UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FISÍCA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FISÍCA

ISAIAS ALVES NOBREGA

A INFLUÊNCIA DOMINANTE DA ENERGIA ESCURA NA DINÂMICA DO UNIVERSO

CAMPINA GRANDE
2023

ISAIAS ALVES NOBREGA

A INFLUÊNCIA DOMINANTE DA ENERGIA ESCURA NA DINÂMICA DO UNIVERSO

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Fisíca.

Área de concentração: Cosmologia

Orientador: Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE
2023

N754i Nobrega, Isaias Alves.

A influência dominante da energia escura na dinâmica do universo [manuscrito] : / Isaias Alves Nobrega. - 2023.

23 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Coordenação do Curso de Licenciatura em Física - CCTS. "

1. Cosmologia. 2. Energia escura. 3. Relatividade. I. Título

21. ed. CDD 530

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

ISAIAS ALVES NOBREGA

A INFLUÊNCIA DOMINANTE DA ENERGIA ESCURA NA DINÂMICA DO UNIVERSO

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Fisíca.

Área de concentração: cosmologia.

Aprovada em: 29/11/2023.

Banca Examinadora

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador

Prof. Dr. Bugley de Farias Ramos Junior
Examinador - UEPB

Eugênio Bastos Maciel

Prof. Dr. Eugênio Bastos Maciel
Examinador - UEPB

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre me inspira a viver.

"O universo não foi feito à medida do ser humano, mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente." **Carl Sagan**

SUMÁRIO

A INFLUÊNCIA DOMINANTE DA ENERGIA ESCURA NA DINÂMICA DO UNIVERSO

Isaias Alves Nobrega[1]

RESUMO

A cosmologia relativística é o ramo da Física que descreve a evolução do universo, assumindo que a Relatividade Geral é a teoria da gravitação e que o princípio cosmológico é válido. O fato é que esses pressupostos levam às chamadas equações de Friedmann, as quais preveem que, atualmente, o Universo está expandindo de forma desacelerada. Porém, os dados observacionais indicam que esta expansão é acelerada. Então, para sanar a incompatibilidade que existe entre a teoria e as observações, alguns autores propuseram que existe uma energia escura no Universo, a qual seria responsável por este processo de expansão acelerada. Inicialmente, foi proposto o chamado modelo Λ-CDM (Cold Dark Matter), no qual essa energia é inserida através da introdução de uma constante cosmológica negativa nas equações de Einstein. Posteriormente, surgiram os então chamados modelos ϕ-CDM ou modelos de quintessência, nos quais a energia escura é modelada por um campo escalar. Nesse contexto, o objetivo desse trabalho foi estudar a evolução do Universo consideraremos que a quintessência é descrita por um campo escalar auto acoplado.

Palavras chave: cosmologia; relatividade geral; energia escura.

ABSTRACT

Relativistic cosmology is the branch of Physics that describes the evolution of the universe, assuming that General Relativity is the theory of gravity and that the cosmological principle is valid. The fact is that these assumptions lead to the so-called Friedmann equations, which predict that currently, the Universe is expanding in a decelerated manner. However, observational data indicates that this expansion is accelerating. So, to reconcile the incompatibility between the theory and observations, some authors have proposed the existence of dark energy in the Universe, which would be responsible for this process of accelerated expansion. Initially, the Λ-CDM model (Cold Dark Matter) was proposed, in which this energy is introduced through the introduction of a negative cosmological constant in the Einstein equations. Subsequently, the so-called ϕ-CDM models or quintessence models emerged, in which dark energy is modeled by a scalar field. In this context, the objective of this work was to study the evolution of the Universe considering that quintessence is described by a self-coupled scalar field.

Keywords: cosmology; general relativity; dark energy.

[1]Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

1 Introdução

A Cosmologia é o ramo da Física que busca estudar a origem do Universo, como este se formou e se organiza, e quais os elementos que o compõem.

Durante boa parte da história, a Cosmologia esteve associada à metafísica e religião. Contudo, após 1915, com o advento da teoria relativística de Einstein, intitulada Teoria da Relatividade Geral (TRG), passou a ser considerada como uma ciência (Gomide, 1986). Este ramo da física, a partir de então denominada Cosmologia Relativística, tem como premissa básica o princípio cosmológico e assume a TRG como sendo a teoria da gravitação (Souza, 2004; Horvath et al, 2007).

No ano de 1916, Einstein, que era um adepto do modelo de um Universo estático, percebeu que a formulação original de sua teoria não permitia isso (Liddle, 2000). Porém, descobriu que, caso introduzisse a chamada constante cosmológica nas equações de campo da TRG, estas levariam a solução de um Universo estático (Ryden, 2006). Mais tarde, em 1924, desprezando a constante cosmológica, Alexander Friedmann encontrou equações que descrevem a dinâmica do universo, o qual é governado pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Esse universo pode se expandir ou contrair, e sua geometria pode ser aberta, plana ou fechada (Friedmann, 1924). Posteriormente, no ano de 1927, o padre belga Georges Lemaître descobriu, de forma independente, as equações de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker e propôs, com base na recessão das nebulosas espirais, descoberta por Vesto Slipher na década de 1910, que o Universo começou com uma "explosão" de um "átomo primitivo", o que foi mais tarde chamado de Big Bang. Dois anos mais tarde, Edwin Hubble mostrou que as nebulosas espirais eram galáxias que estão além da Via Láctea (Hubble, 1929). Além do mais, descobriu uma relação entre o desvio para o vermelho de uma galáxia e sua distância, e interpretou isso como evidência de que as galáxias estão se afastando da Terra em todas as direções em velocidades proporcionais a suas distâncias, respaldando, assim, a proposta de Lemaître.

A solução da Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker apresenta algumas dificuldades. Uma delas é a previsão de que o Universo se expande de forma desacelerada, ao contrário dos dados observacionais que indicam uma expansão acelerada (Islam, 2002). Então, para resolver este problema, alguns autores propuseram que existe uma energia escura no Universo, a qual seria responsável por este processo de expansão acelerada. Inicialmente, foi proposto o chamado modelo Λ-CDM (Cold Dark Matter), no qual essa energia é inserida através da introdução de uma constante cosmológica negativa nas equações de Einstein. Muitos modelos surgiram para explicar o problema da aceleração do universo, e entre eles estão os chamados modelos ϕ-CDM ou modelos de quintessência, nos quais a energia escura é modelada por um campo escalar (Lambourne, 2010; Souza, 2004; Weinberg, 1972).

Este trabalho empreenderá uma introdução à teoria da relatividade geral, iniciando com uma exposição à mecânica newtoniana, fundamentando-se nos princípios que, por séculos, sustentaram a física clássica. Posteriormente, adentraremos o domínio da teoria da relatividade geral proposta por Albert Einstein, delineando uma nova abordagem conceitual à gravidade, espaço e tempo. Para aprofundar nossa análise, exploraremos as equações de Friedman, derivadas da relatividade geral, que constituem uma estrutura matemática essencial para descrever a dinâmica e a evolução em larga escala do universo. Por fim, com o intuito de compreender o papel da energia escura na expansão, que é o objetivo desse trabalho, vamos analisar a evolução do Universo considerando que a quintessência é descrita por um campo escalar autoacoplado, ϕ, sendo o potencial de auto acoplamento dado por $V(\phi) = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha}$, onde M e α são constantes (Secco, 2012).

Neste trabalho adotaremos a assinatura $(+,-,-,-)$ e o sistema de unidades no qual $c = 4\pi G = 1$.

2 Relatividade Geral

Embora tenha permitido prever o movimento dos corpos celestes, a teoria newoniana apresentava limitações e tinha algumas questões intrigantes.

Uma das limitações é que a teoria newtoniana era incapaz de explicar as características da gravidade em um contexto relativístico, isto é, falhava na explicação da dinâmica de corpos que atigem velocidades próximas a da luz ao se moverem em campos gravitacionais muito intensos. Além disso, o conceito de ação à distância, onde a gravidade parecia se propagar instantaneamente, deixava algumas questões sem resposta. Foi nesse contexto que, em 1915, Einstein propôs a Relatividade Geral, considerada como a teoria relativística da gravitação.

De acordo com a teoria de Newton, localmente, não há diferença entre estarmos em um campo gravitacional e um referencial não inercial. Dito de outra forma, esta propriedade, que é denominada *princípio da equivalência*, estabelece que, se estivermos no interior de um objeto que está acelerando, como um elevador acelerando para cima, ou se estivermos de pé em um planeta com um campo gravitacional, nossas experiências físicas serão as mesmas. Seríamos incapazes de afirmar se estaríamos na presença da gravitação ou em um referencia não inercial.

Na construção da TRG, a ideia de Einstein foi assumir que o *princípio da equivalência* poderia ser estendido para o caso relativístico. Na verdade, com base no referido princípio, Eintein concluiu que uma configuração de massa e energia provoca uma espécie de "dobra" ou curvatura no espaço-tempo ao redor. Em outras palavras, estabeleceu que as medidas de distância e tempo, realizadas por um observador em diferentes pontos do espaço, são alteradas por conta da presença de massa e energia.

Essa visão da gravidade como uma curvatura do espaço-tempo revolucionou nossa compreensão da gravitação. Ela não apenas resolveu as limitações da teoria newtoniana, mas também previu fenômenos como a deflexão da luz em campos gravitacionais fortes, a existência de buracos negros e a expansão do universo. Todas essas previsões foram posteriormente confirmadas por experimentos e observações.

Nesta seção, apresentaremos as equações de campo da relatividade geral, conhecidas como *equações de Einstein*, e mostraremos como tais equações podem ser obtidas a partir de um princípio variacional. Antes, porém, faremos uma breve abordagem sobre a teoria newtoniana da gravitação, com ênfase na obtenção da equação de campo.

2.1 Teoria da Gravitação Newtoniana

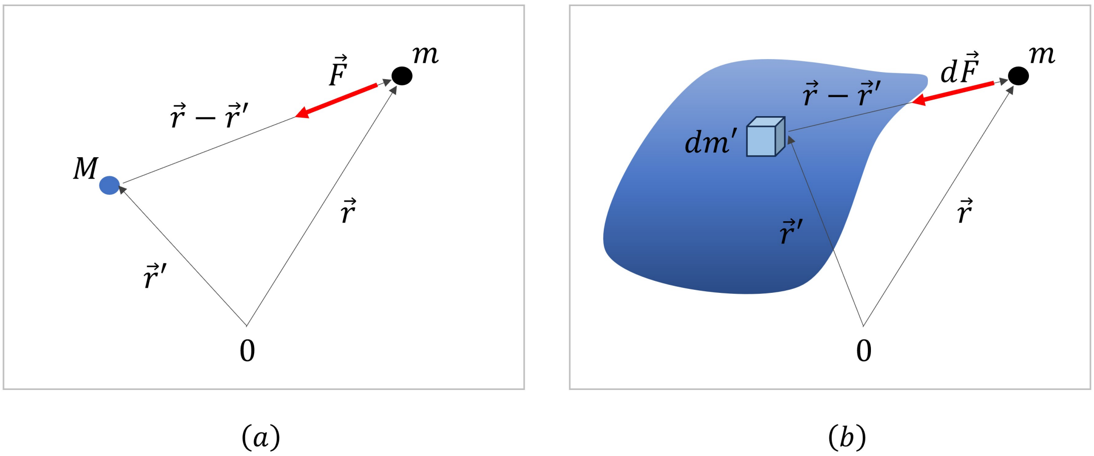
A teoria da gravitação de Isaac Newton, desenvolvida no século XVII, representou um marco fundamental na compreensão da interação entre corpos celestes. Newton define a gravidade como uma força de atração que opera entre duas massas, que, na situação em que as massas são consideradas como partículas, é central, proporcional à multiplicação das massas envolvidas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

Formalmente, em sua teoria Newton assume que a força exercida por uma partícula de massa M, localizada na posição $\vec{r}'$, sobre outra de massa m, que se encontra em $\vec{r}$, é

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mM}{4\pi}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \ , \tag{1}$$

conforme mostra a figura 1.a.

Figura 1: (a) Força exercida por uma partícula de massa M sobre outra de massa m. (b) Força gerada por um elemento de massa dm' sobre uma partícula de massa m.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Consequentemente, entendendo que o princípio da superposição é válido, podemos generalizar esta expressão para o caso em que um corpo extenso de densidade $\rho(\vec{r}')$ produz uma força sobre uma partícula de massa m. A idéia é que uma distribuição contínua pode ser dividida em pequenos elementos de massa $dm' = \rho(\vec{r}')\, dv'$ e que a força sobre m é a soma das forças infinitesimais, $d\vec{F}$, produzidas por cada elemento (ver figura 1.b), isto é,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{m}{4\pi}\int \rho(\vec{r}')\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \ . \tag{2}$$

Uma vez que

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \ , \tag{3}$$

podemos escrever

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r}) \ , \tag{4}$$

onde $\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$, sendo

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \ , \tag{5}$$

o chamado *potencial gravitacional*. Conceitualmente, interpretamos a equação (4) da seguinte forma: a interação entre a distribuição e a partícula, que ocorre à distância, se dá por conta da existência de um campo gravitacional $\vec{g}$ que permeia todo o espaço, gerado pela distribuição.

Embora possamos determinar o potencial escalar à partir da densidade de massa, via equação (5), também podemos encontrá-lo por meio de uma equação diferencial parcial. De fato, aplicando o laplaciano em ambos os lados da equação (5) e usando o fato que

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi\delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \ , \tag{6}$$

(Reitz, 1982), chegamos à equação de campo da teoria newtoniana,

$$\nabla^2 \Phi\left(\vec{r}\right) = \rho\left(\vec{r}\right) \ , \tag{7}$$

a qual é conhecida como a *equação de Poisson da gravitação*. Vale salientar que esta equação nos fornece a expressão do potencial gravitacional na região em que a densidade de massa é diferente de zero. Porém, se estivermos interessado em obter o comportamento do potencial no vazio, deveremos resolver a equação de Laplace, isto é,

$$\nabla^2 \Phi\left(\vec{r}\right) = 0 \ . \tag{8}$$

2.2 Equações de Einstein

A TRG propõe que uma distribuição de matéria e energia produz um campo gravitacional que é descrito pelas 10 componentes de um tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Por conta disso, para que esses objetos sejam determinados, necessitaremos um conjunto constituido por 10 equações diferenciais tensoriais.

Naturalmente, como a TRG deve ser compatível com a teoria clássica da gravitação em situações onde o campo gravitacional é relativamente fraco e as velocidades envolvidas são muito menores, em comparação com a velocidade da luz, esperamos que, em configurações desse tipo, a teoria de Einstein seja capaz de reproduzir os resultados da teoria newtoniana. Em outras palavras, presumimos que, no limite de campo fraco, as equações da TRG devem concordar com a de Poisson [Eq. (7)].

Imbuído nesse pensamento, após algumas tentativas, Einstein concluiu que as componentes do tensor métrico devem ser soluções do conjunto de equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2T_{\mu\nu} \ , \tag{9}$$

conhecido como *equações de Einstein* (Carmeli, 1982). Nesse conjunto, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento e as quantidades $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, os quais são dados por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \tag{10}$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ , \tag{11}$$

sendo

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g x^{\lambda}} \right) \tag{12}$$

os símbolos de Christoffel.

O lado esquerdo das equações de Einstein está associado à geometria do espaço-tempo; já o direito está relacionado à quantidade de matéria e energia que deforma o espaço-tempo. Vale salientar que o tensor energia momento nulo não indica que o espaço-tempo é plano, e sim que, na região onde isso acontece, não há matéria e energia presentes. Na verdade, para que o espaço-tempo seja plano, as componentes do tensor de Riemman,

$$R^{\alpha}{}_{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\rho}\Gamma^{\kappa}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\sigma}\Gamma^{\kappa}_{\mu\rho} \ , \tag{13}$$

devem ser nulas (Weinberg, 1972; Landau e Lifchitz, 1974; Carmeli, 1982; D'inverno, 1992).

2.3 Equações de Einstein a partir de um Princípio Variacional

As equações de campo da relatividade geral podem ser obtidas a partir de um princípio variacional, por meio da uma ação, que é definida pela integral de uma função lagrangiana. Evidentemente, devido a estrutura dessas equações, a referida ação deve ser dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(L_G - 4L_F\right) \ , \tag{14}$$

onde as quantidades escalares L_G e L_F são, respectivamente, as densidades lagrangianas dos campos gravitacional e de matéria e energia. Nesta expressão, embora não possamos atribuir uma forma específica à L_F, podemos inferir como L_G deve ser escrita.

De modo geral, as equações de campo, obtidas a partir de uma princípio variacional, apresentam derivadas com até uma ordem acima da maior derivada presente na lagrangiana. Por outro lado, as equações de Einstein não apresentam derivadas de ordem maior que dois em $g_{\mu\nu}$. Assim, podemos concluir que L_G é um escalar que deve possuir termos envolvendo o tensor métrico e suas derivadas primeiras. Contudo, na TRG não existe nenhum escalar que possua essa característica. Na verdade, o único escalar conhecido, o então chamado escalar de Ricci, é construido a partir do tensor métrico e de derivadas de primeira e segunda ordem desse tensor. Acontece que os termos com derivadas de ordem dois são lineares e, portanto, não contribuiriam com derivadas superiores nas equações de campo. Diante disso, assumiremos que R é a lagrangiana do campo gravitacional e escreveremos (14) como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(R - 4L_F\right) \ . \tag{15}$$

Tomando a variação do primeiro termo, obtemos:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} R = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x R_{\mu\nu} \delta\left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\right) \ . \tag{16}$$

Aplicando a variação no tensor de Ricci [Eq. (10)], no sistema em que os símbolos de Christoffel são nulos (sistema geodésico), encontramos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\left(\delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right) \ . \tag{17}$$

Vale salientar que, embora tenhamos utilizado o sistema geodésico, isto não representa perda de generalidade. De fato, dado que as equações acima têm natureza tensorial, elas devem ser válidas em todos os sistemas de coordenadas e em qualquer ponto do espaço-tempo.

Consequentemente, usando (17) e a propriedade

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} V^\alpha \right) \ , \tag{18}$$

podemos expressar a primeira integral da equação (16) da seguinte maneira

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} V^\alpha \right) d^4x \ , \tag{19}$$

onde

$$V^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho} \tag{20}$$

é um vetor contravariante. Ao examinarmos esta expessão, podemos observar que a integral em questão se iguala a zero. Essa conclusão pode ser deduzida com base no Teorema de Gauss, uma vez que ela corresponde a uma integral de superfície em $\sqrt{-g}V^\alpha$, a qual é igual a zero devido ao desaparecimento das variações nos símbolos de Christoffel nas fronteiras. Desse modo, podemos chegar ao seguinte resultado.

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{21}$$

Calculando a variação da segunda integral em (16), temos:

$$\int d^4x R_{\mu\nu} \delta \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R \delta \sqrt{-g} d^4x \ . \tag{22}$$

Mas, usando a propriedade

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \ , \tag{23}$$

chegamos à

$$\int d^4x R_{\mu\nu} \delta \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \ . \tag{24}$$

Resumindo os resultados acima abtidos, segue que a variação da componente gravitacional correspondente à ação integral é

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} R = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \ . \tag{25}$$

A segunda parte da ação integral, que descreve campos distintos do campo gravitacional, também pode ser determinada empregando o mesmo procedimento variacional previamente utilizado. Dessa maneira, conseguimos obter a seguinte expressão:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} L_F = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \right] d^4x \ . \tag{26}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima pode ser representado como uma integral de superfície que não contribui significativamente, uma vez que a variação dos limites de integração desaparece. Portanto, podemos concluir que:

$$\delta \int d^4x\sqrt{-g}L_F = \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial\left(\partial_\alpha g^{\mu\nu}\right)} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \ . \tag{27}$$

ou ainda

$$\delta \int d^4x\sqrt{-g}L_F = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x \ , \tag{28}$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial\left(\partial_\alpha g^{\mu\nu}\right)} \right] \right\} \tag{29}$$

é o tensor energia-momento.

Portanto, aplicando o princípio variacional, $\delta S = 0$, e utilizando os resultados (25) e (28), encontramos

$$\int \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 2T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \ . \tag{30}$$

Finalmente, entendendo que o termo dentro da integral, ou seja, o integrando, deve ser igual a zero, chegamos assim às equações de campo da TRG,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu} \ .$$

3 Evolução do Universo

Conforme afirmamos, a Cosmologia Relativística é alicerçada no princípio cosmológico e na Relatividade Geral. Isso quer dizer que esse ramo pressupõe que, em grande escala, o Universo é homogêneo e isotrópico e que as componentes da métrica, que descrevem o espaço-tempo do Universo, obedecem às equações de Einstein.

Levando em conta a homogeneidade e isotropia, isto é, que todos os pontos do Universo são equivalentes e que, em qualquer direção observada, será o mesmo, Robertson e Walker concluíram que a métrica associada ao Universo é

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2\right) \right] \ , \tag{31}$$

onde $a(t)$ é o chamado fator de escala, que é uma quantidade fundamental que descreve como as dimensões do universo evoluem ao longo do tempo cósmico e está relacionado ao tamanho das distâncias entre objetos no universo em diferentes momentos. O fator de escala é usado para caracterizar a expansão ou contração do universo em modelos cosmológicos, ou seja, se o fator de escala aumenta com o tempo, isso indica uma expansão do universo. Se diminui, sugere uma contração. O valor específico do fator de escala em um dado momento fornece informações sobre a relação entre as distâncias no universo em comparação com um momento de referência, onde este fator é explicitamente dependente do tempo (Islam, 2002). Por sua vez, k é uma constante que assume diferentes valores, que são determinantes para avaliar a configuração geométrica do espaço. De fato, quando $k = -1$, o Universo é aberto e assume uma curvatura hiperbólica. Já, no caso em que

$k = 0$, é aberto e plano. Finalmente, quando $k = 1$, o universo é fechado e possui uma geometria esférica.

Além disso, Weyl afirmou que o princípio cosmológico será satisfeito apenas se o Universo for considerado como um fluido perfeito. Dessa forma, segundo ele, o tensor energia-momento que descreve todo o conteúdo de matéria e energia do Universo deve ser o de um fluido perfeito, isto é,

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \left(\rho_i + p_i\right) u_\mu u_\nu - \sum_i p_i g_{\mu\nu} \ , \tag{32}$$

em que as quantidades p_i, ρ_i são, respectivamente, a pressão, a densidade de energia dos constituintes do fluido, sendo $u^\mu \equiv dx^\mu/ds$ a quadrivelocidade. Naturalmente, para satisfazer à propriedade de isotropia, p_i e ρ_i devem depender apenas do tempo (Landau e Lifshitz, 1974).

É importante destacar que, uma vez que a evolução do Universo é descrita por um observador co-móvel, a quadrivelocidade é dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Neste caso, as componentes não nulas do tensor energia-momento são:

$$T_{00} = \sum_i \rho_i \ \ , \tag{33}$$

$$T_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \sum_i p_i \ , \tag{34}$$

$$T_{22} = a^2 r^2 \sum_i p_i \tag{35}$$

e

$$T_{33} = a^2 r^2 sen^2\theta \sum_i p_i \ . \tag{36}$$

Para determinarmos como o Universo evolui, devemos usar as componentes da métrica, presentes em (31) e as do tensor energia-momento, dadas pelas expressões acima, nas equações de campo de Einstein. Assim, escolhendo $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ e seguindo esse procedimento, encontramos, para os casos em que μ=ν=0 e μ=ν=1, o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3} \sum_i \rho_i \tag{37}$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -2 \sum_i p_i \ , \tag{38}$$

que são conhecidas por equações de Friedmann, onde o "ponto" indica derivada com respeito ao tempo.

Aqui temos um sistema constituído por duas equações diferenciais e três quantidades desconhecidas: $a\,(t)$, $\rho_i\,(t)$ e $p_i\,(t)$. Por conta disso, é impossível determinarmos a dinâmica do Universo se nos basearmos apenas nesse sistema. Na verdade, para compreendermos a questão da evolução, além dessas equações, precisamos das equações de estado das quantidades constituintes,

$$p_i = \omega_i \rho_i \ , \tag{39}$$

onde ω_i será igual a zero, no caso da matéria não relativística (matéria bariônica e escura), e assumirá o valor 1/3, para a radiação (Ferraro, 2007).

Subtraindo (38) de (37), e utilizando (39), encontramos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}\sum_i (3\omega_i + 1)\,\rho_i \ . \tag{40}$$

Esta equação indica que, sendo $\rho_i > 0$, teremos $\ddot{a} < 0$ para as situações em que o Universo é dominado por matéria não relativística, ou por radiação, ou pelos dois constituintes. Isso significa que, se a condição sobre a densidade de energia for válida, o Universo, ou se expandirá de forma desacelerada, caso $\dot{a} > 0$, ou se contrairá aceleradamente, na situação em que $\dot{a} < 0$.

4 Modelo de Quintessência

Contrariamente ao que é previsto pelas equações de Friedmann, em 1998, observações de supernovas distantes do tipo IA, realizadas por uma equipe de pesquisadores liderada por Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess, indicaram que o Universo está se expandindo de forma acelerada.

Uma vez que os constituintes do Universo observável, como matéria e radiação, não davam conta desse tipo de expansão, para resolver a inconsistência entre teoria e observação, foi proposto que deveria existir uma componente extra, a matéria escura, que seria responsável por essa aceleração.

Nesse contexto, surgiram algumas teorias que buscavam incluir esse tipo de energia na descrição da dinâmica do Universo. Incialmente, foi proposto o modelo Λ-CDM, abreviação para "Lambda Cold Dark Matter", que retoma a contante cosmológica de Einstein com sinal negativo para explicar a energia escura. Tempos depois, surgiram os modelos ϕ-CDM, ou modelos de quintessência, nos quais essa energia é representada por um campo escalar dinâmico, ϕ. Diferentemente do anterior, neste tipo de modelo a densidade de energia e pressão podem variar ao longo do tempo.

Nesta seção, apresentaremos as equações de campo no modelo ϕ-CDM e analisaremos a evolução do Universo para um caso específico.

4.1 Equações do modelo ϕ-CDM

Para formular esta descrição, vamos tomar a lagrangiana de um campo escalar auto acoplado, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$L_F = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - V(\phi) \ . \tag{41}$$

Como consequência, substituindo em (29), encontramos:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\sigma} - V(\phi) \right] \ . \tag{42}$$

À priori, o campo escalar poderia ser função das coordenadas e do tempo. Contudo, a necessidade de satisfazermos o princípio cosmológico nos faz restringir essa dependência apenas à variável t. Assim, considerando esse aspecto e usando o fato que o espaço-tempo do Universo é descrito pela métrica de Robertson-Walker, vemos que as componentes não-nulas do tensor energia momento são

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \ , \tag{43}$$

$$T_{11} = \frac{a^2}{1-kr^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] \ , \tag{44}$$

$$T_{22} = a^2 r^2 \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] \tag{45}$$

e

$$T_{33} = a^2 r^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] \ . \tag{46}$$

Embora a inserção do campo escalar tenha como finalidade modelar a chamada energia escura, não podemos esquecer que esta componente também deve se comportar como um fluido perfeito. Sendo assim, inspirados pelas equações (33) – (36), podemos concluir que a densidade de energia e a pressão, associadas ao campo escalar, são

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \tag{47}$$

e

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \ . \tag{48}$$

Como consequência, utilizando a equação de estado para a energia escura, isto é,

$$p_\phi = \omega \rho_\phi \ , \tag{49}$$

segue dessas equações que

$$\rho_\phi + p_\phi = \dot{\phi}^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ (1+\omega)\rho_\phi \geq 0 \ . \tag{50}$$

Logo, assumindo que $\rho_\phi > 0$, concluímos que $\omega \geq -1$.

De maneira geral, além da energia escura, o Universo pode ser preenchido por matéria e radiação. Porém, como os dados indicam que, atualmente, o Universo está se expandindo aceleradamente, assumiremos que estamos numa fase dominada pela energia escura. Ou seja, consideraremos que a densidade de energia e a pressão são dadas por (49) e (50).

Fazendo isso, as equações de Friedmann [Eqs. (37) e (38)] tomam as seguintes formas:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3}\rho_\phi \tag{51}$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -2p_\phi \ . \tag{52}$$

Consequentemente, usando (49), segue das equações acima que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(3\omega+1)\rho_\phi \ . \tag{53}$$

Este resultado mostra que, sendo $\rho_\phi > 0$, o Universo expandirá de forma acelerada apenas se $\omega < -1/3$. Logo, podemos concluir que, para a energia escura produzir uma expansão acelerada, devemos ter $p_\phi < 0$, com o parâmetro da equação de estado assumindo valores no intervalo $-1 \leq \omega < -1/3$.

Conforme vemos, as equações (51) e (52) são expressas em termos de ϕ e $\dot{\phi}$. Por conta disso, para determinarmos a dinâmica do Universo, precisamos resolver, simultaneamente, as equações de Friedmann e a equação de movimento do campo escalar,

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sqrt{-g}L_F\right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial\phi/\partial x^\alpha\right)}\left(\sqrt{-g}L_F\right)\right] = 0 \ , \tag{54}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu v}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}\right) + \frac{dV\left(\phi\right)}{d\phi} = 0 \ . \tag{55}$$

Finalmente, entendendo que a geometria do Universo é representada pela métrica de Robertson-Walker e lembrando que, no modelo ϕ-CDM, o campo escalar depende apenas de t, a equação acima toma a forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV\left(\phi\right)}{d\phi} = 0 \ , \tag{56}$$

em que

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{57}$$

é o chamado *parâmetro de Hubble*.

4.2 O Modelo

Com o intuito de adquirir informações quantitativas sobre a dinâmica do Universo, vamos explorar um cenário específico em que o potencial de autoacoplamento desempenha um papel crucial. Este potencial, que caracteriza as interações intrínsecas de um campo, será modelado de acordo com as características particulares do contexto em estudo. Aqui, assumiremos que o potencial é dado por

$$V\left(\phi\right) = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha} \ , \tag{58}$$

onde α e M são constantes positivas (Secco, 2012).

Neste caso, supondo que o Universo é plano ($k = 0$), segue da primeira equação de Friedmann, [Eq. (51)], que

$$H = \sqrt{\frac{2\rho_\phi}{3}} \ . \tag{59}$$

Como consequência, substituindo (58) e (59) em (56), obtemos

$$\ddot{\phi} + \sqrt{6\rho_\phi}\dot{\phi} - \alpha M^{4+\alpha}\phi^{\alpha-1} = 0 \ . \tag{60}$$

Esta expressão pode ser interpretada como a equação de movimento de uma partícula unitária, com uma coordenada unidimensional ϕ, que se move sob a ação de uma força $\alpha M^{4+\alpha}\phi^{\alpha-1}$, na presença de uma força de atrito $\sqrt{6\rho_\phi}\dot{\phi}$. Trata-se de uma equação diferencial não linear, o que torna sua resolução uma tarefa desafiadora. No entanto, nosso interesse reside na análise do comportamento de ϕ em intervalos de tempo muito longos, ou seja, em tempos cosmológicos. Nesse contexto, ao considerarmos tempos extremamente distantes, podemos simplificar a equação por meio de duas aproximações. A primeira aproximação decorre da redução da amplitude do campo ϕ devido ao atrito, que é proporcional a $\dot{\phi}$, podemos esperar que, em algum momento, o termo $\dot{\phi}^2$ será desprezível em relação ao potencial $V(\phi)$. Por conta disso, podemos aproximar a densidade de energia por:

$$\rho_\phi \approx V(\phi) = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha} \; . \tag{61}$$

A segunda é que o termo inercial, $\ddot{\phi}$, também se tornará insignificante perto do atrito e do potencial. Com estas informações podemos concluir que a equação (60) se reduz à

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha M^{2+\frac{\alpha}{2}}\phi^{-\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{6}} \; . \tag{62}$$

Resolvendo esta equação e redefinido o zero do tempo, para evitar uma constante de integração, encontramos:

$$\phi = M\left[\frac{\alpha\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)t}{\sqrt{6}}\right]^{\frac{1}{2+\frac{\alpha}{2}}} \; . \tag{63}$$

A partir deste resultado, poderemos mostra que aproximações efetuadas são coerentes. De fato, ao calcularmos a primeira derivada de ϕ e elevá-la ao quadrado, podemos constatar que $\dot{\phi}^2 \propto t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ enquanto que $V(\phi) \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$. Assim, ao compararmos estes resultados, podemos notar que o termo cinético decai de maneira significativamente mais rápida em relação ao potencial. Esta aproximação também se manifesta de forma semelhante no contexto da derivada de segunda ordem de ϕ. Ao tomarmos a segunda derivada do campo, notamos que $\ddot{\phi} \propto t^{-(3+\alpha)/(2+\alpha/2)}$, enquanto que $dV/d\phi \propto t^{-(1+\alpha)/(2+\alpha/2)}$. Logo, ao compará-los, nos parece evidente que o termo $\ddot{\phi}$ decai de forma substancialmente mais rápida do que a derivada do potencial, o que justifica a eliminação do primeiro termo da equação (56).

Finalmente, de posse do comportamento do campo escalar, dado por (63), podemos concluir, a partir das equações (61) e (59), que

$$\rho_\phi \propto t^{-\alpha/(4+\alpha)} \tag{64}$$

e

$$a \propto \exp\left[t^{2/(2+\alpha/2)}\right] \; . \tag{65}$$

Portanto, considerando um Universo plano ($k=0$) e analisando tempos extremamente distantes em uma fase dominada pela energia escura, observamos que a densidade desta componente tende a diminuir progressivamente, ao passo que o fator de escala do Universo cresce de maneira exponencial. Essa tendência revela que, nessas condições, o Universo está se expandindo de forma acelerada. Assim, podemos afirmar, pelo menos dentro do escopo do modelo adotado, que a energia escura é o componente responsável pela aceleração observada. Entretanto, para validar a consistência do modelo com a realidade, é crucial realizar comparações entre os resultados previstos pela teoria e os dados observacionais disponíveis. Essa análise comparativa permitirá verificar se as previsões teóricas estão alinhadas com as características observáveis do nosso Universo. Portanto, o próximo passo seria confrontar os resultados teóricos com informações empíricas para validar ou refinar o modelo adotado. Esse processo de confronto com a observação é fundamental para o desenvolvimento e aprimoramento contínuo das teorias cosmológicas.

5 Conclusão

Neste trabalho, a análise das equações de campo da Teoria da Relatividade Geral e sua relevância na compreensão do universo em grande escala foi aprofundada. A partir dessas equações, e levando em conta o princípio cosmológico, as equações de Friedmann forneceram uma compreensão da evolução e dinâmica do universo observável. Embora essas equações desempenhem um papel fundamental na cosmologia, elas têm suas limitações na descrição de comportamentos específicos do universo, como a expansão acelerada. Isso levou à consideração da existência de um componente no universo responsável por essa expansão, denominado energia escura.

Diversas teorias dentro da física tentaram explicar a natureza da energia escura, e uma delas, abordada neste estudo, é a teoria do campo de quintessência. Essa teoria parte do pressuposto de que a energia escura pode ser modelada por um campo escalar, semelhante à constante cosmológica proposta por Albert Einstein, embora ele próprio tenha, posteriormente, abandonado essa ideia.

É importante destacar que, atualmente, muitos físicos questionam não apenas a natureza da energia escura, mas também a própria TRG. Essa teoria ainda apresenta lacunas e pode requerer uma revisão substancial, assim como a relatividade geral representou uma atualização significativa em relação à mecânica newtoniana. Sendo assim, o estudo desse modelo levou a um entendimento mais profundo de uma das teorias mais importantes da física moderna, a relatividade geral, e, também, apresentou novas ferramentas matemáticas, como o cálculo tensorial.

No que se refere aos resultados previstos pelo modelo, mesmo que as análises tenham sido restritas apenas à situação de tempos longínquos, conclui-se que a energia escura efetivamente prevê uma expansão acelerada do Universo. Essa descoberta representa um marco significativo na busca contínua pela compreensão dos fenômenos cósmicos e destaca a necessidade constante de investigar e aprimorar os modelos teóricos no campo da cosmologia e da relatividade.

REFERÊNCIAS

CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York; John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. Santa Bárbara: University of California, 1997.

D'INVERNO, R., **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, USA, 1992.

FERRARO, Rafael. **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

FRIEDMANN, A. **Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes**. Z. Physik 21, 326-332 (1924).

GOMIDE, F. M., **Introdução à Cosmologia Relativística**. Editora McGraw Hill, Ltda, Curitiba, A. Einstein, 1986. 215 p.

HORVATH, J.E.; LUGONES, G. et al. **Cosmologia Física** - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

HUBBLE, Edwin. **A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae**. Proceedings of the national academy of sciences, v. 15, n. 3, p. 168-173, 1929.

ISLAM, Jamal Nazrul. **An introduction to mathematical cosmology**. Cambridge University Press, 2002.

LAMBOURNE, R. J. A., **Relativity, Gravitation and Cosmology**. Cambridge University Press, 2010. 307p.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

LIDDLE, Andrew R.; LYTH, David H. **Cosmological inflation and large-scale structure**. Cambridge university press, 2000.

PERLMUTTER, Saul et al. **Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae**. The Astrophysical Journal, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.

REIS, Ribamar RR; SIFFERT, Beatriz B. **Supernovas do tipo Ia e a expansão do Universo**. Cadernos de Astronomia, v. 3, n. 1, p. 21-21, 2022.

RIESS, Adam G. et al. **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant**. The astronomical journal, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

REITZ, J.; MILFORD, F.; CHRISTY, R. **Fundamentos da teoria eletromagnética**, tradução RB Sander e C. Duarte, Editora Campus, Rio de Janeiro, 3a. edição, 1982.

RYDEN, Barbara. **Introduction to Cosmology. Departament of Astronomy**, the Ohio State University, 2006.

SECCO, Lucas Frozza. **Um modelo de energia escura na determinação da dinâmica do universo**. 2012.

SOUZA, R. E. de. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo, 2004.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology**, John Wiley, Inglaterra, 1972.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso. Este projeto representou uma jornada significativa e desafiadora, e não teria sido concluído com sucesso sem o apoio e a colaboração de muitos.

Em primeiro lugar, gostaria de expressar meus agradecimentos profundos à minha amada família, com um foco especial na maior de todas as minhas inspirações: minha querida mãe. Ela não é apenas um pilar fundamental em minha vida, mas a força que sempre me impulsionou. Em cada passo desta jornada, minha mãe foi a chama que iluminou o caminho, a âncora que me manteve firme em meio às tempestades da vida. Sua presença incansável, seu amor incondicional e sua dedicação são inestimáveis. Também quero expressar minha sincera gratidão ao meu pai, cujo apoio sempre foi essencial. Seus conselhos sábios e seu apoio incansável moldaram meu percurso de maneiras que palavras não podem descrever adequadamente. E aos meus irmãos, Angélica e Isaeus, que estiveram ao meu lado em todos os momentos, minha gratidão transcende as palavras. Sua presença e apoio, de todas as formas imagináveis, tornaram esta jornada muito mais significativa e rica. Minha família, obrigado por serem a base sólida sobre a qual construí este caminho e por serem as estrelas que iluminaram minhas noites mais escuras. Minha gratidão por vocês é eterna e profunda, e meu amor por vocês não conhece limites.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos, especialmente aqueles que estiveram mais presentes em minha vida e me apoiaram incondicionalmente ao longo deste processo: Edu, Elias, Elizabete, Gê, Tauan e Yuri. Também quero expressar minha gratidão ao meu primo Diego, que compartilha comigo a paixão pela Física; o apoio de vocês foi inestimável. Agradeço também à Vania, que literalmente melhorou minha visão em um momento crucial durante a graduação, à preta (Lucineide) e à Ana, que em muitos momentos foram como uma mãe para mim. Não posso esquecer dos meus amigos de jornada durante a graduação em Física: Geandeson, Heloisa, Matheus, Pedro, Renan e Wevylly. A presença de vocês foi fundamental.

Gostaria também de enfatizar o apoio incrivelmente valioso que meu querido amigo Luciano me proporcionou. Suas contribuições para a conclusão deste trabalho foram imensuráveis, e minha gratidão por sua ajuda é algo que transcende palavras. Suas palavras de encorajamento e apoio, de todas as maneiras possíveis, foram como um raio de luz nos momentos mais sombrios, especialmente nos momentos de declínio emocional. Não há adjetivos que possam capturar plenamente a profundidade da minha gratidão por você, Luciano. Seu apoio fez toda a diferença, e meu coração se enche de carinho ao pensar em tudo o que você fez por mim.

Além disso, gostaria de expressar minha mais profunda gratidão ao meu orientador, Jean Spinelly. A sua brilhante e inestimável orientação, sua paciência incansável e seu profundo conhecimento foram pilares que sustentaram boa parte do meu percurso acadêmico. Com ele, aprendi não apenas no âmbito acadêmico, mas também sobre o tipo de professor que desejo me tornar. Suas diretrizes e conselhos não apenas guiaram meu trabalho, mas também moldaram minha visão e ambição como estudante e futuro educador. O seu papel foi absolutamente crucial na concretização deste trabalho, e sua influência positiva ecoará em minha jornada acadêmica para sempre.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão aos professores Bugley e Eugênio por aceitarem fazer parte da banca de avaliação, à UEPB e seus dedicados professores, quero expressar minha profunda gratidão por disponibilizarem a sólida estrutura educacional e os recursos necessários que viabilizaram a conclusão deste trabalho. Além disso, gostaria de estender meus agradecimentos a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, desempenharam um papel fundamental nesta jornada. Este Trabalho de Conclusão de Curso é dedicado a cada um de vocês. Parafraseando as sábias palavras de Carl Sagan, diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é uma honra imensa para mim compartilhar este percurso e este momento com todos vocês. Agradeço do fundo do meu coração por terem tornado esta jornada tão significativa e inesquecível e, acima de tudo, por tornarem a minha vida mais abundante e significativa.