UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAGNO VICTOR FELISARDO BARBOSA

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

CAMPINA GRANDE
2023

MAGNO VICTOR FELISARDO BARBOSA

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2023

B238s Barbosa, Magno Victor Felisardo.

Sequências numéricas [manuscrito] : uma abordagem analítica da sequência de Fibonacci / Magno Victor Felisardo Barbosa. - 2023.

50 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Sequência numérica. 2. Análise matemática. 3. Sequencia de Fibonacci. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

MAGNO VICTOR FELISARDO BARBOSA

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 01/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maxwell Aires da Silva

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a Deus, por ter sido a fonte das minhas forças, por ajudar a me manter firme na escrita deste trabalho e na conclusão deste curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois sem ele eu nada seria e se não fosse por ele, isso não teria sentido algum.

Agradeço ao meu pai, Magno Afonso Martins Barbosa, meu maior orgulho e fonte de inspiração, que sempre me incentivou a fazer aquilo que eu gosto e a lutar pelos meus sonhos.

Agradeço a minha mãe, Jucileny de Morais Felisardo Barbosa, por me ajudar a buscar forças em Deus quando eu mais precisei e a me fazer entender o quão capaz eu sou.

Agradeço aos meus irmãos, Matheus Felisardo Barbosa e Mayara Felisardo Barbosa, que sempre estiveram comigo.

Agradeço ao meu irmão de outra mãe, João Batista de Sousa Silva, por estar comigo a todo momento e em todas as lutas. Obrigado por me acompanhar nesta jornada.

Agradeço aos meus colegas de turma, que dividiram essa estação comigo.

Agradeço a minha orientadora, Luciana Roze de Freitas, por ser essa pessoa tão especial, pois graças a ela tudo foi muito mais fácil.

Enfim, agradeço a todos os que me ajudaram, de alguma forma, no desenvolvimento deste trabalho e na finalização desta etapa.

“Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos da vida real.”

(Lobachevsky)

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, uma abordagem analítica da conhecida sequência de Fibonacci. Inicialmente, foi realizado um estudo sobre sequências numéricas, abordando os seus principais conceitos e resultados, bem como os principais casos utilizados no ensino básico e trazendo, juntamente a isso, fatos históricos sobre a sequência de Fibonacci, que mostram como a mesma surgiu. Além disso, através de uma pesquisa bibliográfica a respeito do tema pode-se observar a variedade de aplicações da sequência de Fibonacci e, da Análise Matemática, foi possível realizar um estudo mais aprofundado sobre como determinar os termos da sequência e sobre o número de ouro.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; Sequências Numéricas; Análise Matemática.

ABSTRACT

It's presented, in this article, an analytical approach of the acquaintance Fibonacci's sequency. Initially it was conducted a study about numerical sequences, approaching the main concepts and results, as well as the main cases utilized in the basic education and bringing, herewith that, historical facts about Fibonacci's sequency, that reveals how this sequence emerged. Furthermore, through a bibliographic research on the subject, one can observe the variety of applications of the Fibonacci sequence. From Mathematical Analysis, it was possible to conduct a more in-depth study on how to determine the terms of the sequence and on the golden ratio.

Keywords: Fibonacci's sequency; Numerical Sequences; Math Analysis.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO

Com o passar dos anos, a concepção sobre "a origem do universo" tem sido amplamente debatida por cientistas e estudiosos. Assim, inúmeras teorias, foram criadas com o intuito de responder uma única pergunta: "Como surgiu o universo?". Nisso, a matemática acabou se tornando uma ferramenta característica para provar e desmascarar teorias, assim se definindo para uns e outros de diferentes formas, já diria Galileu Galilei: "A matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo", como também, descrito no livro "O homem que calculava [TAHAN (2015)]" a frase de Euclides: "As leis da natureza, nada mais são, que pensamentos matemáticos de Deus". No entanto, o que esses pensamentos e diversos outros têm em comum? A existência e a aparição da matemática na natureza. A sequência de Fibonacci revela bem esse fato, pois é possível encontrar na natureza características da mesma manifestada de várias formas.

Neste trabalho, buscamos fazer um estudo sobre sequências numéricas, abordando especialmente, a sequência de Fibonacci, algumas de suas aplicações e a análise de seu termo geral. Além disso, buscamos fazer um estudo introdutório sobre a abordagem das sequências numéricas na educação básica (PA e PG), apresentar fatos históricos da sequência de Fibonacci, bem como analisar características, propriedades e fórmulas referentes ao seu termo geral.

Como metodologia de estudo, foi realizada uma pesquisa bibliográfica através de livros, artigos, teses e alguns sites com o objetivo de analisar e entender o tema abordado neste trabalho, visando o entendimento de como a sequência de Fibonacci é importante para a matematica e para a sociedade no geral.

A princípio, definimos o que é uma sequência, suas características e os principais conceitos e propriedades associados a uma sequência. Dando seguimento ao nosso trabalho, adentramos um pouco no como a sequência de Fibonacci surgiu e o porquê dela ser tão conhecida, além de um pouco da história de quem foi Fibonacci ou, como era chamado ao nascer, Leonardo de Pisa, assim, exploramos alguns dos seus feitos e legados para a matemática que hoje conhecemos. Discutimos algumas aparições dessa sequência na natureza e em outras áreas fundamentais da sociedade e, por fim, apresentamos um estudo analítico demonstrando uma fórmula bem importante para se encontrar os termos da sequência de Fibonacci, conhecida como fórmula de Binet, ou simplesmente, fórmula geral da sequência de Fibonacci.

No entanto, antes de entrarmos a fundo no nosso trabalho, é importante explicar um pouco o que são sequências numéricas, que nada mais são que um grupo de números que possuem uma ordem, geralmente, bem definida. Essa que possui sua merecida atenção dentro dos guias curriculares nacionais, tais como os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), normalmente, relacionando-as com funções. Como podemos perceber em [BRASIL (2017)]:

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito.

Além disso, essas ideias também aparecem destacadas nas competências que falam sobre o ensino de sequências numéricas, voltadas para o ensino médio na disciplina de matemática, onde encontramos as habilidades a seguir:

> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Ademais, sabemos que as sequências têm sua devida importância quando vamos relacionar a diversas coisas na vida real, desde listas, alinhamentos de filas, entre outros. Mediante a todo esse desenvolvimento, temos o surgimento de uma das sequências mais conhecidas, a sequência de Fibonacci, como já foi citada anteriormente, que além de aplicações em diversas áreas, como arquitetura, estética e arte, ela ainda serve como embasamento na hora de se investir na bolsa de valores, isso se for utilizada da forma correta. Além disso, graças a ela, e através dela, podemos estudar e nos aprofundar em diversos resultados e conceitos da teoria de sequências numéricas.

Neste trabalho, dividimos os capítulos de uma forma em que os pontos abordados estejam mais bem encaixados e que haja um acúmulo de conhecimentos até que chegue ao desenvolvimento analítico da sequência. Com esse intuito, o Capítulo 1 apresenta uma breve introdução sobre o que iremos trabalhar. No Capítulo 2, abordamos as sequências e suas demais definições, além dos exemplos mais utilizados e pontos importantes que devem ser vistos sobre as mesmas. Seguindo com o trabalho, chegamos ao Capítulo 3, responsável por trazer a bagagem histórica da sequência de Fibonacci. Além disso, são trazidas algumas de suas aplicações em diversas áreas e ambientes. Já no Capítulo 4, é onde os cálculos aparecem, nele trazemos uma fórmula capaz de encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci e junto a ela apresentamos um estudo mais aprofundado sobre o número de ouro e sobre o retângulo de ouro, além do fato de aprendermos a construí-lo.

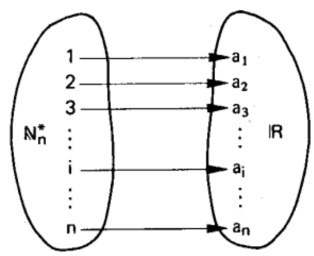
2 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentadas algumas definições sobre sequências numéricas, desde sua lei de formação e comportamento, até a noção de limite de uma sequência, apresentamos também alguns exemplos especifícos de sequências, como a PA e PG, e as suas demais características. O conteúdo pode ser encontrado em [IEZZI (1977)].

Definição 2.1. Chama-se sequência finita ou n-upla, toda função f com domínio no conjunto $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, ..., n\}$ e assumindo valores em $\mathbb{R}$.

Assim, em toda sequência finita, a cada número natural i, onde $1 \leqslant i \leqslant n$, está associado um número real a_i, tal que $f(i) = a_i$.

Figura 2.1 – Sequência finita

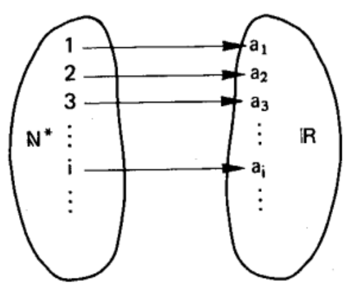


Fonte: Iezzi (1977)

Definição 2.2. Chama-se sequência infinita toda função f de $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N}$) em $\mathbb{R}$.

Em toda sequência infinita, a cada $n \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_n \in \mathbb{R}$, de modo que $f(n) = a_n$.

Figura 2.2 – Sequência infinita



Fonte: Iezzi (1977)

Vamos, daqui em diante, indicar uma sequência f anotando apenas a imagem de f:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$$

onde aparecem entre parentêses ordenadamente, da esquerda para a direita, as imagens dos naturais $1, 2, 3, ..., n, ...$.

Quando queremos indicar uma sequência f qualquer, escrevemos

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ou } (a_n)$$

e a_n é chamado de n-ésimo termo da sequência ou de termo geral.

A lei de formação de uma sequência é dada por uma expressão algébrica, ou uma certa regra, que nos permite encontrar qualquer termo da sequência através de uma fórmula para determinar o termo geral a_n. Existem sequências, em particular, que possuem formas lógicas de se encontrar os seus elementos através de uma lei de formação, um exemplo seria a sequência do tipo,

$$a_n = 2n + 1$$

em que a sequência dada por essa lei de formação é $(1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...)$.

Diante disso, interessam à Matemática as sequências que possuem uma lei de formação, onde estas podem ser apresentadas de três maneiras que descrevemos a seguir.

i. Fórmula de recorrência

Pode-se representar a sequência através de uma fórmula de recorrência, onde são dadas duas regras: uma que deve ser utilizada para se encontrar o primeiro termo a_1 e outra para calcular cada termo a_n a partir do antecedente a_{n-1}.

Exemplo 2.1. Escrever os dez termos iniciais da sequência infinita (a_n) dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ e } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$$

Solução. Atribuindo valores para n vamos obter:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 1$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + a_1 \Rightarrow a_3 = 2$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + a_2 \Rightarrow a_4 = 3$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + a_3 \Rightarrow a_5 = 5$
- $n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + a_4 \Rightarrow a_6 = 8$
- $n = 7 \Rightarrow a_7 = a_6 + a_5 \Rightarrow a_7 = 13$
- $n = 8 \Rightarrow a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_8 = 21$
- $n = 9 \Rightarrow a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_9 = 34$
- $n = 10 \Rightarrow a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_{10} = 55$

Então, $(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$, que é a tão conhecida sequência de Fibonacci.

Exemplo 2.2. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita (a_n) dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_1 = 2 \text{ e } a_n = 2 \cdot a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Solução. Atribuindo valores para n vamos obter:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 4 = 8$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 8 = 16$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 16 = 32$

Portanto, $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, ...)$.

ii. Fórmula para o termo geral

Pode-se representar a sequência através de uma fórmula para o termo geral. Neste caso, é dada uma função que expressa a_n em função de n.

Exemplo 2.3. Escrever a sequência finita (a_n) cujos termos obedecem à lei:

$$a_n = 3^n,\ n \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Solução. Atribuindo valores para n vamos obter:

- $a_1 = 3^1 = 3$
- $a_2 = 3^2 = 9$
- $a_3 = 3^3 = 27$
- $a_4 = 3^4 = 81$

Logo, $(a_n) = (3, 9, 27, 81)$.

Exemplo 2.4. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita (a_n) em que os termos verificam a relação

$$a_n = 4n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Solução. Atribuindo valores para n vamos obter:

- $a_1 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$
- $a_2 = 4 \cdot 2 + 2 = 10$
- $a_3 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$
- $a_4 = 4 \cdot 4 + 2 = 18$
- $a_5 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$

Então, $(a_n) = (6, 10, 14, 18, 22, ...)$.

iii. Propriedade de termos

É possível definir uma sequência atribuindo uma propriedade que os termos devem satisfazer.

Exemplo 2.5. Escrever a sequência finita (a_n) de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores naturais do respectivo índice.

Solução. Seja $D(n)$ o conjunto dos divisores naturais de n. Atribuindo valores para n vamos obter:

- $D(1) = \{1\} \Rightarrow a_1 = 1$
- $D(2) = \{1, 2\} \Rightarrow a_2 = 2$
- $D(3) = \{1, 3\} \Rightarrow a_3 = 2$
- $D(4) = \{1, 2, 4\} \Rightarrow a_4 = 3$
- $D(5) = \{1, 5\} \Rightarrow a_5 = 2$
- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow a_6 = 4$

Então, $(a_n) = (1, 2, 2, 3, 2, 4)$.

Corportamento de uma sequência

A depender da forma como a sequência (a_n) é formada, nós podemos descrever que tipo de comportamento ela possui, mas antes é necessário que haja entendimento do que seria uma sequência monótona.

Chamamos de **monótona** uma sequência (a_n) que possui $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou ainda, quando $a_{n+1} \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso, temos que uma sequência se divide em dois casos. No primeiro caso, dizemos que (a_n) é monótona não-descrescente, e no segundo, que (a_n) é monótona não-crescente. Ainda, se formos mais precisos, se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência é crescente. De modo análogo, se $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é decrescente.

Uma sequência (a_n) diz-se limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Respectivamente, diz-se uma sequência limitada inferiromente, quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso, diz-se que a sequência (a_n) é limitada quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência de a é a restrição da função a a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $a' = (a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou

$(a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots)$, ou $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $a' = a|\mathbb{N}'$. A notação $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$. Ainda mais, toda sequência monótona não-descrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, respectivamente, toda sequência monótona não-crecente é limitada superiormente.

2.1 Limite de uma sequência

Dizemos que um número L é o limite de uma sequência (a_n) se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Esta definição descrita acima significa que, para valores muitos grandes de n, os termos a_n tornam-se e se mantêm tão próximos de L quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos a_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de L com erro menor que ε. Quando uma sequência (a_n) possui limite L dizemos que (a_n) converge para L, ou é convergente para L, e denotamos por:

$$\lim a_n = L.$$

Assim, dizer que $\lim a_n = L$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro L contém todos os termos a_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, em que n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado). Em vez de $\lim a_n = L$, pode-se escrever também $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ou ainda, $a_n \to L$. Caso contrário, se a sequência não possuir limite L, dizemos que (a_n) é divergente.

Teorema 2.1. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Ver [LIMA (2012)] □

2.2 Principais exemplos

A seguir, faremos um estudo sobre as progressões aritméticas e geométricas (PA e PG), que são os tipos de sequências mais presentes no ensino de matemática nas escolas e as suas principais características estudadas, desde a classificação até a fórmula de seu termo geral.

Esses exemplos que são extremamente necessários para o estudo de alguns assuntos, aparecendo dentre as habilidades da BNCC, como podemos ver abaixo:

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) e progressões geometricas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Progressão aritmética (PA)

Definição 2.3. Chama-se de progressão aritmética (PA) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

Assim, uma PA é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada, chamada de razão da PA.

CLASSIFICAÇÃO DE UMA PA

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

Crescentes: Uma PA é dita crescente, quando:

$$a_n > a_{n-1} \iff a_n - a_{n-1} > 0 \iff r > 0.$$

Por exemplo, $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)$ com $a_1 = 1$ e $r = 2$.

Decrescentes: Uma PA é dita decrescente, quando:

$$a_n < a_{n-1} \iff a_n - a_{n-1} < 0 \iff r < 0.$$

Observe que, $(a_n) = (-1, -3, -5, -7, -9, -11, ...)$ em que $a_1 = -1$ e $r = -2$, é um exemplo de uma PA decrescente.

FÓRMULA DO TERMO GERAL

A partir da fórmula de recorrência que define uma PA temos:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n = a_{n-1} + r$

Somando essas $n-1$ igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n-1)\cdot r.$$

Logo,

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r,$$

o que prova o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Na PA em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é*

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r.$$

Progressão geométrica (PG)

Definição 2.4. Chama-se progressão geométrica (PG) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1}\cdot q,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \end{cases}$$

onde a e q são reais dados.

Assim, uma PG é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada, chamada de razão da PG.

CLASSIFICAÇÃO DE UMA PG

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

Crescentes: Uma PG é dita crescente quando $a_n > a_{n-1}$ e, assim, temos dois casos a considerar:

1. Quando a PG é formada por termos positivos:

$$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Longleftrightarrow q > 1.$$

2. Quando a PG é formada por termos negativos:

$$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Longleftrightarrow 0 < q < 1.$$

Por exemplo, $(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, ...)$ com $a_1 = 1$ e $q = 3$, é crescente.

Decrescentes: Uma PG é dita decrescente quando $a_n < a_{n-1}$ e, assim, temos dois casos a considerar:

1. Quando a PG é formada por termos positivos:

$$a_n < a_{n-1} \Longleftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Longleftrightarrow 0 < q < 1.$$

2. Quando a PG é formada por termos negativos:

$$a_n < a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Longleftrightarrow q > 1.$$

Por exemplo, $(a_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...\right)$ com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$.

Alternantes: São as progressões geométricas em que cada termo tem o sinal contrário ao do termo anterior. Isto ocorre quando $q < 0$. Por exemplo, $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, ...)$ em que $a_1 = 1$ e $q = -1$.

Observação: Uma sequência constante é uma PA (com $r = 0$) e também uma PG (com $q = 1$ ou $a_1 = 0$).

FÓRMULA DO TERMO GERAL

A partir da fórmula de recorrência que define uma PG e admitindo que $a_1 \neq 0$, temos:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

$a_4 = a_3 \cdot q$

. . . .

$a_n = a_{n-1} \cdot q.$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1},$$

e, então, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, o que prova o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Na PG em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o n-ésimo termo é:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Como vimos, a teoria das sequências numéricas possi diversos exemplos e propriedades. A seguir iremos fazer um estudo de um tipo especial de sequência, que é o tema central deste trabalho.

3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Neste capítulo, apresentamos alguns fatos históricos sobre o nosso principal tema, a sequência de Fibonacci, desde quem foi Fibonacci, até o próprio surgimento da sequência. Além do mais, também serão apresentados o número de ouro, a espiral áurea e alguns exemplos da aparição da sequência na natureza, na estética, na arte e na arquitetura.

3.1 Fatos históricos

Segundo Eves (1995), no prelúdio do século XIII nasceu a figura de Leonardo Fibonacci (filho de Bonaccio, c. 1170-1240), um dos matemáticos mais talentoso da Idade Média. Também chamado, naturalmente, de Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), devido a sua cidade natal, Pisa, pertencente ao país da Itália, local de grande concentração comercial onde o seu pai, Guglielmo dei Bonacci, estava fortemente envolvido. As ligações comerciais da Itália com o Mar Mediterrâneo, serviram de caminho para que Fibonacci recebesse parte da sua educação em uma cidade chamada Bejaia, norte da África, cidade onde seu pai desempenhava uma de suas funções alfandegárias. Graças ao seu envolvimento com as viagens para o exterior e com a matemática existente, destacada pelos procedimentos matemáticos orientais e árabes, não demorou muito para que nele despertasse um interesse pela aritmética e, posteriormente, por extensas viagens para a Grécia, Síria, Egito e Sicília, para se aprofundar no conhecimento da mesma. Devido a essas viagens e seus estudos ele volta para a sua terra natal totalmente convencido da ideia de que a matemática indo-arábica era imensamente superior à que era usada na época, no ponto de vista da praticidade dos cálculos.

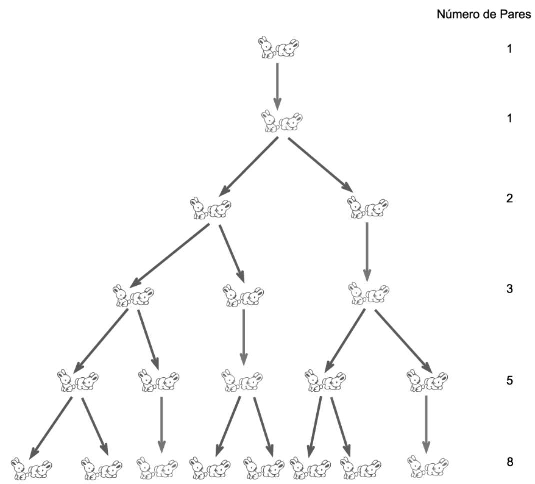
Logo após a sua volta, no ano de 1202, ele publica a sua obra intitulada *Liber Abaci*, esse livro foi responsável por desenvolver a sua ideia com relação aos métodos indo-arábicos. O livro possuia diversos problemas, dentre eles está o problema responsável por, futuramente, originar a importante sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, ..., x, y, x+y, ...)$. Dentre os anos de 1220 e 1225 ele publicou mais três obras intituladas: *Practica Geometriae*, *Fios* e *Liber Quadratorum*, trabalhos esses que possuem a sua devida importância na história.

3.2 O problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci

Vamos avançar um pouco na história, até o desenvolvimento da ideia para a descoberta da sequência de Fibonacci, que na verdade, começa em um dos problemas do livro *Liber Abaci* que diz o seguinte:

> Um certo homem pôs um par (macho e fêmea) de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par (macho e fêmea), que é fértil a partir do segundo mês? (PINHO (2013), p.3).

Figura 3.1 – Problema dos coelhos



Fonte: Extraída do site *www.sites.google.com*. Acesso em 17 de Maio de 2023.

De acordo com Silva (2017), no final dos primeiros dois meses, haverá apenas o par de coelhos que iniciou a produção. Como no terceiro mês ele geraria outro par de coelhos, ao final do terceiro mês, teremos dois pares de coelhos, sendo o par que introduziu a pesquisa e o outro gerado já com um mês de vida. Como o par de coelhos que iniciou já possui mais de dois meses de vida, a partir desse momento, em todos os meses, ele já poderá gerar um novo par. Assim, no final do quarto mês, haverá três pares de coelhos, o par inicial, o que foi gerado no mês anterior, agora com dois meses de vida, com isso podendo gerar mais pares, e o que foi gerado no início deste mês, tendo assim, um mês de vida. O número de pares de coelhos, ao final do quinto mês, pode ser visto da seguinte maneira: Ao terceiro mês teríamos dois pares de coelhos e ambos com mais de um mês de vida, dois meses depois, ou seja, ao fim do quinto mês, esses dois pares se duplicarão, pois cada um gerará um novo par, e como no mês anterior haviam três pares, tem-se um total de cinco pares de coelhos, sendo dois do mês anterior que se duplicaram e o que ainda não é fértil (Figura 3.1). Seguindo assim, o número de pares de coelhos cresce com extrema velocidade a cada mês. No entanto, com o intuito de melhorarmos o entendimento e evitarmos a execução de muitos cálculos, definimos a sequência F_n como o número de pares de coelhos ao final do n-ésimo mês.

Por consequência, ao final de um determinado mês, F_n será o dobro do número de dois meses anteriores, ou seja, $2F_{n-2}$, mais os que ainda não geraram um novo par, o que, no caso, é igual à subtração do número de pares dos meses anteriores $F_{n-1} - F_{n-2}$. Portanto, para determinarmos o número de pares de coelhos de um mês qualquer, podemos descobrir da seguinte forma:

$$F_n = 2F_{n-2} + F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-2} + F_{n-1}, \tag{3.1}$$

em que n é dado como maior que 2. Transladando o índice da sequência para ela ser válida a partir de $n = 0$, obtemos:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{3.2}$$

Sendo que, $F_0 = F_1 = 1$.

Esse problema, que como dito antes, foi apresentado no livro *Liber Abaci*, originou uma sequência, que só veio a ser nomeada no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas, recebendo assim o nome "Sequência de Fibonacci", representada da seguinte forma:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...),$$

em que a partir do terceiro termo, o seu conseguinte é a soma dos dois números precedentes a ele.

3.3 Número de ouro

Nesta seção, iremos definir o número de ouro. Para isto, observe que, se dividirmos qualquer termo da sequência de Fibonacci pelo seu termo anterior, podemos definir uma sequência da seguinte forma:

$$\phi_n = F_n/F_{n-1}.$$

Na tabela a seguir serão apresentadas algumas das razões:

Tabela 1.1 Aproximação do número de ouro

n	F_n	F_n/F_{n-1}
4	3	1,5
5	5	1,666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,61538
9	34	1,61905
10	55	1,61765
11	89	1,61818
12	144	1,61798
13	233	1,61806

Fonte: Construída pelo Autor.

O limite da sequência (ϕ_n) é o que denominamos “razão áurea”ou ainda “número de ouro”, é possível mostrar que:

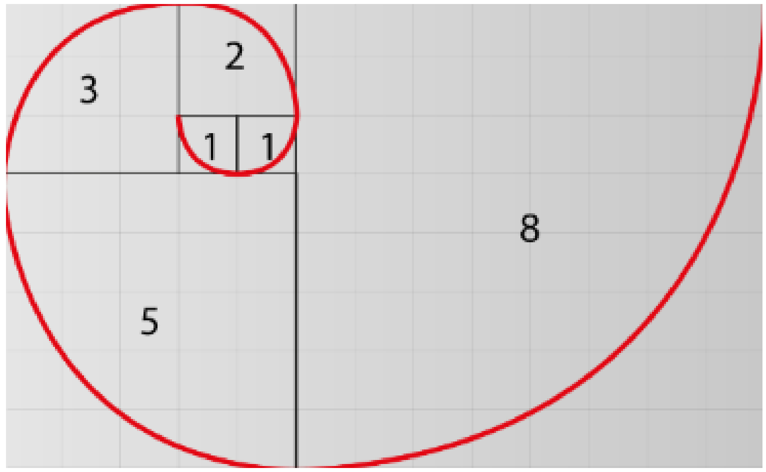
$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034, \tag{3.3}$$

em que esse número é representado pela letra grega ϕ (phi), em homenagem a Phídias, arquiteto do Partenon. Veremos no Capítulo 4 uma demonstração de (3.3).

3.4 O retângulo de ouro e a espiral áurea

O número de ouro, citado anteriormente, possui diversas representações, dessas a representação em formato de espiral áurea é a mais conhecida, vista e captada em diversos espaços da natureza e é daqui onde vamos tirar os próximos exemplos. A espiral áurea, como o próprio nome sugere, possui o formato espiral, que é proveniente do seguinte retângulo visto na imagem a seguir:

Figura 3.2 – Espiral áurea



Fonte: Extraída do site *www.design culture.com.br*. Acesso em 16 de Novembro de 2022.

E esse retângulo trata-se de uma figura retangular cuja divisão da base pela altura aproxima-se do número de ouro ϕ. Ele é o resultado da junção de quadrados cujas áreas são iguais aos números da sequência de Fibonacci, como pode ser visto na imagem acima. A espiral é formada por arcos de circunferências com extremos em vértices opostos dos quadrados. A seguir serão mostrados alguns exemplos de aparições da espiral áurea na natureza. No Apêndice A, apresentamos a definição e construção de um retângulo de ouro.

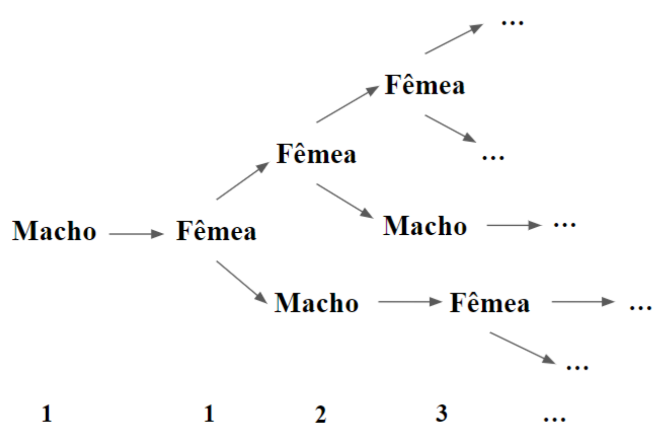
3.5 Fibonacci e suas representações na natureza

Foi percebido pelos pesquisadores a frequente presença do número de ouro e da sequência de Fibonacci em fenômenos naturais, além de diversas formas de se aplicar. Para isso, vejamos alguns exemplos, em que a sequência de Fibonacci aparece presente na natureza:

3.5.1 Árvore genealógica dos zangões

É possível determinar o número de abelhas em cada geração da árvore genealógica da abelha macho utilizando a sequência de Fibonacci. Contudo, é necessário explicar o porquê disto acontecer e o contexto que iremos discutir. Em uma determinada colmeia, existem abelhas fêmeas e machos, onde já é esperado que saibamos que cada uma possui uma função específica e diferente dentro de uma colmeia. Para ser gerada uma abelha fêmea é necessário que, no despejo dos ovos, seja incluído o gene feminino e o gene masculino nesse ovo, já na geração de uma abelha macho, só é necessário a inclusão do gene feminino. Sabendo disso, agora é possível entender a árvore genealógica de cada abelha macho da colméia, para isso, verifique o esquema abaixo:

Figura 3.3 – Árvore genealógica dos zangões



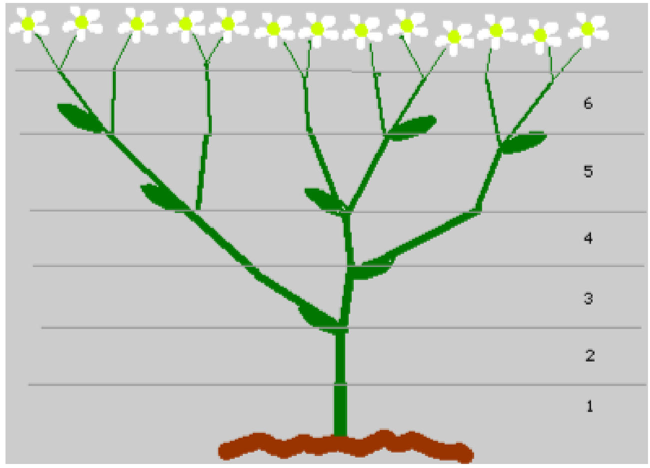
Fonte: Construída pelo Autor.

Perceba que, a árvore genealógica sempre vai crescer da mesma forma, é gerado um macho, que vem de uma fêmea, essa que tem pai e mãe, assim sucessivamente. Com isso, chega a ser perceptível a semelhança com algo que já foi discutido nas linhas anteriores. A linhagem das abelhas macho, surge através da sequência de Fibonacci, onde cada geração é determinada pela soma das duas gerações anteriores, assim se continuássemos desenvolvendo o esquema acima até a 9 geração, teríamos chegado ao resultado de 34 (9° termo da sequência de Fibonacci) abelhas machos somente em uma geração.

3.5.2 Crescimento dos ramos de uma cevadilha

Existem plantas que crescem seguindo o fluxo da sequência de Fibonacci, entre elas temos a Cevadilha. Digamos que a planta precisa de 2 meses para produzir um novo ramo e depois se ramificar todos os meses, quantos ramos tem a planta ao fim de 6 meses? A imagem a seguir vai ilustrar melhor o que acontece com o crescimento dos ramos dessa planta:

Figura 3.4 – Crescimento dos ramos de uma cevadilha



Fonte: Extraída do site *www.mat.uc.com.br*. Acesso em 20 de Março de 2023.

Veja que no primeiro mês nasce apenas 1 ramo nessa planta, depois novamente cresce mais 1 ramo, a partir daí, se completam 2 meses e a planta começa a se ramificar de mês em mês, crescendo assim mais 2 ramos no terceiro mês, 3 no quarto, 5 no quinto e 8 no sexto, formando, exatamente, os números de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .).

3.5.3 Girassol

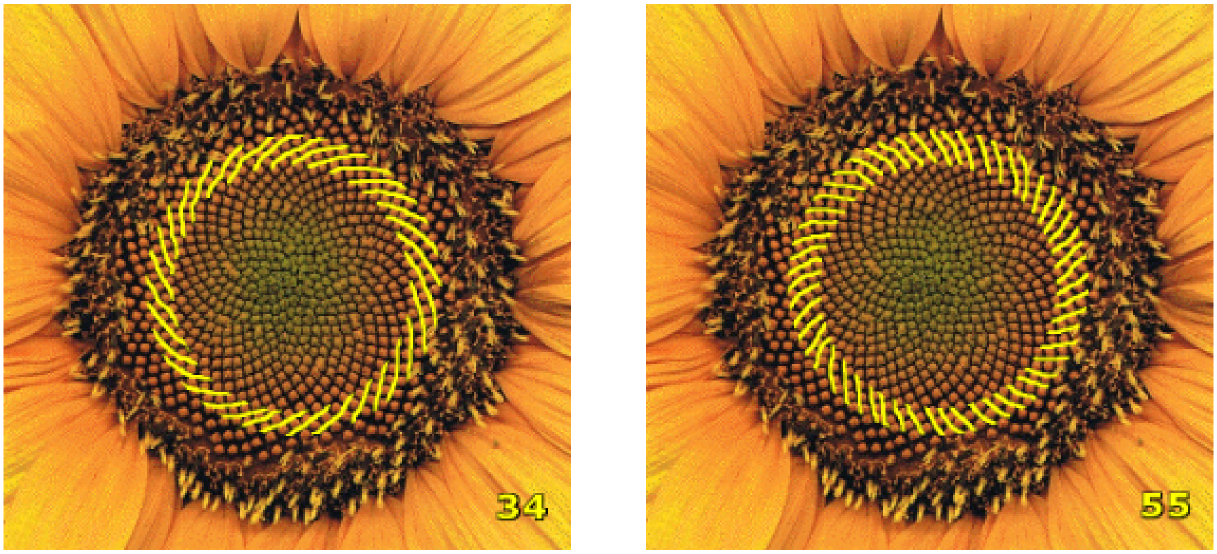
Se pararmos para observar as sementes do girassol, é possível perceber que ela possui um formato espiral, tanto para um lado quanto para o outro. Ambos os sentidos seguem a proporção da sequência de Fibonacci. Vejamos na imagem abaixo o formato das sementes:

Figura 3.5 – Espiral de Fibonacci no girassol 1

Fonte: Extraída do site: *https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibnat.html*. Acesso em 23 de Março de 2023.

Assim como nas pinhas, o girassol possui, também, se contarmos no sentido horário e anti-horário, números conseguintes, como mostra as figuras abaixo:

Figura 3.6 – Espiral de Fibonacci no girassol 2

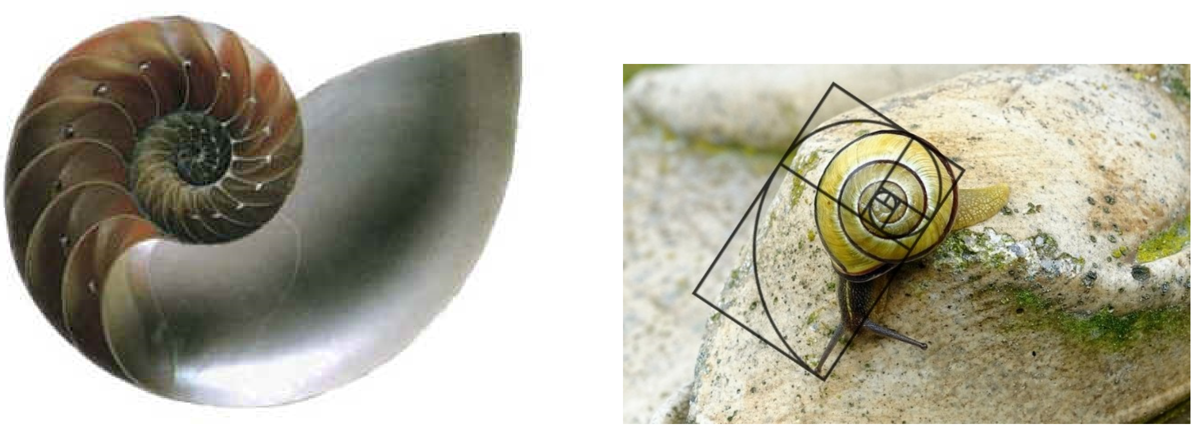


Fonte: Extraída do site: *https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibnat.html*

3.5.4 Nautilus e caracol

As espirais de Fibonacci aparecem em diversas situações, como já foi dito anteriormente e ainda serão apresentadas posteriormente. As conchas como a do nautilus, exprimem com precisão a espiral, como também a dos caracóis, o qual do corpo até a cabeça, é possível aplicar, perfeitamente, a sequência de Fibonacci. Verifique nas imagens abaixo:

Figura 3.7 – Espiral de Fibonacci no nautilus e caracol



Fonte: Extraída do site *www.hipercultura.com*. Acesso em 21 de Março de 2023.

3.6 Ligação entre a beleza e Fibonacci

Com o surgimento do número de ouro, ocorreu uma grande mudança em todo o mundo da arte, em áreas como arquitetura, na pintura e até na estética, onde nela, por exemplo, para um homem/mulher ser considerado bonito e atraente, as suas proporções tem que equivaler ao número de ouro.

3.6.1 Na estética

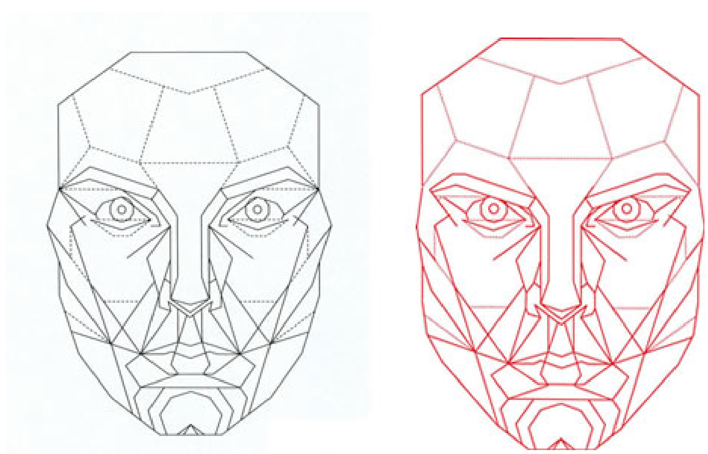
MÁSCARA DE MARQUARDT

Como podemos ver Santos (2017) em uma das grandes descobertas para esse âmbito, temos a Máscara de Marquardt. Stephen Marquardt foi um cirurgião plástico americano, que passou a vida estudando sobre a beleza humana em sua prática com as cirurgias orais e maxilo-faciais e concluiu que a atratividade facial de um humano tem por base o número de ouro. A partir desse conceito matemático, a utilização de computadores e bases de dados maciças de rostos considerados atraentes pelos demais, ele descobriu que todos possuíam um determinado padrão, todos eles acumulavam as mesmas percepções de beleza facial.

Com toda a sua pesquisa, Marquardt concluiu que a beleza está sim ligada ao número de ouro, mas não só a isso, a raça, o sexo, a cultura, as etnias, as eras e, principalmente, com a mascara que ele mesmo desenvolveu e patenteou. Essas máscaras são feitas a partir de pentágonos e decágonos, que incorporam o número de ouro em todas as suas dimensões.

Abaixo será mostrado os modelos de máscara feminina e masculina, respectivamente:

Figura 3.8 – Máscara de Marquardt



Fonte: Extraída do site *www.cosmethica.com.br*. Acesso em 24 de Março de 2023

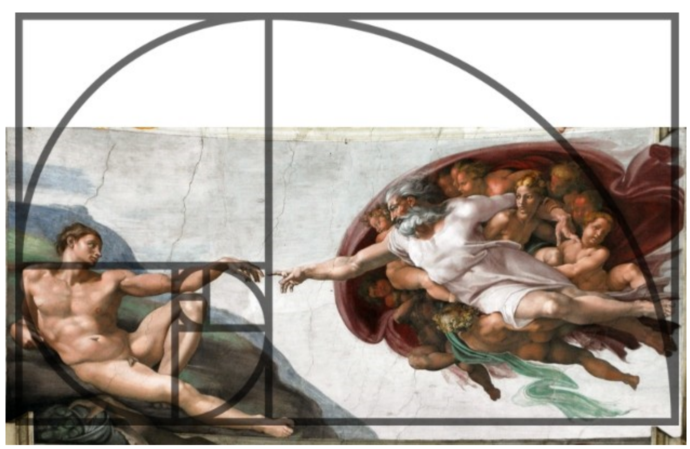
3.6.2 Na arte

Como vários artistas e arquitetos acreditavam que a espiral de ouro potencializava a estética, muitos começaram a aplicá-la em seus demais feitos e se tornam muito evidentes nas obras de artes plásticas de artistas mundialmente consagrados, vejamos a sua aparição nas imagens a seguir:

Figura 3.9 – Espiral nas obras de arte 1

Fonte: Extraída do site *www.hipercultura.com*. Acesso em 24 de Março de 2023.

Figura 3.10 – Espiral nas obras de arte 2



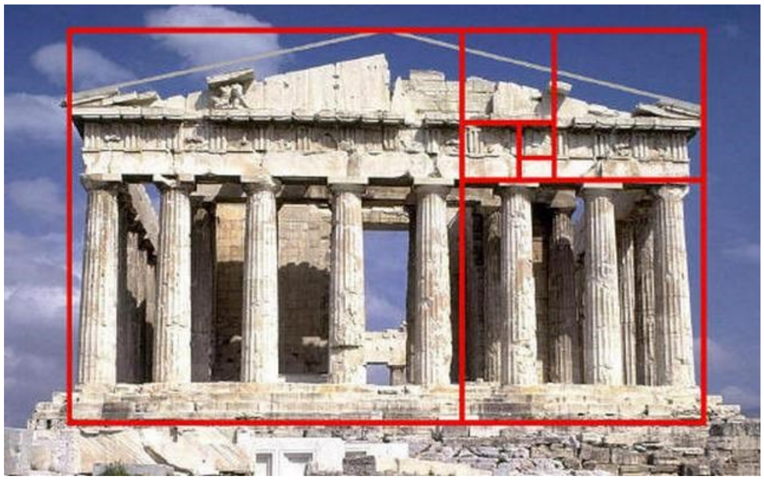
Fonte: Extraída do site *www.hipercultura.com*. Acesso em 24 de Março de 2023.

A sequência de Fibonacci, ainda pode aparecer na construção de poesias e letras musicais, ambas coordenadas pelo número de ouro, onde a razão entre as estrofes maiores e menores resulta em um número próximo a ϕ.

3.6.3 Na arquitetura

Grandes obras arquitetônicas conhecidas espelham o retângulo de ouro em suas proporções, as mais conhecidas são as Pirâmides do Egito, Catedral de Notre Dame de Chartres e o conhecido Partenon que ilustra, em seu planejamento, o uso do retângulo de ouro.

Figura 3.11 – *Partenon*



Fonte: Extraída do site *www.projetobatente.com.br*. Acesso em 24 de Março de 2023.

Evidenciando mais algumas obras, mas agora atuais, nós temos a utilização do retângulo de ouro para a construção da fachada da sede das Nações Unidas, que possui três retângulos áureos dispostos horizontalmente. Outro exemplo atual seria a torre CN, no Canadá, que possui altura diretamente proporcional ao seu deck de observação.

Figura 3.12 – Espiral na arquitetura moderna

Fonte: Extraída do site *www.projetobatente.com.br*. Acesso em 24 de Março de 2023.

Todos esses projetos buscam a perfeição através da relação com o número de ouro, tentando assim alcançar a perfeição e simetria.

3.7 Relação entre o número de ouro e o mercado financeiro

Com incremento e o crescimento do mercado financeiro, alguns estudiosos começaram a dedicar o seu tempo a estudar a "aleatória" bolsa de valores, que com o passar dos anos perceberam que essa "aleatoriedade" seguia as porcentagens do nosso querido número de ouro. Com isso, foram desenvolvidas diversas estratégias para se prever quando os gráficos subiriam ou desceriam, essas, a partir do número de ouro. Uma delas que nós chamamos de retração de Fibonacci, funciona da seguinte forma:

A retração de Fibonacci trata-se de um popular indicador técnico, utilizado por diversos traders e investidores, formado por linhas horizontais que cortam uma série de preços, onde cada uma delas é representada por porcentagens e índices em que a distância entre elas obedece a sequência de Fibonacci. A aplicação da mesma pode ser feita em qualquer gráfico, seja de ações, criptomoedas, entre outras, seguindo sempre a observação dos valores máximos e mínimos para auxiliar na identificação de pontos de reversão. Esse indicador tem como principal objetivo mostrar pontos de alerta em que se deve ter mais atenção, em que, geralmente, vão mostrar potenciais reversões de tendências, resistências ou suportes.

De modo geral, as ferramentas de Fibonacci servem para mensurar uma mudança nas tendências dos preços, ou seja, quando uma certa ação está subindo o seu valor e ela sofre uma brusca queda no seu preço e sobe novamente, ou quando está ocorrendo uma queda constante de preços e ela sofre uma brusca subida e desce novamente, a ferramenta serve para verificar essas possíveis mudanças no mercado.

Como vimos, a sequência de Fibonacci, após a sua descoberta, mudou o rumo de diversas áreas ligadas ou não a matemática e isso está inteiramente conectado as propriedades que ela possui. A seguir iremos fazer uma análise mais detalhada de algumas das propriedades da sequência de Fibonacci.

4 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Nesse capítulo, iremos fazer uma análise um pouco mais detalhada de alguns pontos importantes da sequência de Fibonacci, dentre eles o número de ouro, iremos também provar que a sequência (ϕ_n) converge e apresentar o desenvolvimento da fórmula geral para se descobrir qualquer termo da sequência de Fibonacci através de conceitos analíticos da matemática, além de destacar como é construído o retângulo de ouro e algumas propriedades.

4.1 Número de ouro

Para verificar (3.3) observe que, de (3.1), o termo geral da sequência de Fibonacci pode ser escrito na forma:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geqslant 2 \ \text{ e } \ F_0 = F_1 = 1.$$

Dividindo toda essa equação por F_n obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Usando que:

$$\phi_n = F_n/F_{n-1},$$

temos,

$$\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n}.$$

A partir disso, vamos assumir por um momento que (ϕ_n) é convergente (o que provaremos mais adiante), fazendo $n \to \infty$ e considerando $\lim \phi_n = \phi$, podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Multiplicando ambos os membros por ϕ,

$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Calculando a raiz positiva da equação,

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 1 + 4 = 5.$$

Obtemos:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

em que $1 < \phi < 2$. Assim demonstrando a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci. No entanto, tudo o que acabamos de demonstrar foi que, se a sequência (ϕ_n) converge então o seu limite é:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para se justificar a passagem ao limite na expressão

$$\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n},$$

deve-se mostrar que, de fato, (ϕ_n) é uma sequência convergente.

Teorema 4.1. *A sequência (ϕ_n), $n \geq 1$, é dada recursivamente por*

$$\phi_1 = 1 \;\; e \;\; \phi_n = \frac{1}{\phi_{n-1}} + 1, \; n \geq 2.$$

Demonstração. A partir da sequência anterior, dada por $\phi_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, lembrando que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, segue-se que:

$$\phi_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{\phi_{n-1}}$$

$\square$

O que prova que:

$$\phi_n = \frac{1}{\phi_{n-1}} + 1, \; n \geq 2.$$

Logo,

$$\phi_n - 1 = \frac{1}{\phi_{n-1}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\phi_n - 1} = \phi_{n-1} = 1 + \frac{1}{\phi_{n-2}} = \frac{\phi_{n-2}+1}{\phi_{n-2}},$$

invertendo novamente as frações, temos:

$$\phi_n - 1 = \frac{\phi_{n-2} + 1 - 1}{\phi_{n-2} + 1},$$

separando as frações,

$$\phi_n - 1 = \frac{\phi_{n-2} + 1}{\phi_{n-2} + 1} - \frac{1}{\phi_{n-2} + 1}$$

dividindo os termos em comum, obtemos:

$$\phi_n - 1 = 1 - \frac{1}{\phi_{n-2} + 1}.$$

Assim, isolando o termo ϕ_n obtemos a seguinte expressão:

$$\phi_n = 2 - \frac{1}{\phi_{n-2} + 1}\ , n \geq 3.$$

Agora, para mostrar que nossa sequência converge, consideremos as subsequências de indíces pares e ímpares, respectivamente, (ϕ_{2n}) e (ϕ_{2n-1}), de (ϕ_n). Mostraremos, por indução, que (ϕ_{2n}) é decrescente e (ϕ_{2n-1}) é crescente. De fato, observe que:

1. $\phi_2 = 2 > \phi_4 = \frac{5}{3}$

2. Supõe-se válido para $n = k$, isto é,

$$\phi_{2k} > \phi_{2k+2}.$$

Como a função

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}, x \geq 0,$$

é crecente, temos:

$$\phi_{2k+2} < \phi_{2k} \Rightarrow f(\phi_{2k+2}) < f(\phi_{2k}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{\phi_{2k+2} + 1} < 2 - \frac{1}{\phi_{2k} + 1} \Rightarrow \phi_{2k+4} < \phi_{2k+2}.$$

Isso mostra que (ϕ_{2n}) é decrescente. De forma análoga, pode-se demonstrar que (ϕ_{2n-1}) é crescente.

É, de merecida importância, observar que (ϕ_{2n}) é limitada inferiormente por 1 e (ϕ_{2n-1}) é limitada superiormente por 2. Ambas são convergentes e além disso, como satisfazem a mesma relação de recorrência

$$\phi_n = 2 - \frac{1}{\phi_{n-2} + 1},$$

e podemos concluir que os seus limites são iguais e, consequentemente, a sequência (ϕ_n) converge para esse mesmo limite, que é o valor

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

encontrado nas demonstrações calculadas anteriormente.

4.2 Fórmula de Binet ou fórmula generalizada da sequência de Fibonacci

O fato da sequência de Fibonacci poder ser definida por meio de uma recorrência, faz com que seja possível a descoberta de uma fórmula capaz de encontrar qualquer um de seus termos, F_n, desde que saibamos a posição n deste determinado termo. Graças a essa propriedade nos é garantido a obtenção de todas as soluções da equação de Fibonacci,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \tag{4.1}$$

com $n > 1$.

No entanto, antes, vamos ver alguns resultados importantes sobre recorrências lineares homogêneas que serão importantes para esta solução. É importante dizer que uma recorrência linear de segunda ordem homogênea [LIMA (2006)], com coeficientes constantes, isto, uma expressão da forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, será associada a uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, com $q \neq 0$, chamada de equação característica. A partir disso, podemos descrever um teorema muito importante.

Teorema 4.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ com C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração. Seja (a_n) uma solução qualquer de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. Uma vez que $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, podemos obter constantes C_1 e C_2, que são soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = a_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = a_2 \end{cases}$$

Vamos provar que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A afirmativa vale para $n = 1$ e $n = 2$, já que C_1 e C_2 foram escolhidas de modo que isto ocorra. Disso, suponhamos então, válida para os naturais n e $n+1$(Hipótese de Indução):

$$a_{n+1} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}$$

e

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

Temos $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. Logo, para isso vamos escrever a_{n+2} em função de a_{n+1} e a_n:

$$a_{n+2} = -pa_{n+1} - qa_n.$$

Utilizando a nossa hipótese de indução, temos que:

$$a_{n+2} = -p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) - q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n),$$

disso,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -p(C_1 r_1^n r_1 + C_2 r_2^n r_2) - q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\ &= -pC_1 r_1^n r_1 - pC_2 r_2^n r_2 - qC_1 r_1^n - qC_2 r_2^n. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}$, temos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -C_1 r_1^n(pr_1 + q) - C_2 r_2^n(pr_2 + q) + C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} \\ &= -C_1 r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) + C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são raízes da expressão $r^2 + pr + q$, então

$$a_{n+2} = -C_1 r_1^n \cdot 0 - C_2 r_2^n \cdot 0 + C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}.$$

Assim,

$$a_{n+2} = C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2},$$

provando o teorema. □

Vejamos um exemplo de aplicação do Teorema 4.2.

Exemplo 4.1. Determine o número de Fibonacci F_n.

Sabendo que a sequência de Fibonacci é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = F_1 = 1$. Segue-se que a equação característica igual:

$$r^2 = r + 1.$$

Organizando a equação do segundo grau, e resolvendo, temos:

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Sabemos que para tal resolução utilizamos:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

vendo que os coeficientes $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$, temos:

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

sendo:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, pelo Teorema 4.2:

$$F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right]^n + C_2 \cdot \left[\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right]^n.$$

Disso encontramos a fórmula mais geral possível da sequência de Fibonacci. Contudo, se tomarmos um caso particular, a saber,

$F_0 = 1$ e $F_1 = 1$, temos como resultado $C_1 + C_2 = 1$ e $C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 = 1$, de onde segue o sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 = 1 \end{cases}$$

Na primeira equação, temos que:

$$C_1 = 1 - C_2, \tag{4.2}$$

substituindo (4.2) na segunda equação, obtemos:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(1-C_2)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot C_2=1.$$

Aplicando a propriedade distributiva,

$$\frac{1-C_2+\sqrt{5}-C_2\sqrt{5}}{2}+\frac{C_2-C_2\sqrt{5}}{2}=1,$$

somando, temos:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2C_2\sqrt{5}}{2}=1.$$

Portanto,

$$1+\sqrt{5}-2C_2\sqrt{5}=2\Rightarrow -2C_2\sqrt{5}=2-1-\sqrt{5},$$

multiplicando ambos os lados por (-1):

$$2C_2\sqrt{5}=-1+\sqrt{5},$$

encontramos,

$$C_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}. \tag{4.3}$$

Substituindo agora (4.3) em (4.2), teremos:

$$C_1=1-\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)=1+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

temos,

$$C_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}. \tag{4.4}$$

Logo, obtemos $C_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ e $C_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Deste modo, substituindo os valores de C_1 e C_2 na equação F_n, conseguimos obter uma fórmula que é capaz de determinar qualquer termo da sequência, sem ao menos precisar saber qual é o termo antecessor. Fórmula esta, que recebeu o nome do matemático Francês, cujo nome era Phillipe Marie Binet (1786 - 1856), responsável por descobri-la e ficou conhecida como Fórmula de Binet.

Recapitulando quem é F_n, temos:

$$F_n = C_1 \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n + C_2 \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n.$$

Substituindo (4.3) e (4.4), obtemos a seguinte expressão:

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n,$$

colocando $\sqrt{5}$ em evidência,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^n,$$

juntando os termos iguais a partir da multiplicação de potências,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{n+1}.$$

Agora, com a fórmula de Binet, vamos, por exemplo, descobrir o 4° termo da sequência, a partir dela, lembrando que nossa sequência é $(F_n) = (F_0, F_1, F_2, F_3, ...)$, disso temos que:

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^4 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^4.$$

Para Facilitar o cálculo, vamos usar umas das propriedades da potência:

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^2\right\}, \tag{4.5}$$

resolvendo a potência separadamente, temos:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1^2 \pm 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4},$$

simplificando por 2, ambos os termos:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Agora a segunda potência:

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3^2 \pm 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{9 \pm 6\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4},$$

simplificando por 2, ambos os termos:

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Continuando com a resolução de (4.5):

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Daí, vemos que o resultado dá, exatamente, igual ao $4^{\underline{o}}$ termo da sequência de Fibonacci, veja abaixo:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...).$$

Neste capítulo, pudemos ver com mais detalhes algumas das principais propriedades da sequência de Fibonacci e alguns resultados interessantes que vieram a partir da utilização da Análise Matemática e dos conteúdos de sequências.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pudemos estudar um pouco sobre o que são as sequências numéricas e seus demais conceitos, isso baseando-se em um exemplo de grande renome que é a sequência de Fibonacci. Também foram analisadas algumas aplicações da sequência de Fibonacci na natureza, na arte, na arquitetura e no mercado financeiro. Através deste trabalho é possível perceber o quão presente a matemática é nos diversos ambientes da sociedade e o quão bela ela pode ser, quando vista por olhos mais ensinavéis.

A partir deste trabalho, podemos dar continuidade no estudo de sequências numéricas, aplicando e analisando o funcionamento da sequência de Fibonacci. Além disso, é possível se aprofundar no como a sequência de Fibonacci traz um sentido de beleza, tanto na arte, quanto na arquitetura e até no como essa sequência pode ser utilizada para o ensino dentro das escolas e em quais situações. De modo geral, este trabalho contribuiu para um aprofundamento do conhecimento sobre a teoria de sequências e suas aplicações. Entendemos que ainda há muito o que se abordar sobre a sequência de Fibonacci, analisar por exemplo, como a mesma tem sido usada como ferramenta no mercado financeiro, de uma forma que podemos decifrar essa temida incógnita que é a bolsa de valores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 1995.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**, São Paulo, Atual Ed., 1977.

LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma Variável**. v.1, 11. ed, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. et. al. **A Matemática do ensino médio**. v.2, 6. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PEREIRA, L. D. C.; FERREIRA, M. V. **Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea**. Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

PINHO, A. **Aplicações da sequência de Fibonacci**. Disponível em: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/aplicacoes-da-sequencia-de-fibonacci>. Acesso em: 14 de Novembro de 2022.

SILVA, P. E. A. **A Sequência de Fibonacci e o Ensino Médio** - SBM/Profmat. Universidade Federal Rural do Semi-Árido - RN. 2017.Tese (Dissertação de Mestrado). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/scav2/gettcc3.php?cpf= 06907718430 & d= 20200112160054 & h=f093ab90b44fa34fc71658f7f60d144e8ee4b9ec>. Acesso em: 12 de Novembro de 2022.

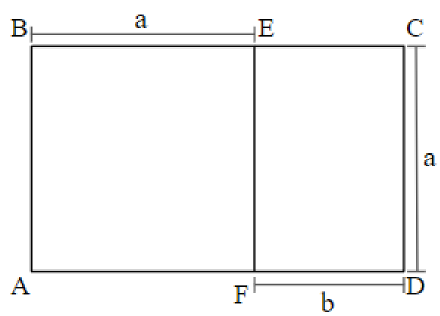
SANTOS, C. **Máscara de Marquardt – A máscara da beleza**. Disponível em: <http://www.cosmethica.com.br/mascara-de-marquardt/>. Acesso em: 25 de Abril de 2023.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro, Record, 2010.

APÊNDICE A – RETÂNGULO DE OURO

Como foi citado no capítulo anterior, o retângulo de ouro, trata-se de uma figura retangular cuja divisão da base pela altura resulta no número de ouro ϕ, mas o que caracteriza um retângulo ser de ouro e como podemos construí-lo? Nós podemos destacar, a partir de [PEREIRA (2008)], que um retângulo é de ouro, quando é possível perceber a seguinte propriedade. Dado um retângulo $ABCD$:

Figura A.1 – Retângulo de ouro



Fonte: Construída pelo Autor.

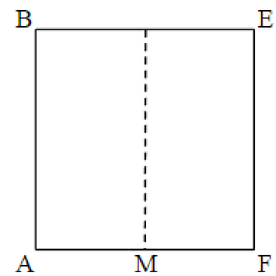
Podemos retirar o quadrado $ABEF$ e o retângulo $CDFE$ restante será semelhante ao retângulo original $ABCD$, ou seja,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \tag{A.1}$$

Dito isto, a construção do retângulo de ouro pode ser feita através dos seguintes passos:

1. Começamos construindo um quadrado $ABEF$ com lado a e dividindo um dos lados do quadrado ao meio. O ponto que interceptará a base, chamamos de M.

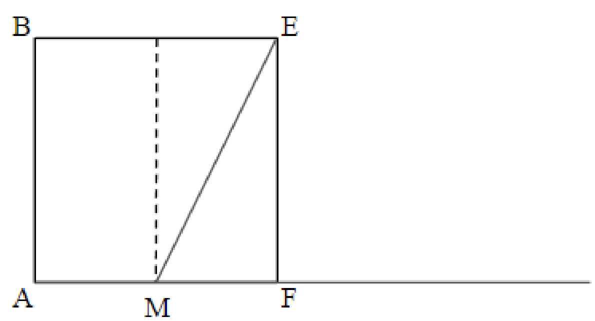
Figura A.2 – Passo 1



Fonte: Construída pelo Autor.

2. Seguindo, traçaremos uma diagonal saindo do ponto M até o ponto E, e prolongaremos um pouco a base do nosso quadrado.

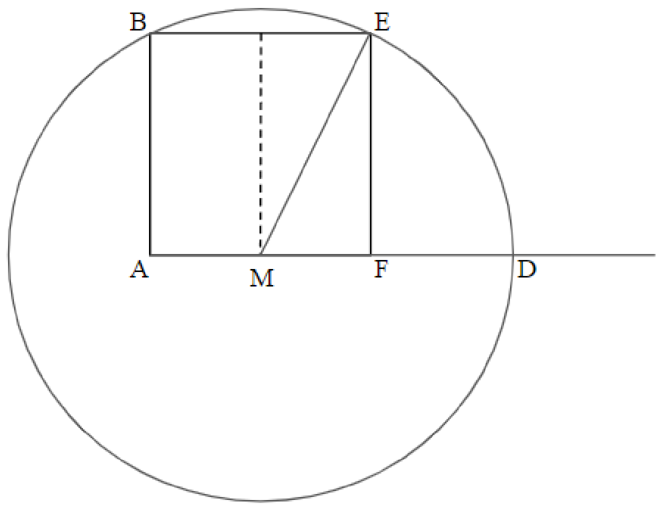
Figura A.3 – Passo 2



Fonte: Construída pelo Autor.

3. Com o uso de um compasso fixado no ponto M, traçaremos um arco de comprimento ME até que ele toque o prolongamento feito na base no nosso Passo 2. Esse ponto de intersecção entre o arco e o prolongamento, chamaremos de D.

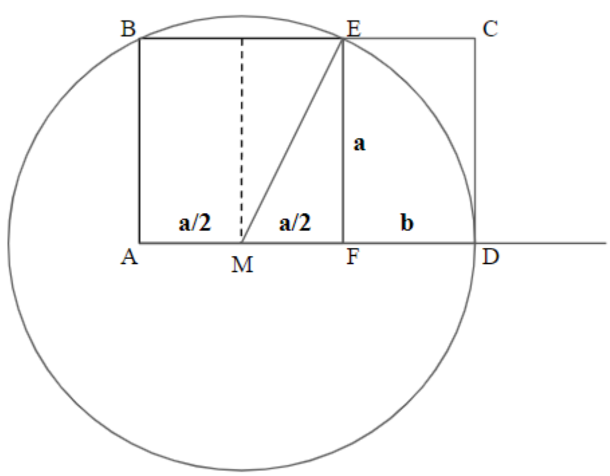
Figura A.4 – Passo 3



Fonte: Construída pelo Autor.

4. A partir do ponto D traçamos uma reta paralela a EF, e prolongando o lado superior do quadrado até interceptar esta paralela em um ponto C, obtemos um retângulo que é exatamente o retângulo de ouro, como mostra a figura a seguir:

Figura A.5 – Passo 4



Fonte: Construída pelo Autor.

Para comprovar que o retângulo $ABCD$ é realmente de ouro, observe inicialmente que, se $FD = b$, então

$$ME = MD = b + \frac{a}{2}.$$

Utilizando o teorema de Pitágoras ao triângulo MFE, obtemos:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ou seja,

$$b^2 + ab = a^2 \Rightarrow b(a + a) = a \cdot a$$

onde, chegamos justamente na relação (A.1),

$$\frac{a}{a + b} = \frac{b}{a}.$$