial  $z$ , e devemos impor a condição que  $c_1 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$ , é uma constante e não dependendo de  $x$  e  $y$  como mostra na Figura 4.

**Figura 4:** Duto com geometria genérica



Fonte: SANTOS JÚNIOR, 2018. p. 50

## 4 PARÂMETROS ADMENSIONAIS

Nas análises dimensionais uma grandeza ou número será adimensional quando não apresentar nenhuma unidade física que o defina. Os números adimensionais podem ser definidos como produtos ou quocientes de quantidades onde as unidades se cancelam. Dependendo do seu valor, estes números possuem um significado físico que caracteriza determinadas propriedades para alguns sistemas (WHITE, 2010 apud SANTOS JUNIOR, 2018).

### 4.1 Adimensionalização da equação do momento linear

Para trabalhar com as equações adimensionais considere as seguintes variáveis:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad W(X, Y) = -\frac{u(X, Y)}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp(z)}{dz}} \quad \text{e} \quad U = \frac{u}{u_m} = \frac{W}{W_m}, \quad (8)$$

na qual temos o comprimento característico sendo dado por  $L$ ,  $u_m$  é a velocidade média do fluido,  $W$  sendo a velocidade adimensional local,  $W_m$  é a velocidade média adimensional e  $U$  é a velocidade adimensional normalizada.

$$u = u(x, y) = u(x(X), y(Y)) \quad \text{e} \quad W = W(X, Y).$$

Logo podemos observar:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial u}{\partial X} = -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right] = -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} L \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = -\frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right],$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = \frac{-1}{L \frac{dp}{dz}} L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-1}{\frac{1 dp}{\mu dz}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Da mesma forma teremos que para componente de  $Y$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = \frac{-1}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Quando substituindo as Equações (9) e (10) na Equação (6), temos:

$$-\left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (11)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} = -1, \quad (12)$$

Com região de fronteira sendo dada por:  $W(X, Y) = 0$  em  $(X, Y) \in \Gamma$ .

## 5 PARÂMETROS DO ESCOAMENTO

### 5.1 Diâmetro hidráulico

Quando tratamos de escoamento em regiões de geometria não circular, utiliza-se o diâmetro hidráulico dado por:

$$d_h = \frac{4A_c}{P}, \quad (13)$$

onde  $A_c$  é a seção transversal do duto e  $P$  é o perímetro molhado. O fator 4 é introduzido para que o diâmetro hidráulico seja igual ao diâmetro do duto para uma seção circular (ÇENGEL, 2012 apud SANTOS JÚNIOR, 2018). Essa equação pode ser utilizada para o cálculo do diâmetro hidráulico de geometrias mais complexas que não sejam um duto.

#### 5.1.1 Fator de atrito

Outro dos parâmetros de fluxo mais utilizado é o fator de atrito, também referido como o fator de atrito Fanning  $f$ . Este é dado pela razão entre a densidade específica do fluido com a tensão cisalhante que o fluido sofre, vinda da energia cinética (FOX, 2000). Sendo:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{u_m^2}{2}}, \quad (14)$$

onde  $\tau_w$  representa a tensão de cisalhamento,  $u_m$  é a velocidade média e  $\rho$  é a densidade. (EBADIAN, 1998 apud SANTOS JÚNIOR, 2018).

#### 5.1.2 Número de Reynolds

Como descrito por Çengel (2012, pg.279), o número de Reynolds, criado pelo engenheiro e físico inglês Osborne Reynolds, considera que o regime do escoamento depende da relação entre as forças inerciais e as forças viscosas de um fluido. Sendo definido por:

$$Re = \frac{\rho \cdot u_m \cdot d_h}{\mu}, \quad (15)$$

onde  $d_h$  o diâmetro hidráulico que descreve a geometria do campo do escoamento,  $u_m$  a velocidade média do escoamento,  $\rho$  a massa específica do fluido e  $\mu$  a viscosidade do fluido.

Como afirma Çengel (2012, pg.279), quando temos números de Reynolds Grandes, as forças inerciais são grandes quando relacionadas às forças viscosas, não podendo assim evitar as flutuações aleatórias do fluido. Neste caso teremos o que chamamos de escoamento

turbulento. Já em outro caso, quando temos números de Reynolds pequenos ou moderados, teremos que as forças viscosas superam as flutuações, assim o fluxo do fluido se dá em escoamento laminar.

Quando temos escoamento turbulento temos número de Reynolds crítico, sendo que este é diferente para diferentes tipos de geometrias. Logo, quanto maior a complexibilidade da geometria, maior será a dificuldade de prever o número de Reynolds crítico.

### 5.1.3 Número de Poiseuille

O número de Reynolds, para fluxo não acelerado, é inadequado, uma vez que a densidade não desempenha papel no escoamento (CHURCHILL,1988 apud NEVES, 2020). Quando temos uma região com o escoamento completamente desenvolvido, comumente utilizamos  $fRe$ , também conhecida como número de Poiseuille expresso pela seguinte equação:

$$fRe = -\frac{c_1 d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2u_m}, \quad (16)$$

sendo  $c_1$  é a constante da Equação (6).

O número de Poiseuille é uma constante de proporcionalidade entre o gradiente de pressão e a velocidade média. Desta forma, se considerarmos um determinado fluido escoando com velocidade invariante em dutos de mesmo diâmetro hidráulico, o gradiente de pressão aumenta se o número de Poiseuille aumentar (NEVES, 2020)

Podemos destacar que ao trabalharmos com escoamento, o número de Poiseuille tem mais influência que o fator de atrito de Fanning, tendo em vista que o número de Poiseuille independe das propriedades do fluido ou tamanho do duto, como observado em Shah e London (1988).

### 5.1.4 Correlação de Kozeny-Carman

Para trabalharmos com a definição de fator de forma, devemos observar a importância das formulações matemáticas de Kozeny-Carman, que buscaram entender como funciona o escoamento em meios porosos. Entender como a condutividade hidráulica pode ser prevista é essencial, existindo muitos estudos quem trazem diversas abordagens para resolução de problemas que o envolvem.

Vemos que os estudos de Kozeny trazem uma relação entre duas grandezas de grande importância no estudo do escoamento de fluidos em meios porosos, sendo estas a permeabilidade e porosidade. De acordo com Silva Júnior (2021) a equação foi proposta por Kozeny e ajustada por Carman.

A correlação de Kozeny-Carman, permite observar como é o comportamento da permeabilidade rochosa em função da porosidade. Podemos observar então que a porosidade tem papel relevante, sendo responsável na forma que o fluido é retido. Como argumenta Chapuis et al. (2023) a equação do Kozeny-Carman prevê bem a condutividade hidráulica saturada na maioria dos solos.

A equação de Kozeny-Carman pode ser dada segundo Civan (2015) por:

$$K = \frac{1}{F_{KC} \tau S_{vgr}^2} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad (17)$$

onde  $F_{KC}$  é o fator de forma de Kozeny-Carman,  $\tau$  a tortuosidade e,  $S_{vgr}$ , a superfície específica por unidade de volume de grão.

O fator de forma é uma medida de como a geometria de um meio poroso afeta o fluxo de fluidos através dele. Vale destacar que na mecânica de fluidos o fator de forma é utilizado em equações como na lei de Darcy e na equação de Navier-Stokes para descrever como são as propriedades geométricas do meio poroso, como tamanho, forma e distribuição dos poros, e como isso afeta a permeabilidade.

### **5.1.5 Equação de Darcy e a Vazão para meios porosos**

Ao admitirmos algumas relações que dizem respeito ao escoamento de fluidos em meios porosos, podemos assim fazer diversas considerações que terão como intuito generalizar os estudos do escoamento de fluidos e seus parâmetros para qualquer geometria.

O trabalho de Silva Júnior (2021), apresenta novas formas e manipulações da equação de vazão de um fluido levando em conta um meio poroso.

A generalização da equação de permeabilidade de Poiseuille para um meio poroso levando em conta um único poro de geometria qualquer, pode ser dado como:

$$q = n A_p u_m, \quad (18)$$

onde  $q$  é a permeabilidade medida em termos de vazão,  $A_p$  é a área da seção transversal do poro e  $u_m$  é a velocidade média das partículas, e  $n$  é o número de canais de mesma geometria que definem a vazão nesse meio poroso. Para isso admitiu-se a hipótese de que a área de toda região vazada é uma soma de  $n$  áreas dadas pelo poro específico.

Segundo Rosa et al. (2006), conforme citado por Silva Júnior (2021), se considerarmos a equação de Darcy para a permeabilidade, sendo dada em termos de vazão, teremos então que a vazão é proporcional a área aberta ao fluxo ao diferencial de pressão, inversamente proporcional ao comprimento do meio poroso e da viscosidade. A lei de Darcy em meios porosos pode ser descrita pela seguinte equação:

$$q = \frac{K A_c}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right), \quad (19)$$

no qual,  $k$ , é a constante de permeabilidade efetiva de Darcy, que depende das propriedades da rocha,  $A_c$ , é a área da seção transversal.

Segundo Silva Júnior (2021), pode-se destacar que ambas as equações possuem distinções em suas abordagens, porém a Equação (18), leva em conta a vazão dependendo da geometria do canal e da área porosa. Já na Equação (19) pode-se observar que a vazão não depende da área porosa, mas sim de toda a seção transversal que inclui as partes sólidas do meio. Embora relativas as formas de utilização dessas equações, considerou-se que essas vazões são iguais numericamente, tendo então:

$$n A_p u_m = \frac{k A_c}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right). \quad (20)$$

Isolando a permeabilidade efetiva  $k$ , e substituindo o valor de  $W_m$  obtemos:

$$k = \frac{n A_p}{A_c} L^2 W_m. \quad (21)$$

Utilizando as definições matemáticas de porosidade, tortuosidade, volume poroso e volume total da rocha, Silva Júnior (2021) obteve a seguinte equação:

$$k = \frac{1}{F_{KC} \tau S_{vgr}^2} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad (22)$$

onde  $\phi$  é porosidade expressa como fração do volume  $F_{KC}$  é o fator de forma de Kozeny-Carman,  $S_{vgr}$ , a superfície específica por unidade de volume de grão e  $\tau$  sendo a tortuosidade.

Obtendo o fator de forma sendo expresso como:

$$F = \frac{A_p^2}{L^2 W_m P^2} = \frac{1}{L^2 W_m} \frac{d_h^2}{16}. \quad (23)$$

### 5.1.6 Fator de Forma de Val

Quando levamos em conta os estudos do fator de forma, observamos que em grande parte deles, o fator de forma é determinado para geometrias comportadas. Porém ao estudarmos meios porosos com geometrias arbitrárias complexas, podemos observar que a correlação de Kozeny-Carman, não pode ser apresentada de maneira simples, tendo em vista que quando aumentamos a complexidade da geometria, maior será a dificuldade de encontrá-la levando em conta as propriedades intrínsecas da geometria.

Silva Junior (2021), afirma que o fator de forma é uma propriedade que aproxima a relação entre a permeabilidade e a porosidade, tendo em vistas as propriedades geométricas dos canais porosos, logo entendemos que ao lidarmos com o estudo do escoamento de fluidos em um meio poroso fraturado, a utilização de meios matemáticos que usam exclusivamente a geometria da seção transversal no qual o fluido percola é essencial.

Portanto, através de uma nova abordagem numérica para o fator de forma tem-se o objetivo de generalizar o cálculo deste, levando em conta estruturas geométricas arbitrárias. Portanto, se substituirmos a velocidade média dada na Equação (8) na equação (16) que corresponde ao número de Poiseuille, obteremos a seguinte relação:

$$f R_e = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2 \left( - \frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz} W_m \right)} = \frac{d_h^2}{2 L^2 W_m}. \quad (24)$$

A seguinte relação pode ser observada:

$$F = \frac{1}{L^2 W_m} \frac{d_h^2}{16} = \frac{1}{L^2 W_m} \frac{d_h^2}{2(8)}. \quad (25)$$

Teremos o fator de forma dado em termos do Número de Poiseuille, que chamamos de Fator de forma de Val ( $F_{val}$ ):

$$F_{val} = \frac{f R_e}{8}. \quad (26)$$

Podemos reescrever a clássica equação de Kozeny-Carman em função do fator de forma de Val:

$$K = \frac{1}{\frac{fRe}{8} \tau S_{vgr}^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}. \quad (27)$$

A importância do fator de forma de Val, ( $F_{val}$ ), se dá pela generalização do cálculo do fator de forma, podendo assim adaptar-se ao cálculo do fator de forma para geometrias que simulem fraturas ou fendas, desde que seja dado o valor de Poiseuille.

## 6 MÉTODO INTEGRAL BASEADO EM GALERKIN

Considere um caso geral de uma equação diferencial da forma

$$L[u(x)] = g(x), \quad x \in \Omega. \quad (28)$$

Com condição de contorno sendo dada por:  $u(\Gamma) = u|_{\Gamma}$  com  $\Gamma$  fronteira de  $\Omega$ , onde  $L[ ]$  o operador Linear,  $g$  uma função qualquer de  $x$  e  $u|_{\Gamma}$  é o valor da função  $u$  na fronteira de  $\Omega$ . Procura-se uma solução aproximada para o problema na forma:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x), \quad (29)$$

onde  $f_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), é um conjunto de funções base escolhido intuito de satisfazer condições de fronteira, considerando então  $\bar{u}$  sendo o somatório dessas funções base. Podemos notar, devemos achar apenas as constantes determinadas nos  $c_i$ 's.

Para que  $\bar{u}(x)$  seja uma solução aproximada da equação (15), tendo em vista que as funções  $f_i(x)$ , São linearmente independentes. Para que  $\bar{u}(x)$  necessitamos que:

$$L[\bar{u}(x)] - f(x) = \varepsilon, \quad (30)$$

no qual temos que  $L[\bar{u}(x)]$ , é o operador linear aplicado em  $u(x)$ ,  $g(x)$  é uma dada função qualquer e  $\varepsilon$  é diferente de zero. Quanto mais próximo de zero for o erro  $\varepsilon$ , ou seja  $\bar{u}(x)$  se aproxima de  $u(x)$ .

Logo, pelo método da integral baseado em Galerkin, sabemos que ao integrarmos, na região que denominamos de  $\Omega$  (uma região arbitrária, que depende do domínio que estiver), essa integral será zero. Logo:

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varepsilon d\Omega = 0 \quad \forall i. \quad (31)$$

Portanto:

$$\int_{\Omega} f_i(x) \{L[\bar{u}(x)] - g(x)\} dx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Desta forma, chega-se ao sistema de equações, no qual podemos substituir a definição para  $\bar{u}(x)$ , e, assim, poderemos encontrar as constantes  $c_i$ 's.

$$\int_{\Omega} f_i(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right] - g(x) \right\} dx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (33)$$

Para poder exemplificar o modelo, tomaremos apenas duas funções bases, logo com  $n = 2$ , teremos,  $\{f_1(x), f_2(x)\}$ , portanto podemos então redefinir a Equação (33):

$$\int_{\Omega} f_1(x) \{L[\sum_{i=1}^2 c_i f_i(x)] - g(x)\} dx = 0, \quad (34)$$

e

$$\int_{\Omega} f_2(x) \{L[\sum_{i=1}^2 c_i f_i(x)] - g(x)\} dx = 0, \quad (35)$$

que conduz a:

$$c_1 \int_{\Omega} f_1(x) L[f_1(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} f_1(x) L[f_2(x)] dx = \int_{\Omega} f_1(x) g(x) dx \quad (36)$$

E

$$c_1 \int_{\Omega} f_2(x) L[f_1(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} f_2(x) L[f_2(x)] dx = \int_{\Omega} f_2(x) g(x) dx \quad (37)$$

Na qual temos na forma matricial pode ser escrita:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1(x) L[f_1(x)] dx & \int_{\Omega} f_1(x) L[f_2(x)] dx \\ \int_{\Omega} f_2(x) L[f_1(x)] dx & \int_{\Omega} f_2(x) L[f_2(x)] dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1(x) g(x) dx \\ \int_{\Omega} f_2(x) g(x) dx \end{bmatrix} \quad (38)$$

Transforma-se numa forma matricial sendo dada por:

$$AC = B, \quad (39)$$

com os coeficientes das matrizes  $A$  e  $B$  dados respectivamente por:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} f_i(x) L[f_j(x)] dx, \quad (40)$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} f_i(x) g(x) dx, \quad \forall i, j = 1, 2. \quad (41)$$

A partir das equações, Equação 40 e Equação 41, pode-se encontrar os valores para a expressão de  $\bar{u}(x)$ .

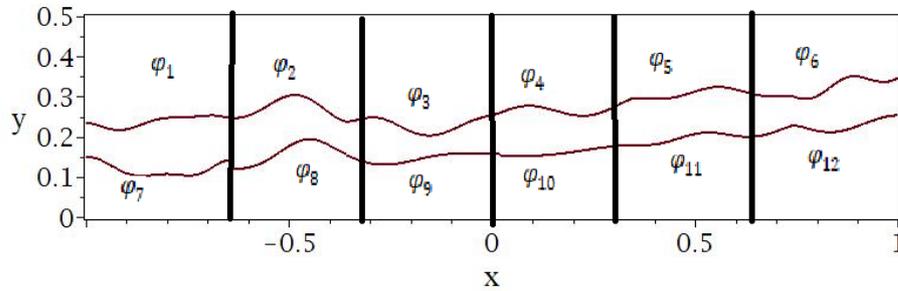
### 6.1 Método Para encontrar funções base

As funções base são um conjunto de funções nas quais se mantém linearmente independentes, e satisfazem as condições de contorno da geometria, sendo assim essas funções base se anulam na fronteira da geometria.

### 6.1.1 Funções base

Tendo uma região limitada por duas ou mais curvas,  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ , como podemos observar na Figura 5. Sendo esta, a secção transversal que representa a geometria de uma dada fratura.

**Figura 5:** Funções base na geometria



Fonte: autoria própria (2023)

Logo podemos definir o primeiro membro do conjunto de funções base, como a multiplicação de cada uma das curvas que compõem a geometria da fratura

$$f_1 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6 \varphi_7 \varphi_8 \varphi_9 \varphi_{10} \varphi_{11} \varphi_{12}, \quad (42)$$

Essa função satisfaz a condição do contorno do problema, sendo este o próprio contorno. Logo as demais funções podem ser encontradas fazendo a multiplicação da  $f_1$  por potências dos elementos do sistema de coordenadas escolhido, fazendo assim, que cada função seja linearmente independente. Logo se escolhermos o sistema de coordenadas cartesianas temos:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 x & f_5 &= f_1 y^2 & f_8 &= f_1 x y^2 \\ f_3 &= f_1 y & f_6 &= f_1 x y & f_9 &= f_1 x^2 y^2 \dots \\ f_4 &= f_1 x^2 & f_7 &= f_1 x^2 y & f_{10} &= f_1 x^3 \end{aligned} \quad (43)$$

E desta forma temos o conjunto de funções base,  $\{f_i\}_{i=1..N}$  que compõe a solução do problema.

## 7 METODOLOGIA

A utilização do método da integral baseado em Galerkin teve como intuito a resolução da equação do momento linear e a obtenção do perfil de velocidade e outros parâmetros de escoamento que um fluido apresenta para regiões com geometrias arbitrárias que simulem fraturas ou fendas.

Foram feitas algumas considerações para o estudo, o escoamento do fluido em regime laminar, completamente desenvolvido, regime permanente, newtoniano desconsiderando a dissipação viscosas e as propriedades químico-físicas são consideradas constantes.

O estudo será dado em uma região, no qual o bordo terá geometria que simule uma fratura ou fenda. Os parâmetros do escoamento serão atribuídos ao escoamento do fluido especificamente nessa seção transversal.

### 7.1 Perfil de velocidade pelo método GBI (Integral method based on Galerkin)

Temos que a solução abaixo é dada por:

$$W = \sum_{n=1}^N c_n f_n(X, Y), \quad (44)$$

onde  $f_n \in \{f_j\}_{j=1..N}$  um conjunto de funções bases e os  $c'_n$ s são constantes a serem avaliadas.

Logo considerando a equação (44), e substituindo a equação (12) obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \sum_{j=1}^N c_j f_j(X, Y) \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \sum_{j=1}^N c_j f_j(X, Y) \right) = -1, \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j \left( \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) = -1. \quad (45)$$

Ainda podemos simplificá-la para:

$$\sum_{j=1}^N c_j \nabla^2 f_j(X, Y) = -1, \quad (46)$$

onde  $\nabla^2$ , é o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \quad (47)$$

Aplicando o método GBI na Equação (46), obtemos o seguinte:

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[ \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j dA_c \right] = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i dA_c. \quad (48)$$

Podemos assim escrever a equação na forma matricial como:

$$AC = B, \quad (49)$$

onde as matrizes  $A$  e  $B$  têm elementos:

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j(X, Y) dA_c, \quad (50)$$

e

$$b_i = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i(X, Y) dA_c. \quad (51)$$

sendo  $A_c$  a área adimensional da seção transversal do duto. Logo a matriz  $C$ , representada pelos coeficientes  $c_n$ , é dada por

$$C = A^{-1}B, \quad (52)$$

No qual  $A^{-1}$  é a inversa da matriz  $A$ . Tendo assim a multiplicação por  $\frac{1}{A_c}$  é acrescentada somente para fins de computação numérica.

A definição padrão para a velocidade média é usada para calcular  $W_m$ , assim:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{A_c} \int_{A_c} W dA_c, \\ &= \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \sum_{j=1}^N c_j f_j dA_c, \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N c_j \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_j dA_c A_c . \quad (53)$$

assim podemos escrever:

$$W_m = \sum_{j=1}^N c_j b_j , \quad (54)$$

desta forma a velocidade adimensional normalizada  $U$  é dada também por:

$$U = \frac{W}{W_m} = \frac{u}{u_m} = \frac{C_f R_e}{2 \frac{d_h^2}{L^2}} \sum_{j=1}^N d_j f_j . \quad (55)$$

Logo, podemos então utilizar o número de Poiseuille dado anteriormente como:

$$fRe = -\frac{c_1 d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2 \left( -\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz} W_m \right)} = \frac{D_h^2}{2W_m} . \quad (56)$$

### 7.1.1 Procedimento Numérico

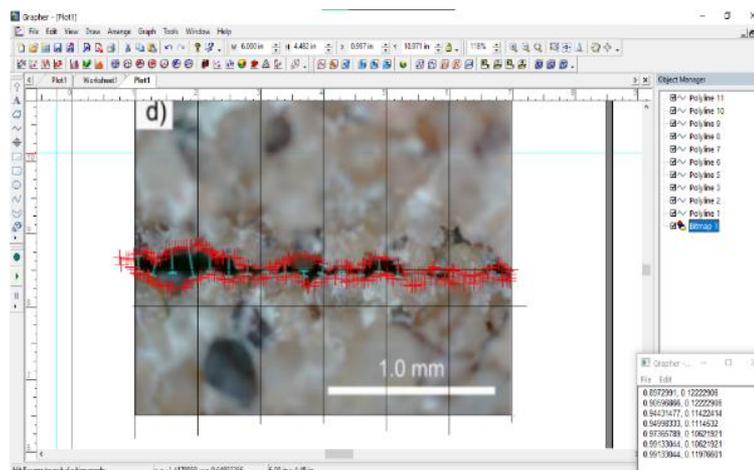
A utilização de softwares numéricos para resolução de problemas ligados ao escoamento de fluídos está cada vez mais comum, tendo em vista que mesmo sendo aproximações dos acontecimentos hidrodinâmicos, os dados encontrados favorecem um maior entendimento do problema, e acrescenta uma maior base para trabalhos nessa área de pesquisa.

Utilizaremos análises numéricas, através de ferramentas computacionais, no qual dão base para todo o estudo feito neste trabalho. Assim, a utilização do *Maple 22* e *Grapher 21*, são indispensáveis para esquematizar e obter os resultados do escoamento de fluidos para regiões fraturadas.

### 7.1.2 Ferramenta de software Grapher 8

A ferramenta *Grapher 21*, foi essencial para a construção do problema e parametrização das curvas e geometria das fraturas estudadas. Através dela conseguimos traçar determinadas curvas para que conjuntamente do *Maple 22*, encontrar a solução aproximada para a equação do momento linear, o perfil de velocidade. As curvas de cada fratura foram obtidas através de aproximações polinomiais de até décima ordem, para que tivesse uma maior aproximação com a curva real. Cada fratura será dividida em 12 curvas, sendo estas 6 superiores e 6 inferiores, limitadas sempre pelos mesmos limites de integração.

**Figura 6:** Interface da ferramenta software *Grapher 21*



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Após a utilização da ferramenta de escolha de pontos, que nos permite obter cada ponto da geometria nas coordenadas  $x$  e  $y$ , os mesmos são organizados em uma worksheet, e posteriormente a plotagem das aproximações do bordo por funções polinomiais. O grau de cada polinômio pode ser ajustado até grau dez, para que melhor se adapte à geometria. Como mostra a Figura 7.

**Figura 7:** Interface da ferramenta software *Grapher 21* (worksheet)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	-0.9977802	0.4275996													
2	-0.9885012	0.4275996													
3	-0.9755927	0.4334305													
4	-0.9567037	0.4363460													
5	-0.9600444	0.4421769													
6	-0.9533851	0.4475219													
7	-0.9448761	0.4562682													
8	-0.9359970	0.4650146													
9	-0.9271180	0.4679300													
10	-0.9204639	0.4769764													
11	-0.9071402	0.4825073													
12	-0.8938217	0.4737609													
13	-0.8871624	0.4620991													
14	-0.8760636	0.4450923													
15	-0.8538661	0.4305151													
16	-0.8333279	0.4217697													
17	-0.8253792	0.4101989													
18	-0.8142804	0.404276													
19	-0.8054014	0.4013605													
20	-0.7965224	0.4013605													
21	-0.7743248	0.3867833													
22	-0.7543470	0.404276													
23	-0.7410285	0.4071915													
24	-0.7214206	0.4217687													
25	-0.7081921	0.4421769													

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Com a parametrização das fraturas feitas com a ajuda do *Grapher 21*, podemos criar uma representação gráfica da fratura ou fenda escolhida, com a ajuda do *Maple 22*, a divisão da fratura em 12 curvas, sendo 6 superiores e 6 inferiores, tem como intuito um maior

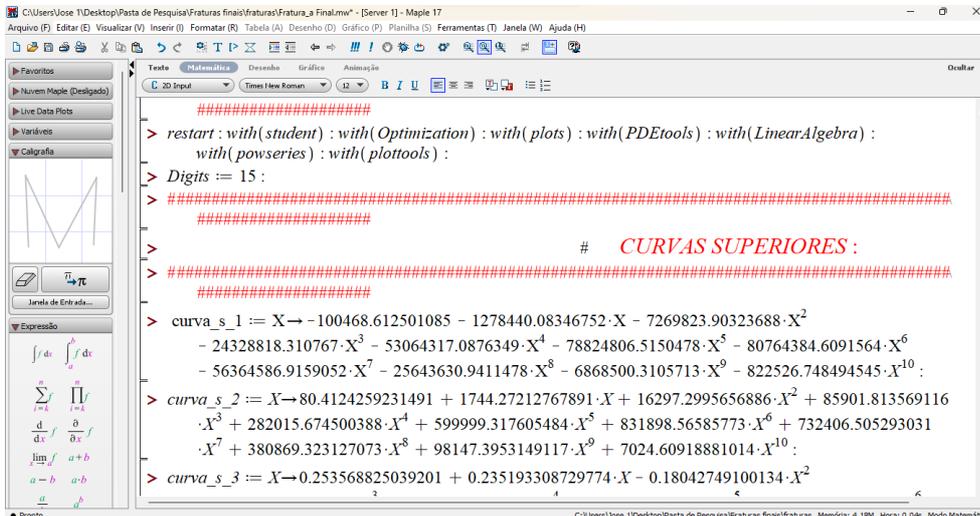
detalhamento da região na qual queremos representar graficamente, quanto maior for a divisão dessas curvas, mais precisas se tornarão as curvas representadas.

### 7.1.3 Ferramenta de software Maple 2022

O Maple é um Programa computacional de uso comercial, no qual apresenta diversas ferramentas que podem servir para vários tipos de aplicações, sendo uma ferramenta que possibilita resolver e analisar dados e problemas matemáticos. A versão utilizada para o cálculo do perfil de velocidade e demais parâmetros do escoamento, é o Maple 2022-Licença permanente. Com o auxílio desta ferramenta em conjunto com o Grapher 21 podemos a partir das curvas parametrizadas, a plotagem de gráficos e realizar o cálculo do perfil de velocidade de um fluido em uma determinada fratura de geometria arbitrária, tendo em vista que a partir das 12 curvas encontradas teremos 6 curvas superiores e 6 curvas inferiores, e assim podemos calcular para cada par um gráfico correspondente que representa esse perfil de velocidade, e com base neste, encontrar os outros parâmetros, calculando propriedades inerentes ao escoamento. Levamos em consideração um escoamento laminar num fluido com característica Newtoniana, sem perda de energia, e sem deslocamento de matéria, podemos então obter o diâmetro hidráulico, o número de Reynolds, número de Poiseuille, e através destes o fator de forma de Val,  $F_{val}$ , sendo então importantes para o entendimento do escoamento de fluidos.

A Figura 8 abaixo mostra a interface do Maple, e como pode ser utilizado para cálculo e resolução de problemas em conjunto com uma grande gama de recursos gráficos bidimensionais e tridimensionais.

Figura 8: Interface do Maple 22



```

#####
> restart : with(student) : with(Optimization) : with(plots) : with(PDEtools) : with(LinearAlgebra) :
with(powseries) : with(plottools) :
> Digits := 15 :
#####
#####
# CURVAS SUPERIORES :
#####
#####
> curva_s_1 := X -> -100468.612501085 - 1278440.08346752·X - 7269823.90323688·X2
- 24328818.310767·X3 - 53064317.0876349·X4 - 78824806.5150478·X5 - 80764384.6091564·X6
- 56364586.9159052·X7 - 25643630.9411478·X8 - 6868500.3105713·X9 - 822526.748494545·X10 :
> curva_s_2 := X -> 80.4124259231491 + 1744.27212767891·X + 16297.2995656886·X2 + 85901.813569116
·X3 + 282015.674500388·X4 + 599999.317605484·X5 + 831898.56585773·X6 + 732406.505293031
·X7 + 380869.323127073·X8 + 98147.3953149117·X9 + 7024.60918881014·X10 :
> curva_s_3 := X -> 0.253568825039201 + 0.235193308729774·X - 0.18042749100134·X2

```

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

## 8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta parte do trabalho discutiremos os resultados encontrados para alguns parâmetros quando levamos em conta fraturas. Desta maneira o intuito do trabalho é trazer novas formas para o cálculo desses parâmetros e generalizar para fraturas com geometrias arbitrárias. Logo o estudo foi realizado com 5 fraturas escolhidas para que pudéssemos utilizar o GBI e assim calcular o perfil de velocidade dos fluidos em determinadas fraturas, e então a partir dos parâmetros, podemos obter o fator de forma. Utilizamos assim algumas ferramentas computacionais com métodos numéricos, sendo uma delas o *Grapher 21* para conseguir os pontos sobre um eixo limitado, e assim podermos encontrar as funções que compõem o bordo da geometria fraturada. Para que pudéssemos construir os gráficos, foi utilizado desses artifícios computacionais para fazer as parametrizações das curvas que compõem o bordo de uma dada fratura dos gráficos. Com o *Maple 2022*, conseguimos obter os pontos de interseções e plotando representação gráfica destas. O *Maple 22* também nos permite fazer cálculos matemáticos mais avançados de maneira que assim podemos encontrar os parâmetros necessários para o estudo da mecânica dos fluidos, sendo alguns desses parâmetros, geométricos, dimensionais e adimensionais, área, perímetro e diâmetro hidráulico, velocidade média adimensional, o número de Poiseuille, e o novo fator de forma. E assim, conseguimos apresentar o perfil de velocidade para cada geometria, dando o melhor entendimento sobre o comportamento do quando percola sobre dadas regiões fraturadas.

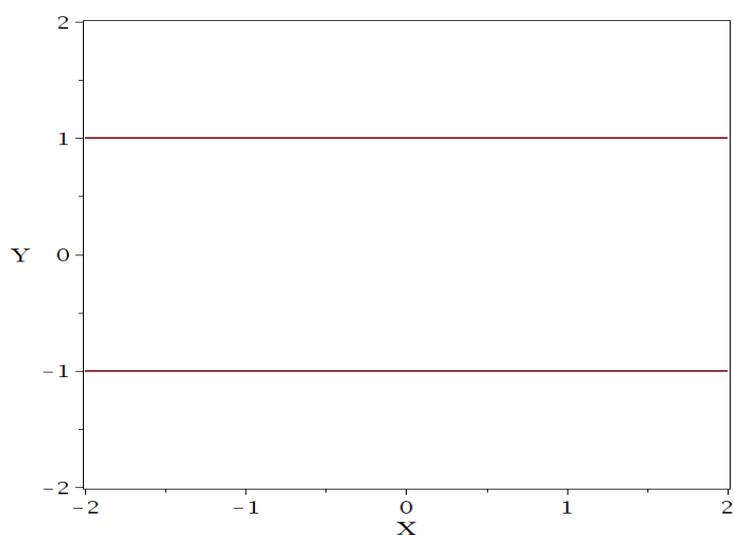
### 8.1 Para duas placas paralelas

Para que possamos analisar melhor os resultados e encontrar diversos valores de nosso interesse, faremos os cálculos para duas placas paralelas e assim será possível conseguir os parâmetros de interesse, como valores de área, perímetro, diâmetro hidráulico, velocidade média e o número de Poiseuille, e fator de forma de Val, sendo este último um dos objetivos desse trabalho.

Utilizando as ferramentas computacionais, é possível encontrar o perfil de velocidade a sua representação gráfica com base na geometria da fratura dado na Figura 9. Na Figura 10, vemos que o perfil de velocidade para uma fratura de placas paralelas é apresentado, onde podemos perceber que, o comportamento do fluido ocorre como o previsto, tendo em conta as ações das paredes da geometria de placas paralelas. Os fatores que influenciam esse comportamento têm relação com as diferenças de pressão e com a condição de não deslizamento, no qual assumimos que as velocidades das partículas no bordo da geometria são

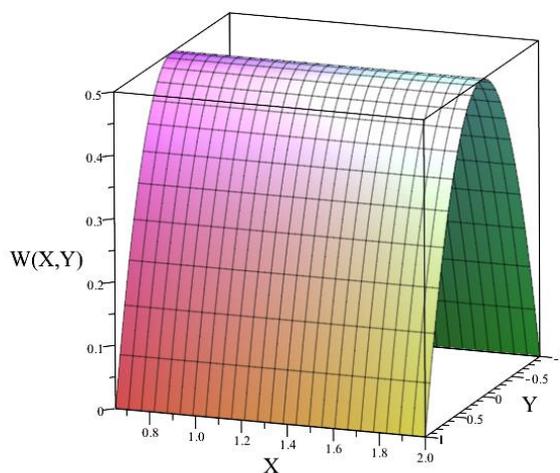
iguais a zero, devido as forças viscosas e com valor máximo da velocidade sendo apresentada em seu centro. Portanto, levando em conta a tensão cisalhante, o fluido assume um perfil de velocidade parabólico, sendo que este escoamento ocorre em regime laminar totalmente desenvolvido. Esse perfil de velocidade é conhecido como perfil de Poiseuille. Através do *Maple 22*, foi possível utilizar cálculos numéricos para encontrar os parâmetros do escoamento. Na Tabela 1, apresentamos os valores dos seguintes parâmetros, para a área, perímetro, diâmetro hidráulico, velocidade média, número de Poiseuille, e fator de forma.

**Figura 9:** Geometria de Placas Paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

**Figura 10 –** Perfil de velocidade adimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

**Tabela 1:** Valores de parâmetros de interesses (placas paralelas).

Parâmetros	Valores
$A_c$	8,00
$P$	8,00
$D_h$	4,00
$W_m$	0,3333333333333334
$fRe$	24
$f_{val}$	3

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

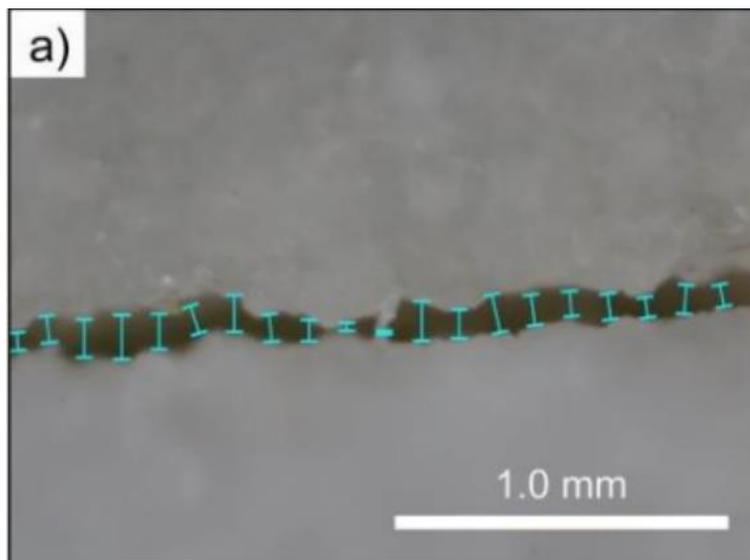
A utilização do método GBI, para encontrar parâmetros do escoamento em placas paralelas é possível, e estes valores estão na literatura, tendo número de Poiseuille sendo 24 e fator de forma sendo 3. Podemos destacar que modelo já foi testado por Santos Júnior (2018), em que este apresenta através desse método diversos parâmetros do escoamento de fluidos.

### 8.1.1 Fraturas com geometrias arbitrarias

O objetivo central do trabalho é encontrar os parâmetros adimensionais através do método GBI, para geometrias de fraturas. Logo, se utilizou um software computacional no intuito de obter os gráficos das curvas que compõem o bordo dessas geometrias, dividimos as fraturas em 12 curvas nas quais serão 6 curvas superiores e 6 curvas inferiores. Desta forma podemos através destas calcular determinados parâmetros nas fraturas sendo estas apresentadas nas figuras: 11, 15, 18, 21 e 24.

Para iniciarmos temos a primeira fratura de geometria arbitrária na qual foi proposta, através da utilização do Grapher 21 e do Maple 22, foi possível obter as parametrizações das curvas, o perfil de velocidade, número de Poiseuille, e fator de forma de Val. A figura seguinte mostra a fratura (a), uma região fraturada de geometria arbitrária.

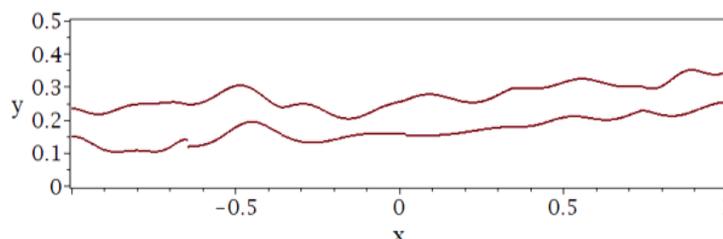
**Figura 11:** Geometria da Fratura a.



Fonte: (Imagem para análise capturada de CHENG, et al, 2020. Pg.12)

Ao parametrizarmos o bordo desta fratura, foi possível encontrar as curvas que formam sua geometria, sendo que representam partes desta como um todo, para uma melhor aproximação com à geometria real dividimos a fratura em 12 curvas que formam a geometria completa.

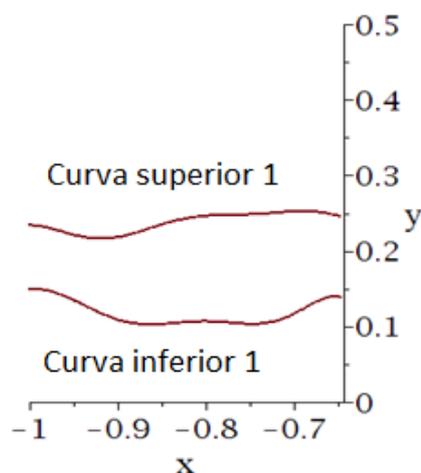
**Figura 12:** Curvas que representam a Fratura a.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Para a análise numérica, foi necessário trabalhar com pares de curvas no qual sempre pegamos uma curva superior e uma curva inferior para podermos encontrar os parâmetros necessários através do Maple 22. Observamos que cada par de curvas têm um limite estabelecido para que pudéssemos delimitar a região na qual queríamos. A Figura 13, abaixo exemplifica como serão relacionados o par de curvas para o estudo do perfil de velocidade em uma dada região delimitada.

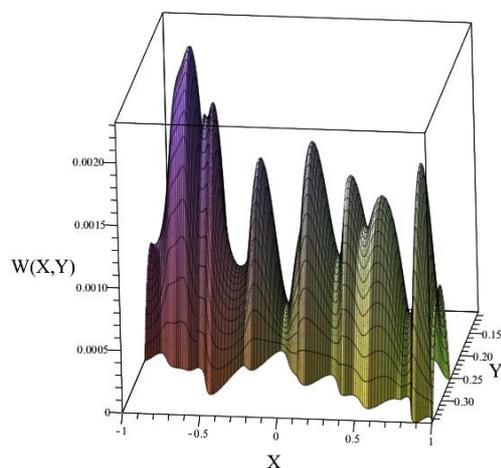
**Figura 13:** Pares de curvas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Logo, através dos dados da velocidade média podemos então encontrar o perfil de velocidade calculado numericamente, e com esses dados como vimos na Equação 16, podemos calcular o número de Poiseuille em termos do diâmetro hidráulico e da velocidade média adimensional. E, portanto, com esse dado podemos calcular o  $f_{val}$ . Levando em conta a fratura da Figura 11, e as condições para o escoamento de fluidos, e a condição de não deslizamento teremos então o gráfico:

**Figura 14:** Perfil de velocidade da fratura a.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Os Dados encontrados através do software computacional Maple 22, estão tabelados e assumem grande importância em descrever as características do escoamento em uma dada geometria arbitrária.

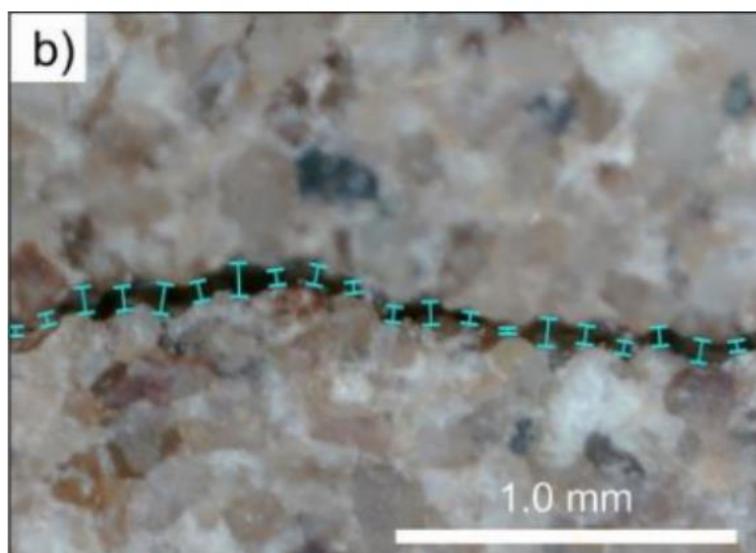
**Tabela 2:** Valores de parâmetros de interesses Fratura a.

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,208793499008606
$P$	4,48022801051384
$D_h$	0,186413279430088
$W_m$	0,000881456782045479
$fRe$	22,2706240998025
$f_{val}$	2,7838280124753125

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Analogamente, foram feitos os cálculos para as demais fraturas. A seguir obtemos os gráficos e os dados tabelados para diversos parâmetros adimensionais.

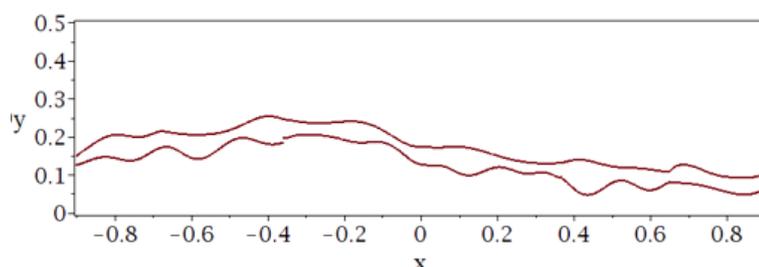
**Figura 15:** Geometria da Fratura b.



Fonte: (Imagem para análise capturada de CHENG, et al, 2020. Pg.12)

Na Figura 15 temos a geometria que desejamos parametrizar, já na Figura 16 temos ilustrada, com representação das curvas encontradas, a parametrização da geometria da fratura b.

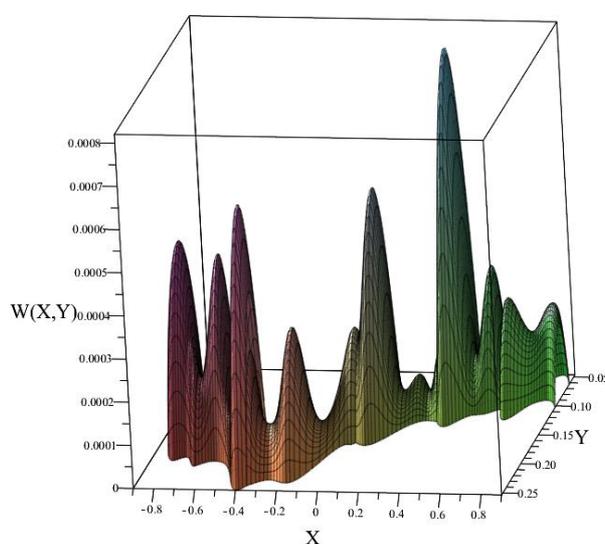
**Figura 16:** Curvas que Representam a Fratura b.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Na Figura 17 e Tabela 3, podemos observar os valores encontrados referentes a fratura b, onde podemos ver a representação tridimensional, onde teremos o perfil de velocidade do fluido nesse meio fraturado.

**Figura 17:** Perfil de Velocidade da Fratura b



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

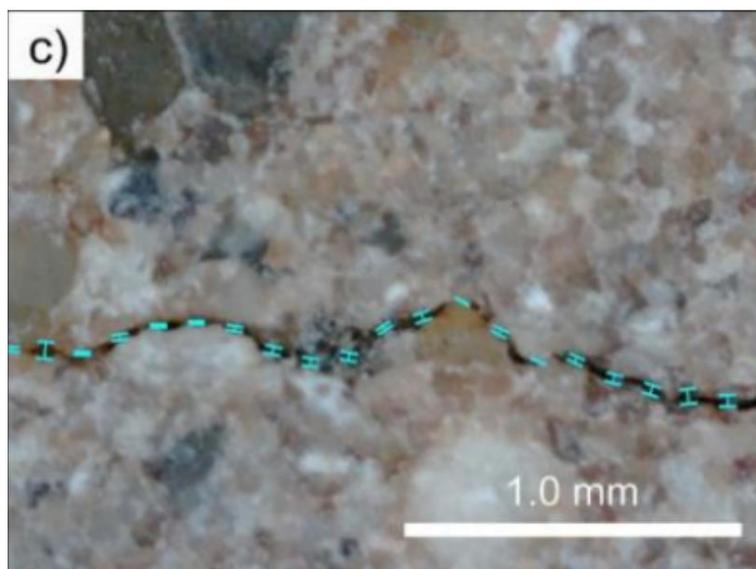
**Tabela 3:** Valores de parâmetros de interesses Fratura b.

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,0835034654259539
$P$	4,18158923020500
$D_h$	0,0798772531962544
$W_m$	0,000194482111066614
$fRe$	18,9316456200
$fval$	2,36645570250000

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Agora consideremos a geometria da fratura C, no quais teremos na Figura 18:

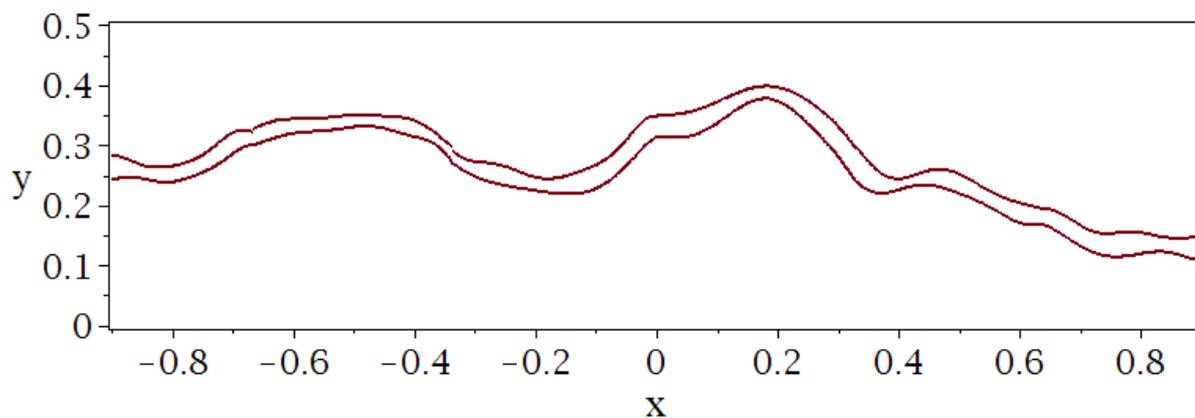
**Figura 18:** Geometria da Fratura C.



Fonte: (Imagem para análise capturada de CHENG, et al, 2020. Pg.12)

Na Figura 29 temos ilustrada, com representação das curvas encontradas, a parametrização da geometria da fratura c.

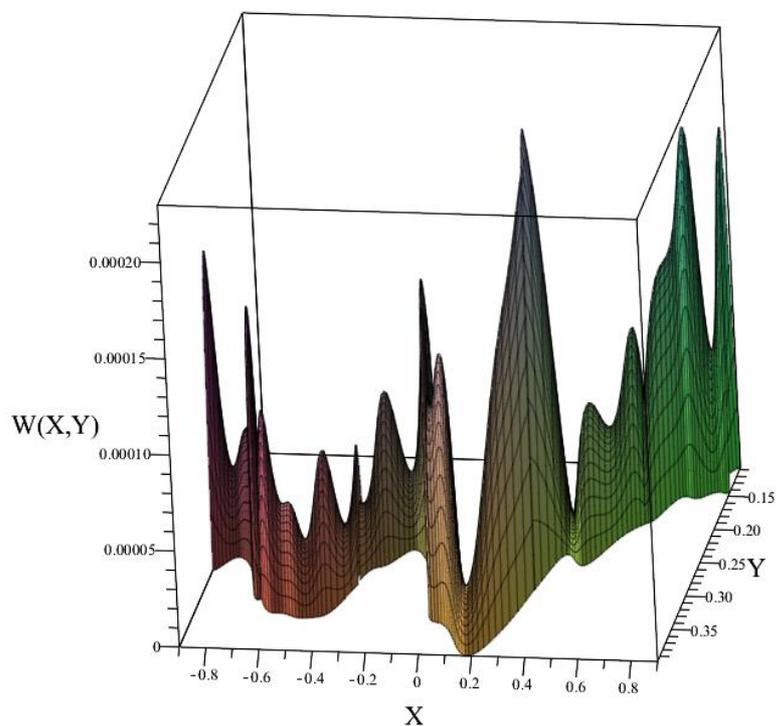
**Figura 19:** Curvas que representam a fratura c.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Na Figura 20 e Tabela 4, podemos observar os valores encontrados referentes a fratura c, onde podemos ver a representação tridimensional, onde teremos o perfil de velocidade do fluido nesse meio fraturado.

**Figura 20:** Perfil de velocidade da Fratura c



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

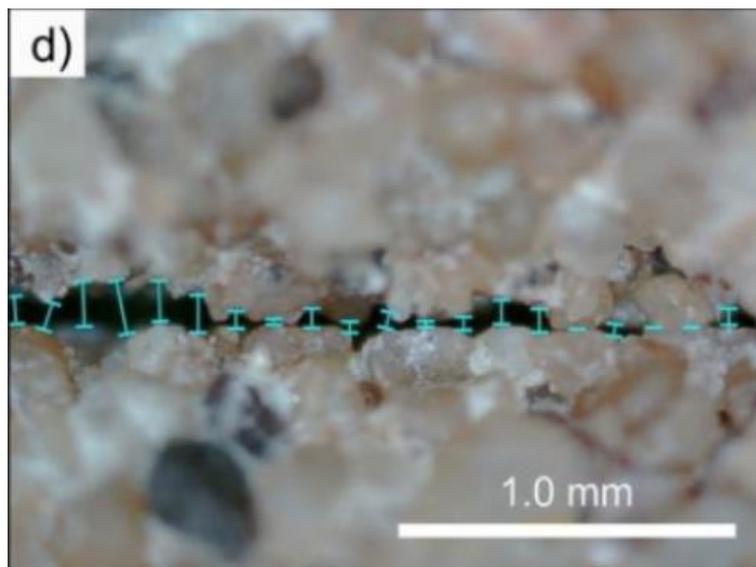
**Tabela 4:** Valores de parâmetros de interesses Fratura c.

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,0546916927729214
$P$	4,36803545267148
$D_h$	0,0500835612398448
$W_m$	0,0000645231141151311
$fRe$	23,1896046500000
$fval$	2,89870058125000

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Agora consideremos a geometria da fratura d, no quais teremos na Figura 21:

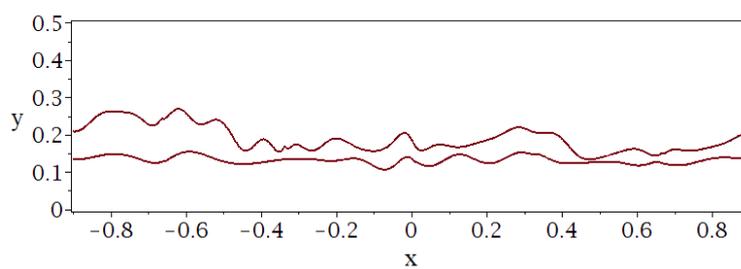
**Figura 21:** Geometria da Fratura d



Fonte: (Imagem para análise capturada de CHENG, et al, 2020. Pg.12)

Assim, podemos representar a fratura graficamente deste modo apresentado na Figura 22.

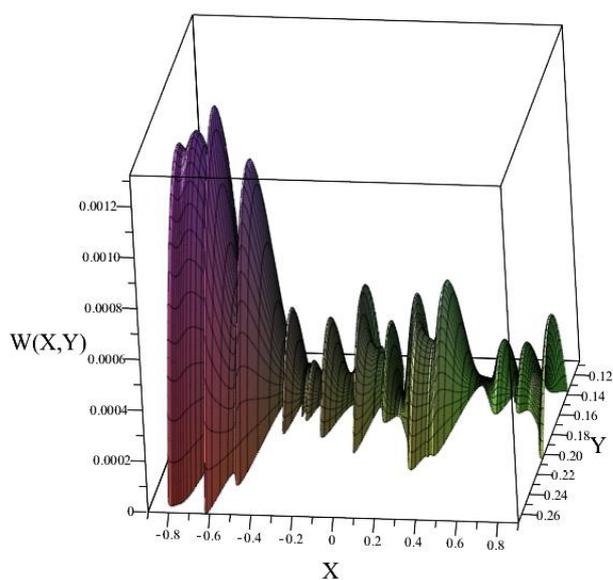
**Figura 22:** Curvas que representam a Fratura d.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Na Tabela 5, junto a Figura 23, são apresentados os valores encontrados para cada passo referente a fratura d.

**Figura 23:** perfil de velocidade da fratura d.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

**Tabela 5:** Valores de parâmetros de interesses Fratura d.

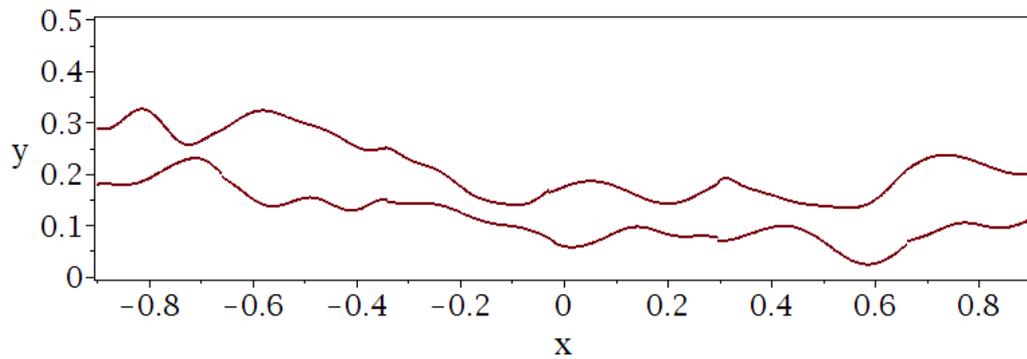
Parâmetros	Valores
$A_c$	0.102871468121281
$P$	3.96402804016237
$D_h$	0,103804985311928
$W_m$	0,000319674471189713
$fRe$	18,8551023581185
$fval$	2,35688779476481

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

**Figura 24:** Geometria da Fratura 2f.

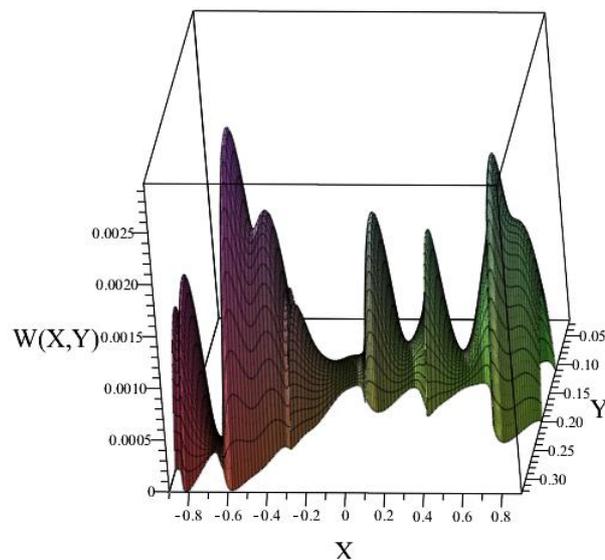


Fonte: (Imagem para análise capturada de CHENG, et al, 2020. Pg.8)

**Figura 25:** Curvas que representam a Fratura 2f

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Na tabela 6, junto a Figura 26, são apresentados valores relevantes para o nosso estudo dos quais refere-se a geometria 4.

**Figura 26**

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

**Tabela 6:** Valores de parâmetros de interesses Fratura 2f.

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,177635820116477
$P$	4,26872176372336
$D_h$	0,166453406849863
$W_m$	0,000778317722254215
$fRe$	17,7991171598148

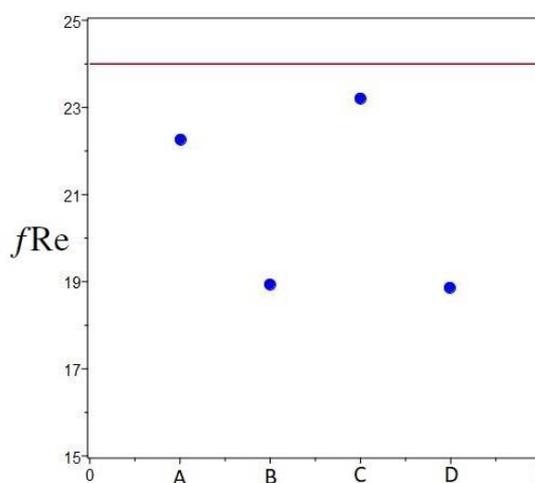
$f_{val}$	2,22489
-----------	---------

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Com base nos dados coletados, pode-se fazer uma análise comparativa entre valores da geometria de placas paralelas e as demais fraturas, dando ênfase, nas diferenças entre estes, devido à complexidade e variação de suas geometrias. A Geometria influencia diretamente em como o fluido irá escoar, portanto com base nisso, é previsto que os valores devem ser maiores para estruturas menos complexas. Mediante a isto, obtêm-se uma diferença considerável em relação as velocidades médias das fraturas, sendo que a da Figura 11, tendo uma redução de - 7,2057 % quando comparado à geometria de placas paralelas. Pode-se notar que também houveram reduções para as demais fraturas, temos: Figura 15, Figura 18, Figura 21, e Figura 24, tendo respectivamente as seguintes reduções: 21,11814325%, 3,37665%, 21,43707%, 25,83701%. Uma vez que isso acontece para as velocidades, é plausível que parâmetros que dependam destas para serem calculados também mudarão. O Gráfico 1, abaixo evidencia a disparidade.

Podemos também observar os valores encontrados para o número de Poiseuille, e com este encontrar os fatores de forma associados a cada fratura. Existe uma redução quando comparado com a geometria de placas paralelas, o valor para a fratura (a), apresentado na Figura 11, é 16,6377% menor, e isso ocorre pra a Figura 15, Figura 18, Figura 21, e Figura 24, que seguem respectivamente tendo reduções de: 31,6521%, 24,6552%, 18,7453%, 25,8370%. Os valores do Número de Poiseuille encontrados podem ser dados no Gráfico 2 abaixo.

**Gráfico:** Valores do Número de Poiseuille



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Ao fazermos a análise, é possível perceber que os valores computados, estão abaixo de 24, que é o número de Poiseuille para placas paralelas, devido a complexidade das geometrias. Então nota-se reduções nesses valores.

Com base no uso do fator de forma de Val, que nos permite encontrar o fator de forma sendo dado em termos do número de Poiseuille, foi possível construir a seguinte tabela:

**Tabela 7:** Valores dos Fatores de Forma.

Placas paralelas	3
Fratura a	2,78382801247531
Fratura b	2,36645570250000
Fratura c	2,89870058125000
Fratura d	2,35688779476481
Fratura 2f	2,22489

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

Com estes valores podemos perceber que existe uma redução para o fator de forma em cada fratura quando relacionamos com a geometria de placas paralelas, tendo esta, o valor do fator de forma sendo 3. X Logo os demais resultados quando comparados estão muito próximos deste valor. O fator de forma é dado exclusivamente por características da geometria no qual o fluido escoar, tendo em vista isto, para a fratura da Figura 11, esta é 93,79427% do valor esperado, para a Figura 15, Figura 18, Figura 21, e Figura 24, temos respectivamente: 78,88185675%, 96,62335%, 78,56293%, 74,1630%. Vale destacar que apesar de termos reduções, os valores são aproximados ao valor de uma geometria de placas paralelas.

## 9 CONCLUSÕES

A utilização de métodos numéricos computacionais para previsão de parâmetros de escoamento de fluidos é de grande utilidade, tendo em vista que encontrar estes parâmetros experimentalmente se torna inviável quando tratamos de escoamento em meios porosos que têm geometria arbitrária, como é o caso de fraturas e fendas. Sabemos que dependendo da geometria e características do escoamento, os valores desses parâmetros irão variar.

A partir dos resultados foi possível apresentar uma análise do escoamento hidrodinâmico de um fluido, para geometrias que simulem fraturas ou fendas, sendo estas, geometrias complexas. Foram utilizadas fraturas de diferentes formatos no intuito de identificar como estas geometrias influenciam os parâmetros adimensionais encontrados através de modelos numéricos computacionais.

Foi possível a partir do método GBI, conseguimos com facilidade encontrar o perfil de velocidade para cada uma das fraturas, e compara-las com um escoamento em placas paralelas. A generalização do cálculo do perfil de velocidade, número de Poiseuille e o fator de forma de Val, só é possível utilizando este método de maneira numérica computacional, tendo em vista que a complexidade dos cálculos é elevada. Através dos softwares computacionais, Grapher 21 e Maple 22, foi possível obter a parametrização das curvas, sendo estas de ordem dez, para que ficassem mais próximas possíveis das fraturas reais. Logo a partir destas calculamos os perfis de velocidade, número de Poiseuille e por consequência o fator de forma de val.

Ao analisarmos os resultados, percebemos que o comportamento do escoamento para estas fraturas se dá de maneira prevista pela condição de não deslizamento. Para uma melhor comparativa dos resultados, foi feito o cálculo pra uma geometria de placas paralelas, como é dado na Figura 9, tendo em vista que esta geometria é mais “comportada”, podemos facilmente fazer os cálculos do escoamento. Pode-se observar que, a velocidade média das partículas em relação as demais, foi grande, que era de se esperar, dada as diferenças entre as geometrias. Podemos notar que a velocidade da fratura da Figura 11, foi de 0,264437% da velocidade para placas paralelas, assim como temos para a Figura 15, Figura 18, Figura 21, Figura 24, respectivamente as seguintes porcentagens: 0,583446%, 0,0193569%, 0,0959023%, 0,233495%. Com esses dados podemos perceber como existe uma queda desses números quando lidamos com meios fraturados, devido as condições de não deslizamento e influências diretas das geometrias.

Quando vemos os valores calculados para o número de Poiseuille, percebemos uma queda quando comparamos com o valor deste para placas paralelas, encontramos uma série de

reduções, sendo estas dadas nas figuras: Figura 11, Figura 15, Figura 18, Figura 21, e Figura 24, sendo respectivamente de 7,2057 % ,21,11814325%, 3,37665%, 21,43707%, 25,83701%. No qual era esperado que ocorressem as devidas reduções devido as condições impostas pelas geometrias das fraturas.

Podemos assim fazer a análise dos valores obtidos para o  $F_{val}$ , ao compararmos com o escoamento em placas paralelas. Vemos que, para a fratura da Figura 11, o valor do  $F_{val}$ , foi de 93,79427%, tendo um valor aproximadamente 100%, já para as demais fraturas, Figuras 15, Figura 18, Figura 21, Figura 24, foi obtido temos respectivamente: 78,88185675%, 96,62335%, 78,56293%, 74,1630%. Nota-se que, os determinados valores, são relativamente próximos aos de um escoamento em placas paralelas, mas devido à geometria de cada fratura temos uma diminuição nessa porcentagem. Esses valores se alteram para cada geometria tendo em vista que afetam diretamente a resistência à passagem do fluido. Assim quanto mais aproximados forem os resultados, significa dizer que o fluido terá menos dificuldade em percolar por dada estrutura. É importante salientar que tanto os valores do número de Poiseuille, quanto o fator de forma, variam, principalmente por dependerem da geometria do canal de escoamento, ou seja, quanto maiores forem as irregularidades, maior vai ser a dificuldade para que o fluido percole.

Através deste trabalho, foi possível obter resultados de grande importância sobre o escoamento de fluidos em fraturas e geometrias irregulares, sendo este um método inovador, para encontrar os perfis de velocidades e Fatores de forma para o escoamento em fraturas. Podemos argumentar que não é possível ter uma base comparativa dos dados desta pesquisa tendo em vista que ao trabalharmos com geometrias arbitrárias, não temos um padrão específico, e não existem outros trabalhos até o momento, que utilizem esta mesma abordagem, com as mesmas geometrias que simulem fraturas ou fendas, para o cálculo destes parâmetros. Logo os resultados aqui encontrados podem ser abordos e servir como base para pesquisas futuras, tendo em vista as possibilidades que o estudo apresenta.

## REFERÊNCIAS

- ANDREATTA, L. V. R. **Escoamento em canal parcialmente poroso e fraturado**. Orientador: Silvio Luiz de Mello Junqueira 2011. 133 f. TCC (graduação)- Curso de Engenharia Industrial Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- CARMAN, P. C. **Fluid ow through granular beds**. Trans. Inst. Chem. Eng., 15, 150- 166. 1937.
- ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**, 4 Edição. Porto Alegre, RS: Editora McGrawHill, 2012.
- CHAPUIS, Robert & Aubertin, Michel. **Predicting the coefficient of permeability of soils using the Kozeny-Carman equation**.2003.
- CHURCHILL, S. W. **Viscous Flows D The Practical Use of Theory**, Butterworths, Stoneham, 1988.
- CIVAN, F. **Reservoir Formation Damage**. Países Baixos, Elsevier Science, 2015.
- DIETRICH, P. et al. (Ed). **Flow and transport I fractured porous media**. Springer Science & Business Media, 2005.
- FOURIE, W. et al. **The simulation of scale fluid flow with real geometries obtained from X-ray computer tomography**. In: Proceedings of the Boston COMSOL conference, 2007.
- KOZENY, J. **Über Kapillare Leitung des Wassers im Boden (Aufstieg Versickerung und Anwendung auf die Bemasserung)**, Sitzungsber Akad., Wiss, Wein, Math. Naturwiss. Kl 136 (IIa) 271–306. 1927.
- MARIN, I. S. P. **Aperfeiçoamento do método de elementos analíticos para simulação de escoamento em rochas porosas fraturadas**. 2011.
- NEVES, Rebeca Alves. **Escoamento laminar em dutos circulares com incrustações: Análise do perfil de velocidade e fator de atrito**. 2020. 53 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Física, Universidade Estadual da Paraíba, Araruna, 2020.
- OBRZUT, Lucas Quadros. **Análise experimental de escoamento líquido-sólido para o controle de fuga de fluido em canal fraturado**. 2015. 115 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.
- PAITAN, C. A. T. **Modelagem numérica de fluxo em meios fraturados e meios porosos fraturados**. p. 107, 2013.
- PATZEK, T.W. and SILIN, D.B. **Shape Factor and Hydraulic Conductance in Noncircular Capillaries**. Journal of Colloid and Interface Science 236, p. 295–304. 2001.

SANTOS JÚNIOR, V. A. **Escoamento de fluido em dutos de seção arbitrária utilizando o método integral baseado em Galerkin. Estudo de caso: óleo pesado.** Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade Federal de Campina Grande, PB, 2018.

SANTOS JÚNIOR, Valdecir A.; SILVA JÚNIOR, Antônio F.; SIMÕES, Tatiana A.; OLIVEIRA, Gustavo P.. **Poiseuille-Number-Based Kozeny–Carman Model for Computation of Pore Shape Factors on Arbitrary Cross Sections.** *Transport In Porous Media*, [s. l], v. 138, p. 99-131, abr. 2021.

SHAFIEI, A.; B. DUSSEAULT, M.; KOSARI, E.; N. TALEGHANI, M. **Natural Fractures Characterization and In Situ Stresses Inference in a Carbonate Reservoir—An Integrated Approach.** *Energies* **2018**, *11*, 312.

SILVA JÚNIOR, A. F.; SANTOS JÚNIOR, V. A. **Escoamento de fluido em meio poroso: análise da equação de Kozeny-Carman e fator de forma em poros com geometrias arbitrárias.** Projeto de Iniciação Científica, Universidade Estadual da Paraíba, Araruna, PB, 2020.

SRISUTTHIYAKORN, N. and MAVKO, G.M. **An Improved Kozeny-Carman for Irregular Pore Geometries.** SEG Technical Program Expanded Abstracts and 85th Annual International Meeting. p.3015-3019. 2015.

TELLES, I. A. **Desenvolvimento de um Sistema Integrado para Modelagem de Fluxo e Transporte em Meios Porosos e Fraturados.** Dissertação de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

THOMAS J. W. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.** Springer-Verlag, New York, 1999.

YANG, Y. and APLIN, A.C. **Influence of lithology and compaction on the pore size distribution and modelled permeability of some mudstones from the Norwegian margin.** *Marine and Petroleum Geology*, *15*, 163-I, 75. 1998.

Yu, W.; Hu, X.; Liu, M.; Wang, W. **Investigation of the Effect of Natural Fractures on Multiple Shale-Gas Well Performance Using Non-Intrusive EDFM Technology.** *Energies* **2019**, *12*, 932.

WHITE, Frank M.. **Mecânica dos Flúidos.** 6. ed. São Paulo: Artmed Editora S.a. e Mcgraw-hill Education, 2011. 878 p.

APÊNDICE A – Algoritmo de Cálculo: Perfil de velocidade e número de Poiseuille e outros parâmetros da Fratura (a)

*restart* : *with(student)* : *with(Optimization)* : *with(plots)* : *with(PDEtools)* :  
*with(LinearAlgebra)* : *with(powseries)* : *with(plottools)* :

*Digits* := 15 : ***CURVAS SUPERIORES*** :

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_1} := X \rightarrow & -100468.612501085 - 1278440.08346752 \cdot X - 7269823.90323688 \cdot X^2 \\ & - 24328818.310767 \cdot X^3 - 53064317.0876349 \cdot X^4 - 78824806.5150478 \cdot X^5 \\ & - 80764384.6091564 \cdot X^6 - 56364586.9159052 \cdot X^7 - 25643630.9411478 \cdot X^8 \\ & - 6868500.3105713 \cdot X^9 - 822526.748494545 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_2} := X \rightarrow & 80.4124259231491 + 1744.27212767891 \cdot X + 16297.2995656886 \cdot X^2 \\ & + 85901.813569116 \cdot X^3 + 282015.674500388 \cdot X^4 + 599999.317605484 \cdot X^5 \\ & + 831898.56585773 \cdot X^6 + 732406.505293031 \cdot X^7 + 380869.323127073 \cdot X^8 \\ & + 98147.3953149117 \cdot X^9 + 7024.60918881014 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_3} := X \rightarrow & 0.253568825039201 + 0.235193308729774 \cdot X - 0.18042749100134 \cdot X^2 \\ & + 23.1780339890446 \cdot X^3 - 15.2936592883141 \cdot X^4 - 1941.15924947348 \cdot X^5 \\ & - 4675.49177555414 \cdot X^6 + 29653.4498824568 \cdot X^7 + 155587.368710249 \cdot X^8 \\ & + 257411.836462013 \cdot X^9 + 146520.523030791 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_4} := X \rightarrow & 0.248647253644215 + 0.526089815605005 \cdot X - 1.27430735692733 \cdot X^2 \\ & - 15.3972534016738 \cdot X^3 + 9.12936937940061 \cdot X^4 + 112.678982246326 \cdot X^5 \\ & + 983.201678556014 \cdot X^6 - 1341.89037909285 \cdot X^7 - 17584.2776588039 \cdot X^8 \\ & + 51663.217257808 \cdot X^9 - 40081.2951843425 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_5} := X \rightarrow & -69.258311981833 + 1697.39422938422 \cdot X - 17939.1442895013 \cdot X^2 \\ & + 108117.818176774 \cdot X^3 - 412124.495175689 \cdot X^4 + 1040314.53693637 \cdot X^5 \\ & - 1765158.89822647 \cdot X^6 + 1992489.65448418 \cdot X^7 - 1435202.10188136 \cdot X^8 \\ & + 596980.468265594 \cdot X^9 - 109110.58415042 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_s\_6} := X \rightarrow & -256977.10712507 + 3116171.92415788 \cdot X - 16883464.4781867 \cdot X^2 \\ & + 53824733.5632879 \cdot X^3 - 111821269.661335 \cdot X^4 + 158197092.578378 \cdot X^5 \\ & - 154362015.912652 \cdot X^6 + 102589822.142523 \cdot X^7 - 44449854.6350759 \cdot X^8 \\ & + 11339269.1195732 \cdot X^9 - 1293507.1876141 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

***# CURVAS INFERIORES*** :

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_1} := X \rightarrow & 175589.179651245 + 2074086.84518524 \cdot X + 10947424.3389348 \cdot X^2 \\ & + 34001805.0882534 \cdot X^3 + 68820940.7912734 \cdot X^4 + 94854245.9965876 \cdot X^5 \\ & + 90162167.0932602 \cdot X^6 + 58365079.175393 \cdot X^7 + 24626221.7500157 \cdot X^8 \\ & + 6116156.81977042 \cdot X^9 + 679030.921001466 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_2} := X \rightarrow & 120.745307588418 + 2787.21021946989 \cdot X + 28010.3086671211 \cdot X^2 \\ & + 161183.500470693 \cdot X^3 + 588466.377036213 \cdot X^4 + 1425799.16180704 \cdot X^5 \\ & + 2325363.09192798 \cdot X^6 + 2525329.64907001 \cdot X^7 + 1751100.23822286 \cdot X^8 \\ & + 701451.195383231 \cdot X^9 + 123492.003200853 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_3} := X \rightarrow & 0.158015272142541 + 0.00168371099531011 \cdot X + 0.137236744080843 \\ & \cdot X^2 - 1.07862494360763 \cdot X^3 - 36.8186517078162 \cdot X^4 + 79.4687113064185 \cdot X^5 \\ & + 1162.20617083202 \cdot X^6 + 514.425514679472 \cdot X^7 - 10454.9465658826 \cdot X^8 \\ & - 23828.2074171702 \cdot X^9 - 15555.1226544786 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_4} := X \rightarrow & 0.154352965532159 - 0.0580126916979168 \cdot X - 0.0188523305799374 \cdot X^2 \\ & + 4.94591917491974 \cdot X^3 - 12.5218539301099 \cdot X^4 - 32.5674237813802 \cdot X^5 \\ & + 296.565983515237 \cdot X^6 - 671.781445064437 \cdot X^7 - 661.222773034922 \cdot X^8 \\ & + 4378.83264828508 \cdot X^9 - 4173.70268235781 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_5} := X \rightarrow & 68.1571781829907 - 1219.14117508632 \cdot X + 9267.81730061933 \cdot X^2 \\ & - 38766.8564532674 \cdot X^3 + 96002.7993613189 \cdot X^4 - 137047.51445478 \cdot X^5 \\ & + 86928.7152854339 \cdot X^6 + 36991.8767447464 \cdot X^7 - 107097.364934415 \cdot X^8 \\ & + 72280.782159392 \cdot X^9 - 17410.2698270282 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{curva\_i\_6} := X \rightarrow & -89080.6216579332 + 1066046.43542554 \cdot X - 5705443.08672432 \cdot X^2 \\ & + 17987553.4015701 \cdot X^3 - 37003751.3563819 \cdot X^4 + 51915046.1824897 \cdot X^5 \\ & - 50317060.2467562 \cdot X^6 + 33275017.2518969 \cdot X^7 - 14372132.0953151 \cdot X^8 \\ & + 3661792.31287401 \cdot X^9 - 417987.924489556 \cdot X^{10} : \end{aligned}$$

## LIMITES :

$$\text{solve}(\text{curva\_s\_6}(X) = \text{curva\_i\_6}(X), X) :$$

$$\begin{aligned} x\_1 := & -1.117151466; x\_2 := -0.6461157090; x\_3 := -0.3569617052; x\_4 \\ := & 0.01921780597; x\_5 := 0.3420149644; x\_6 := 0.7404067061; x\_7 := 1.129541649; \end{aligned}$$

$$x\_1 := -1 \qquad x\_7 := 1$$

## FIGURES (SUP) :

$$\begin{aligned} \text{fig\_s\_1} := & \text{plot}(\text{curva\_s\_1}(X), X = x\_1 .. x\_2, Y = 0 .. 0.5, \text{color} = ["Niagara 1", "Niagara 1"], \\ & \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \text{labels} = ["x", "y"], \\ & \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fig\_s\_2} := & \text{plot}(\text{curva\_s\_2}(X), X = x\_2 .. x\_3, Y = 0 .. 0.5, \text{color} = ["Niagara 1", "Niagara 1"], \\ & \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \text{labels} = ["x", "y"], \\ & \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fig\_s\_3} := & \text{plot}(\text{curva\_s\_3}(X), X = x\_3 .. x\_4, Y = 0 .. 0.5, \text{color} = ["Niagara 1", "Niagara 1"], \\ & \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \text{labels} = ["x", "y"], \\ & \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fig\_s\_4} := & \text{plot}(\text{curva\_s\_4}(X), X = x\_4 .. x\_5, Y = 0 .. 0.5, \text{color} = ["Niagara 1", "Niagara 1"], \\ & \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \text{labels} = ["x", "y"], \\ & \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}) : \end{aligned}$$

$fig\_s\_5 := plot(curva\_s\_5(X), X = x\_5..x\_6, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_s\_6 := plot(curva\_s\_6(X), X = x\_6..x\_7, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

### FIGURES (INF) :

$fig\_i\_1 := plot(curva\_i\_1(X), X = x\_1..x\_2, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_i\_2 := plot(curva\_i\_2(X), X = x\_2..x\_3, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_i\_3 := plot(curva\_i\_3(X), X = x\_3..x\_4, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_i\_4 := plot(curva\_i\_4(X), X = x\_4..x\_5, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_i\_5 := plot(curva\_i\_5(X), X = x\_5..x\_6, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$fig\_i\_6 := plot(curva\_i\_6(X), X = x\_6..x\_7, Y = 0..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],$   
 $labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"],$   
 $font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED) :$

$display(fig\_s\_1, fig\_s\_2, fig\_s\_3, fig\_s\_4, fig\_s\_5, fig\_s\_6, fig\_i\_1, fig\_i\_2, fig\_i\_3, fig\_i\_4,$   
 $fig\_i\_5, fig\_i\_6)$

## # **ÁREA, PERÍMETRO, DIÂMETRO HIDRÁULICO E COMPRIMENTO CARACTERÍSTICO**

$Area\_1\_di := int(curva\_s\_1(X), X = x\_1..x\_2) - int(curva\_i\_1(X), X = x\_1..x\_2) :$

$Area\_2\_di := int(curva\_s\_2(X), X = x\_2..x\_3) - int(curva\_i\_2(X), X = x\_2..x\_3) :$

$Area\_3\_di := int(curva\_s\_3(X), X = x\_3..x\_4) - int(curva\_i\_3(X), X = x\_3..x\_4) :$

$Area\_4\_di := int(curva\_s\_4(X), X = x\_4..x\_5) - int(curva\_i\_4(X), X = x\_4..x\_5) :$

$Area\_5\_di := int(curva\_s\_5(X), X = x\_5..x\_6) - int(curva\_i\_5(X), X = x\_5..x\_6) :$

$Area\_6\_di := int(curva\_s\_6(X), X = x\_6..x\_7) - int(curva\_i\_6(X), X = x\_6..x\_7) :$

$Area\_di := Area\_1\_di + Area\_2\_di + Area\_3\_di + Area\_4\_di + Area\_5\_di + Area\_6\_di$

$Perimetro\_1\_di := int(\sqrt{1 + (diff(curva\_s\_1(X), X))^2}, X = x\_1..x\_2)$

$Perimetro\_2\_di := int(\sqrt{1 + (diff(curva\_s\_2(X), X))^2}, X = x\_2..x\_3)$

$$\begin{aligned}
Perimetro\_3\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_s\_3}(X), X))^2}, X=x\_3..x\_4\right) \\
Perimetro\_4\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_s\_4}(X), X))^2}, X=x\_4..x\_5\right) \\
Perimetro\_5\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_s\_5}(X), X))^2}, X=x\_5..x\_6\right) \\
Perimetro\_6\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_s\_6}(X), X))^2}, X=x\_6..x\_7\right) \\
Perimetro\_7\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_1}(X), X))^2}, X=x\_1..x\_2\right) \\
Perimetro\_8\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_2}(X), X))^2}, X=x\_2..x\_3\right) \\
Perimetro\_9\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_3}(X), X))^2}, X=x\_3..x\_4\right) \\
Perimetro\_10\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_4}(X), X))^2}, X=x\_4..x\_5\right) \\
Perimetro\_11\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_5}(X), X))^2}, X=x\_5..x\_6\right) \\
Perimetro\_12\_di &:= \text{int}\left(\sqrt{1 + (\text{diff}(\text{curva\_i\_6}(X), X))^2}, X=x\_6..x\_7\right) \\
Perimetro\_di &:= Perimetro\_1\_di + Perimetro\_2\_di + Perimetro\_3\_di + Perimetro\_4\_di \\
&\quad + Perimetro\_5\_di + Perimetro\_6\_di + Perimetro\_7\_di + Perimetro\_8\_di \\
&\quad + Perimetro\_9\_di + Perimetro\_10\_di + Perimetro\_11\_di + Perimetro\_12\_di \\
d\_h &:= \frac{4 \cdot \text{Area\_di}}{\text{Perimetro\_di}} \\
\#L := d\_h \quad L &:= 1
\end{aligned}$$

### FIGURES (SUP) :

$$\begin{aligned}
fig\_s\_1\_ad &:= \text{plot}\left(\frac{\text{curva\_s\_1}(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_1}{L} .. \frac{x\_2}{L}, Y = 0 .. 1, \text{color} = ["Niagara 1", \\
&\quad \text{"Niagara 1"}], \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \\
&\quad \text{labels} = ["X", "Y"], \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}\right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fig\_s\_2\_ad &:= \text{plot}\left(\frac{\text{curva\_s\_2}(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_2}{L} .. \frac{x\_3}{L}, Y = 0 .. 1, \text{color} = ["Niagara 1", \\
&\quad \text{"Niagara 1"}], \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \\
&\quad \text{labels} = ["X", "Y"], \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}\right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fig\_s\_3\_ad &:= \text{plot}\left(\frac{\text{curva\_s\_3}(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_3}{L} .. \frac{x\_4}{L}, Y = 0 .. 1, \text{color} = ["Niagara 1", \\
&\quad \text{"Niagara 1"}], \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{horizontal}], \text{labelfont} = ["ROMAN", 20], \\
&\quad \text{labels} = ["X", "Y"], \text{font} = [\text{Times}, 17], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED}\right) :
\end{aligned}$$

$$fig\_s\_4\_ad := plot\left(\frac{curva\_s\_4(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_4}{L} .. \frac{x\_5}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$$fig\_s\_5\_ad := plot\left(\frac{curva\_s\_5(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_5}{L} .. \frac{x\_6}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$$fig\_s\_6\_ad := plot\left(\frac{curva\_s\_6(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_6}{L} .. \frac{x\_7}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

### FIGURES (INF) :

$$fig\_i\_1\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_1(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_1}{L} .. \frac{x\_2}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$$fig\_i\_2\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_2(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_2}{L} .. \frac{x\_3}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$$fig\_i\_3\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_3(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_3}{L} .. \frac{x\_4}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$$fig\_i\_4\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_4(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_4}{L} .. \frac{x\_5}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right) :$$

$fig\_i\_5\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_5(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_5}{L} .. \frac{x\_6}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right):$

$fig\_i\_6\_ad := plot\left(\frac{curva\_i\_6(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_6}{L} .. \frac{x\_7}{L}, Y = 0 .. 1, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["X", "Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED\right):$

$display(fig\_s\_1\_ad, fig\_s\_2\_ad, fig\_s\_3\_ad, fig\_s\_4\_ad, fig\_s\_5\_ad, fig\_s\_6\_ad, fig\_i\_1\_ad, fig\_i\_2\_ad, fig\_i\_3\_ad, fig\_i\_4\_ad, fig\_i\_5\_ad, fig\_i\_6\_ad)$

## # **ÁREA, PERÍMETRO, DIÂMETRO HIDRÁULICO E COMPRIMENTO CARACTERÍSTICO**

$Area\_1 := int\left(\frac{curva\_s\_1(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_1}{L} .. \frac{x\_2}{L}\right) - int\left(\frac{curva\_i\_1(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_1}{L} .. \frac{x\_2}{L}\right):$

$Area\_2 := int\left(\frac{curva\_s\_2(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_2}{L} .. \frac{x\_3}{L}\right) - int\left(\frac{curva\_i\_2(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_2}{L} .. \frac{x\_3}{L}\right):$

$Area\_3 := int\left(\frac{curva\_s\_3(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_3}{L} .. \frac{x\_4}{L}\right) - int\left(\frac{curva\_i\_3(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_3}{L} .. \frac{x\_4}{L}\right):$

$Area\_4 := int\left(\frac{curva\_s\_4(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_4}{L} .. \frac{x\_5}{L}\right) - int\left(\frac{curva\_i\_4(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_4}{L} .. \frac{x\_5}{L}\right):$

$$Area\_5 := \int \left( \frac{curva\_s\_5(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_5}{L} \dots \frac{x\_6}{L} \right) - \int \left( \frac{curva\_i\_5(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_5}{L} \dots \frac{x\_6}{L} \right) :$$

$$Area\_6 := \int \left( \frac{curva\_s\_6(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_6}{L} \dots \frac{x\_7}{L} \right) - \int \left( \frac{curva\_i\_6(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_6}{L} \dots \frac{x\_7}{L} \right) :$$

$$Area := Area\_1 + Area\_2 + Area\_3 + Area\_4 + Area\_5 + Area\_6$$

$$Perimetro\_1 := Perimetro\_1\_di :$$

$$Perimetro\_2 := Perimetro\_2\_di :$$

$$Perimetro\_3 := Perimetro\_3\_di :$$

$$Perimetro\_4 := Perimetro\_4\_di :$$

$$Perimetro\_5 := Perimetro\_5\_di :$$

$$Perimetro\_6 := Perimetro\_6\_di :$$

$$Perimetro\_7 := Perimetro\_7\_di :$$

$$Perimetro\_8 := Perimetro\_8\_di :$$

$$Perimetro\_9 := Perimetro\_9\_di :$$

$$Perimetro\_10 := Perimetro\_10\_di :$$

$$Perimetro\_11 := Perimetro\_11\_di :$$

$$Perimetro\_12 := Perimetro\_12\_di :$$

$$Perimetro := Perimetro\_1 + Perimetro\_2 + Perimetro\_3 + Perimetro\_4 + Perimetro\_5 + Perimetro\_6 + Perimetro\_7 + Perimetro\_8 + Perimetro\_9 + Perimetro\_10 + Perimetro\_11 + Perimetro\_12$$

$$D\_h := \frac{4 \cdot Area}{Perimetro}$$

#

## QUANTIDADES DE FUNÇÕES BASES

$k := 5$

#

## CONTAS PARA A ÁREA\_1

$$g\_1 := (X, Y) \rightarrow (curva\_s\_1(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva\_i\_1(L \cdot X) - L \cdot Y) :$$

$$f_1 := [g_1(X, Y), g_1(X, Y) \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X, g_1(X, Y) \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X^2, g_1(X, Y) \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X^3, g_1(X, Y) \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X^4, g_1(X, Y) \cdot Y^5, g_1(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X^5, g_1(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, g_1(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g_1(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^5, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g_1(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^5, g_1(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g_1(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g_1(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g_1(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^5]:$$

$$E_{j_1} := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_1} \int \left( \int (f_1[j], Y = \frac{curva_i_1(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_1(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_1}{L} \dots \frac{x_2}{L} \right):$$

$$E_1 := Matrix(k, 1, E_{j_1}):$$

$$evalf(E_1):$$

$$A_{ij_1} := (i, j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_1} \int \left( \int (diff(f_1[i], X) \cdot diff(f_1[j], X) + diff(f_1[i], Y) \cdot diff(f_1[j], Y)), Y = \frac{curva_i_1(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_1(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_1}{L} \dots \frac{x_2}{L} \right):$$

$$A_1 := Matrix(k, k, A_{ij_1}): \quad evalf(A_1):$$

#

**CONTAS PARA A ÁREA 2**

$$g_2 := (X, Y) \rightarrow (curva_s_2(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva_i_2(L \cdot X) - L \cdot Y):$$

$$f_2 := [g_2(X, Y), g_2(X, Y) \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X, g_2(X, Y) \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X^2, g_2(X, Y) \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X^3, g_2(X, Y) \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X^4, g_2(X, Y) \cdot Y^5, g_2(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X^5, g_2(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, g_2(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g_2(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^5, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g_2(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^5, g_2(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g_2(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g_2(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g_2(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^5]:$$

$$E_{j_2} := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_2} \int \left( \int (f_2[j], Y = \frac{curva_i_2(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_2(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_2}{L} \dots \frac{x_3}{L} \right):$$

$$E_2 := Matrix(k, 1, E_{j_2}):$$

$$evalf(E_2):$$

$$A_{ij\_2} := (i,j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area\_2} \int \left( \int \left( (diff(f\_2[i], X) \cdot diff(f\_2[j], X) + diff(f\_2[i], Y) \cdot diff(f\_2[j], Y)), Y = \frac{curva\_i\_2(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_2(L \cdot X)}{L} \right), X = \frac{x\_2}{L} \dots \frac{x\_3}{L} \right) \right) :$$

$$A\_2 := Matrix(k, k, A_{ij\_2}) : \quad evalf(A\_2) :$$

#

**CONTAS PARA A ÁREA\_3**

$$g\_3 := (X, Y) \rightarrow (curva\_s\_3(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva\_i\_3(L \cdot X) - L \cdot Y) :$$

$$f\_3 := [g\_3(X, Y), g\_3(X, Y) \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X, g\_3(X, Y) \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X^2, g\_3(X, Y) \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X^3, g\_3(X, Y) \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X^4, g\_3(X, Y) \cdot Y^5, g\_3(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X^5, g\_3(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, g\_3(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g\_3(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^5, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g\_3(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^5, g\_3(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g\_3(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g\_3(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g\_3(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^5] :$$

$$E_{j\_3} := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area\_3} \int \left( \int \left( f\_3[j], Y = \frac{curva\_i\_3(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_3(L \cdot X)}{L} \right), X = \frac{x\_3}{L} \dots \frac{x\_4}{L} \right) \right) :$$

$$E\_3 := Matrix(k, 1, E_{j\_3}) :$$

$$evalf(E\_3) :$$

$$A_{ij\_3} := (i,j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area\_3} \int \left( \int \left( (diff(f\_3[i], X) \cdot diff(f\_3[j], X) + diff(f\_3[i], Y) \cdot diff(f\_3[j], Y)), Y = \frac{curva\_i\_3(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_3(L \cdot X)}{L} \right), X = \frac{x\_3}{L} \dots \frac{x\_4}{L} \right) \right) :$$

$$A\_3 := Matrix(k, k, A_{ij\_3}) :$$

$$evalf(A\_3) :$$

#

**CONTAS PARA A ÁREA\_4**

$$g\_4 := (X, Y) \rightarrow (curva\_s\_4(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva\_i\_4(L \cdot X) - L \cdot Y) :$$

$$f_4 := [g_4(X, Y), g_4(X, Y) \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X, g_4(X, Y) \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X^2, g_4(X, Y) \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X^3, g_4(X, Y) \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X^4, g_4(X, Y) \cdot Y^5, g_4(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X^5, g_4(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, g_4(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g_4(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^5, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g_4(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^5, g_4(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g_4(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g_4(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g_4(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^5]:$$

$$Ej_4 := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_4} \int \left( \int (f_4[j], Y = \frac{curva_i_4(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_4(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_4}{L} \dots \frac{x_5}{L} \right):$$

$$E_4 := Matrix(k, 1, Ej_4):$$

$$evalf(E_4):$$

$$Aij_4 := (i, j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_4} \int \left( \int (diff(f_4[i], X) \cdot diff(f_4[j], X) + diff(f_4[i], Y) \cdot diff(f_4[j], Y)), Y = \frac{curva_i_4(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_4(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_4}{L} \dots \frac{x_5}{L} \right):$$

$$A_4 := Matrix(k, k, Aij_4): \quad evalf(A_4):$$

#

**CONTAS PARA A ÁREA\_5**

$$g_5 := (X, Y) \rightarrow (curva_s_5(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva_i_5(L \cdot X) - L \cdot Y):$$

$$f_5 := [g_5(X, Y), g_5(X, Y) \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X, g_5(X, Y) \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X^2, g_5(X, Y) \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X^3, g_5(X, Y) \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X^4, g_5(X, Y) \cdot Y^5, g_5(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X^5, g_5(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, g_5(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g_5(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^5, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g_5(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^5, g_5(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g_5(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g_5(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g_5(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^5]:$$

$$Ej_5 := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_5} \int \left( \int (f_5[j], Y = \frac{curva_i_5(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_5(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_5}{L} \dots \frac{x_6}{L} \right):$$

$$E_5 := Matrix(k, 1, Ej_5): \quad evalf(E_5):$$

$$Aij_5 := (i, j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area_5} \int \left( \int (diff(f_5[i], X) \cdot diff(f_5[j], X) + diff(f_5[i], Y) \cdot diff(f_5[j], Y)), Y = \frac{curva_i_5(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva_s_5(L \cdot X)}{L}) \right), X = \frac{x_5}{L} \dots \frac{x_6}{L} \right):$$

$$A_5 := Matrix(k, k, Aij_5): \quad evalf(A_5):$$

#

**CONTAS PARA A ÁREA\_6**

$$g\_6 := (X, Y) \rightarrow (curva\_s\_6(L \cdot X) - L \cdot Y) \cdot (curva\_i\_6(L \cdot X) - L \cdot Y) :$$

$$f\_6 := [g\_6(X, Y), g\_6(X, Y) \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X, g\_6(X, Y) \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \cdot X \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X^2, \\ g\_6(X, Y) \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X^3, g\_6(X, Y) \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \\ \cdot X \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X^4, g\_6(X, Y) \cdot Y^5, g\_6(X, Y) \cdot X \cdot Y^4, \\ g\_6(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X^5, g\_6(X, Y) \cdot X \cdot Y^5, \\ g\_6(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y, g\_6(X, Y) \cdot X^2 \\ \cdot Y^5, g\_6(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^2, g\_6(X, Y) \\ \cdot X^3 \cdot Y^5, g\_6(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^3, g\_6(X, Y) \cdot X^4 \cdot Y^5, g\_6(X, Y) \cdot X^5 \cdot Y^4, g\_6(X, Y) \\ \cdot X^5 \cdot Y^5] :$$

$$Ej\_6 := j \rightarrow \left( -\frac{1}{Area\_6} \int \left( \int \left( f\_6[j], Y = \frac{curva\_i\_6(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_6(L \cdot X)}{L} \right), X = \frac{x\_6}{L} \right. \right. \\ \left. \left. \dots \frac{x\_7}{L} \right) \right) :$$

$$E\_6 := Matrix(k, 1, Ej\_6) :$$

$$evalf(E\_6) :$$

$$Aij\_6 := (i, j) \rightarrow \left( -\frac{1}{Area\_6} \int \left( \int \left( (diff(f\_6[i], X) \cdot diff(f\_6[j], X) + diff(f\_6[i], Y) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cdot diff(f\_6[j], Y)), Y = \frac{curva\_i\_6(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_6(L \cdot X)}{L} \right), X = \frac{x\_6}{L} \dots \frac{x\_7}{L} \right) \right) :$$

$$A\_6 := Matrix(k, k, Aij\_6) : \quad evalf(A\_6) :$$

$$E\_t := E\_1 + E\_2 + E\_3 + E\_4 + E\_5 + E\_6$$

$$A\_t := A\_1 + A\_2 + A\_3 + A\_4 + A\_5 + A\_6$$

$$evalf(A\_t^{-1}) :$$

$$Di\_t := evalf(evalf(A\_t^{-1}) \cdot evalf(E\_t)) :$$

$$l\_t := j \rightarrow evalf(Di\_t[j, 1]) :$$

$$W1 := k \rightarrow sum('l\_t(j) \cdot f\_1[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W1(k) :$$

$$graf\_1 := plot3d \left( W1(k), Y = \frac{curva\_i\_1(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_1(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x\_1}{L} \dots \frac{x\_2}{L}, \right. \\ \left. labelfont = ["ROMAN", 17], labels = ["Y", "X", "W(X,Y)"] \right) ;$$

$$W2 := k \rightarrow sum('l\_t(j) \cdot f\_2[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W2(k) :$$

$$\text{graf}_2 := \text{plot3d}\left(W2(k), Y = \frac{\text{curva } i \ 2(L \cdot X)}{L} \dots \frac{\text{curva } s \ 2(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x \ 2}{L} \dots \frac{x \ 3}{L}, \text{labelfont} = ["\text{ROMAN}", 17], \text{labels} = ["Y", "X", "W(X,Y)"]\right);$$

$$W3 := k \rightarrow \text{sum}('l\_t(j) \cdot f\_3[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W3(k) :$$

$$\text{graf}_3 := \text{plot3d}\left(W3(k), Y = \frac{\text{curva } i \ 3(L \cdot X)}{L} \dots \frac{\text{curva } s \ 3(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x \ 3}{L} \dots \frac{x \ 4}{L}, \text{labelfont} = ["\text{ROMAN}", 17], \text{labels} = ["Y", "X", "W(X,Y)"]\right) :$$

$$\text{display}(\text{graf}_3)$$

$$W4 := k \rightarrow \text{sum}('l\_t(j) \cdot f\_4[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W4(k) :$$

$$\text{graf}_4 := \text{plot3d}\left(W4(k), Y = \frac{\text{curva } i \ 4(L \cdot X)}{L} \dots \frac{\text{curva } s \ 4(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x \ 4}{L} \dots \frac{x \ 5}{L}, \text{labelfont} = ["\text{ROMAN}", 17], \text{labels} = ["Y", "X", "W(X,Y)"]\right) :$$

$$\text{display}(\text{graf}_4)$$

$$W5 := k \rightarrow \text{sum}('l\_t(j) \cdot f\_5[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W5(k) :$$

$$\text{graf}_5 := \text{plot3d}\left(W5(k), Y = \frac{\text{curva } i \ 5(L \cdot X)}{L} \dots \frac{\text{curva } s \ 5(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x \ 5}{L} \dots \frac{x \ 6}{L}, \text{labelfont} = ["\text{ROMAN}", 17], \text{labels} = ["Y", "X", "W(X,Y)"]\right) :$$

$$\text{display}(\text{graf}_5)$$

$$W6 := k \rightarrow \text{sum}('l\_t(j) \cdot f\_6[j]', j = 1 .. k) :$$

$$W6(k) :$$

$$\text{graf}_6 := \text{plot3d}\left(W6(k), Y = \frac{\text{curva } i \ 6(L \cdot X)}{L} \dots \frac{\text{curva } s \ 6(L \cdot X)}{L}, X = \frac{x \ 6}{L} \dots \frac{x \ 7}{L}, \text{labelfont} = ["\text{ROMAN}", 17], \text{labels} = ["Y", "X", "W(X,Y)"]\right) :$$

$$\text{display}(\text{graf}_6)$$

$$\text{display}(\text{graf}_1, \text{graf}_2, \text{graf}_3, \text{graf}_4, \text{graf}_5, \text{graf}_6)$$

$$Wm\_1 := evalf\left(\frac{1}{Area\_1} \cdot int\left(int\left(W1(k), Y = \frac{curva\_i\_1(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_1(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_1}{L} \dots \frac{x\_2}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_2 := evalf\left(\frac{1}{Area\_2} \cdot int\left(int\left(W2(k), Y = \frac{curva\_i\_2(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_2(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_2}{L} \dots \frac{x\_3}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_3 := evalf\left(\frac{1}{Area\_3} \cdot int\left(int\left(W3(k), Y = \frac{curva\_i\_3(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_3(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_3}{L} \dots \frac{x\_4}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_4 := evalf\left(\frac{1}{Area\_4} \cdot int\left(int\left(W4(k), Y = \frac{curva\_i\_4(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_4(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_4}{L} \dots \frac{x\_5}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_5 := evalf\left(\frac{1}{Area\_5} \cdot int\left(int\left(W5(k), Y = \frac{curva\_i\_5(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_5(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_5}{L} \dots \frac{x\_6}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_6 := evalf\left(\frac{1}{Area\_6} \cdot int\left(int\left(W6(k), Y = \frac{curva\_i\_6(L \cdot X)}{L} \dots \frac{curva\_s\_6(L \cdot X)}{L}\right), X\right.\right. \\ \left.\left. = \frac{x\_6}{L} \dots \frac{x\_7}{L}\right)\right);$$

$$Wm\_t := \frac{1}{6} \cdot (Wm\_1 + Wm\_2 + Wm\_3 + Wm\_4 + Wm\_5 + Wm\_6)$$

###

NÚMERO DE POUSEUILLE

$$Wm\_tt := [Wm\_1, Wm\_2, Wm\_3, Wm\_4, Wm\_5, Wm\_6]$$

$$D\_h\_h := \left[ \frac{4 \cdot Area\_1}{Perimetro\_1 + Perimetro\_7}, \frac{4 \cdot Area\_2}{Perimetro\_2 + Perimetro\_8}, \right. \\ \left. \frac{4 \cdot Area\_3}{Perimetro\_3 + Perimetro\_9}, \frac{4 \cdot Area\_4}{Perimetro\_4 + Perimetro\_10}, \right. \\ \left. \frac{4 \cdot Area\_5}{Perimetro\_5 + Perimetro\_11}, \frac{4 \cdot Area\_6}{Perimetro\_6 + Perimetro\_12} \right]$$

$$fRe\_g := \left[ \frac{D\_h\_h[1]^2}{2 \cdot Wm\_tt[1]}, \frac{D\_h\_h[2]^2}{2 \cdot Wm\_tt[2]}, \frac{D\_h\_h[3]^2}{2 \cdot Wm\_tt[3]}, \frac{D\_h\_h[4]^2}{2 \cdot Wm\_tt[4]}, \frac{D\_h\_h[5]^2}{2 \cdot Wm\_tt[5]}, \right. \\ \left. \frac{D\_h\_h[6]^2}{2 \cdot Wm\_tt[6]} \right]$$

$$fRe\_l := \frac{1}{6} \cdot (fRe\_g[1] + fRe\_g[2] + fRe\_g[3] + fRe\_g[4] + fRe\_g[5] + fRe\_g[6])$$

$$fRe\_tt := \left( \frac{1}{6} \cdot (D\_h\_h[1] + D\_h\_h[2] + D\_h\_h[3] + D\_h\_h[4] + D\_h\_h[5] + D\_h\_h[6]) \right)^2 \left/ \left( 2 \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot (Wm\_tt[1] + Wm\_tt[2] + Wm\_tt[3] + Wm\_tt[4] + Wm\_tt[5] + Wm\_tt[6]) \right) \right) \right)$$

$$fRe := \frac{D \cdot h^2}{2 \cdot Wm\_t}$$

$$\frac{1}{6} (D\_h\_h[1] + D\_h\_h[2] + D\_h\_h[3] + D\_h\_h[4] + D\_h\_h[5] + D\_h\_h[6])$$

### NÚMERO DE POUSEUILLE

$$Wm\_tt\_a := [Wm\_1\_a, Wm\_2\_a, Wm\_3\_a, Wm\_4\_a, Wm\_5\_a, Wm\_6\_a]$$

$$D\_h\_h\_a := \left[ \frac{4 \cdot Area\_1}{Perimetro\_1 + Perimetro\_7}, \frac{4 \cdot Area\_2}{Perimetro\_2 + Perimetro\_8}, \frac{4 \cdot Area\_3}{Perimetro\_3 + Perimetro\_9}, \frac{4 \cdot Area\_4}{Perimetro\_4 + Perimetro\_10}, \frac{4 \cdot Area\_5}{Perimetro\_5 + Perimetro\_11}, \frac{4 \cdot Area\_6}{Perimetro\_6 + Perimetro\_12} \right]$$

$$fRe\_g\_a := \left[ \frac{D\_h\_h\_a[1]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[1]}, \frac{D\_h\_h\_a[2]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[2]}, \frac{D\_h\_h\_a[3]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[3]}, \frac{D\_h\_h\_a[4]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[4]}, \frac{D\_h\_h\_a[5]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[5]}, \frac{D\_h\_h\_a[6]^2}{2 \cdot Wm\_tt\_a[6]} \right]$$

$$fRe\_l\_a := \frac{1}{6} \cdot (fRe\_g\_a[1] + fRe\_g\_a[2] + fRe\_g\_a[3] + fRe\_g\_a[4] + fRe\_g\_a[5] + fRe\_g\_a[6])$$

$$fRe\_tt := \left( \frac{1}{6} \cdot (D\_h\_h\_a[1] + D\_h\_h\_a[2] + D\_h\_h\_a[3] + D\_h\_h\_a[4] + D\_h\_h\_a[5] + D\_h\_h\_a[6]) \right)^2 \left/ \left( 2 \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot (Wm\_tt\_a[1] + Wm\_tt\_a[2] + Wm\_tt\_a[3] + Wm\_tt\_a[4] + Wm\_tt\_a[5] + Wm\_tt\_a[6]) \right) \right) \right)$$

$$fRe := \frac{D \cdot h^2}{2 \cdot Wm\_t\_a}$$

Para achar o novo fator de forma temos que :

$$Fval := \frac{1}{8} \cdot fRe\_tt$$

Elaborada pelo autor, 2023