UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOICE DAISYELLE BEZERRA SILVA

TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

MONTEIRO
2023

JOICE DAISYELLE BEZERRA SILVA

TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática pura

Orientador: Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva

MONTEIRO
2023

S586 Silva, Joice Daisyelle Bezerra.
Teorema de Hahn-Banach e aplicações [manuscrito] / Joice Daisyelle Bezerra Silva. - 2023.
63 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Teorema de Hahn-Banach. 2. Análise funcional. 3. Funcionais lineares. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/970

Biblioteca José Rafael de Menezes

JOICE DAISYELLE BEZERRA SILVA

TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática pura

Aprovada em: 28/11/2023.

BANCA EXAMINADORA

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva
Orientador

Natan de Assis Lima

Prof. Dr. Natan de Assis Lima
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À Deus por permitir que tudo acontecesse. Aos meus pais, Jota e Dorinha, por todo apoio e incentivo ao longo dessa jornada. Ao meu irmão, Diego, por toda a ajuda e parceria até aqui.

Ao meu orientador, Dr. Cládio Odair Pereira da Silva, por todas as contribuições acadêmicas no decorrer do curso e neste trabalho.

Aos membros da banca, Dr. Natan de Assis Lima e Me. Luciano dos Santos Ferreira por aceitarem fazer parte desta, e também, pelas contribuições realizadas.

Aos amigos que conheci durante a graduação, pela parceria ao longo deste processo.

“Vocês sabem que escrevo vagarosamente. Isso deve-se principalmente ao fato de que nunca estou satisfeito até poder dizer o máximo possível em poucas palavras, e escrever concisamente toma muito mais tempo do que quando se é prolixo.”

(Karl Friedrich Gauss)

RESUMO

O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados da Análise Funcional, que trata da extensão de funcionais lineares e separação de conjuntos convexos. As aplicações deste teorema são utilizadas ao longo de toda a teoria de Análise Funcional. Neste trabalho enunciamos e demonstramos o Teorema de Hahn-Banach e apresentamos algumas de suas aplicações. Assim, para melhor compreender a demonstração e as aplicações aqui estudadas, realizamos um breve estudo dos principais conceitos envolvendo Espaços Métricos e Álgebra Linear, teorias estas que são a base da Análise Funcional. Este trabalho inicia-se por apresentar um pouco da história do teorema abordado, seguindo da teoria de Espaços de Banach, Operadores e Funcionais Lineares Limitados. Em seguida focamos no enunciado e demonstração do Teorema de Hahn-Banach e em algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, análise funcional, funcionais lineares.

ABSTRACT

The Hahn-Banach Theorem is one of the main results in Functional Analysis, which deals with the extension of linear functionals and separation of convex sets. The applications of this theorem are used throughout the entire theory of Functional Analysis. In this work, we state and prove the Hahn-Banach Theorem and present some of its applications. Thus, to better understand the proof and the applications studied here, we conduct a brief study of the main concepts involving Metric Spaces and Linear Algebra, which form the foundation of Functional Analysis. This work begins by presenting a bit of the history of the theorem under consideration, followed by the theory of Banach Spaces, Operators, and Bounded Linear Functionals. We then focus on the statement and proof of the Hahn-Banach Theorem and some of its applications.

Key-words: Hahn-Banach theorem, Functional analysis, Linear Functionals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo da Análise matemática que, por sua vez, trata-se do estudo do espaço de funções. Seu desenvolvimento, juntamente com sua variedade de aplicações, foi uma das maiores conquistas matemáticas na primeira metade do século XX. O conceito de espaço funcional é central neste ramo, tal conceito entende-se por um espaço topológico, no qual os "pontos" são funções (Birkhoff; Kreyszig, 1984). Tal área utiliza-se de diversos conceitos da Álgebra Linear mas, com ênfase para espaços vetoriais de dimensão infinita, esta desempenha um importante papel em outros ramos, como por exemplo as Equações Diferenciais Parciais.

Um de seus principais resultados é o Teorema de Hahn-Banach, o qual permite que funcionais lineares definidos em um subespaço vetorial sejam estendidos para todo o espaço. Este possui duas versões: Analítica e Geométrica, de modo que a primeira pode ser expressa de duas outras maneiras: real e complexa.

O teorema que hoje conhecemos como Teorema de Hahn-Banach, possui duas versões, a primeira, provada por Hans Hanh no ano de 1927, sob influência de trabalhos de Eduard Helly publicados nos anos de 1912 e 1921. Já a segunda, e também atual forma do teorema, foi apresentada por Stefan Banach no ano de 1929, a qual diferencia-se da primeira por utilizar funcionais sublineares ao invés de funcionais lineares contínuos. Embora tenha sido provada por Banach, esta versão também possui influência de Helly e Hahn devido suas contribuições com a primeira versão. A nomenclatura atual do teorema foi definida pelos autores Bohnenblust e Sobczyk em 1938 (Buskes, 1993).

Neste trabalho buscamos demonstrar o Teorema em questão, nas suas formas Analítica, que trata da extensão de funcionais; e Geométrica, que trata da separação de convexos por hiperplanos. Além disso, faremos algumas de suas aplicações. Para tal, faremos a apresentação de conteúdos preliminares, os quais são necessários para compreensão dos resultados apresentados ao longo do trabalho. Os conceitos aqui apresentados tem referência nas bibliografias clássicas da análise funcional, tais como (Kreyszig, 1989) e (Brezis, 2010).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades dos espaços de Banach. Começaremos definindo espaços normado, daremos vários exemplos de espaços de Banach e no final apresentaremos e demonstraremos um resultado de completamento de espaços vetoriais normados. Tais conceitos nos ajudarão a apresentar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach e apresentar algumas de suas aplicações que é o objetivo principal do nosso trabalho.

2.1 Espaços Normados

Nesta seção iremos definir os espaços vetoriais normados, daremos alguns exemplos desses espaços e apresentaremos alguns resultados que serão bastante úteis no desenvolvimento deste trabalho.

No que segue E é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ denotado por $\mathbb{K}$.

Definição 2.1. Uma norma em E, é uma aplicação $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geqslant 0, \quad \forall x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in E$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$

Neste caso dizemos que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado.

Observação 2.1. Se $\|\cdot\|$ satisfaz apenas as propriedades (2) e (3), então $\|\cdot\|$ é dita uma seminorma. A propriedade (3) é chamada desigualdade triangular.

Exemplo 2.1. O espaço $E = \mathbb{R}$ com a norma usual $\|x\| = |x|$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 2.2. O espaço vetorial $E = \mathbb{R}^n$ munido das normas

$$\|x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geqslant 1; \quad \|x\|_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$$

respectivamente, são espaços vetoriais normados. A norma $\|\cdot\|_p$, quando $p = 2$, chamamos de norma euclidiana e é denotada por $\|\cdot\|_e$, quando $p = 1$ temos a norma da soma.

Exemplo 2.3. O espaço vetorial $C([a,b];\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f$ é contínua$\}$ das funções contínuas, munido com as normas

$$\|f\|_m = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|; \quad \|f\|_0 = \int_a^b |f(t)|dt,$$

respectivamente, são espaços vetoriais normados. Note que $\|f\|_0 \leqslant (b-a)\|f\|_m$.

Exemplo 2.4. Em particular, o espaço $P([a,b]) = \{p : [a,b] \to \mathbb{R}\}$, dos polinômios com coeficientes reais, munido com as normas

$$\|p\|_m = \max_{t\in[a,b]} |p(t)|; \quad \|p\|_0 = \int_a^b |p(t)|dt,$$

respectivamente, são espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.5. Seja $E = C^1([0,1];\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}; f,\ f'$ são contínuas$\}$. Temos que $\|f\| := |f(0)|$ e $\|f\| := \|f'\|_m = \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ são seminormas. Então E munido da norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_m + \|f'\|_m.$$

é um espaço vetorial normado.

Agora daremos alguns exemplos de alguns espaços de sequências.

Exemplo 2.6. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{(x_j); x_j \in \mathbb{R}\}$ o espaço de sequências e considere o espaço

$$\ell^\infty = \{(x_j); \exists\ c > 0 \text{ com } |x_j| \leqslant c\},$$

das sequências limitadas. Temos que $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$. Sendo $x = (x_j)$, defina $\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$, logo $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 2.7. Seja $C = \{(x_j); \lim_{j\to\infty} x_j = a\}$, o espaço de todas as sequências convergentes. Note que $C \subset \ell^\infty$ e $(C, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Em particular, denotamos por $C_0 = \{(x_j); \lim_{j\to\infty} x_j = 0\}$, o espaço de todas as sequências que convergem para zero e

$$C_{00} = \{(x_n); \exists\ j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0,\ \forall\ j \geqslant j_0\},$$

ambos com a norma $\|\cdot\|_\infty$, também são espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.8. Considere

$$\ell^1 = \left\{(x_j); \sum_{j=1}^\infty |x_j| < \infty\right\}.$$

o espaço vetorial de todas as sequências que formam uma série absolutamente convergente. Note que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Agora defina $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |x_j|$, temos que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, também é um espaço vetorial normado.

Exemplo 2.9. Fixe $1 < p < \infty$. Considere o espaço

$$\ell^p = \left\{ (x_j); \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

Note que ℓ^p é um subespaço vetorial. De fato, seja $x = (x_j),\ y = (y_j) \in \ell^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda x = (\lambda x_j)$ e $x + y = (x_j + y_j)$. Assim

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

logo $\lambda x \in \ell^p$. E como $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$ com $a, b \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} |x_j + y_j|^p &\leqslant (|x_j| + |y_j|)^p \leqslant 2^p(|x_j|^p + |y_j|^p) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p &\leqslant 2^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right) < \infty. \end{aligned}$$

Então $x + y \in \ell^p$. Temos que o espaço ℓ^p com a norma $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é um espaço vetorial normado. Com efeito, as propriedades (1) e (2) são triviais, para mostrar a desigualdade triangular precisamos dos seguintes lemas.

Lema 2.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $a, b \geqslant 0,\ p, q \geqslant 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.1}$$

Demonstração: Defina $x = a^p, y = b^q$, daí $a = x^{\frac{1}{p}}, b = y^{\frac{1}{q}}$. Logo (2.1) é equivalente à

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y. \tag{2.2}$$

Sem perda de generalidade supomos $y \leqslant x$. Dividindo (2.2) por y temos

$$\frac{x^{\frac{1}{p}}}{y^{1-\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{y} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{q} \tag{2.3}$$

Considere $t = \frac{x}{y} \geqslant 1$ e a aplicação

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = \frac{1}{p}t + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Afirmação: Temos que $f(t) \geqslant 0$, para $t \geqslant 1$.

De fato, $f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$ e

$$f'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p}(1 - t^{-\frac{1}{q}}) = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{t^{\frac{1}{q}}}\right) \geqslant 0,$$

logo f é crescente, o que mostra a afirmação.

Assim pela afirmação temos $t^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p}t + \frac{1}{q}$ e assim temos (2.3), o que equivalentemente mostra (2.1).

■

Lema 2.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $x, y \in \ell^p$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $xy \in \ell^p$ e*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

Demonstração: Considere $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ e $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$, pela desigualdade de Young temos

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q.$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &\leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q \\
&\leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\|y\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q.$$

■

Lema 2.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $x \in \ell^p$ e $p \geqslant 1$ então*

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|y_i|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x+y\|_p^{p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p) \\
&\Rightarrow \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.
\end{aligned}$$

■

A desigualdade de Minkowski mostra a desigualdade triangular para a norma $\|\cdot\|_p$ e assim ℓ^p com a norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço vetorial normado.

Observação 2.2. 1. Note que $C_{00} \subsetneq \ell^p \subsetneq C_0 \subsetneq C \subsetneq l^\infty$.

2. Se $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ então $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$, isto é $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$. De fato, temos que $\dfrac{|x_i|}{\|x\|_p} \leqslant 1$. Logo

$$\begin{aligned} &\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^q \leqslant \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_p^q}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^q \leqslant \frac{1}{\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p = 1 \\ &\Rightarrow \|x\|_q^q \leqslant \|x\|_p^q \Rightarrow \|x\|_q \leqslant \|x\|_p. \end{aligned}$$

Definição 2.2. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial normado E, são equivalentes, se existem $c_1, c_2 > 0$, tais que

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Observação 2.3. Seja E um espaço de dimensão finita, digamos $\dim E = n$ e $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de E. Se $x \in E$ temos $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Consideremos a $\|x\|_s = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$ e $\|\cdot\|$ uma norma arbitrária em E, temos

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|\|e_i\| \leqslant M\|x\|_s,$$

onde $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|e_i\|$.

Lema 2.4. *Seja E um espaço vetorial normado, com $\dim E = n$, então existe $c > 0$ tal que*

$$\|x\|_s \leqslant c\|x\|, \ \forall x \in E. \tag{2.4}$$

Demonstração: Note que (2.4) é equivalente a

$$\frac{1}{c} \leqslant \left\|\frac{x_1}{\|x\|_s}e_1 + \cdots + \frac{x_n}{\|x\|_s}e_n\right\| \Leftrightarrow \frac{1}{c} \leqslant \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\| \tag{2.5}$$

onde,

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| = \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|x\|_s} = 1.$$

Suponha que (2.5) seja falso, isto é, existe uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ representada por, $x_m = a_{m_1}e_1 + \cdots + a_{m_n}e_n$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{m_i}| = 1, \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \|x_m\| \to 0.$$

Para $i = 1, \ldots, n$, temos

$$|a_{m_i}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{m_i}| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsequência $(a_{m_i})_{m_i \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}}$ com $a_{m_i} \to a_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Em particular, se $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ temos

$$\|x_m - x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |a_{m_i} - a_i| \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} |a_{m_i}| \to \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1.$$

Portanto

$$\|x\| \leqslant \|x - x_m\| + \|x_m\| \leqslant M\|x - x_m\|_s + \|x_m\| \to 0 \Rightarrow \|x\| = 0.$$

Assim

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Rightarrow a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Absurdo, pois $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$. ∎

Corolário 2.1. Em um espaço vetorial normado de dimensão finita todas as normas são equivalentes.

Demonstração: Seja E um espaço vetorial normado tal que $\dim E = n$ e $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_3$ duas normas arbitrárias em E. Então temos

$$\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_s \leqslant Mc\|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_3 \leqslant M\|x\|_s \leqslant Mc\|x\|_3.$$

Daí

$$\|x\|_2 \leqslant Mc\|x\|_3 \leqslant (Mc)^2\|x\|_2 \Rightarrow \frac{1}{Mc}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_3 \leqslant Mc\|x\|_2.$$

∎

No geral, em espaço de dimensão infinita o Corolário 2.1 não é verdadeiro, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.10. Considere o espaço $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ com as normas

$$\|f\|_m = \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{e} \quad \|f\|_0 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Note que $\|f\|_0 \leqslant \|f\|_m$. Por outro lado não existe $c > 0$ tal que $\|f\|_m \leqslant c\|f\|_0$.

De fato, suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\|f\|_m \leqslant c\|f\|_0, \quad \forall f \in E.$$

Agora defina a sequência de funções dada por $f_n(t) = t^n$. Note que, $(f_n) \subset E$ com

$$\|f_n\|_m = \max_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = 1 \quad \text{e} \quad \|f_n\|_0 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Assim temos, $n + 1 \leqslant c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo!

Definição 2.3. Dizemos que $M \subseteq E$ é um conjunto compacto se toda sequência em M possui uma subsequência convergente.

Teorema 2.1. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $M \subseteq E$. Então M é compacto se, e somente se, M é fechado e limitado.*

Demonstração: Suponha que M é compacto. Seja $x \in \overline{M}$ então existe uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$, sendo M compacto existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x \in M$. Logo $M = \overline{M}$. donde M é fechado.

Agora suponha que M seja ilimitado, então o mesmo contém uma sequência (x_n) ilimitada tal que $\|x_n - b\| > n$ com b fixo. Assim (x_n) não possui uma subsequência convergente, o que contradiz o fato de M ser compacto. Portanto M é limitado.

Por outro lado suponha que M é fechado e limitado. Seja $\dim E = n$ e $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Considere uma sequência (x_m) de M. Logo

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m e_i.$$

Desde que M seja limitado, existe $k > 0$ tal que

$$\|x_m\| \leqslant k, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim pelo Lema 2.4, temos

$$k \geqslant \|x_m\| \geqslant c \sum_{i=1}^{n} |x_i^m| \geqslant c|x_i^m| \Rightarrow |x_i^m| \leqslant \frac{k}{c}.$$

Fixado i a sequência (x_i^m) é limitada em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (x_i^m) possui um ponto de acumulação x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim (x_m) possui uma subsequência (x_{m_k}) tal que

$$x_{m_k} \to x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Desde que M seja fechado temos que $x \in M$. Sendo (x_m) arbitrária temos que toda subsequência de (x_m) converge em M. Mostrando assim que M é compacto. ■

Lema 2.5 (Lema de Reisz). *Seja E um espaço vetorial normado e $M \subsetneq E$ um subespaço fechado. Então dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $u \in E \backslash M$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \varepsilon$.*

Demonstração: Fixe $v \in E \backslash M$ desde que M é fechado

$$\mathrm{d} = \operatorname{dist}(v, M) = \inf_{m \in M} \|v - m\| > 0.$$

Pela definição de ínfimo, existe $m_0 \in M$ tal que

$$\mathrm{d} < \|v - m_0\| \leqslant \frac{\mathrm{d}}{1 - \varepsilon}.$$

Note que se $\|v-m\| > \dfrac{\mathrm{d}}{1-\varepsilon}$, para todo $m \in M$, então

$$\inf_{m\in M} \|v-m\| > \frac{\mathrm{d}}{1-\varepsilon} > \mathrm{d}$$

o que é uma contradição, daí justifica-se que $\|v-m_0\| \leqslant \dfrac{\mathrm{d}}{1-\varepsilon}$. Tome $u = \dfrac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$, logo $\|u\| = 1$ e então,

$$\begin{aligned}
\|u-m\| &= \left\| \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v-m_0-m\|v-m_0\|}{\|v-m_0\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|v-m_0\|} \|v-(m_0+m||v-m_0||)\| \\
&\geqslant \frac{\mathrm{d}}{||v-m_0||} \geqslant 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando o ínfimo na desigualdade acima, obtemos

$$\mathrm{d} = \mathrm{dist}(u, M) \geqslant 1-\varepsilon.$$

■

Teorema 2.2. *Seja E um espaço vetorial normado então $\overline{B}_E = \{x \in E : ||x|| \leqslant 1\}$ é compacto se, e somente se,* $\dim E < \infty$.

Demonstração: A recíproca é imediata!

Suponha que $\dim E = +\infty$ então B_E não é compacta. De fato, seja $x_1 \in E$, com $\|x_1\| = 1$ e seja $M_1 = \langle x_1 \rangle$, temos que M_1 é fechado. Pelo Lema de Reisz com $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in E \backslash M_1$ com $\|x_2\| = 1$ tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Seja $M_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$, temos que M_2 é fechado. Pelo Lema de Reisz com $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $x_3 \in E \backslash M_2$ tal que $\|x_3\| = 1$ e $\|x_3 - x_1\| \geqslant \frac{1}{2}$ e $\|x_3 - x_2\| \geqslant \frac{1}{2}$.

Continuando com esse processo obtemos uma sequência (x_n) em $\overline{B}_E$ com $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ se $n \neq m$. Portanto (x_n) não é uma sequência de Cauchy, logo (x_n) não possui subsequência convergente, donde $\overline{B}_E$ não é compacta o que é um absurdo! ■

Definição 2.4. Seja E um espaço vetorial e $B \subseteq E$. Dizemos que B é uma base de Hammel se satisfaz:

i) O conjunto B é linearmente independente, ou seja, se para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in B$ o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

ii) O conjunto B gera o espaço E, isto é, $E = \langle B \rangle$, onde

$$\langle B \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n;\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ v_j \in B\}.$$

Definição 2.5. Dizemos que uma sequência (e_k) em E é uma base de Schawder para E se para todo $v \in E$ existe uma única sequência (α_k) de números reais tal que

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Exemplo 2.11. O ℓ^p, com $1 \leqslant p < \infty$, possui a seguinte base de Schauder (e_k), onde $e_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k-ésimo}, 0, \ldots)$. De fato, sendo $x = (x_j) \in \ell^p$, então

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty.$$

Devemos estudar a convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Observe que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Logo,

$$x - S_n = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Portanto,

$$\|x - S_n\|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty.$$

Logo, $x = \lim_{n \to \infty} S_n$ e assim

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

2.2 Espaços de Banach

Definição 2.6. Dizemos que uma sequência (x_n) no espaço vetorial normado E é de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \ \forall n, m \geqslant n_0.$$

Sabemos que, se (x_n) é uma sequência convergente em E então (x_n) é de Cauchy. Com efeito, se $x_n \to x_0$ então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_0.$$

Logo

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|x_m - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.12. Seja
$$p_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$
Temos que (p_n) é uma sequência de Cauchy em $(P([0,1]), \|\cdot\|_m)$, mas não converge para nenhum polinômio $p \in P([0,1])$.

De fato, sabemos que (p_n) converge uniformemente para

$$p(t) = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

em intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \geqslant n_0$ temos

$$|p_n(t) - p(t)| < \varepsilon$$

logo

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Assim considerando $m \geqslant n \geqslant n_0$

$$|p_n(t) - p_m(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|t|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Logo (p_n) é de Cauchy em $(P([0,1]), \|\cdot\|_m)$. Porém (p_n) não converge em $(P([0,1]), \|\cdot\|_m)$, pois $p(t) = e^t \notin P([0,1])$.

Observação 2.4. O mesmo vale para $(P([0,1]), \|\cdot\|_0)$.

Definição 2.7. Dizemos que o espaço vetorial normado E é um espaço de Banach, se toda sequência de Cauchy converge em E, isto é,

$$x_n \to x \in E \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Exemplo 2.13. O espaço $E = \mathbb{R}$, com $\|x\| = |x|$ é um espaço de Banach.

Exemplo 2.14. O espaço $E = \mathbb{R}^n$ com as normas $\|x\|_s, \|x\|_p, \|x\|_m$ respectivamente são espaços de Banach. De fato, seja (x_m) de Cauchy em E. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_k\|_s < \varepsilon, \quad \forall m, k \geqslant n_0.$$

Logo
$$\sum_{i=1}^{n} |x_m^i - x_k^i| < \varepsilon \Rightarrow |x_m^i - x_k^i| < \varepsilon, \quad \forall m, k \geqslant n_0.$$

Daí $(x_m^i)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo $x_m^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Sendo $x = (x^1, \ldots, x^n) \in E$ temos que, passando ao limite $m \to \infty$ tem-se

$$\|x_m - x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_m^i - x^i| \to 0.$$

Teorema 2.3. *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja E um espaço vetorial normado tal que $\dim E = n$. Considere (x_m) em E uma sequência de Cauchy. Sendo $\dim E = n$ considere $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Então temos

$$x_m = \alpha_1^m e_1 + \cdots + \alpha_n^m e_n. \tag{2.6}$$

Como (x_m) é de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_r\| < \varepsilon, \quad \forall m, r \geqslant k_0.$$

Logo pelo Lema 2.4 e por (2.6), temos

$$c\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^m - \alpha_i^r| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i^r)e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^m e_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^r e_i\right\| < \varepsilon,$$

daí,

$$|\alpha_i^m - \alpha_i^r| < \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^m - \alpha_i^r| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall m, r \geqslant k_0.$$

Mostrando que temos n sequências

$$(\alpha_i^m) = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots), \quad i = 1, \ldots, n$$

em $\mathbb{R}$. Logo $(\alpha_i^m) \to \alpha_i$. Defina

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Claramente $x \in E$. Além disso,

$$\|x_m - x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^m e_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i)e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^m - \alpha_i|\|e_i\|.$$

Como $(\alpha_i^m) \to \alpha_i$ então $\|x_m - x\| \to 0$. Mostrando que $x_m \to x$ em E, donde E é um espaço de Banach. ■

Exemplo 2.15. O espaço $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_m$ é um espaço de Banach. Seja (f_n) de Cauchy em E. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \|f_n - f_m\|_m = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geqslant n_0, \ \forall t \in [0, 1].$$

Assim para cada $t \in [0, 1]$, $(f_n(t))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então podemos definir

$$\begin{aligned} f : [0,\ 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = \lim f_n(t). \end{aligned}$$

Afirmação: Temos que $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $f_n \longrightarrow f$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}|f(t)-f(t_0)| &\leqslant |f(t)-f_{n_0}(t)|+|f_{n_0}(t)-f_{n_0}(t_0)|+|f_{n_0}(t_0)-f(t_0)|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

desde que $|t-t_0|<\delta$. Como

$$|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon, \quad \forall n,m \geqslant n_0,\ \forall t \in [0,1],$$

então passando ao limite quando $m \to \infty$, obtemos

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in [0,1],$$

daí,

$$\|f_n-f\|_m<\varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Portanto $f_n \to f$ em $C([0,1],\mathbb{R})$.

Exemplo 2.16. O espaço ℓ^p com $1 \leqslant p < \infty$, é um espaço de Banach.

De fato, seja $x_m=(x_{m_1},\ldots,x_{m_i},\ldots)$ uma sequência de Cauchy em ℓ^p, então dado $\varepsilon>0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m-x_n\|_p<\varepsilon, \quad \forall m,n \geqslant n_0.$$

Daí

$$|x_{m_i}-x_{n_i}| \leqslant |x_{m_i}-x_{n_i}|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|x_{m_i}-x_{n_i}|^p<\varepsilon^p, \quad \forall m,n \geqslant n_0.$$

Então $(x_{m_i})_{m\in\mathbb{N}}$ para cada $i=1,2,\ldots$, é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que, $x_{m_i} \to x_i$. Agora defina $x=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots)$.

Afirmação: Temos que, $x \in \ell^p$ e $x \to x$ em ℓ^p.

Com efeito, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{i=1}^{N}|x_{m_i}-x_{n_i}|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|x_{m_i}-x_{n_i}|^p \leqslant \|x_m-x_n\|_p^p<\varepsilon^p, \quad \forall m,n \geqslant n_0.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ temos,

$$\sum_{i=1}^{N}|x_{m_i}-x_i|^p<\varepsilon^p, \quad \forall m \geqslant n_0.$$

Agora passando ao limite quando $N \to \infty$ temos,

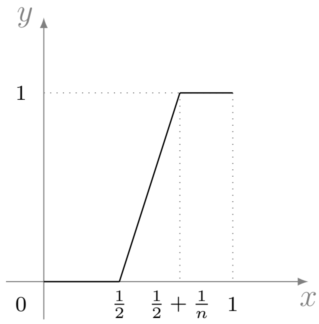
$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_{m_i}-x_i|^p<\varepsilon^p, \quad \forall m \geqslant n_0.$$

E assim $\|x_m-x\|_p \to 0$. Note que $x-x_{n_0} \in \ell^p$, logo $x=x-x_{n_0}+x_{n_0} \in \ell^p$.

Exemplo 2.17. O espaço $E = C([0,1],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\|_0 = \int_0^1 |f(t)|dt$ não é um espaço de Banach. De fato, defina a sequência em E

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Figura 1 – Representação da sequência do Exemplo 2.17 - Espaços de Banach.



Elaborado pelo autor.

Note que

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_0 = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_m(t) - f_n(t)|dt \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_m(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t)|dt \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 2dt = \frac{2}{n} \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Logo (f_n) é uma sequência de Cauchy. Suponha que exista $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\|f_n - f\|_0 \to 0$. Então

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(t) - 1|dt \to 0.$$

Daí temos,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt \to 0; \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|dt \to 0; \quad \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(t) - 1|dt \to 0.$$

Portanto

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Absurdo! Já que $f \notin C([0,1];\mathbb{R})$.

Observação 2.5. Os espaços $(P([0,1]), \|\cdot\|_m)$ e $(P([0,1]), \|\cdot\|_0)$ não são espaços de Banach.

Teorema 2.4. *Seja E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Então F é Banach se, e somente se, F é fechado.*

Demonstração: Suponha que $F \subset E$ é um espaço de Banach. Assim dada uma sequência (x_n) em F tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in E$. Como (x_n) converge ela é uma sequência de Cauchy. Logo existe $b \in F$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Pela unicidade do limite $a = b$ e portanto F é fechado em E.

Por outro lado seja $F \subseteq E$ fechado. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, sendo E um espaço de Banach, existe $a \in E$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Como F é fechado em E então $a \in F$. Donde F é um espaço de Banach. ■

Teorema 2.5 (**Caracterização dos Espaços de Banach**). *Seja E um espaço vetorial normado. Então E é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Suponha que E é um espaço de Banach e considere (x_n) uma sequência em E tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Seja

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

Para $m > n$ temos $S_m - S_n = x_{n+1} + \cdots + x_m$. Daí

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\|.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ então a sequência $T_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$ é convergente, logo é uma sequência de Cauchy. Assim

$$T_m - T_n = \|x_m\| + \cdots + \|x_{n+1}\| \to 0.$$

Então $\|S_m - S_n\| \to 0$ e assim (S_n) é uma sequência de Cauchy em E. Portanto

$$S_n \to S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E.$$

Por outro lado suponha que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implique em $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. Seja $(x_n) \subset E$ uma sequência de Cauchy.

Afirmação: A sequência (x_n) possui uma subsequência convergente.

De fato, para $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geqslant n_1.$$

Existe $n_2 \geqslant n_1$, tal que

$$\|x_{n_2} - x_n\| < \frac{1}{2^2}, \quad \forall n \geqslant n_2 \geqslant n_1.$$

Continuando este processo, temos que existem $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \cdots \leqslant n_k \leqslant n_{k+1} \cdots$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Defina, $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ então $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty$ e assim $\sum_{k=1}^{\infty} y_k < \infty$. Logo

$$S_k = y_1 + \cdots + y_k = (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \cdots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{k+1}} - x_{n_1} \to x.$$

Daí

$$x_{n_{k+1}} = (x_{n_{k+1}} - x_{n_1}) + x_{n_1} \to x + x_{n_1}.$$

Portanto $(x_{n_{k+1}})$ é convergente, isto é, (x_n) é uma sequência convergente em E. Mostrando que E é um espaço de Banach. ■

Teorema 2.6 (Complemento de espaços normados). *Seja E um espaço vetorial normado. Então existe um único espaço de Banach $\widehat{E}$ contendo um subespaço $W \subset \widehat{E}$, denso em $\widehat{E}$ e uma isometria $T : E \to W$, isto é, T é linear, bijetora e $\|Tx\| = \|x\|$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Seja C o conjunto de todas as sequências $x = (x_j)$ de Cauchy em E. Vamos definir em C a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} |x_j - y_j| = 0,$$

onde $x = (x_j),\ y = (y_j) \in E$.

Claramente "$\sim$" é uma relação de equivalência. De fato,

a) $x \sim x$ para todo $x \in E$, pois $\lim_{j\to\infty} |x_j - x_j| = 0$ (reflexiva).

b) Se $x \sim y$ temos $\lim_{j\to\infty} |x_j - y_j| = 0 \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} |y_j - x_j| = 0$, logo $y \sim x$ (simétrica).

c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $\lim_{j\to\infty} |x_j - y_j| = 0$ e $\lim_{j\to\infty} |y_j - z_j| = 0$. Logo

$$\lim_{j\to\infty} |x_j - z_j| \leqslant \lim_{j\to\infty} |x_j - y_j| + \lim_{j\to\infty} |y_j - z_j| = 0.$$

Então $\lim_{j\to\infty} |x_j - z_j| = 0$, logo $x \sim z$, (transitiva).

Seja $\overline{x} = \{y \in C : x \sim y\}$ a classe de equivalência de x. Claro que se $x \sim y$ então $\overline{x} = \overline{y}$. Seja $\widehat{E} = \dfrac{E}{\sim}$ o conjunto de todas as classes de equivalência. Defina as operações sobre $\widehat{E}$,

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \qquad \lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda x}.$$

Temos que as operações acima estão bem definidas e C, $(\widehat{E}, +, \cdot)$ são espaços vetoriais. Para cada $\overline{x} \in \widehat{E}$ defina

$$\|\overline{x}\| = \lim_{j\to\infty} |x_j|, \quad \text{onde} \quad x = (x_j) \in C.$$

Afirmação 1: A função $\|\cdot\| : \widehat{E} \to \mathbb{R}$ está bem definida e define uma norma em $\widehat{E}$.

De fato, fixado $\overline{x} \in \widehat{E}$, sejam $x = (x_j),\ y = (y_j) \in \overline{x}$. Note que

$$||x_j| - |y_j|| \leqslant |x_j - y_j|,\ \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Desde que $x \sim y$ temos $\lim\limits_{j\to\infty} |x_j - y_j| = 0$. Consequentemente

$$\lim_{j\to\infty} |x_j| = \lim_{j\to\infty} |y_j| \Rightarrow \|\overline{x}\| = \|\overline{y}\|,$$

mostrando que $\|\cdot\|$ está bem definida. Agora note que

1) $\|\overline{x}\| \geqslant 0$ para todo $\overline{x} \in \widehat{E}$, e que

$$\|\overline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} |x_j| = 0 \Leftrightarrow x \sim 0,$$

isto é, $x_j \in \overline{0}$, donde segue que $\overline{x} = \overline{0}$.

2) $\|\overline{\lambda x}\| = \lim\limits_{j\to\infty} |\lambda x_j| = |\lambda| \lim\limits_{j\to\infty} |x_j| = |\lambda| \|\overline{x}\|$.

3) $\|\overline{x+y}\| = \lim\limits_{j\to\infty} |x_j + y_j| \leqslant \lim\limits_{j\to\infty} |x_j| + \lim\limits_{j\to\infty} |y_j| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

Assim $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado. Seja $W \subset \widehat{E}$ definido por

$$W = \{\overline{x} \in \widehat{E} : \exists\ x \in E \text{ com } y = (x, x, \ldots),\ x \sim y\}.$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow W \subset \widehat{E} \\ x &\longmapsto T(x) = \overline{x} \end{aligned}$$

onde $W = T(E)$.

Afirmação 2: A aplicação T é uma isometria entre E e W.

Com efeito, note que se $x, y \in E$ temos

$$T(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x} = \lambda T(x).$$

Logo T é linear. Além disso,

$$\|Tx\| = \|\overline{x}\| = \lim_{j\to\infty} |x| = |x|,\ \forall\ x \in E,$$

mostrando que T é uma isometria de E em W.

Afirmação 3: O conjunto W é denso em $\widehat{E}$.

Fixado $\overline{x} \in \widehat{E}$, considere $x = (x_j) \in \overline{x}$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geqslant j_0$, tem-se

$$|x_j - x_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere agora a sequência constante

$$z = (x_{j_0}, x_{j_0}, \ldots, x_{j_0}, \ldots) \in \overline{z} \Rightarrow \overline{z} \in W.$$

Então,

$$\|\overline{x} - \overline{z}\| = \|\overline{x - z}\| = \lim_{j\to\infty} |x_j - x_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

mostrando que em toda vizinhança de $\overline{x}$ existe um elemento de W, tal fato implica na densidade de W em $\widehat{E}$.

Afirmação 4: O espaço $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

De fato, seja $(\overline{x}_n)$ uma sequência de Cauchy em $\widehat{E}$. Desde que W é denso em $\widehat{E}$, existe $\overline{z}_n \in W$ com

$$\|\overline{x}_n - \overline{z}_n\| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Note que sendo $(\overline{x}_n)$ de Cauchy em $\widehat{E}$, obtemos de (2.7) que $\overline{z}_n$ também é de Cauchy em $\widehat{E}$, portanto $z_n = T^{-1}(\overline{z}_n)$ é de Cauchy em E. Seja $\overline{x} \in \widehat{E}$ a classe que contém a sequência (z_n). Observe que.

$$\|\overline{x}_n - \overline{x}\| \leqslant \|\overline{x}_n - \overline{z}_n\| + \|\overline{z}_n - \overline{x}\| \leqslant \frac{1}{n} + \|\overline{z}_n - \overline{x}\|.$$

Considerando $z_n = (\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots) \in \overline{z}_n$ e $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots) \in \overline{x}$ temos que

$$\|\overline{z}_n - \overline{x}\| = \lim_{m\to\infty} |\xi - \xi_m|.$$

Portanto

$$\|\overline{x}_n - \overline{x}\| \leqslant \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} |\xi - \xi_m|,$$

logo, para n suficientemente grande, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$\|\overline{x}_n - \overline{x}\| < \varepsilon, \ \forall \ n \geqslant n_0$$

mostrando a afirmação.

Mostremos agora a unicidade a menos de isometria.

Sejam $(\widehat{E}, \|\cdot\|_{\widehat{E}})$ e $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ completamento de $(E, \|\cdot\|)$. Logo existem $T_1 : E \to \widehat{W}$ e $T_2 : E \to \tilde{W}$ isometrias tais que $\widehat{W} = T_1(E),\ \tilde{W} = T_2(E),\ \overline{\widehat{W}} = \widehat{E}$ e $\overline{\tilde{W}} = \tilde{E}$. Defina a aplicação

$$T = T_1 \circ T_2^{-1} : \tilde{W} \to \widehat{W}.$$

Temos que T é linear e

$$\|Tx\|_{\widehat{W}} = \|T_1(T_2^{-1}(x))\|_{\widehat{W}} = \|T_2^{-1}(x)\| = \|x\|_E.$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \tilde{E} &\longrightarrow \widehat{E} \\ x &\longmapsto \widehat{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n \end{aligned}$$

com $x_n \in \tilde{W}$ e $x_n \to x$ em $\tilde{E}$.

Afirmação 5: A aplicação $\widehat{T}$ está bem definida.

Em primeiro lugar, note que a sequência (T_n) é convergente em $\widehat{E}$, pois a mesma é de Cauchy, já que vale a seguinte identidade

$$\|Tx_n - Tx_m\|_{\widehat{E}} = \|T(x_n - x_m)\|_{\widehat{E}} = \|x_n - x_m\|_{\tilde{E}}.$$

Sendo $\widehat{E}$ um espaço de Banach a sequência (T_n) converge.

Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\tilde{E}$ com $x_n \to x$ e $y_n \to x$ em $\tilde{E}$. Note que

$$\|Tx_n - Ty_n\|_{\widehat{E}} = \|T(x_n - y_n)\|_{\widehat{E}} = \|x_n - y_n\|_{\tilde{E}} \longrightarrow 0,$$

daí

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n \Rightarrow \widehat{T}x = \widehat{E}y,$$

mostrando que $\widehat{T}$ está bem definida.

Afirmação 6: Temos que $\widehat{T}$ é uma bijeção.

Observe que

$$\|\widehat{T}x\|_{\widehat{E}} = \|\lim_{n\to\infty} Tx_n\|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_{\widehat{E}} = \|x_n\|_{\tilde{E}} = \|x\|_{\tilde{E}} \Rightarrow \|Tx\|_{\widehat{E}} = \|x\|_{\tilde{E}},\ \forall\ x \in \tilde{E}.$$

Isto mostra que $\widehat{T}$ é injetora.

Agora fixando $y \in \widehat{E}$, existe $(y_n) \subset \widehat{W}$ com $y_n \to y$ em $\widehat{E}$. Seja $(x_n) \subset \tilde{W}$ tal que $Tx_n = y_n$. Observe que

$$\|x_n - x_m\|_{\tilde{E}} = \|T^{-1}y_n - T^{-1}y_m)\|_{\tilde{E}} = \|T^{-1}(y_n - y_m)\|_{\tilde{E}} = \|y_n - y_m\|_{\widehat{E}}.$$

Sendo (y_n) de Cauchy em $\tilde{E}$, podemos concluir que (x_n) é de Cauchy em $\tilde{E}$ e assim existe $x \in \tilde{E}$ tal que $x_n \to x$ em $\tilde{E}$.

Para concluir temos que $\tilde{T}x = y$. De fato,

$$\|\widehat{T}x - y\|_{\widehat{E}} = \|\lim_{n\to\infty} Tx_n - y\|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - y\|_{\widehat{E}} \Rightarrow \|\widehat{T}x - y\|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{\widehat{E}} = 0,$$

logo $\widehat{T}x - y = 0$ donde $\widehat{T}x = y$. ■

3 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste capítulo faremos a demonstração do Teorema de Hahn-Banach nas suas formas analítica e geométrica. Para tal, faremos inicialmente um breve estudo de operadores lineares limitados, funcionais lineares limitados, apresentaremos alguns exemplos acerca desses funcionais, e ainda, introduziremos o Lema de Zorn.

3.1 Operadores Lineares Limitados

Os espaços normados têm uma estrutura algébrica de espaço vetorial à qual estão associados as transformações lineares, e uma estrutura topológica de espaço métrico à qual estão associados as aplicações contínuas. Assim as aplicações lineares e contínuas são chamadas de operadores lineares contínuos.

No que segue E e F são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 3.1. Sejam E e F, espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ uma aplicação. Dizemos que T é, um operador linear se

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in E \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E. \end{aligned}$$

E dizemos que T é contínuo em $x_0 \in E$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad x \in E \quad \text{e} \quad \|x - x_0\|_E < \delta.$$

Definição 3.2. Sejam E e F, espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. Definimos o núcleo e a imagem direta do operador T, como sendo os seguintes conjuntos

$$\text{Ker}(T) = \{x \in E \ ; \ Tx = 0\} \quad \text{e} \quad T(E) = \{y \in F \ ; \ y = Tx\}$$

respectivamente. E a imagem inversa de um subconjunto $S \subseteq F$, pelo operador T, definimos por

$$T^{-1}(S) = \{x \in E \ ; \ y = Tx, \ \forall y \in S\}.$$

Observação 3.1. Outras notações para núcleo e a imagem são $N(T)$ e $\text{Im}(T)$ respectivamente. Note que, $\text{Ker}(T) = T^{-1}(\{0\})$ é um subespaço de E e $T(E)$ é um subespaço de F.

Definição 3.3. Sejam E e F, espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. Dizemos que T é limitado, se existe uma constante $c > 0$, tal que

$$\|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E, \quad \forall \ x \in E.$$

Denotamos o espaço de todos os operadores lineares e limitados por

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F;\ T \text{ é linear limitado}\}.$$

Quando $E = F$, denotamos simplesmente por $\mathcal{L}(E)$. Note que

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leqslant c \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leqslant c.$$

Assim, definimos a seguinte norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Temos que o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ munido da norma acima, é um espaço vetorial normado. Em $\mathcal{L}(E,F)$ podemos ainda considerar as seguintes normas, que são equivalentes

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F;$$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_F;$$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \inf\{c > 0 : \|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E\}.$$

Observe que

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \Rightarrow \|Tx\|_F \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E, \quad \forall\, x \in E.$$

Então $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ é a menor constante que satisfaz a definição.

Definição 3.4. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que o operador $T : E \to F$ é um isomorfismo se for uma bijeção linear. Neste caso dizemos que E e F são espaços isomorfos.

Se $T : E \to F$ é uma bijeção tal que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e também $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$, então dizemos que T é um homeomorfismo. Neste caso dizemos que E, F são espaços homeomorfos, isto é, espaços topologicamente isomorfos.

Se $T : E \to F$ for isomorfismo tal que $\|Tx\|_F = \|x\|_E$, dizemos que T é um isomorfismo isométrico. Neste caso dizemos que E, F são espaços isométricos.

A partir de agora, para facilitar a notação, denotaremos a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ simplesmente por $\|\cdot\|$. E quando não tivermos possibilidade de confusão, denotaremos a norma de um espaço vetorial normado E genérico, por $\|\cdot\|$.

Exemplo 3.1. Considere $E = C([0,1];\mathbb{R})$ com as normas $\|f\|_m = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$ e $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Note que o operador $I : (E, \|\cdot\|_m) \to (E, \|\cdot\|_1)$ é limitado

$$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 \leqslant \|f\|_m,$$

porém $I^{-1} : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_m)$ não é limitado, pois do contrário existiria $c > 0$ tal que $\|f\|_m \leqslant c\|f\|_1$, o que é um absurdo!

Exemplo 3.2. Considere $E = C([a,b];\mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_m$ e o operador $T : E \to E$, dado por

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds.$$

Note que,

$$|Tu(t)| \leqslant \int_a^t |u(s)|ds \leqslant (t-a)\|u\|_m \leqslant (b-a)\|u\|_m.$$

Daí, $\|Tu\|_m \leqslant (b-a)\|u\|_m$, donde T é limitado. Além disso,

$$\frac{\|Tu\|_m}{\|u\|_m} \leqslant b-a \Rightarrow \|T\| \leqslant b-a.$$

Agora seja $u(t) \equiv 1$, para todo $t \in [a,b]$, logo $\|u\|_m = 1$ e

$$Tu(t) = \int_a^t ds = t-a.$$

Assim $\|Tu\|_m = b-a$. Portanto $\|T\| = b-a$.

Exemplo 3.3. Considere $E = C([a,b];\mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_m$ e o operador

$$\begin{aligned} T : D(T) \subset E &\to E \\ u(t) &\mapsto Tu(t) = u'(t), \end{aligned}$$

onde $D(T) = C^1([a,b];\mathbb{R})$. O operador T não é limitado com a norma $\|\cdot\|_m$.

De fato, considere a sequência $u_n(t) = e^{nt}$, logo $Tu_n(t) = ne^{nt}$. Assim $\|u_n\|_m = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |u_n(t)| = e^{nb}$ e também $\|Tu_n\|_m = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |Tu_n(t)| = ne^{nb}$. Logo

$$\frac{\|Tu_n\|_m}{\|u_n\|_m} = n \to \infty.$$

Observação 3.2. Se considerarmos o mesmo operador acima com a seguinte norma $\|u\|_{C^1} = \|u\|_m + \|u'\|_m$, temos que T é um operador limitado.

Exemplo 3.4. O operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$$

é linear e limitado.

De fato,

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|Tx\|_2 \leqslant \|x\|_2$$

Portanto $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$.

Exemplo 3.5. O operador $T_a : \ell^2 \to \ell^2$ definido por

$$T_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_i x_i, \dots),$$

com $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \in \ell^\infty$, é linear e limitado.

De fato,

$$\begin{aligned}\|T_a(x)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 |x_i|^2\\ &\leqslant \|a\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|a\|_\infty^2 \|x\|_2^2\\ &\Rightarrow \|T_a(x)\|_2 \leqslant \|a\|_\infty \|x\|_2.\end{aligned}$$

Portanto $T_a \in \mathcal{L}(\ell^2)$.

Exemplo 3.6. Agora consideremos a sequência de operadores $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n, 0, \dots)$$

com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in C_0$. Temos que $T_n \longrightarrow T_a$ em $\mathcal{L}(\ell^2)$.

De fato, como $a \in C_0$ então $\|a\|_\infty = \sup\limits_i |a_i| \longrightarrow 0$, daí $a_i \longrightarrow 0$ quando $i \to \infty$, assim

$$\begin{aligned}\|T_n(x) - T_a(x)\|_2^2 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^2 |x_i|^2\\ &\leqslant \left(\sup_{i \geqslant n+1} |a_i|\right)^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leqslant \left(\sup_{i \geqslant n+1} |a_i|\right)^2 \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\|T_n - T_a\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T_a(x)\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sup_{i \geqslant n+1} |a_i| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Teorema 3.1. *Sejam E e F espaços vetoriais normados com dimensão de E finita e $T : E \to F$ um operador linear, então T é limitado.*

Demonstração: De fato, seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de E. Tome $x \in E$ então

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Logo,

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T e_i\| \leqslant c \sum_{i=1}^{n} x_i = c\|x\|_s \leqslant k\|x\|,$$

onde $c = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|T e_i\|$. ■

Proposição 3.1. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) T é limitado;

b) T é contínuo;

c) T é contínuo em x_0;

d) T é Lipschitziana.

Demonstração: *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sejam $x, x_0 \in E$, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$ tal que, se $\|x - x_0\|_E < \delta$ tem-se,

$$\|Tx - Tx_0\|_F = \|T(x - x_0)\|_F \leqslant \|T\|\|x - x_0\|_E \leqslant \|T\|\delta < \varepsilon.$$

Como $x_0 \in E$ é arbitrário então T é contínuo.

b) $\Rightarrow$ *c)* É trivial.

c) $\Rightarrow$ *d)* Em particular, da continuidade de T na origem existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\|_F < 1$ sempre que $\|x\|_E < \delta$. Se $\|x\|_E < 1$ tem-se $\|\frac{\delta}{2}x\|_E < \delta$ e então

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\|_F = \left\| T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\|_F < 1 \Rightarrow \|T(x)\|_F < \frac{2}{\delta}.$$

Daí $\sup\{\|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E \leqslant 1\} < \frac{2}{\delta} < \infty$. Assim

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leqslant \sup\{\|T(y)\|_F : \|y\|_E \leqslant 1\}.$$

E assim

$$\|T(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E, \quad x \neq 0.$$

onde $k = \sup\{\|T(y)\|_F : \|y\|_E \leqslant 1\}$. Agora seja $x_1, x_2 \in E$,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|T(x_1 - x_2)\|_F \leqslant k\|x_1 - x_2\|_E.$$

Portanto, T é Lipschitziana.

d) $\Rightarrow$ *a)* Sendo T Lipschitziana então existe $C > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leqslant C\|x - y\|_E, \quad \forall\, x, y \in E.$$

Em particular, para $y = 0$ temos

$$\|T(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E.$$

Portanto, T é limitado. ■

Teorema 3.2. *Sejam E, F espaços vetoriais normados.Se F é um espaço Banach então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço Banach.*

Demonstração: Seja $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geqslant n_0.$$

Note que

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\|_E \longrightarrow 0.$$

Desta forma fixado $x \in E$, a sequência $(T_n x) \subset F$ é de Cauchy. Como F é Banach então

$$T_n x \longrightarrow y \in F.$$

Desta forma podemos definir um operador

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Tx = y = \lim_{n \to \infty} T_n x. \end{aligned}$$

Claramente T é linear. Note que T é limitada, pois

$$\|Tx\|_F = \|\lim_{n \to \infty} T_n x\|_F \leqslant \lim_{n \to \infty} (\|T_n\| \|x\|_E) \leqslant c\|x\|_E.$$

Além disso, $T_n \longrightarrow T$. De fato, note que

$$\|T_n x - T_m x\|_F \leqslant \varepsilon \|x\|_E, \quad \forall n, m \geqslant n_0.$$

Passando ao limite quando $m \longrightarrow \infty$ obtemos,

$$\|T_n x - Tx\|_F \leqslant \varepsilon \|x\|_E, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Agora, passando o sup, temos

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n x - Tx\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Portanto $T_n \longrightarrow T$. ■

Lema 3.1. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se $T : E \to F$ é um operador linear contínuo, então $\operatorname{Ker}(T)$ é um subespaço fechado.*

Demonstração: Primeiro note que, se $x_n \to x$ então $Tx_n \to Tx$. De fato, temos

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x))\| \leqslant \|T\| \|x_n - x\| \to 0.$$

Agora seja $x \in \overline{\operatorname{Ker} T}$, então existe uma sequência (x_n) em $\operatorname{Ker} T$ tal que $x_n \to x$. Daí,

$$Tx = \lim_{n \to \infty} Tx_n = 0.$$

Logo, $x \in \operatorname{Ker} T$. Portanto, $\operatorname{Ker} T$ é um subespaço fechado. ■

Teorema 3.3 (**Extensão de operadores**). *Seja $T : D(T) \subset E \to F$ um operador linear limitado e F um espaço de Banach. Então T possui uma extensão $\widehat{T} : \overline{D(T)} \subset E \to F$ linear e limitado com $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração: Seja $x \in \overline{D(T)}$, então existe (x_n) em $D(T)$ tal que $x_n \to x$. Sendo T linear e limitado temos

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Logo, (Tx_n) é de Cauchy, pois (x_n) é de Cauchy do fato de ser convergente.

Como F é Banach, temos $Tx_n \to y \in F$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \overline{D(T)} \subset E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \widehat{T}x = y = \lim_{n\to\infty} Tx_n. \end{aligned}$$

Note que $\widehat{T}$ está bem definida. De fato, sejam $(x_n),\ (z_n) \subset D(T)$ tais que $x_n \to x$ e $z_n \to x$ com $x \in D(T)$. Logo,

$$\|Tx_n - Tz_n\| \leqslant \|T\|\|x_n - z_n\| \to 0,$$

daí

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tz_n \Rightarrow \widehat{T}x = \widehat{T}z,$$

mostrando a boa definição de $\widehat{T}$, isto é, $\widehat{T}$ é único para todo $x \in \overline{D(T)}$.

Claramente $\widehat{T}$ é linear e $\widehat{T}x = Tx$, para todo $x \in D(T)$ e que $\widehat{T}$ é uma extensão de T. Sendo T limitado temos

$$\|Tx_n\| \leqslant \|T\|\|x_n\|.$$

Sabendo que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \widehat{T}x$ e passando o limite $n \to \infty$ obtemos

$$\|\widehat{T}x\| \leqslant \|T\|\|x\|,$$

já que a norma é contínua, donde $\widehat{T}$ é limitado. Daí $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$. Por outro lado temos

$$\|\widehat{T}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\widehat{T}x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lim_{n\to\infty} Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(\lim_{n\to\infty} x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|.$$

Mostrando que $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. ■

3.2 Funcionais Lineares Limitados

Quando temos um operador linear $T : E \to F$ em que $F = \mathbb{R}$, dizemos que este operador é um **funcional linear**. Denotamos o espaço dos funcionais lineares por

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ é linear}\},$$

chamado de **dual algébrico** de E. Assim o espaço $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é o espaço dos funcionais lineares limitados, o qual denotamos por

$$E' = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ é linear e limitado}\}$$

chamado de **dual topológico** de E. A norma em E' é dada por

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

Observação 3.3. Se a dimensão do espaço E for finita temos $E' = E^*$. Caso contrário temos $E' \subset E^*$.

Exemplo 3.7. Considere o espaço $E = C([a,b], \mathbb{R})$ com a norma $\| \cdot \|_m$. Defina o seguinte funcional

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f(u) = \int_a^b u(t)dt. \end{aligned}$$

Temos que $f \in E'$ com $\|f\| = b - a$.

De fato, claramente f é linear. Note que,

$$|f(u)| \leqslant \int_a^b |u(t)|dt \leqslant \|u\|_m (b-a) \Rightarrow \|f\| \leqslant b - a.$$

Por outro lado, tome $u \equiv 1$. Logo $\|u\|_m = 1$ e $f(u) = b - a$, portanto $\|f\| = b - a$.

Exemplo 3.8. Considere o espaço $E = C([a,b], \mathbb{R})$ com a norma $\| \cdot \|_m$. Defina o seguinte funcional

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto h(u) = u(t_0), \quad t_0 \in [a,b]. \end{aligned}$$

Temos que $h \in E'$ com $\|h\| = 1$.

De fato, claramente h é bem definido e linear. Note que

$$h(u) = u(t_0) \leqslant |u(t_0)| \leqslant \|u\|_m.$$

Por outro lado, tome $u \equiv 1$. Logo $\|u\|_m = 1$ e $h(u) = u(t_0) = 1$, portanto $\|h\| = 1$.

Exemplo 3.9. Mostremos que $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$.

Com efeito, seja $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$, com

$$\|e_j\| = 1, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}^n)' &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto T(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)). \end{aligned}$$

Observe que T está bem definida, é linear e sobrejetora. Além disso, T preserva norma, isto é, T é uma isometria. Note que

$$\|T(f)\|_m = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |f(e_j)| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|f\| \|e_j\| \leqslant \|f\|, \ \forall f \in (\mathbb{R}^n)'.$$

Por outro lado, seja $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, então

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| |f(e_i)|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \|T(f)\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo $\|f\| \leqslant \|T(f)\|$. Portanto

$$\|T(f)\| = \|f\|.$$

Exemplo 3.10. Seja $y = (y_j) \in \ell^\infty$. Defina o seguinte funcional

$$\begin{aligned} f : \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_j) &\longmapsto f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j. \end{aligned}$$

Temos que $f \in (\ell^1)'$ com $\|f\| = \|y\|_\infty$.

De fato, claramente f é linear. Note que

$$|f(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leqslant \|y\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_1 \Rightarrow \|f\| \leqslant \|y\|_\infty.$$

Por outro dado $\varepsilon > 0$ existe y_j tal que $\|y\|_\infty - \varepsilon < y_j \leqslant \|y\|_\infty$. Seja $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots)$. Então $\|e_j\|_1 = 1$ e $\|f\| \geqslant y_j \geqslant \|y\|_\infty - \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Portanto $\|f\| = \|y\|_\infty$.

Exemplo 3.11. Fixado $1 < p < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, mostremos que todo elemento $f \in (\ell^p)'$, é escrito da forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

onde, $a = (a_k) \in \ell^q$. Em particular $a_k \to 0$.

Observemos que o conjunto formado pelas sequências

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n-\acute{e}simo}, 0, \ldots)$$

é uma base de Schawder para o ℓ^p, pois $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é enumerável e dado

$$x = (x_n) = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell^p,$$

tem-se

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Assim se $f \in (\ell^p)'$ então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

Tomando $a_k = f(e_k)$, vejamos que $(a_k) \in \ell^q$. De fato, observamos que

$$(z_k) = \left(\frac{|a_1|^q}{a_1}, \dots, \frac{|a_k|^q}{a_k}, 0, \dots\right) \in \ell^p$$

e

$$f(z_k) = \sum_{j=1}^{k} z_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{|a_j|^q}{a_j} f(e_j) = \sum_{j=1}^{k} |a_j|^q.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j|^q = f(z_k) \leqslant |f(z_k)| \leqslant \|f\| \|z_k\|_p = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{k} \left|\frac{|a_j|^q}{a_j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j|^q \leqslant \|f\| \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

Passando ao limite de $k \to \infty$ temos que

$$\|f(e_k)\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\| < \infty.$$

Mostrando que $(a_k) \in \ell^q$.

Exemplo 3.12. Fixado $1 < p < \infty$, mostremos agora que $(\ell^p)' = \ell^q$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, isto é, os espaços $(\ell^p)'$ e ℓ^q são isometricamente isomorfos.

De fato, pelo exemplo anterior sabemos que se $f \in (\ell^p)'$ então

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

onde $a = (a_k) \in \ell^q$. Definamos

$$\begin{aligned} T : (\ell^p)' &\longrightarrow \ell^q \\ f &\longmapsto T(f) = a = (f(e_1), \dots, f(e_n), \dots). \end{aligned}$$

A aplicação T está bem definida e é linear.

Afirmação 1: A aplicação T é sobrejetiva.

Dado $z = (z_k) \in \ell^q$, definamos

$$\begin{aligned} g : \ell^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i, \end{aligned}$$

onde $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. Da desigualdade de Höder, segue que g está bem definida. Além disso, vê-se claramente que g é linear. Finalmente,

$$|g(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i\right| \leqslant \|x\|_p \|z\|_q, \ \forall x \in \ell^p.$$

Portanto, g é limitada. Assim

$$T(g) = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) = z.$$

Afirmação 2: A aplicação T é uma isometria, isto é, preserva norma.

Pela desigualdade de Hölder,

$$|f(x)| \leqslant \|T(f)\|_q \|x\|_p, \ \forall x \in \ell^p \text{ e } \forall f \in (\ell^p)'.$$

Logo

$$\|f\| \leqslant \|T(f)\|_q, \ \forall f \in (\ell^p)'.$$

Por outro lado temos

$$\|T(f)\| \leqslant \|f\|, \ \forall f \in (\ell^p)'.$$

Portanto

$$\|T(f)\| = \|f\|, \ \forall f \in (\ell^p)'.$$

Claramente T é injetora.

Exemplo 3.13. Mostremos agora que $(\ell^1)' = \ell^\infty$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, isto é, os espaços $(\ell^1)'$ e ℓ^∞ são isometricamente isomorfos.

Note que o conjunto $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, é uma base de Schawder para ℓ^1. Ou seja, para cada $x = (x_k) \in \ell^1$ existe $\{e_k\} \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Assim, para todo $f \in (\ell^1)'$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k,$$

onde $\gamma_k = f(e_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\|, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

isto é, $\gamma_k \in \ell^\infty$. Além disso,

$$\|(\gamma_k)\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

Por outro lado, dado $y = (\beta_k) \in \ell^\infty$, definimos $g \in (\ell^1)'$ por

$$\begin{aligned} g : \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k. \end{aligned}$$

Note que g está bem definida pois

$$|\xi_k \beta_k| \leqslant \|(\beta_k)\|_\infty |\xi_k|.$$

Daí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \leqslant \|y\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Além disso, $g \in (\ell^1)'$ e

$$|g(x)| \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Ou seja, $\|g\| \leqslant \|y\|_\infty$. Logo $\|f\| \leqslant \|(\gamma_k)\|_\infty$. Portanto a aplicação

$$\begin{aligned} T : (\ell^1)' &\longrightarrow \ell^\infty \\ f &\longmapsto T(f) = (\gamma_k), \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

3.3 Formas Analíticas do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção iremos apresentar as formas analíticas real e complexa do Teorema de Hahn-Banach e suas respectivas demonstrações.

Na demonstração do Teorema de Hahn-Banach utilizamos o Lema de Zorn, por esta razão, antes de enunciar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach, precisamos de algumas definições para apresentar o Lema de Zorn, sua demonstração pode ser encontrada na referência citada.

Definição 3.5. Considere P um conjunto não vazio munido de uma ordem parcial a qual denotamos por "$\leqslant$", isto é, os elementos de P satisfaz as seguintes propriedades.

i) Reflexiva: $a \leqslant a$ para todo $a \in P$.

ii) Antissimétrica: $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ então $a = b$, para todo $a, b \in P$.

iii) Transitiva: $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ então $a \leqslant c$, para todo $a, b, c \in P$.

Definição 3.6. Seja $Q \subseteq P$ um subconjunto de P. Dizemos que:

1) Q é totalmente ordenado se $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ para todo $a, b \in Q$.

2) $c \in P$ é uma cota superior de Q se $x \leqslant c$ para todo $x \in Q$.

3) $m \in P$ é um elemento maximal se $m \leqslant c$ então $m = c$, para todo $c \in P$.

Lema 3.2 (**Lema de Zorn**). *Seja P um conjunto não vazio parcialmente ordenado, tal que todo subconjunto $S \subseteq P$ totalmente ordenado, possui uma cota superior. Então P possui um elemento maximal.*

Demonstração: Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2012) e Halmos (1970) ■

Definição 3.7. Seja E um espaço vetorial normado. Um funcional sublinear é uma aplicação $p : E \to \mathbb{R}$ que satisfaz

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E$ e $\lambda \geqslant 0$

ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$.

Observação 3.4. No caso em que $\lambda \in \mathbb{C}$ então o item (i) é escrito da seguinte forma

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall x \in E \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 3.14. A aplicação norma $p(x) = \|x\|$ é um funcional sublinear. Observemos que se $p \in E^*$ então p é sublinear.

Teorema 3.4 (**Teorema de Hahn-Banach** - Forma analítica real)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Sejam $G \subsetneq E$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que*

$$g(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in G.$$

Então existe um funcional linear $f : E \to \mathbb{R}$ que estende g, isto é,

$$f|_G = g \quad \textit{ou} \quad f(x) = g(x), \ \forall x \in G,$$

tal que

$$f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in E.$$

Demonstração: Considere o seguinte conjunto

$$P = \{(h, D_h)\ ;\ h : D_h \subseteq E \to \mathbb{R},\ \text{com } h \text{ linear}, G \subseteq D_h, h|_G = g \text{ e } h(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in D_h\}.$$

Certamente que $(g, G) \in P$ e portanto $P \neq \emptyset$.

Defina a seguinte ordem parcial em P:

$$(h, D_h) \leqslant (\varphi, D_\varphi) \Leftrightarrow D_h \subseteq D_\varphi \quad \text{e} \quad \varphi(x) = h(x),\ \forall\ x \in D_h.$$

Seja $C = \{(h_\alpha, D_{h_\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma cadeia em P. Vamos mostrar que C admite uma cota superior. Faça $D_{\widehat{h}} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D_{h_\alpha}$. Temos que $D_{\widehat{h}}$ é um subespaço. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{h} : D_{\widehat{h}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \widehat{h}(x) = h_\alpha(x), \ \forall x \in D_{h_\alpha}. \end{aligned}$$

Primeiro note que $\widehat{h}$ está bem definida, pois se $x \in D_{h_1} \cap D_{h_2}$, então $h_1 \leqslant h_2$ ou $h_2 \leqslant h_1$.

1° Caso: Se $h_1 \leqslant h_2$ então $D_{h_1} \subseteq D_{h_2}$, logo $x \in D_{h_1}$ e assim $h_2(x) = h_1(x)$.

2° Caso: Se $h_2 \leqslant h_1$ então $D_{h_2} \subseteq D_{h_1}$, logo $x \in D_{h_2}$ e assim $h_1(x) = h_2(x)$. Daí,

$$\widehat{h}(x) = \begin{cases} h_1(x), & 1°\text{Caso} \\ h_2(x), & 2°\text{Caso} \end{cases}$$

mostrando a boa definição.

Temos que $\widehat{h}$ é linear. De fato, sejam $x_1, x_2 \in D_{\widehat{h}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $x_1 \in D_{h_1}$ e $x_2 \in D_{h_2}$ para $h_1, h_2 \in C$. Logo $x_1 + \lambda x_2 \in D_{\widehat{h}}$, e sem perda de generalidade suponha que $h_1 \leqslant h_2$, logo $D_{h_1} \subseteq D_{h_2}$. Daí $x_1, x_2 \in D_{h_2}$ e $x_1 + \lambda x_2 \in D_{h_2}$. Então

$$\widehat{h}(x_1 + \lambda x_2) = h_2(x_1 + \lambda x_2) = h_2(x_1) + \lambda h_2(x_2) = \widehat{h}(x_1) + \lambda \widehat{h}(x_2).$$

Afirmação 1: Temos que $(\widehat{h}, D_{\widehat{h}})$ é cota superior de C.

De fato, para todo (h_α, D_{h_α}), tem-se que $D_{h_\alpha} \subset D_{\widehat{h}} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D_{h_\alpha}$ e $\widehat{h}(x) = h_\alpha(x)$, para todo $x \in D_{h_\alpha}$, com $h_\alpha \leqslant p(x)$. Pelo Lema de Zorn, P possui um elemento maximal (f, D_f), isto é, $f : D_f \subseteq E \to \mathbb{R}$ é linear com $f|_G = g$ tal que

$$f(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in D_f.$$

Afirmação 2: Temos que $D_f = E$. Com efeito, suponha que $D_f \subsetneq E$ e seja $x_0 \in E \setminus D_f$. Defina

$$\begin{aligned} \psi : D_f + \langle x_0 \rangle \subseteq E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x + tx_0 &\longmapsto \psi(x + tx_0) = f(x) + tc. \end{aligned}$$

Claramente ψ é linear, (D_f é subespaço próprio de $D_f + \langle x_0 \rangle$ e $\psi|_{D_f} = f$) onde $c \in \mathbb{R}$ seria escolhido de forma que

$$\psi(x + tx_0) = f(x) + tc \leqslant p(x + tx_0), \ \forall x \in D_f, \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Para $t = 0$ temos

$$\psi(x) = f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in D_f.$$

Para $t > 0$, temos que (3.1) é equivalente a:

$$\begin{aligned} t\left(f\left(\frac{x}{t}\right)+c\right) &\leqslant tp\left(\frac{x}{t}+x_0\right) \\ \Leftrightarrow f(y)+c &\leqslant p(y+x_0), \quad \forall y \in D_f \\ \Leftrightarrow c &\leqslant p(y+x_0)-f(y), \quad \forall y \in D_f. \end{aligned}$$

Para $t < 0$ temos $-t > 0$, e (3.1) é equivalente a:

$$\begin{aligned} -t\left(f\left(-\frac{x}{t}\right)-c\right) &\leqslant (-t)p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right) \\ \Leftrightarrow f(z)-c &\leqslant p(z-x_0), \quad \forall z \in D_f \\ \Leftrightarrow c &\geqslant f(z)-p(z-x_0), \quad \forall z \in D_f. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que

$$\sup_{z\in D_f}\{f(z)-p(z-x_0)\} \leqslant c \leqslant \inf_{y\in D_f}\{p(y+x_0)-f(y)\}.$$

De fato, fixado $y, z \in D_f$, temos

$$f(y)+f(z)=f(y+z)\leqslant p(y+z)\leqslant p(y+x_0)+p(z-x_0).$$

Logo

$$\begin{aligned} f(z)-p(z-x_0) &\leqslant p(y+x_0)-f(y) \\ \Rightarrow f(z)-p(z-x_0) &\leqslant \inf_{y\in D_f}\{p(y+x_0)-f(y)\} \\ \Rightarrow \sup_{z\in D_f}\{f(z)-p(z-x_0)\} &\leqslant \inf_{y\in D_f}\{p(y+x_0)-f(y)\} \\ \Rightarrow \sup_{z\in D_f}\{f(z)-p(z-x_0)\} &\leqslant c \leqslant \inf_{y\in D_f}\{p(y+x_0)-f(y)\}. \end{aligned}$$

Assim $\psi : D_f + \langle x_0\rangle \to \mathbb{R}$ é uma extensão de f tal que

$$\psi(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in D_f + \langle x_0\rangle,$$

o que contraria o fato de (f, D_f) ser maximal. ■

A extensão do Teorema de Hahn-Banach não é única, como mostra os exemplos abaixo.

Exemplo 3.15. Dado $E = \mathbb{R}^2$ e $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto p(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Temos que p é sublinear. Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, x) &\longmapsto g(x, x) = x, \end{aligned}$$

que é linear e

$$g(x,x) = x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = p(x,y).$$

Tomemos os seguintes funcionais lineares

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f_1(x,y) = x, \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f_2(x,y) = y \end{aligned}$$

Note que $f_1|_G = g$ e $f_2|_G = g$ com

$$f_1(x,y) = x \leqslant |x| \leqslant p(x,y) \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = y \leqslant |y| \leqslant p(x,y).$$

Exemplo 3.16. Seja $E = \mathbb{R}^3$ e $G = \mathbb{R}^2$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto p(x,y,z) = |x| + |y| + |z|. \end{aligned}$$

Temos que p é sublinear. Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned} g : \{(x,y,0); x, y \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,0) &\longmapsto g(x,y,0) = x + y, \end{aligned}$$

que é linear e

$$g(x,y,0) = x + y \leqslant |x| + |y| + |0| \leqslant p(x,y,0),\ \forall (x,y,0) \in \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim estamos sob as hipóteses do Teorema de Hahn-Banach, porém para cada $c \in \mathbb{R}$ com $|c| \leqslant 1$, definimos

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto f_c(x,y,z) = x + y + cz. \end{aligned}$$

Claramente f_c é linear e

$$f_c(x,y,0) = g(x,y,0),\ \forall (x,y,0) \in \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\},$$

com

$$f_c(x,y,z) = x + y + cz \leqslant |x| + |y| + |c||z| \leqslant p(x,y,z).$$

Corolário 3.1. (**Teorema de Hahn-Banach em espaços normados**) Sejam E um espaço vetorial normado, $M \subsetneq E$ um subespaço e $g \in M'$. Então existe $f \in E'$ tal que $f|_M = g$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{M'}$.

Demonstração: Sendo $g \in M'$ temos

$$|g(x)| \leqslant \|g\|\|x\|.$$

Tome $p(x) = \|g\|\|x\|$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f : E \to \mathbb{R}$ linear tal que $f_{|M} = g$ e

$$f(x) \leqslant \|g\|\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Note que $f(-x) \leqslant \|g\|\|x\|$ e assim $f(x) \geqslant -\|g\|\|x\|$. Logo

$$-\|g\|\|x\| \leqslant f(x) \leqslant \|g\|\|x\| \Rightarrow |f(x)| \leqslant \|g\|\|x\|.$$

Então $f \in E'$ e

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|g\|.$$

Por outro lado,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Em particular

$$|g(x)| \leqslant \|f\|\|x\|, \quad \forall x \in M \Rightarrow \frac{|g(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f\| \Rightarrow \|g\| \leqslant \|f\|.$$

Portanto $\|f\|_{E'} = \|g\|_{M'}$ ■

Corolário 3.2. Seja E um espaço vetorial normado e $x_0 \in E$, com $x_0 \neq 0$. Então existe $f \in E'$ tal que $\|f\|_{E'} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|_E$.

Demonstração: Seja $M = \langle x_0 \rangle$ e

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ tx_0 &\longmapsto g(tx_0) = t\|x_0\|, \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então g é linear e

$$\|g\| = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{|t|\|x_0\|}{|t|\|x_0\|} = 1.$$

Pelo corolário 3.1, existe $f \in E'$ tal que $\|f\| = \|g\| = 1$ e $f|_M = g$, logo

$$f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|.$$

■

Observação 3.5. Observe que o funcional do corolário acima não é único.

De fato, seja $E = \mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ e tomemos $x_0 = (1, 0)$. Fixe $\lambda \in [0, 1]$ e defina a aplicação

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f_\lambda(x, y) = x + \lambda y. \end{aligned}$$

Note que f_λ é linear e $f_\lambda(x_0) = f_\lambda(1,0) = 1 = \|x_0\|$. Temos também

$$|f_\lambda(x,y)| = |x + \lambda y| \leqslant |x| + |\lambda||y| \leqslant |x| + |y| = \|(x,y)\| \Rightarrow \|f_\lambda\| \leqslant 1.$$

Por outro lado temos

$$\|f_\lambda\| \geqslant |f_\lambda(1,0)| = 1.$$

Portanto $\|f_\lambda\| = 1$ e para cada $\lambda \in [0,1]$ temos infinitos funcionais f_λ.

Corolário 3.3. Se $x \in E$, então

$$\|x\| = \sup_{f\in E'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}.$$

Demonstração: Se $x \neq 0$, pelo Corolário 3.2 temos que existe $f \in E'$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Daí

$$\sup_{f\in E'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \geqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = |f(x)| = \|x\|.$$

Por outro lado $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|$ e assim

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \leqslant \|x\| \Rightarrow \sup_{f\in E'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \leqslant \|x\|.$$

■

Corolário 3.4. Seja E um espaço vetorial normado e $M \subsetneq E$ um subespaço fechado. Se $x_0 \in E \backslash M$ e $\mathrm{d} = \mathrm{dist}(x_0, M)$, então existe $f \in E'$, tal que $\|f\|_{E'} = 1,\ f(x_0) = \mathrm{d}$ e $f(m) = 0$, para todo $m \in M$.

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} g : M + \langle x_0 \rangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m + tx_0 &\longmapsto t\,\mathrm{d}\,. \end{aligned}$$

Note que g está bem definida. De fato, como $x_0 \notin M$ e M é um subespaço fechado então $\mathrm{d} = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0$. Assim se $t_1 \neq t_2$ são tais que

$$y = m + t_1x_0 = m + t_2x_0 \Rightarrow (t_1 - t_2)x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \in M,$$

o que é uma contradição. Portanto $y \in M + [x_0]$ é escrito de forma única.
Temos que g é uma aplicação linear. Com efeito, sejam $y, z \in M + [x_0]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $y = t_1x_0 + m,\ z = t_2x_0 + m$. Logo

$$g(\lambda y + z) = g((\lambda + 1)m + (\lambda t_1 + t_2)x_0) = (\lambda t_1 + t_2)\,\mathrm{d} = \lambda t_1\,\mathrm{d} + t_2\,\mathrm{d} = \lambda g(y) + g(z).$$

Agora mostremos que g é limitada com $\|g\| = 1$. Observe que

$$g(m) = g(m + 0 \cdot x_0) = 0 \cdot \mathrm{d} = 0, \quad \forall m \in M \quad \text{e} \quad g(x_0) = g(0 + 1 \cdot x_0) = \mathrm{d}\,.$$

Seja $y = m + tx_0$. Se $t = 0$ temos $y = m$ então $g(y) = g(m) = 0$, logo $|g(y)| \leqslant \|y\|$. Se $t \neq 0$ então

$$\|y\| = \|m + tx_0\| = \left\|-t\left(-\frac{m}{t} - x_0\right)\right\| = |t|\left\|-\frac{m}{t} - x_0\right\| \geqslant |t|d \Rightarrow \|y\| \geqslant |t|d.$$

Assim,

$$|g(y)| = |t|d \leqslant \|y\|, \quad \forall y \in M + [x_0]$$

Então $\|g\| \leqslant 1$. Por outro lado dado $\varepsilon > 0$, da definição de ínfimo existe $m_0 \in M$ tal que $0 < \|m_0 - x_0\| < d + \varepsilon$. Seja $z = m_0 - x_0$. Então $z \in M + [x_0]$ e daí

$$\frac{|g(z)|}{\|z\|} = \frac{|g(m_0) - g(x_0)|}{\|m_0 - x_0\|} = \frac{|-d|}{\|m_0 - x_0\|} \geqslant \frac{d}{d+\varepsilon}.$$

Mas,

$$\|g\| \geqslant \frac{d}{d+\varepsilon} \longrightarrow 1 \Rightarrow \|g\| \geqslant 1.$$

Portanto $\|g\| = 1$. Pelo Corolário 3.1, existe $f \in E'$ tal que $f_{|_{M+[x_0]}} = g$ com $\|f\| = \|g\|$. Assim $\|f\| = 1,\ f(x_0) = g(x_0) =$ d e $f(m) = g(m) = 0$ para todo $m \in M$. ■

Teorema 3.5 (**Teorema de Hahn-Banach** - Forma analítica complexa)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Sejam $G \subsetneq E$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear tal que*

$$|g(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in G.$$

Então existe um funcional linear $f : E \to \mathbb{K}$ que estende g, isto é,

$$f|_G = g, \quad \textit{ou seja} \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in G,$$

tal que

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in E.$$

Demonstração: Tratemos primeiro o caso real, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Por hipótese temos

$$g(x) \leqslant |g(x)| \leqslant p(x),\ \forall x \in G.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (caso real), existe $f : E \to \mathbb{R}$, extensão linear de g tal que

$$f(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in E.$$

Como f é linear e p é sublinear, temos

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Daí $f(x) \geqslant -p(x)$ para todo $x \in E$. Portanto

$$|f(x)| \leqslant p(x),\ \forall x \in E.$$

Façamos agora o caso complexo, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Defina $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, onde $g_1(x) = \mathrm{Re}(g(x))$ e $g_2(x) = \mathrm{Im}(g(x))$, com $g_1, g_2 : G \to \mathbb{R}$. Note que

$$g_1(x+y) + ig_2(x+y) = g(x+y) = g(x) + g(y) = (g_1(x) + g_1(y)) + i(g_2(x) + g_2(y)).$$

Daí,

$$g_j(x+y) = g_j(x) + g_j(y), \quad j = 1, 2.$$

Também temos

$$g_1(\lambda x) + ig_2(\lambda x) = g(\lambda x) = \lambda g_1(\lambda x) + i\lambda g_2(\lambda x).$$

Daí,

$$g_j(\lambda x) = \lambda g_j(x), \quad j = 1, 2.$$

Então g_1 e g_2 são funcionais lineares "reais" e

$$g_1(x) \leqslant |g(x)| \leqslant p(x),\ \forall x \in G.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (caso real) existe um funcional linear $f_1 : E \to \mathbb{R}$ com $f_1|_G = g_1$ tal que

$$f_1(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in E.$$

Agora observe que

$$g_1(ix) + ig_2(ix) = g(ix) = ig(x) = i(g_1(x) + ig_2(x)) = ig_1(x) - g_2(x).$$

Então $g_2(x) = -g_1(ix)$. Logo $g(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto f(x) = f_1(x) - if_1(ix). \end{aligned}$$

Temos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$. Mostremos que f é um funcional linear sobre $\mathbb{C}$. Sejam $x, y \in E$, logo

$$f(x+y) = f_1(x+y) + if_1(x+y) = f_1(x) + if_1(x) + f_1(y) + if_1(y) = f(x) + f(y).$$

Agora sejam $x \in E$ e $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f_1(\lambda x) - if_1(i\lambda x) \\ &= f_1((a+ib)x) - if_1(i(a+ib)x) \\ &= af_1(x) + bf_1(ix) - i(af_1(ix) - bf_1(x)) \\ &= (a+ib)f_1(x) - i(a+ib)f_1(ix) \\ &= (a+ib)(f_1(x) - if_1(ix)) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

Mostremos finalmente que $|f(x)| \leqslant p(x)$, para todo $x \in E$. Se $f(x) = 0$ então a desigualdade é clara pois $p(x) \geqslant 0$. Seja $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$. Então existe θ tal que $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$. Então

$$|f(x)| = f(x)e^{-i\theta} = f(xe^{-i\theta}) = f_1(xe^{-i\theta}) \leqslant p(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

Mostrando que f estende g. ■

3.4 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Definição 3.8. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $f \in E'$, com $f \neq 0$. Definimos um hiperplano de equação $[f = \alpha]$, como sendo o conjunto

$$H_\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

Observação 3.6. Note que $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$.

Exemplo 3.17. Se $f(x,y) = x + y$, então $H_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \alpha\}$.

Observação 3.7. Se $x_0 \in H_\alpha$ então $H_\alpha = x_0 + \mathrm{Ker}(f)$.

De fato, $y \in H_\alpha$ então $f(y) = \alpha = f(x_0)$, daí $f(y - x_0) = 0$, logo $y - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$. Portanto $y = x_0 + y - x_0 \in x_0 + \mathrm{Ker}(f)$. Por outro lado, se $z = x_0 + y$ com $y \in \mathrm{Ker}(f)$, então $f(z) = f(x_0) + f(y) = \alpha$ e assim $z \in H_\alpha$.

Proposição 3.2. *O hiperplano H_α é fechado se, e somente se, $f \in E'$.*

Demonstração: Se $f \in E'$ temos que $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$. Assim H_α é fechado, pois é a imagem inversa de um fechado por uma aplicação contínua.

Por outro lado se H_α é fachado então H_α^c é aberto e não vazio. Seja $x_0 \in H_\alpha^c$. Sem perda de generalidade suponha $f(x_0) < \alpha$. Existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subseteq H_\alpha^c$.

Afirmação: Temos que $f(x) < \alpha$, para todo $x \in B_r(x_0)$.

Suponha o contrário, então existe $x_1 \in B_r(x_0)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Pela convexidade da bola $B_r(x_0)$

$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1 \in B_r(x_0) \subseteq H_\alpha^c, \ \forall x \in [0,1].$$

Temos que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$f(x_{t_0}) = \alpha \Leftrightarrow t_0 = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \quad (f(x_0) < \alpha < f(x_1)).$$

Logo $0 < t_0 < 1, \ x_{t_0} \in B_r(x_0) \cap H_\alpha$. Absurdo! Portanto, $f(x) < \alpha$, para todo $x \in B_r(x_0)$. Assim

$$x \in B_r(x_0) \Leftrightarrow x = x_0 + rz, \text{ com } z \in B(0,1).$$

Então

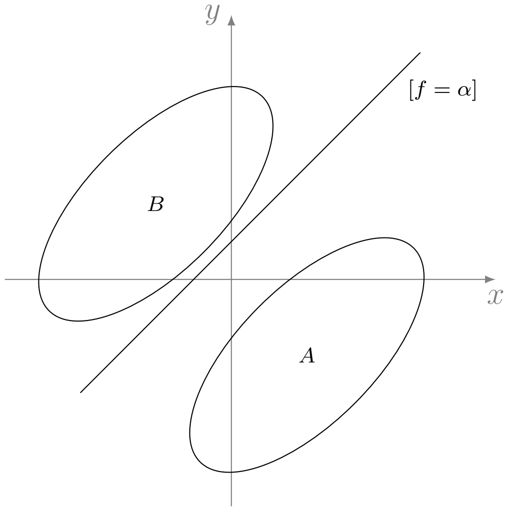
$$f(x_0 + rz) < \alpha \Leftrightarrow f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r} \Leftrightarrow |f(z)| < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$$
$$\Leftrightarrow \sup_{\|z\| \leqslant 1} |f(z)| < \frac{\alpha - f(x_0)}{r} \Leftrightarrow \|f\| \leqslant \frac{\alpha - f(x_0)}{r}.$$

■

Definição 3.9. Sejam $A, B \subsetneq E$ subconjuntos próprios. Dizemos que o hiperplano H_α separa A e B se

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y), \; \forall x \in A \text{ e } \forall y \in B.$$

Figura 2 – Separação de A e B pelo hiperplano $[f = \alpha]$.

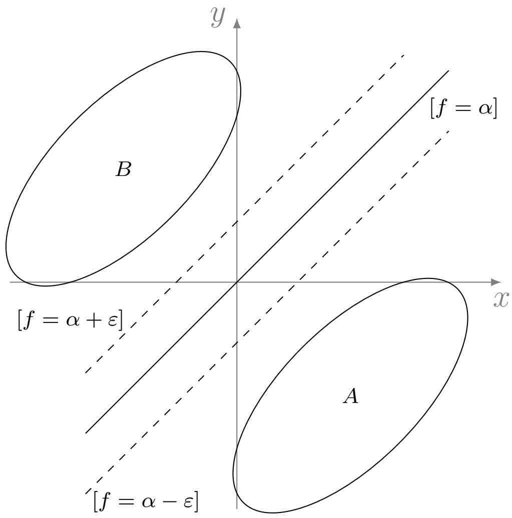


Elaborado pelo autor.

Dizemos que o hiperplano H_α separa A e B no sentido estrito se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y), \; \forall x \in A \text{ e } \forall y \in B.$$

Figura 3 – Separação de A e B pelo hiperplano $[f = \alpha]$.



Elaborado pelo autor.

Lema 3.3. *Suponha que C seja um aberto convexo e $0 \in C$. Defina*

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} = \inf\{\alpha > 0 : x \in \lambda C\},$$

*o qual é chamado de **funcional de Minkowsky**. Então p_C satisfaz:*

i) $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x);\ \lambda > 0;\ x \in E;$

ii) Existe $M > 0$ *tal que* $0 \leqslant p_C(x) \leqslant M\|x\|;\ \forall x \in E;$

iii) $C = B = \{x \in E : p_C(x) < 1\};$

iv) $p_C(x+y) \leqslant p_C(x) + p_C(y),\ \forall x, y \in E.$

Demonstração: *i)* Temos $p_C(\lambda x) = \inf\{\gamma > 0 : \gamma^{-1}(\lambda x) \in C\}$. Então

$$\gamma^{-1}(\lambda x) \in C \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{-1} x \in C \Leftrightarrow p_C(x) \leqslant \frac{\gamma}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda p_C(x) \leqslant \gamma \Leftrightarrow \lambda p_C(x) \leqslant p_C(\lambda x).$$

Por outro lado $p_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}x \in C \Leftrightarrow \frac{\alpha^{-1}}{\lambda}(\lambda x) \in C \Leftrightarrow (\alpha\lambda)^{-1}(\lambda x) \in C \Leftrightarrow p_C(\lambda x) \leqslant \lambda\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{p_C(\lambda x)}{\lambda} \leqslant \alpha \Leftrightarrow \frac{p_C(\lambda x)}{\lambda} \leqslant p_C(x) \Leftrightarrow p_C(\lambda x) \leqslant \lambda p_C(x).\end{aligned}$$

ii) Como $0 \in C$ e C é aberto existe $r > 0$ tal que $B_{2r}(0) \subset C$. Em particular,

$$\frac{rx}{\|x\|} \in C \Leftrightarrow \left(\frac{\|x\|}{r}\right)^{-1} x \in C \Rightarrow 0 \leqslant p_C(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r} = M\|x\|.$$

iii) Seja $x \in C$, como C é aberto existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq C$. Considere $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|x\|}$, então $(1+\varepsilon)x \in C$, pois$\|(1+\varepsilon)x - x\| = \varepsilon\|x\| < r$ então,

$$(1+\varepsilon)x \in C \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{-1} x \in C \Rightarrow p_C(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow x \in B.$$

Reciprocamente, seja $x \in E$ tal que $p_C(x) < 1$. Existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$. Pela convexidade de C temos

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)\cdot 0 \in C.$$

iv) Sejam $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$. Note que

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{p_C(x)+\varepsilon} p_C(x) < 1 \Rightarrow \frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C.$$

Analogamente $\dfrac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C$. Pela convexidade de C temos

$$\frac{tx}{p_C(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C,\ \forall t \in [0,1].$$

Afirmação: Existe $t_* \in (0,1)$ tal que

$$\frac{t_n x}{p_C(x)+\varepsilon} + (1-t_n)\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} = \frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} \in C.$$

Basta tomar $t_* = \dfrac{p_C(x)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}$. Logo

$$\begin{aligned}&(p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon)^{-1}(x+y) \in C\\ &\Rightarrow p_C(x+y) \leqslant p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon\\ &\Rightarrow p_C(x+y) \leqslant p_C(x)+p_C(y).\end{aligned}$$

■

Lema 3.4. *Seja $C \subset E$ não vazio, aberto e convexo. Se $x_0 \in E \backslash C$ então existe um hiperplano $[f=\alpha]$ fechado que separa $\{x_0\}$ e C.*

Demonstração: Considere $0 \in C$ e defina

$$\begin{aligned}g : \langle x_0\rangle &\longrightarrow \mathbb{R}\\ tx_0 &\longmapsto g(tx_0) = t\end{aligned}$$

Afirmação: Temos que $g(x) \leqslant p_C(x),\ \forall x \in G = \langle x_0\rangle,\ (x_0 \notin C \Rightarrow p_C(x_0) \geqslant 1)$.

De fato, para $t<0$ então $g(tx_0)=t<p_C(tx_0)$, pois $p_C(tx_0) \geqslant 0$. E para $t>0$ então $g(tx_0)=t<tp_C(x_0)=p_C(tx_0)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in E^*$ tal que $f(x) \leqslant p_C(x)$ e $f|_{\langle x_0\rangle} = g$. Assim

$$f(x) \leqslant p_C(x) \leqslant M\|x\| \Rightarrow f \in E'.$$

Logo $f(x) \leqslant p_C(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0)$, para todo $x \in C$. Daí $[f=1]$ separa C e $\{x_0\}$. ■

Teorema 3.6 (1^a **Forma Geométrica**). *Sejam $A, B \subsetneq E$ subconjuntos não vazios e convexos com $A \cap B = \emptyset$. Se A e B são abertos então existe um hiperplano fechado $[f=\alpha]$ que separa A e B.*

Demonstração: Sendo A e B convexos então $C = A - B$ é convexo. Note que

$$C = \bigcup_{y\in B}(A-y)$$

é aberto. Note também que $0 \notin C$. Pelo Lema 3.4 existe $f \in E'$ tal que H_α separa C e $x_0 = 0$ ou seja

$$f(x) < \alpha < f(0) = 0,\ \forall x \in C.$$

Assim temos que $f(a-b) < \alpha$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Fixado $a \in A$

$$f(a) < f(b),\ \forall b \in B \Rightarrow f(a) \leqslant \inf_{b\in B} f(b) \Rightarrow \sup_{a\in A} f(a) \leqslant \inf_{b\in B} f(b) \Rightarrow \sup_{a\in A} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{b\in B} f(b)$$

Vemos que o hiperplano $[f=\alpha]$ separa A e B. ■

Teorema 3.7 (2^a **Forma Geométrica**). *Sejam $A, B \subsetneq E$ subconjuntos não vazios e convexos com $A \cap B = \emptyset$. Se A é fechado e B é compacto então existe um hiperplano fechado $[f = \alpha]$ que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração: Seja $C = A - B$, então C é convexo, fechado, e $0 \notin C$. Consequentemente, existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Pela 1^a Forma Geométrica existe um hiperplano fechado que separa $B(0, r)$ e C. Portanto, existe algum $f \in E^*$, com $f \neq 0$, tal que

$$f(w) \leqslant \alpha \leqslant f(z), \ \forall w \in C, \ \forall z \in B(0, r).$$

Isto é,

$$f(x - y) \leqslant \alpha \leqslant f(rz), \ \forall x \in A, \ \forall y \in B, \ \forall z \in B(0, 1).$$

Segue que $f(x - y) \leqslant -r\|f\|, \ \forall x \in A, \ \forall y \in B$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$, obtemos

$$f(x) - f(y) \leqslant -2\varepsilon \Rightarrow f(x) + \varepsilon \leqslant f(y) - \varepsilon, \ \forall x \in A, \ \forall y \in B.$$

Escolha α tal que

$$\sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon, \ \forall x \in A, \ \forall \ y \in B.$$

Vemos que o hiperplano $[f = \alpha]$ separa A e B estritamente. ■

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações do Teorema de Hahn-Banach dentro da teoria de Análise Funcional.

Definição 4.1. Seja E um espaço de Banach e $M \subseteq E$ um subespaço fechado, dizemos que G é suplementar topológico de M, se G é fechado e $E = M + G$ com $M \cap G = \{0\}$.

Proposição 4.1. *Todo subespaço vetorial normado $M \subset E$ de dimensão finita admite um suplemento topológico.*

Demonstração: Seja $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de M. Definimos os funcionais lineares (projeções)

$$\begin{aligned} \varphi_i : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_i(x) = x_i, \end{aligned}$$

onde $i = 1, \ldots, n$ e $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Note que tais funcionais são limitados. Assim pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada i, existem $\psi_i \in E'$, tais que $\psi_i|_M = \varphi_i$.

Consideremos o conjunto

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\psi_i).$$

Claramente G é um subespaço fechado de E. Além disso se $x \in M \cap G$ então

$$x_i = \psi_i(x) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

donde $x = 0$. Portanto

$$M \cap G = \{0\}.$$

Finalmente, dado $z \in E$, consideremos

$$x = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z) e_j$$

e $y = x - z$. Note que $x \in M$ e

$$\begin{aligned} \psi_i(y) &= \psi_i(x) - \psi_i(z) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z)\psi_i(e_j) - \psi_i(z) \\ &= \psi_i(z) - \psi_i(z) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Logo $y \in G$. Portanto

$$z = x + y \in M + G.$$

■

Proposição 4.2. *Sejam E, F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(M, F)$, onde M é um subespaço de E. Se a dimensão de F é finita, então existe uma extensão $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de F, então para cada $x \in M$, temos

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

Definimos os funcionais

$$\begin{aligned} f_i : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_i(x), \end{aligned}$$

com $i = 1, \ldots, n$. Note que f_i é linear, pois T é linear e

$$|f_i(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \leqslant c\|T(x)\| \leqslant k\|x\|, \ \forall x \in E \quad \text{e} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Logo do Teorema de Hahn-Banach existem funcionais $\tilde{f}_i : E \to \mathbb{R}, \ i \in \{1, \ldots, n\}$, lineares limitados tais que

$$\tilde{f}_i|_M = f_i \quad \text{e} \quad \|\tilde{f}_i\| = \|f_i\|.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{T} : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) e_i. \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{T}$ é linear pois os $\tilde{f}_i$ são lineares e

$$\|\tilde{T}(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\tilde{f}_i(x)| \|e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{f}_i\| \|x\| \|e_i\| = k\|x\|, \ \forall x \in E.$$

Além disso

$$\tilde{T}|_M = T.$$

■

Proposição 4.3. *Seja E um espaço de Banach e M é um subespaço de E. Se $T \in \mathcal{L}(M, \ell^\infty)$, Então existe uma extensão $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow \ell^\infty \\ x &\longmapsto T(x) = (f_n(x)) = (a_n), \end{aligned}$$

onde $T \in \mathcal{L}(M, \ell^\infty)$. Definamos

$$\begin{aligned} f_n : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = a_n. \end{aligned}$$

Temos que f_n é linear, pois T é linear e

$$|f_n(x)| \leqslant \|T(x)\|_\infty \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall x \in M.$$

Logo $(f_n) \subset E'$ e $\|f_n\| \leqslant \|T\|, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Pelo Teorema de Hahn-Banach existem funcionais $\tilde{f}_n \in E'$, tais que

$$\tilde{f}_n|_M = f_n \quad \text{e} \quad \|\tilde{f}_n\| = \|f_n\|.$$

Note que

$$|\tilde{f}_n(x)| \leqslant \|f_n\|\|x\| \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in E.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{T} : E &\longrightarrow \ell^\infty \\ x &\longmapsto \tilde{T}(x) = (\tilde{f}_n(x)). \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{T}$ é linear e

$$\|\tilde{T}(x)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\tilde{f}_n(x)| \leqslant \|T\|\|x\|.$$

Logo $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Por outro lado

$$\|T\|_\infty = \sup_{x\in M} \frac{\|T(x)\|_\infty}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\in E} \frac{\|\tilde{T}(x)\|_\infty}{\|x\|} = \|\tilde{T}\|.$$

Além disso

$$\tilde{T}|_M = T.$$

■

Proposição 4.4. *Se $x \neq y$ em um espaço vetorial normado E, então existe $f \in E'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demonstração: Se $x \neq y$, então

$$\|x - y\| > 0.$$

Mas Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in E'$ tal que

$$\|x - y\| = \sup_{\substack{\|f\|\leqslant 1 \\ f\in E'}} |f(x - y)| > 0.$$

Logo

$$|f(x - y)| = |f(x) - f(y)| > 0.$$

Portanto $f(x) \neq f(y)$. ■

Outra aplicação importante do Teorema de Hahn-Banach é nos espaços separáveis, que mostra que se o dual de um espaço é separável então o próprio espaço é separável.

Definição 4.2. Dizemos que um espaço vetorial normado E é separável quando possui um subconjunto enumerável e denso.

Teorema 4.1. *Todo espaço vetorial normado que possui base de Schauder é separável .*

Demonstração: Seja E um espaço vetorial normado e (e_k) uma base de Schauder para E. Considere o conjunto

$$\Lambda_k = \{a_1e_1 + \cdots + a_ke_k;\ a_j \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Temos que Λ dado a seguir é enumerável, já que

$$\Lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Lambda_k,$$

e $\mathbb{N}$ é enumerável. Além disso, Λ é denso em E, isto é, $\overline{\Lambda} = E$. Com efeito, dado $x \in E$ então $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_ke_k$ com $x_k \in \mathbb{R}$. Assim dado $\varepsilon > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_ke_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existem $r_i \in \mathbb{Q}$, tal que

$$|r_k - x_k| < \frac{\varepsilon}{2nM},$$

onde $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|e_i\|$. Tomando $z = \sum\limits_{k=1}^{n} r_ke_k \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned}\|x - z\| &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} r_ke_k \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_ke_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} r_ke_k - \sum_{k=1}^{n} x_ke_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |r_k - x_k|\|e_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2nM}M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Mostrando que Λ é denso em E. Portanto E é separável. ■

Observação 4.1. O espaço ℓ^p com $1 \leqslant p < \infty$, é separável, pois possui base de Schauder.

Exemplo 4.1. O espaço ℓ^∞ não é separável e portanto não possui base de Schauder.

De fato, seja $\Lambda = \{x_n = (x_j^n);\ x_n \in \ell^\infty\}$ e considere $y = (y_j)$ onde

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{se } |x_j^j| \geqslant 1 \\ x_j^j + 1, & \text{se } |x_j^j| < 1. \end{cases}$$

Observe que $y \in \ell^\infty$, pois

$$\|y\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j| \leqslant 2.$$

Porém $\|y - x\|_\infty \geqslant |y_j - x_n^n|$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Em particular para $j = n$, temos

$$\|y - x\|_\infty \geqslant |y_j - x_j^j| \geqslant 1.$$

Daí temos que Λ não é denso e assim ℓ^∞ não é separável, donde não possui base de Schauder.

Proposição 4.5. *Todo subconjunto de um espaço separável é separável.*

Demonstração: Seja E um espaço separável e $M \subseteq E$. Seja $(x_n) \subseteq E$ uma sequência densa e $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $r_m > 0$ com $r_m \to 0$.

Claramente $(a_{n,m}) \subseteq M$ é enumerável. Se $B(x_n, r_m) \cap M \neq \emptyset$, temos que $(a_{n,m})$ é denso em M. De fato, dado $x \in M$ e $\varepsilon > 0$, desde que (x_n) é denso em E, existe x_n tal que $r_m < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|x - x_n\| \leqslant r_m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhendo $a_{n,m} \in B(x_n, r_m) \cap M$. Então

$$\begin{aligned}\|a_{n,m} - x\| &\leqslant \|a_{n,m} - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leqslant r_m + r_m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2. *Seja E um espaço de Banach. Se E' é separável então E é separável.*

Demonstração: Seja $S_{E'} = \{f \in E' \; ; \; \|f\| = 1\}$, temos que $S_{E'}$ é separável, já que $S_{E'} \subseteq E'$ e E' é separável. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável e denso em E'. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in S_E = \{x \in E \; ; \; \|x\| = 1\}$ tal que $|f_n(x_n)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, (pois se $|f_n(x)| < \dfrac{1}{2}$, teríamos $\|f\| < \dfrac{1}{2}$, absurdo!).
Seja $M = \overline{\langle\{x_n\}\rangle}$, mostremos que $M = E$. Suponha por absurdo que $M \subsetneq E$. Como M é fechado escolhemos $x_0 \in E \backslash M$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in E'$ com $\|f\| = 1$ tal que $f(x_0) = \mathrm{d} = \mathrm{dist}(x_0, M)$ e $f_{|_M} = 0$. Então temos $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, daí

$$\frac{1}{2} \leqslant |f_n(x_n)| = |(f_n - f)(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|\|x_n\| = \|f_n - f\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

absurdo, já que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $S_{E'}$. Assim $M = E$. Portanto E é separável. ■

Observação 4.2. A recíproca do Teorema 4.2 não é verdadeira, pois $E = \ell^1$ é separável porém $E' = \ell^\infty$ não é separável.

O Teorema de Hahn-Banach também é utilizado para mostrar que $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$. De fato, já sabemos que $(\ell^1)' = \ell^\infty$. Por outro lado, o funcional

$$\begin{aligned}\varphi : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_n) &\longmapsto \varphi(x) = \lim x_n\end{aligned}$$

é tal que $\varphi \in C'$, porém $\varphi \notin l^1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\varphi} \in (\ell^\infty)'$ tal que

$$\tilde{\varphi}|_C = \varphi.$$

Isto mostra que $(\ell^\infty)' \supsetneq \ell^1$.

A seguir apresentaremos algumas aplicações da segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Os dois primeiros resultados são frequentemente utilizados para mostrar a densidade de um determinado subespaço vetorial.

Corolário 4.1. Seja E um espaço vetorial e F um subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E'$ com $f \neq 0$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.

Demonstração: Sendo $\overline{F} \neq E$. Fixe $x_0 \in E \backslash \overline{F}$. Pela 2^a Forma Geométrica existe um hiperplano fechado $[f = \alpha]$ que separa $\overline{F}$ (fechado) e $\{x_0\}$ (compacto) no sentido estrito, isto é, existem $f \in E'$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0), \ \forall x \in \overline{F}.$$

Em particular,

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0), \ \forall x \in F.$$

Como F é um subespaço vetorial temos $f(\lambda x) < \alpha$ para todo $x \in F$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo $f(x) < \dfrac{\alpha}{\lambda}$ para todo $x \in F$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$. Fazendo $\lambda \to \infty$ temos que $f(x) \leqslant 0$, para todo $x \in F$. Por outro lado $f(-x) \leqslant 0$, para todo $x \in F$, donde $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in F$. Portanto $f(x) = 0$, para todo $x \in F$. ■

Corolário 4.2. Seja E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E. Então $\overline{F} = E$ (denso) se, e somente se, para todo $f \in E'$ tal que $f|_F \equiv 0$ tem-se que $f(x) = 0$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Se $\overline{F} = E$ então dado $x \in E$ existe uma sequência $(x_n) \subset F$ tal que $x_n \to x$. Como $f \in E'$ temos que $f(x_n) \to f(x)$. Desde que $(x_n) \subset F$ tem-se $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $f(x) = 0$ para todo $x \in E$.

Por outro lado suponha que $\overline{F} \neq E$. Aplicando o Corolário 4.1 temos um absurdo. Portanto $\overline{F} = E$, isto é, F é denso em E. ■

Proposição 4.6. *Seja E em espaço vetorial normado e $f_0, f_1, \ldots, f_n \in E'$, tais que*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f_0.$$

Então, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

Demonstração: Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} F : E &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto F(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)). \end{aligned}$$

Claramente F é linear e limitada. Além disso, $a = (1, 0, \ldots, 0) \notin \operatorname{Im} F$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (2^a forma geométrica), existe um hiperplano $[\varphi = \alpha]$, que separa $\{a\}$ e $\operatorname{Im} F$ no sentido estrito, isto é, existe $\varphi \in \mathbb{R}^{n+1},\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, com

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \varphi(e_i),$$

tais que

$$\varphi(F(x)) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant \varphi(a),\ \forall x \in E.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\varphi(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)) < \alpha < \varphi(a) \\
&\Rightarrow f_0(x)\varphi(e_0) + f_1(x)\varphi(e_1) + \cdots + f_n(x)\varphi(e_n) < \alpha < \varphi(e_0) \\
&\Rightarrow f_0(x)u_0 + f_1(x)u_1 + \cdots + f_n(x)u_n < \alpha < u_0,\ \forall x \in E,
\end{aligned}$$

onde $u_i = \varphi(e_i)$, com $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Logo

$$f_0(x)u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i f_i(x) = 0 \Rightarrow f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x),\ \forall x \in E,$$

onde $\lambda_i = -\dfrac{u_i}{u_0}$, com $i = 1, \ldots, n$. ■

Proposição 4.7. *Seja E um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Seja $x_0 \in E$ satisfazendo a seguinte condição, para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi|_M = 0$ implique que $\varphi(x_0) = 0$, então $x_0 \in M$.*

Demonstração: Suponha que $x_0 \notin M$, então como $\{x_0\}$ e M são convexos, disjuntos e não vazios, com M fechado e $\{x_0\}$ compacto, pelo Teorema de Hahn-Banach (2^a forma geométrica), existe um hiperplano $[f = \alpha]$, que separa $\{x_0\}$ e M no sentido estrito, isto é, existe $f \in E',\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0),\ \forall x \in M.$$

Logo, $f(x) = 0,\ \forall x \in M$, porém $f(x_0) > 0$. Absurdo. Logo $x_0 \in M$. ■

Proposição 4.8. *Seja E um espaço vetorial real e $f,\ g$ funcionais lineares definidos sobre E. Então*

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$$

se, e somente se, existe $\lambda > 0$ tal que $f = \lambda g$.

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
F : E &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
x &\longmapsto F(x) = (f(x), g(x)).
\end{aligned}$$

Temos que F é linear, já que f e g o são. Além disso $(1,0) \notin \operatorname{Im} F$, pois do contrário existiria $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = 1$ e $g(x_0) = 0$, isto é, $x_0 \in \operatorname{Ker} g$ e $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$. Absurdo.

Como $\{(1,0)\}$ e $\operatorname{Ker} f$ são convexos, disjuntos e não vazios, com $\operatorname{Ker} f$ fechado e $\{x_0\}$ compacto, segue do Teorema de Hahn-Banach (2^a forma geométrica), existe um hiperplano $[\varphi = \alpha]$, que separa $\{(1,0)\}$ e $\operatorname{Ker} f$ no sentido estrito, isto é, existe $\varphi \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\varphi(f(x), g(x)) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant \varphi(1,0),\ \forall x \in E.$$

Ou seja,

$$f(x)a_1 + g(x)a_2 < \alpha < a_1,\ \forall x \in E.$$

Logo

$$f(x)a_1 + g(x)a_2 = 0,\ \forall x \in E.$$

E assim

$$f(x) = -\frac{a_2}{a_1} g(x),\ \forall x \in E.$$

Se $a_2 < 0$, tomemos $\lambda = -\dfrac{a_2}{a_1}$ e se $a_2 > 0$, tomemos $\lambda = \dfrac{a_2}{a_1}$.

Reciprocamente, se existe $\lambda > 0$ com

$$f(x) = \lambda g(x),\ \forall x \in E.$$

Então

$$y \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow 0 = f(y) = \lambda g(y) \Leftrightarrow g(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{Ker} g.$$

■

5 CONCLUSÃO

A teoria previamente apresentada neste trabalho é de suma importância para a compreensão tanto do teorema abordado quanto de suas aplicações, os quais, além da teoria na Análise Funcional, utilizam-se de conceitos de Espaços Métricos e da Álgebra Linear.

O Teorema de Hahn-Banach é um dos teoremas mais importantes da Análise Funcional. Este, nas suas formas, analítica e geométrica, possui diversas aplicações, que se estendem ao longo de toda a teoria da Análise Funcional.

Esperamos que a teoria abordada possa ser utilizada como material de apoio para aqueles quem tem o objetivo de estudar esta área.

REFERÊNCIAS

BIRKHOFF, G.; KREYSZIG, E. The establishment of functional analysis. **Historia Mathematica**, v. 11, p. 258–321, 1984. Citado na página 11.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 42.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. [S.l.]: Springer, 2010. Citado na página 11.

BUSKES, G. The hahn–banach theorem surveyed. **Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences**, v. 327, p. 5–35, 1993. Citado na página 11.

HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. São Paulo: Editora Polígono, 1970. Citado na página 42.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, 1989. Citado na página 11.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/IMPA, 2009.

OLIVEIRA, C. R. de. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2018.