UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS EDUARDO DOS SANTOS SILVA SOUZA

ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPINA GRANDE - PB
2023

LUCAS EDUARDO DOS SANTOS SILVA SOUZA

ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes.

CAMPINA GRANDE - PB
2023

S729e Souza, Lucas Eduardo dos Santos Silva.

Estudo sobre erros na resolução de equações do segundo grau no 9º ano do ensino fundamental [manuscrito] / Lucas Eduardo dos Santos Silva Souza. - 2023.

43 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Erros matemáticos. 2. Equações do segundo grau. 3. Ensino Fundamental . 4. Ensino e aprendizagem . I. Título

21. ed. CDD 327.7

Elaborada por Ana V. de Q. M. Leite - CRB - 15/378 BC/UEPB

LUCAS EDUARDO DOS SANTOS SILVA SOUZA

ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 29 / 11 /2023.

BANCA EXAMINADORA

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maxwell Aires da Silva

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Roze de Freitas

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico esse trabalho a Deus, minha família, meus amigos e todas as pessoas que estiveram comigo durante toda essa trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois era nele que encontrava conforte, orientação, consolo e apoio sempre, além de mostrar o caminho que sempre deveria seguir e abrindo as portas sempre que necessário. Muito obrigado Senhor, pois o Senhor é bom o tempo todo e sua misericórdia dura para sempre.

À minha esposa, Kelly Lívia, que estava sempre ao meu lado me dando apoio moral e ajudando sempre que preciso fosse.

À minha família, na pessoa da minha mãe Sueli e do Jefferson (padrasto) que sempre me incentivaram a concluir o curso mesmo com as dificuldades diária, além deles a minha querida avó que me deu carinho, sempre cuidou de mim, me apoiou e me criou quando criança embora todas as dificuldades que nos rodeava.

Ao meu amigo Vinicius Henrique, que me dava uma força quando precisava desopilar a mente, conversando sobre exercícios do curso, até ajudando a resolver alguns e sempre torceu pelo meu sucesso.

Aos meus amigos ao longo curso e para vida, em especial Jeferson, Gilson, Maria José, Rayanne e Fernanda, os quais estávamos sempre juntos compartilhando conhecimentos e esclarecendo as dúvidas que iam surgindo.

A todos os professores do curso, em especial Wallace Gomes, Katia Suzano e Maxwell Aires que sempre estiveram me dando apoio e me incentivando a busca e evoluir durante o curso. E as professoras do ensino básico Berenice e Luiza, que foi pelas quais me apaixonei pela profissão e curso, também ao amigo e professor Valderi Cândido, que me deu apoio no período de estágio, me cedeu uma de suas turmas para que pudesse aplicar minha pesquisa e me deu o privilégio de trabalhar junto durante um período, como seu professor substituto.

A minha orientadora Profª. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes que mesmo diante dos desafios da profissão, contribuiu com afinco e dedicação para a realização deste trabalho, sempre esclarecendo minhas dúvidas e me apoiando.

A Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), por me proporcionar uma formação profissional de qualidade, com funcionários competentes.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de formação.

RESUMO

Apesar dos grandes esforços que têm sido realizados pelos professores e pesquisadores no ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente no estudo das equações do 2º grau, os alunos continuam cometendo erros ao efetuarem resoluções para as mesmas na tentativa de solucioná-las. Desse modo, a presente pesquisa visa realizar uma verificação e discussão dos erros na resolução das equações do 2º grau, a qual é apresentada no 9º Ano do Ensino Fundamental de uma forma mais aprofundada. Nosso principal questionamento: O que tem levado muitos dos alunos do 9º Ano a cometerem erros ao traçarem soluções para as equações do 2º grau? Assim sendo, procuramos relatar um pouco sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, em seguida, fazemos uma abordagem histórica até os dias atuais para entender a equação quadrática e, logo após, mostramos algumas aplicações como também, apresentamos alguns pensamentos de autores que nos darão base para tratar os possíveis erros dos alunos, mostrando assim a relevância do ensino a partir dos erros. Aplicamos um questionário para gerar os dados da pesquisa, realizamos as discussões dos dados coletados junto aos alunos do 9° Ano da Escola Municipal de Ensino F. Abel Barbosa Silva, onde pudemos perceber as principais dificuldades encontradas, dentre elas: a falta de conhecimentos prévios, compromisso e reponsabilidade dos alunos com sua aprendizagem, a compreensão dos valores presentes nas equações e de reconhecer os polinômios em sua forma fatorada. Por fim, trouxemos as considerações finais juntamente com algumas observações acerca da contribuição que a verificação de erros tem no ensino e aprendizagem, onde foi percebido que aprendizagem a partir dos erros ajuda o educando a enxergar onde o erro foi cometido e corrigi-lo, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de trazer um feedback tanto para o aluno quanto ao professor no desenvolvimento de suas atividades laborais.

Palavras- chave: erros Matemáticos; equações do 2° grau; 9º ano do ensino fundamental; ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

Despite the great efforts that have been made by teachers and researchers in the teaching and learning of Mathematics, more specifically in the study of 2nd degree equations, students continue to make mistakes when making resolutions for them in an attempt to solve them. Therefore, the present research aims to verify and discuss errors in solving 2nd degree equations, which are presented in the 9th Year of Elementary School in a more in-depth way. Our main question: What has led many 9th grade students to make mistakes when drawing up solutions to 2nd degree equations? Therefore, we try to report a little about the teaching and learning of Mathematics, then we take a historical approach up to the present day to understand the quadratic equation and, shortly after, we show some applications as well as present some thoughts from authors who will give us basis for dealing with possible student errors, thus showing the relevance of teaching based on errors. We applied a questionnaire to generate research data, we carried out discussions of the data collected with 9th year students at Escola Municipal de Ensino F. Abel Barbosa Silva, where we were able to perceive the main difficulties encountered, among them: the lack of prior knowledge , commitment and responsibility of students with their learning, understanding the values present in equations and recognizing polynomials in their factored form. Finally, we brought final considerations together with some observations about the contribution that error checking has in teaching and learning, where it was noticed that learning from errors helps the student to see where the error was made and correct it, as well such as the development of logical reasoning, in addition to providing feedback for both the student and the teacher in the development of their work activities.

Keywords: Mathematical errors; 2nd degree equations; 9th year of elementary school; teaching and learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Equação do 2º grau é uma equação polinomial do 2º grau, pois possui um termo com maior grau elevado a segunda potência, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e chamados coeficientes, sendo $a \neq 0$. Ela é um dos assuntos vistos no Ensino Fundamental II, mais precisamente no 9º Ano, onde é apresentado vários métodos algébricos que auxiliam em suas resoluções, como por exemplo a famosa "Fórmula de *Bhaskara*" que é um dos métodos de resolução para esse tipo equação.

Nosso interesse por esse tema, surgiu devido à dificuldade que muitos alunos do ensino fundamental têm quando é abordado o assunto de equações do 2º grau em sala de aula e acabam cometendo erros na tentativa de traçar soluções para elas. Pois apesar dos vários esforços que os professores de Matemática têm praticado durante todos os anos, ainda assim muitos alunos continuam cometendo erros significativos quando lhe são apresentadas as equações do 2º grau e problemas que as envolva.

O que nos levou ao nosso principal questionamento: O que tem levado muitos dos alunos do 9º Ano a cometerem erros ao traçarem soluções para as equações do 2º grau? Com isso pudemos fazer uma verificação através de algumas discussões feitas a partir das respostas dadas pelos alunos a um questionário com 5 questões, dessa forma podemos perceber que a maior parte dessa falha está no cuidado do próprio discente com sua aprendizagem, o ambiente escolar, o apoio familiar e a formação do professor.

Diante dessa problemática, nosso trabalho tem por objetivo principal verificar e discutir os erros dos alunos ao desenvolverem soluções para as equações do 2° grau no 9° Ano do Ensino Fundamental. Logo, realizamos uma pesquisa de cunho descritiva qualitativa, baseando-se em autores que tiveram o interesse em estudar sobre Erros Matemáticos e também das equações do 2º grau. Após realizar toda a coleta de dados para a pesquisa, fizemos uma discussão dos dados fazendo alguns apontamentos dos erros cometidos por eles e relacionando com fala dos autores sobre os motivos que ocasionava esses erros.

Sendo assim, a fim de organização do nosso trabalho, ele está divido em capítulos, nos quais serão apresentados detalhadamente a nossa pesquisa, assim como os fundamentos teóricos relativos a ela. Portanto, no capítulo 2, deste trabalho, faremos um levantamento de alguns pensamentos de autores que contribuíram para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Matemática. No capítulo 3, será exposto um breve contexto histórico da evolução da equação do 2º grau e algumas aplicações. O capítulo 4, irá trazer algumas falas de autores sobre os erros matemáticos, às quais darão base para nossas discussões na pesquisa. No capítulo 5, apresentaremos os meios e técnicas utilizadas para obtenção dos resultados da pesquisa. No capítulo 6, apresentaremos as discussões dos dados coletados junto aos alunos do 9° Ano da EMEF Abel Barbosa Silva. E, por fim, no último capítulo faremos as considerações finais juntamente com algumas observações e dicas para o leitor.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Neste capítulo iremos tratar do ensino e aprendizagem da Matemática. Vamos levantar alguns pensamentos de autores que contribuíram para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.

Segundo Piletti (1999), o processo de ensino e aprendizagem não é algo que podemos definir com precisão, pois ele acontece em qualquer lugar desde que exista trocas de informações entre os indivíduos, ou até mesmo por meio de indagações e contatos com tecnologias e a natureza. Esse processo é contínuo visto que a humanidade está em constante aprendizado como afirma o autor

> O ensino e a aprendizagem são tão antigos quanto a própria humanidade. Nas tribos primitivas os filhos aprendiam com os pais a atender suas necessidades, a superar as dificuldades do clima e a desenvolver-se na arte da caça. No decorrer da história da humanidade, o ensino e a aprendizagem foram adquirindo cada vez maior importância. Por isso, com o passar do tempo, muitas pessoas começaram a se dedicar exclusivamente a tarefas relacionadas com o ensino. (Piletti 1999, p. 25)

Com isso podemos afirmar que o processo de ensino e aprendizagem seja na área de Matemática ou não, são tão antigos quanto a própria humanidade, portanto as trocas entre professor e aluno vem desde a antiguidade se compararmos a relação entre pai e filho segundo a afirmação de Piletti, onde os ensinamentos eram passados geração após geração.

Para Ausubel a aprendizagem pode ser classificada em dois aspectos, sendo eles o significativo ou o mecânico. O aspecto significativo segundo Ausubel (apud Moreira 2004, p. 7-8) “...é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo” e o mecânico “...é a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva”.

A Matemática no decorrer do tempo é vista como sendo uma disciplina difícil que traz muitas dificuldades tanto para os alunos quanto para os professores no processo de ensino e aprendizagem, ela existe, pois, de um lado pode-se ver a incompreensão e a desmotivação por parte dos alunos e do outro a insatisfação dos professores por não conseguirem atingir seus objetivos e resultados satisfatórios. A relação de interação entre docente e discente precisa acontecer, como afirma Paulo Freire (1996, p. 26):

> Nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador igualmente sujeito do processo. Só assim podemos falar realmente de saber ensinado e apreendido na sua razão de ser e, portanto, aprendido pelos educandos.

Com isso podemos perceber que o ensino da Matemática, se feito de forma adequada, tem o poder de ser um agente transformador na sociedade, por meio dos sujeitos que nela atuam.

Além disso, os conceitos Matemáticos apreendidos fazem total sentido para os discentes, mediante a relação estabelecida tanto no que se conhece e quanto no que se aprende, pois é necessário que a relação professor e aluno exista, para que desse modo o que é ensinado ao discente se transforme em algo significativo.

Segundo Rosamund (2009 p.43)

> As crianças não apenas trazem suas experiências anteriores escolares em matemática para uma nova situação de aprendizagem, mas também trazem suas próprias experiências fora do ambiente escolar, onde crianças e adultos participam de uma variedade de atividades matemáticas diárias que podem afetar sua aprendizagem de matemática na escola. Essas atividades incluem jogar cartas, planejar feriados, trabalhar em uma loja, ajudar com tarefas gerais em casa ou ajudar um irmão mais velho com as tarefas de casa.

Ou seja, a bagagem matemática que o aluno traz para escola, construída por meio de suas vivências, deve ser um canal pelo qual se utiliza para formar os conceitos Matemáticos de maneira mais sofisticada e abrangente, possibilitando fazer uso deles tanto dentro do contexto escolar quanto fora dele.

A Matemática, baseada em raciocínio crítico e lógico, é de fato considerada a maior área de preocupação com o aprendizado das crianças em todo o mundo, pois exige uma concentração maior dos discentes. No entanto, os professores, que amam ensinar, sabem que qualquer criança pode aprender matemática se o processo de ensino for aplicado e realizado de maneira eficaz e correta. Pois ela é uma disciplina que instiga o aluno a buscar o conhecimento para desenvolver a solução de situações e problemas, podendo com isso o tornando em um indivíduo crítico e independente. Giancaterino (2009, p.17) afirma que:

> O processo de ensino e aprendizagem é uma construção continua e notável, onde requerem de nós, professores independentemente de sua cátedra, constante adaptação para que possamos retirar dos processos o melhor e aproveitar todas as suas etapas, respeitando evidentemente sempre o grau de dificuldade de cada educando.

De acordo com as observações dos autores acima, podemos concluir que a aprendizagem significativa inclui a experiência e o conhecimento do aluno, valorizando a prática e o conhecimento pessoal do aluno no processo de construção do saber. O papel do professor é ajudar os alunos a construir o conhecimento de maneira mais independente e pessoal possível.

Portanto, o ensino e aprendizagem não podem ser separados, além de ser um processo contínuo. Sem o outro, um não pode existir.

No próximo capítulo iremos trazer um breve contexto histórico do processo de evolução da equação do 2º grau até chegarmos a formula que conhecemos hoje, além da importância do estudo das equações do 2º grau de acordo com os documentos oficiais de nosso país, como PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) (Brasil, 1998) e BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (Brasil, 2017).

3 EVOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU E ALGUMAS APLICAÇÕES

3.1 UM BREVE CONTEXTO HISTÓRICO

Durante o processo de desenvolvimento de várias civilizações, a exemplo dos egípcios, babilônios, hindus, árabes, chineses e europeus, eles passaram a desenvolver métodos que os ajudavam a resolver problemas que envolviam a álgebra e aritmética. Existem muitos fatos históricos que contribuíram nesse processo de evolução dos métodos para resolução de problemas envolvendo esse conceito matemático. E segundo Fragoso (2000) os primeiros registros encontrados envolvendo a resolução de equações do 2º grau datam do século XVII a.C.

Há poucas informações históricas sobre equações do 2º grau, mas existe um papiro encontrado em Kahun, em meados do século XX a. C. onde contém um problema matemático que expressa na simbologia de hoje um sistema de equações e pelo qual podemos ver pela primeira vez uma solução para equação do 2º grau (Fragoso, 2000).

O problema em questão é: “Uma dada superfície de 100 unidades de Área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1: 3/4" (Eves, 2004) que se tratando da linguagem matemática atual pode ser interpretada da seguinte forma: “A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quádruplo do lado do outro” (Pedroso, 2010). Ou seja:

$$\{x^2 + y^2 = 100 \qquad (1)$$

$$3y = 4x \qquad (2)$$

Para solucionar esse problema iremos utilizar o método da falsa posição, que segundo Mol (2013), consiste em atribuir um valor específico à incógnita em questão, onde a expressão ao lado esquerdo é calculada através desse valor e esse resultado obtido é comparado com o valor que deseja-se encontrar.

I) Supondo que $x = 3$ assim em (2) temos que $y = 4$

II) Substituindo em (1) teremos

$3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$

Notamos que o par ordenado (3, 4) não é solução para o sistema

III) Porém, multiplicando os ambos os membros dessa igualdade por 4 obtemos

$$4 \cdot (3^2 + 4^2) = 4 \cdot 25$$
$$4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 = 100$$

IV) Notamos que $4 = 2^2$ dessa forma podemos reescrever a igualdade a cima como sendo

$$2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 = 100$$
$$(2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 = 100$$
$$6^2 + 8^2 = 100$$

Portanto, a solução para o sistema é o par ordenado (6, 8) com $x = 6$ e $y = 8$

Os babilônios também contribuíram com registros históricos que continham exemplos de soluções para equações do 2º grau, mesmo que ainda de forma escrita e sem o uso de fórmulas que conhecemos hoje. Eles usavam um método intuitivo para resolver problemas com esse cunho, fazendo uso de uma espécie de "receita matemática" que determinava apenas valores positivos como solução. Veja abaixo um exemplo:

Quadro 1 - Exemplo de resolução feita pelos Babilônios

Exemplo: Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? (O que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). **Solução**: Tome a metade de 1 (coeficiente de x): $\frac{1}{2} = 0,5$ Multiplique por ela mesma: $0,5 \times 0,5 = 0,25$ Some o resultado a 870 (termo independente): $0,25 + 870 = 870,25$ Obtém-se um quadrado: $870,25 = 29,5^2$ Cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) o lado do quadrado procurado. Logo, $29,5 + 0,5 = 30$

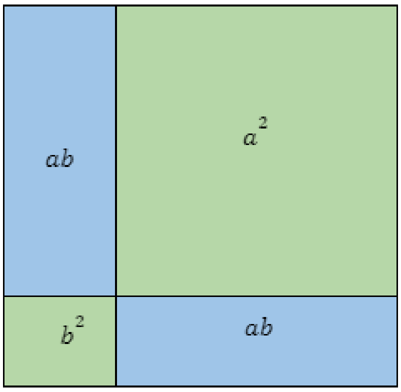
Fonte: Fragoso (2000)

Segundo Fragoso 2000 os gregos passaram a desenvolver o raciocínio sobre equações do 2º grau a partir da dificuldade de trabalhar com números racionais e irracionais, devido à limitação de seu sistema numérico. Embora essas dificuldades muitos matemáticos importantes influenciaram para o que conhecemos hoje de equações do 2º grau, a exemplo de Euclides (~365 – 300 a.C.) em seu livro II "Os Elementos" na proposição 4 como destaca Baumgart (1992)

> Exemplo: a proposição 4 do livro Elementos, livro II de Euclides. Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha odo e igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contem. [Isto é, $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$]. O que hoje conhecemos por $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ era representado por Euclides. E o termo conhecido por a^2, para Euclides era realmente um quadrado [...]. (P. 6-7)

Com isso, podemos expressar geometricamente essas informações acima da seguinte forma (imagem 1):

Imagem 1 - Representação Geométrica de $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

De acordo com Fragoso (2000) a civilização hindu também obteve contribuições importantes no que se refere à resolução de equação do 2º grau, os quais se destacaram-se os matemáticos *Bhaskara* de Akaria e Sridhara no sec. XII. Tais contribuições são referências até hoje para solucionar as equações do 2º grau, porém até hoje ainda é usado o termo "fórmula de *Bhaskara*" equivocadamente aqui no Brasil. Garbi (2009, p. 25) afirma "que o responsável pela determinação da regra que originou a fórmula atual, conhecida só no Brasil como fórmula de *Bhaskara*, não foi o matemático *Bhaskara*, mas sim o matemático hindu Shidhara" o que foi um "fato reconhecido pelo próprio *Bhaskara*".

Nesse contexto ainda não tinha sido estabelecido uma fórmula geral para resolução das equações do 2º grau, resolvia-se ainda por meios rudimentares sem o uso da simbologia para as incógnitas dos coeficientes. Vejamos alguns exemplos da escrita hindu segundo Pedrosa (2010)

Quadro 2 - Comparativo das escritas Hindu e Atual

HINDU	ATUALMENTE
Seja ya v 2 o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$ o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é ya 1	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é ya v $\frac{16}{9}$	Oito nonos de todo o enxame é $\left(\frac{16}{9}\right)x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual a quantidade de abelhas do enxame, isto é, ya v 2	$x + \left(\frac{16}{9}\right) x^2 + 2 = 2x^2$

Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em: ya v 18 ya 0 ru 0 ya v 16 ya 9 ru 18	$\frac{9x + 16x^2 + 18}{9} = \frac{18x^2}{9} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 18x^2 = 9x + 16x^2 + 18$
Após a subtração, a equação torna-se ya v 2ya 9 ru 0 ya v 0ya ru 18	$18x^2 - 16x^2 - 9x =$ $18 + 9x + 16x^2 - 16x^2 - 9x =$ $2x^2 - 9x = 18$
Portanto, ya é 6	Portanto $x = 6$
Donde ya v 2 é 72	Donde $2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 2 \cdot 36 = 72$

Fonte: Pedroso (2010, p. 7-8).

Os árabes por sua vez segundo Fragoso (2000) também contribuíram com conhecimentos importantes, pois com o fim da Biblioteca de Alexandria no ano 641 d. C. foi fundada a Casa da Sabedoria por Al-Mamum no século IX em Bagdá, onde "com a criação da Casa da Sabedoria, muitos matemáticos dirigiram-se para lá, entre eles o matemático Al-Khowarizmi, que apresentou a resolução da equação do 2º grau e o método de completar quadrado, método geométrico distinto do utilizado pelos gregos".

Al- Khowarizmi apresentou esse método de resolução através de uma de suas obras intitulada no português como sendo a *Ciência das equações*, que ainda segundo o autor uma "obra de grande potencial didático", pois foi apresentado uma equação do 2º grau, bem como sua resolução e sua comprovação por meio da geometria.

Prosseguindo com os fatos históricos, também podemos destacar os chineses com método intitulado *fan-fan* para resolução de equação do 2º grau, que em 1303 um matemático chinês por nome Chu Shi-chieh, o apresentou em uma de suas obras o *Ssu-yüan yú-chien* que traduzindo para o português seria "Precioso espelho de quatro elementos". Ele se baseava fazer aproximações sucessivas com grandes precisões que encontrava apenas uma raiz positiva Fragoso (2000).

Porém esse método foi reivindicado pelo matemático inglês William George Horner em 1819 que o batizou de método Horner.

Vejamos um exemplo desse método no quadro abaixo na escrita de hoje

Quadro 3 - Método fan-fan para resolução de Equação do 2º Grau

Exemplo: equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, consistia no seguinte: partia-se de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e

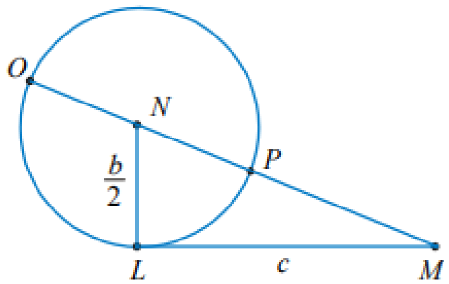
usava-se a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y, cuja solução está entre 0 e 1. Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = \frac{143}{291}$ e assim o valor inicial de x era corrigido para: $x = 19 + \frac{143}{291} = 19,49$. A ideia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse.
No caso, fazendo $z = x - 19{,}49$, obtinha-se a equação em z, $z^2 + 290,98z = 0{,}66$ e, daí: $z = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são $19{,}49226$)

Fonte: Fragoso (2000, p.23)

Por fim na Europa foram feitas muitas descobertas acerca da resolução e formulação das equações do 2º grau que conhecemos hoje, pelo que podemos destacar os matemáticos René Descartes e François Viète. René por sua peculiaridade apresentou um método de resolução geométrico para as equações do 2º grau do tipo:
$x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2$ e $x^2 = bx - c^2$, com b e c sempre positivos

Veja o exemplo da resolução do tipo $x^2 = bx + c^2$:

> Traça-se um segmento LM, de comprimento c, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a b/2 e perpendicular a LM Com centro em N construímos um círculo de raio b/2 e traçamos a reta por M e N que corta o círculo em O e P. Então a raiz procurada é o segmento OM (Fragoso 2000, p. 24)



Pedroso (2010, p.10-11) afirma que para "resolver a equação $x^2 + 2ax = b$, François Viète (1540-1603) propôs uma mudança de variáveis, que transformava a equação inicial em uma equação incompleta". Ele passou a usar letras do alfabeto latino para determinar quantidades desconhecidas, o que recai na notação usada hoje. Para Nobre (2003) o método de resolução das equações do 2º grau desenvolvido por Viète passou a ser adotado como forma geral $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e c grandezas conhecidas e sendo x o valor desconhecido. Atualmente conhecemos essa caracterização para a, b e c como sendo os coeficientes da equação e x como incógnita.

Vejamos o método e seus passos:

I) Seja

$$x + a = u$$

II) Então

$$u^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

III) Pela equação dada

$$x^2 + 2ax = b;$$

ou seja,

$$u^2 = b + a^2.$$

IV) Logo

$$(x + a)^2 = u^2 = b + a^2 \text{ e } x = \sqrt{b + a^2} - a$$

Para uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$; o método de Viète seria:

I) Seja

$$x = u + z$$

II) Então substituindo em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se

$$a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0$$

Desenvolvendo um pouco mais essa expressão temos:

$$a(u^2 + 2uz + z^2) + bu + bz + c = 0 \Rightarrow au^2 + 2auz + az^2 + bu + bz + c = 0,$$

ou seja,

$$au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0.$$

III) Se $2az + b = 0$, tem-se $z = \frac{-b}{2a}$.

IV) Substituindo $z = \frac{-b}{2a}$ em $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$.

Tem-se

$$au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0,$$

ou seja,

$$au^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

ou ainda,

$$u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

V) Finalmente substituindo os valores $z = \frac{-b}{2a}$ e $u = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ teremos,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que é a forma que conhecemos hoje para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau, além de ser praticada nas escolas e campus universitários.

3.2 A IMPORTÂNCIA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A equação do 2º grau desempenha um papel significativo em diversas áreas do conhecimento e está presente em nosso cotidiano. Ela se manifesta como uma função quadrática e encontra aplicação na Biologia, mais especificamente no processo da fotossíntese das plantas. Na Física, a equação é utilizada para descrever o movimento uniformemente variado, lançamento vertical e oblíquo. Na área da Administração e Contabilidade, ela relaciona as funções de custo, lucro e receita. Além disso, na Engenharia Civil, a equação do 2º grau é essencial na concepção e construção de estruturas como pontes, viadutos, edifícios, entre outros exemplos.

O estudo da equação do 2º grau no Nono Ano do Ensino Fundamental é fundamental para o desenvolvimento dos alunos, pois introduz conceitos e técnicas matemáticas mais avançadas, preparando-os para etapas posteriores da educação. O conhecimento adquirido nesse período é uma base sólida para o estudo da Matemática no Ensino Médio.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), (Brasil, 1998) diz que deve ser trabalhado a álgebra com os discentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, para que dessa forma o aluno possa construir um prévio conhecimento algébrico acerca do conteúdo. Mais especificamente sobre as equações do 2º grau os PCNs destacam que:

> Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 1998, p. 50)

Ou seja, o estudo da equação do 2º grau é relevante, pois permite aos alunos explorarem relações matemáticas mais complexas, desenvolver habilidades de resolução de problemas e aprimorar a compreensão das propriedades das funções quadráticas. Esse conteúdo possibilita que os alunos analisem e interpretem as diferentes formas de representação matemática das equações desse tipo, como gráficos, tabelas e fórmulas, para resolver problemas do mundo real.

No documento mais recente que temos em nosso país, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (Brasil, 2017) traz as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver. Analisando o livro didático Teláris (Manual do Professor) que é direcionado ao Ensino Fundamental Anos Finais para o componente de Matemática, ele traz as orientações ao professor para contextualizar o assunto de equações do 2º grau tratadas no 9º Ano, nele também contém as normas da BNCC para o ensino dessas equações, onde uma delas é:

> (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau. (Dante, 2018, p. 26)

Com isso, podemos destacar que se o ensino for feito com excelência e em contra partida os discentes também o fizer, eles passaram a ser capazes de resolver e representar problemas envolvendo equações do 2º grau, utilizando diferentes métodos, como por exemplo fatoração.

Ainda segundo a BNCC, o estudo da equação do 2º grau contribui para o desenvolvimento de competências, como

> Competência específica 2 (CE2) - Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Competência específica 4 (CE4) - Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BNCC, 2017, pág. 263)

Com o estudo desse equações, os alunos adquirem habilidades matemáticas essenciais, como o pensamento lógico, a capacidade de abstração e o desenvolvimento do pensamento crítico. Essas habilidades são cruciais para a solução de problemas, tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Além disso, o estudo das funções quadráticas ajuda os alunos a compreender conceitos matemáticos mais avançados, como gráficos de funções quadráticas, concavidade e vértices.

O estudo da equação do 2º grau também tem aplicações práticas na vida cotidiana dos alunos. Eles podem usar esse conhecimento para resolver problemas relacionados a áreas como física, economia, engenharia e ciências naturais. A capacidade de modelar situações reais usando as equações quadráticas é uma habilidade valiosa para tomar decisões decisivas e compreender fenômenos do mundo ao seu redor.

A BNCC (2017, pg. 294) sinaliza a importante que o ensino da equação do 2º grau Ensino Fundamental Anos Finais deve ser exatamente de forma contextualizada e significativa. Os alunos devem ser incentivados a relacionar os conceitos matemáticos com situações reais, estimulando sua curiosidade e motivando-os a aprender. Além disso, o uso de recursos tecnológicos, como softwares de simulação e calculadoras gráficas, pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, permitindo que os alunos visualizem e explorem as propriedades das funções quadráticas.

No próximo capítulo iremos tratar sobre os erros matemáticos segundo alguns autores que contribuíram para esse estudo no âmbito matemático.

4 O QUE DIZ ALGUNS AUTORES SOBRE OS ERROS MATEMÁTICOS?

Neste capítulo iremos apresentar alguns pensamentos de autores que nos darão base para tratar os possíveis erros dos alunos ao responderem as questões o questionário aplicado sobre o conteúdo de equação do 2º grau no 9º Ano do Ensino Fundamental.

De acordo com Cury (2021) a Educação Matemática é algo que tem sido debatido por muitos pesquisadores e essa preocupação é de extrema importância para o desenvolvimento da Educação Matemática. Para ela:

> A Educação matemática emprega contribuições da matemática, de sua filosofia e de sua história, bem como de outras áreas, tais como Educação, Psicologia, Antropologia e Sociologia, sendo seu objetivo o estudo das relações entre o conhecimento matemático, o professor e os alunos, relações estas que se estabelecem em um determinado contexto sociocultural (Ibidem, p. 16).

Segundo essa autora "a análise de erros - ou a análise da produção escrita, seja ela representativa de acertos ou de erros – é uma tendência em Educação Matemática". E ainda ela diz que "...a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado da prática do professor", ou seja, a prática de analisar os erros cometidos pelos educandos "ela é" ou "deveria ser" um hábito desempenhado no planejamento pedagógico das entidades de ensino e no roteiro das aulas dos professores.

Ou seja, a análise de erros matemáticos é uma abordagem que visa compreender e corrigir os erros cometidos pelos alunos ao resolver problemas matemáticos. Ela envolve identificar as fontes de erro, analisar as estratégias utilizadas e fornecer feedback adequado para ajudar os estudantes a melhorar suas habilidades matemáticas. Esse processo deveria sempre está presente nas discussões e planejamentos pedagógicos, sobre tudo dos projetos políticos pedagógicos (PPP).

A autora Kuroiwa (2016, pág. 88 - 89) em seu trabalho de dissertação faz uma lista com algumas dificuldades encontradas durante toda sua pesquisa na turma do 9º Ano, veja na lista a seguir:

Lista de dificuldades I

- Apresentação, exposição e encaminhamento do professor;
- Experiências vividas e presenciadas pelos alunos;
- A presença e atitude da família na vida escolar do estudante;
- O compromisso e a responsabilidade do aluno para com seu aprendizado;
- Os materiais e recursos utilizados pelo professor;
- Ausência de conhecimentos prévios demonstrada por alguns estudantes;
- A conduta, personalidade e paciência do professor;
- A descrição das atividades propostas, bem como sua sequência;

- As diferenças na faixa etária dos alunos, levando a discordâncias de pensamentos e posturas na sala de aula decorrentes da maturidade apresentada por eles;
- Comportamento da turma, referente a condições educacionais e temperamentais;
- Instalações físicas da escola condições de uso e aparência dos materiais e ambientes disponíveis.
- A formação do professor, bem como seu trato na transmissão do conteúdo (didática).

Através desses pontos elencados, é possível compreender que as dificuldades de aprendizado estão interligadas não apenas ao conteúdo em si, mas também ao papel do professor, à influência da família do aluno e ao ambiente escolar.

Outras dificuldades apresentadas, estão ligadas as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e também podem ser percebidas pelo professor, de acordo com (Vayavutjamai & Clements (2006) e Ochoviet & Oçtak (2009) apud Martins, 2014, p.12). Veja na lista abaixo e alguns exemplos:

Lista de dificuldades e exemplos II

- Muitos alunos não compreendem que os valores presentes na solução de uma equação são os valores que transformam a igualdade inicial numa igualdade verdadeira;

  Exemplo:

  $$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \; e \; x_2 = -1$$

  Para $x_1 = 1$, $1^2 - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0$

  Para $x_2 = -1$, $(-1)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 1 - 1 = 0$

- O símbolo “=’’ tem significados diferentes, tanto pode representar uma indicação de ação (como no cálculo do valor de expressões numéricas, por exemplo) como, no caso das equações, representa na verdade, um equilíbrio que se deve manter;

  Exemplo:

  $$3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$$

  A ação no símbolo de igualdade, e a operação sucessiva utilizando igualdades até encontrar o resultado, o que não é possível para encontrar os valores da incógnita x. Por isso, em uma equação, a igualdade representa um equilíbrio que deve permanecer e não para encontrar uma solução imediata.

- Depois de aprenderem a resolver equações de primeiro grau, os alunos habituam-se a “pôr as letras no primeiro membro e os números no segundo’’, ao transporem este raciocínio para as equações de 2° grau os alunos caem no erro de operar com termos não semelhantes;

  Exemplo:

$$3x^2 - 1 = 8 + x \Rightarrow 3x^2 - x = 8 + 1 \Rightarrow 2x^2 = 9$$

- Usar expressões menos rigorosas como "só podemos somar os xx's do mesmo tipo'', quando na verdade o que quer dizer adicionar monômios com incógnita de graus diferentes
- É difícil para os alunos entenderem que um polinômio e a sua fatoração são expressões equivalentes, ou seja, são interpretações diferentes de uma mesma estrutura;

  Exemplo:

  $$x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x + 4) = x^2 + 4x + 2x + 8$$

- A lei do anulamento do produto é vista como um processo e não é, o que faz com que os alunos não identifiquem uma equação do tipo $(x - a)(x - b) = 0$ como uma equação e tenham, assim, necessidade de transformar a fatoração num polinômio. Lei do anulamento do produto diz que: Se o produto de dois ou mais números é zero, pelo menos um desses números é zero.

  Exemplo:

  $$(x + 2)(x - 5) = 0$$

  Pela lei do anulamento do produto, temos;

  $$(x + 2) = 0 \text{ ou } (x - 5) = 0$$

  Logo,

  Para $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

  Para $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

  Portanto, o conjunto solução será $S = \{-2, 5\}$

- Regra como "troca de membro, troca de sinal'', "se está a dividir, passa para o outro lado a multiplicar'', "tem de se fazer a operação inversa'', não privilegiam a compreensão e levam à mecanização dos procedimentos;

  Exemplos:

  I) $x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = -6 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

  II) $x - 5 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x\,(x - 5) = x \cdot \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 - 5x = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 2 - 2 \Leftrightarrow$

  $x^2 - 5x - 2 = 0$

- As regras do ponto anterior podem levar também a falhas como o desrespeito das prioridades das operações, ou seja, não obedecendo a ordem dos cálculos a serem feitos. Utilizando o exemplo anterior: $x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 \ - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \ = 5 - 4 \cdot (-6) = 1 \cdot (-6) = -6$

Perceba que não foi obedecido as regras dos cálculos.

Forma correta:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 \ - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \ = 25 + 24 = 49$

- Apresentar regras algébricas antes de os alunos precisarem dela faz com que a memorização se destaque na aprendizagem dos alunos. Se por outro lado as regras surgem da necessidade dos alunos resolverem um problema, é muito mais provável que os alunos descubram a regra por si e, por isso, se apropriem dela sem ter de memorizar. Como afirma Martins (2014, p.13) (apud Ribeiro, 2021, p.25),

> Assim, é muito importante que o professor esteja atento e que olhe para as equações de 2.º grau como um assunto de difícil aprendizagem. É preciso ser sensível a estas dificuldades e sobretudo não nos esquecermos que a riqueza da álgebra está nos raciocínios que desenvolve e não na acumulação de procedimentos memorizados sem sentido ou significado.

Com isso podemos entender, que essas dificuldades se evidenciam devido à ausência de estímulo ao raciocínio lógico presente no método de ensino adotado, pelo qual não é despertada a curiosidade nem incentiva a reflexões fundamentais para alcançar uma compreensão mais aprofundada do conteúdo proposto. Portanto torna-se essencial que o professor esteja atento às dificuldades enfrentadas pelos alunos, a fim de que suas aulas sejam cada vez mais pensadas e voltadas as necessidades dos discentes. Com isso os conteúdos passarão a fazer mais sentido para eles e terão um melhor desempenho ao interioriza-los.

No próximo capítulo iremos trazer a metodologia adotada para gerar os resultados obtidos da pesquisa.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, iremos apresentar os mecanismos e procedimentos adotados para gerar os resultados obtidos da pesquisa.

Segundo Maia (2011) metodologia pode ser entendida como sendo um aglomerado de métodos e técnicas que serão empregados a um objetivo determinado, ou seja, os caminhos que serão percorridos a fim de chegar a sua finalidade.

A presente pesquisa tem como objetivo identificar e discutir sobre os erros cometidos pelos alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental ao estudarem as equações do 2º grau.

5.1 TIPO DE PESQUISA

No tocante ao tipo de pesquisa utilizada para este estudo, utilizamos a pesquisa descritiva. As pesquisas com este cunho, tem como características principais reunir e verificar as informações sobre o assunto abordado. É o que afirma Gil (2008)

> As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados, tais como o questionário e a observação sistemática

No que se refere a abordagem que adotamos para a problemática da pesquisa, tomamos por base o método qualitativo que segundo Creswell (2014, p. 186) afirma que “A pesquisa qualitativa ocorre em um cenário natural. O pesquisador qualitativo sempre vai ao local (casa, escritório) onde está o participante para conduzir a pesquisa”. Ou seja, o pesquisador precisa ir ao local onde o sujeito estará para realizar pesquisa.

E ainda os autores Dalfovo, M. S., Lana, R. A., & Silveira, A. (2008, p. 9) dizem que “… a pesquisa qualitativa é aquela que trabalha predominantemente com dados qualitativos, isto é, a informação coletada pelo pesquisador não é expressa em números, ou então os números e as conclusões neles baseadas representam um papel menor na análise”. O que nos leva a ver que esse tipo de pesquisa em particular é fundamentalmente interpretativa, ou seja, o pesquisador fará a interpretação dos dados coletados.

5.2 CONJUNTO E AMOSTRA

A população ou universo da pesquisa, de acordo com Gil (2008, p. 89-90) “é um conjunto definido de elementos que possuem determinadas características” e amostra por sua vez é o “subconjunto do universo ou da população, por meio do qual se estabelecem ou se estimam as características desse universo ou população”.

A população do presente trabalho é advinda da Escola Municipal de Ensino Fundamental Abel Barbosa Silva, na cidade de Areia, no estado da Paraíba, na turma do 9° Ano contendo 34 alunos matriculados.

Para dar ênfase a nossa pesquisa foi retirada uma amostra de 17 alunos da população mencionada acima, que estavam presentes no momento da coleta de dados.

5.3 COLETADA DE DADOS

A coleta de dados é extremamente importante no processo da pesquisa, pois é nela que iremos obter os dados para fazer as observações e a retirada das conclusões devidas. Segundo Triviños (1997), a reunião de informações do pesquisador sobre o fenômeno social estudado é a base material e investigativa, pela qual será possível construir e obter os resultados. E para Creswell (2014), é na coleta de dados que o pesquisador toma nota e reúne informações dos indivíduos, onde inclui estabelecer fronteiras para fornecer os dados para o que está sendo estudado.

Os dados deste estudo foram coletados através de uma entrevista direta e observação no decorrer da aula com os alunos da turma de 9º Ano, em que foi aplicado um questionário com questões (APÊNDICE A) fechadas e abertas.

5.4 INSTRUMENTO E TÉCNICA

Para a coleta de dados da pesquisa, foi utilizado como instrumento um questionário que, segundo Amaro, Póvoa e Macedo (2004, p. 3)

> Um questionário é um instrumento de investigação que visa recolher informações baseando-se, geralmente, na inquisição de um grupo representativo da população em estudo. Para tal, coloca-se uma série de questões que abrangem um tema de interesse para os investigadores, não havendo interacção directa entre estes e os inquiridos.

Mediante a isso usamos um questionário, contendo um total de 5 questões, sendo 1 de múltipla escolha e 4 abertas, pela qual fizemos o uso da técnica de entrevista não-estruturada. Segundo Creswell (2014, p. 190) diz que “... o pesquisador conduz entrevistas face a face com os participantes, entrevista os participantes por telefone ou faz entrevistas com grupos focais" que "…envolvem poucas perguntas não-estruturadas e geralmente abertas, que pretendem extrair visões e opiniões dos participantes" e também como diz Amaro, Póvoa e Macedo (2004, p. 3) "Um questionário é extremamente útil quando um investigador pretende recolher informação sobre um determinado tema." onde "...é possível recolher informações que permitam conhecer melhor as suas lacunas, bem como melhorar as metodologias de ensino podendo, deste modo, individualizar o ensino quando necessário."

Esse método de investigação foi desenvolvido em contato direto com os discentes e observando durante toda aula com os alunos da turma de 9° Ano. As respostas dos alunos serão utilizadas para verificar os possíveis erros cometidos por eles ao responderem as questões referente a equações do 2º grau.

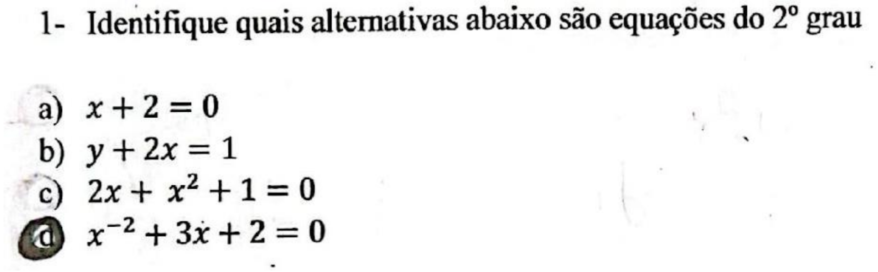
No próximo capítulo traremos as discussões dos dados coletados durante toda a pesquisa. Onde trataremos em específico os erros cometidos pelos alunos ao responderem as questões propostas no questionário aplicado.

6 DISCUSSÃO DOS DADOS COLETADOS

Este capítulo visa fazer uma discussão dos dados coletados durante toda a pesquisa junto aos alunos do 9º Ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Abel Barbosa Silva, na cidade de Areia, no estado da Paraíba.

O questionário (APÊNDICE A) em sua primeira questão pede para que os alunos identifiquem uma equação do 2º grau. Veja a imagem abaixo com a resposta de um discente:

Imagem 2 - 1º item do questionário, resposta do aluno.



1- Identifique quais alternativas abaixo são equações do 2º grau

a) $x + 2 = 0$
b) $y + 2x = 1$
c) $2x + x^2 + 1 = 0$
d) $x^{-2} + 3x + 2 = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Observando essa imagem, podemos verificar que o aluno possui pelo menos duas dificuldades:

I) Identificar a caracterização de uma equação do 2º grau. A equação do 2º grau é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, para que ela seja uma equação desse tipo o expoente da incógnita x seja igual a dois e o coeficiente que o acompanha seja diferente de zero.

II) Podemos identificar que é o aluno não possui conhecimentos prévios sobre polinômios. Pois claramente ao marcar a alternativa d) verifica-se que ele não lembra dos conhecimentos básicos sobre polinômios que são estudados no 8º Ano Fundamental. Os polinômios tem a seguinte característica $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $n \in Z_+$,ou seja, não possui expoente negativo.

Aqui se confirma o que a autora Kuroiwa (2016) falou na Lista de dificuldades I, sobre a ausência de conhecimentos prévios que serve de base para o estudo das equações do 2º grau, neste caso os conceitos de polinômios.

A resposta adequada a esse item do questionário seria apenas a alternativa c), pois ela apresenta todas as características da equação do 2º grau. A exemplo desse aluno que respondeu corretamente essa questão. Veja a imagem abaixo:

Imagem 3 - 1° item do questionário, resposta correta do aluno.

1- Identifique quais alternativas abaixo são equações do 2º grau

a) $x + 2 = 0$
b) $y + 2x = 1$
c) $2x + x^2 + 1 = 0$
d) $x^{-2} + 3x + 2 = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

A segunda questão, pedia para os alunos identificarem os coeficientes da equação do 2º grau em cada subitem. Nesse item do questionário tivemos alunos que sinalizaram como se fosse a primeira questão e outros que fizeram corretamente. Veja a imagem abaixo:

Imagem 4 - 2º item do questionário, resposta do aluno.

2- Identifique os coeficientes das equações do 2º grau abaixo

a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$
b) $x^2 - 5x + 2 = 0$
c) $0{,}5x^2 + x - 1 = 0$
d) $x^2 = 0$

Fonte: Próprio Autor

Através desta imagem podemos verificar que o aluno:

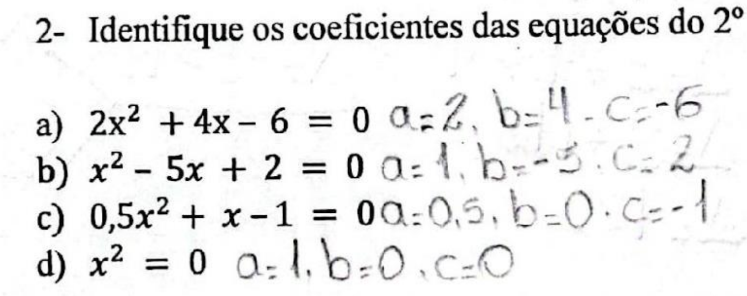
I) Não tem os conhecimentos prévios do que são coeficientes, ou seja, ele não conseguiu interiorizar os ensinamentos vistos no ano anterior (8º Ano). Pois quando é abordado o assunto de polinômios no 8º Ano, os alunos aprendem, ou, espera-se que eles aprendam o que são coeficientes e a identificá-los nos polinômios.

II) Poderíamos, também, pensar que esse aluno não teve compromisso e responsabilidade com seu aprendizado, visto que o mesmo possivelmente não leu a questão, e por isso, talvez ele não tenha entendido o que estava sendo solicitado.

Aqui também podemos ver a confirmação das palavras da autora Kuroiwa (2016) na Lista de dificuldades I nos itens que falam da importância dos conhecimentos prévios e o compromisso e a responsabilidade do aluno para com seu aprendizado.

Nesta próxima imagem, podemos ver o que o aluno conseguiu identificar claramente os coeficientes da maioria das equações, porém cometeu um deslize no item c) da questão, pois na verdade os coeficientes seriam $a = 0{,}5,\ b = 1$ e $c = -1$.

Imagem 5 - 2º item do questionário, resposta parcialmente correta do aluno.

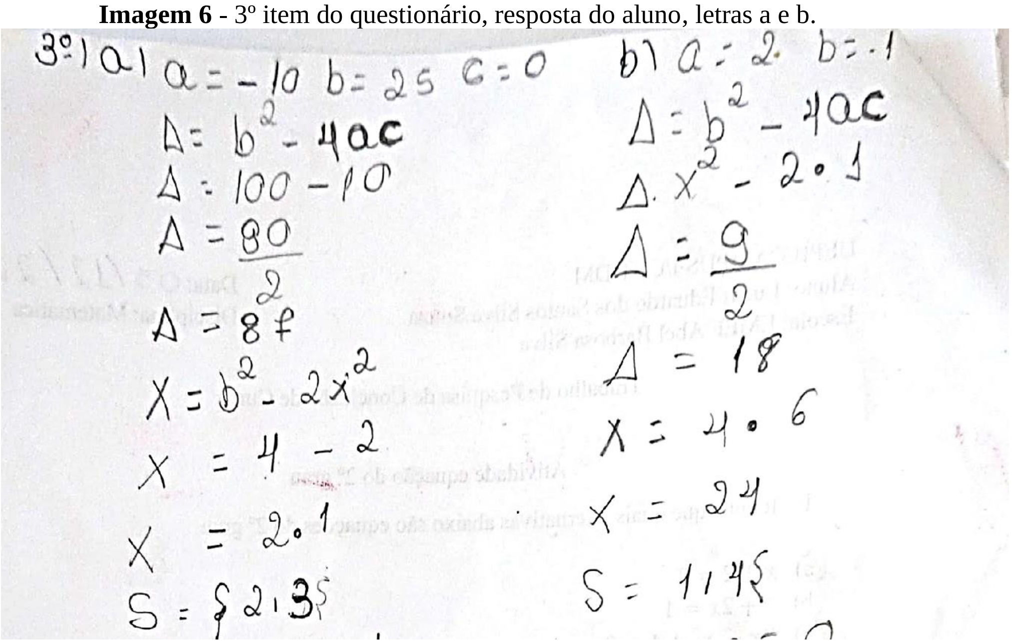

2- Identifique os coeficientes das equações do 2º grau abaixo

a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$ a=2, b=4. c=-6
b) $x^2 - 5x + 2 = 0$ a=1, b=-5. c=2
c) $0{,}5x^2 + x - 1 = 0$ a=0,5, b=0 · c=-1
d) $x^2 = 0$ a=1, b=0, c=0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

No terceiro item do questionário, é solicitado aos alunos encontrarem as raízes de cada equação do 2º. Veja na imagem abaixo algumas soluções encontradas desses itens:

Imagem 6 - 3º item do questionário, resposta do aluno, letras a e b.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Perceba que ele até sabe a formula do descriminante Δ (delta), porém podemos destacar algumas dificuldades:

I) Não identifica corretamente os coeficientes das equações, o que nos dá a entender que esse aluno apresenta falta de conhecimentos prévios e não compromisso com sua aprendizagem.

II) Não consegue aplicar as formulas da equação do 2º grau. Ou seja, ele tem deficiência em aplicar o conhecimento já adquirido.

III) Confunde o cálculo do delta com cálculo das raízes da equação.

IV) Dificuldade em algumas das operações básicas, a exemplo da multiplicação e divisão.

V) Não verificou se realmente aquela era a solução para a questão. Esquecendo que as soluções as transformam em uma sentença verdadeira.

VI) Não deu a devida atenção ao símbolo de igualdade, que representa um equilíbrio que deve ser mantido, no caso das equações.

VII) Não respeita a regra do ponto anterior, causando dessa forma atropelos nos cálculos e assim obtendo os resultados errados.

Podemos ver aqui que se confirmam as falas das autoras Kuroiwa (2016) e Martins (2014), quando elas dizem que o que influenciam os erros dos alunos é a falta de conhecimentos prévios e compromisso com a aprendizagem, já Martins diz que também o que leva os discentes a cometerem os erros é esquecer que os valores das soluções tornam a equação verdadeira, que o símbolo da igualdade, para as equações, demonstra um equilíbrio e também quando ela fala sobre ponto anterior.

Uma proposta de resolução correta para esses itens poderia ser:

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Os coeficientes: $a = 1$; $b = -10$; $c = 25$

Assim temos: $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$

Como $\Delta = 0$, tem-se uma única raiz para essa equação, $x_1 = x_2$. Assim sendo, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Logo, a equação possui raiz $x_1 = x_2 = 5$, dai $S = \{5\}$

Verificando, se 5 é solução para a equação.

Para $x = 5$, tem-se que:

$$5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = -25 + 25 = 0$$

Portanto, 5 realmente é solução para a equação em questão.

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Os coeficientes: $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$

Assim temos: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Como $\Delta = 0$, segue que essa equação possui apenas uma raiz real, ou seja, $x_1 = x_2$.

Com isso,

$$x = \frac{-(-2) \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo, $x_1 = x_2 = 1$, então $S = \{1\}$.

Vamos verificar se 1 é solução para a equação.

Para $x = 1$, temos:

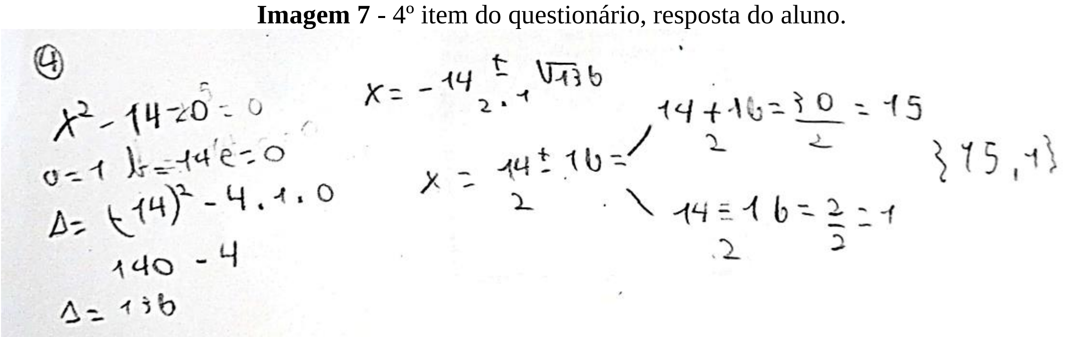
$$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Foi verificado de 1 é solução a equação.

O quarto item do questionário, é uma questão aberta, onde o aluno é levado a “traduzir” em termos algébricos a equação do 2º que está sendo descrita e assim encontra o valor para a incógnita em questão.

Vamos observar, na imagem abaixo, a solução que este aluno atribuiu para esse item e como ele a desenvolveu:

Imagem 7 - 4º item do questionário, resposta do aluno.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Para esse item podemos destacar algumas dificuldades e erros que o aluno cometeu ao resolver essa questão. Vejamos:

I) Não soube interpretar algebricamente correto a questão.
II) Não identifica corretamente os coeficientes das equações.
III) Dificuldade em alguma das operações básicas, a multiplicação.
IV) Dificuldade em potenciação.
V) Regras dos sinais.

Diante dessas dificuldades encontradas por esse aluno, podemos perceber a falta de conhecimentos prévios para desenvolvimento das soluções para as equações do 2º grau. Com isso se evidencia as palavras da autora Kuroiwa (2016), quando ela fala sobre ausência de conhecimentos prévios.

Vamos apresentar uma possível solução para esse item do questionário. Dessa forma, vejamos, a questão diz: “Se você multiplicar um número real x por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número x. Qual é esse número?”
Vamos interpretar:

Quadro 4 - Interpretação algébrica da questão

“Se você multiplicar um número real x por ele mesmo”,	$x \cdot x = x^2$
“e do resultado subtrair 14”,	-14
“você vai obter o quíntuplo do número x”,	$5x$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

A partir desse quadro podemos obter, a seguinte equação:

$$x^2 - 14 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \qquad (1)$$

Por fim, temos a última parte da questão, sendo ela “Qual é esse número?”. Assim sendo, faremos a solução de (1).

Solução:

Note que, $x^2 - 5x - 14 = 0$, onde os coeficientes: $a = 1;\ \ b = -5;\ c = -14$

Com isso, $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$

Como $\Delta > 0$, temos duas raízes reais, x_1 e x_2.

Daí, vem que,

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

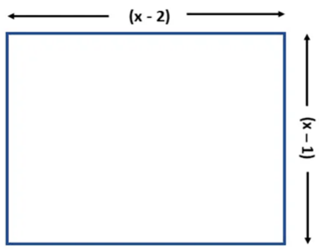
I) $x_1 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

II) $x_2 = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Portanto, as possíveis soluções para a incógnita x seriam 7 ou -2.

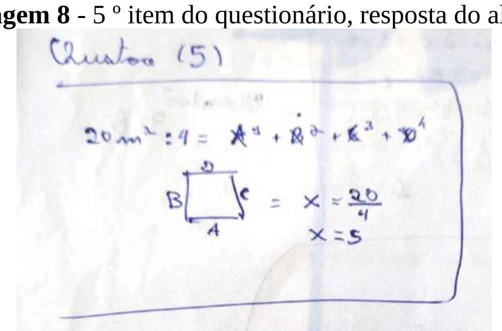
Por fim vamos discutir a última questão do questionário. Esse item, trazia um breve contexto envolvendo os conceitos de área e era pedido para determinar o valor da incógnita x . Veja a questão abaixo.

5- Em uma área retangular será construído o novo Posto de Saúde da cidade. Suponha que a área seja igual a $20m^2$, determine o valor do x.



Agora vejamos, uma resolução de um dos alunos participou da pesquisa.

Imagem 8 - 5 º item do questionário, resposta do aluno.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Desta resolução podemos verificar algumas dificuldades e erros que o aluno cometeu na tentativa de resolver o item em questão.

I) Aparentemente o discente não possui conhecimento prévio sobre cálculo de área, ou não soube aplicar o conhecimento já adquirido. O que nos leva a refletir que esse aluno não deu a devida atenção a sua aprendizagem.

II) Confunde cálculo de área com perímetro. Desconsidera os valores para cada lado já atribuído. O que também mostra que esse discente não leu corretamente a questão, ou seja, não deu atenção para o que está sendo pedido na questão.

III) Não conseguiu desenvolver corretamente a questão utilizando os conhecimentos prévios já adquiridos.

IV) Não conseguiu desenvolver o polinômio através do conhecimento de área, ou seja, não conseguiu enxergar o polinômio na sua forma fatorada.

Assim entendemos, que é possível que esse aluno não possua os conhecimentos prévios necessários para esse assunto, além de que, esse aluno possa não ter dado a devida atenção aos seus estudos, confirmando dessa forma a fala da autora Kuroiwa (2016) na Lista de dificuldades I o que da origem a seus erros ao desenvolver suas respostas. Aqui também podemos ver a confirmação da fala da autora Martins (2014) quando fala das dificuldades em reconhecer os polinômios em sua forma fatorada como sendo expressões equivalentes.

Uma proposta de solução para essa questão seria:

Solução: Sabemos que para calcular a área de um retângulo, multiplicamos sua base (b) pela altura (h), dessa forma temos que:

$$b = (x-2) \text{ e } h = (x-1)$$

Daí, vem que:

$$b \cdot h = (x-2)(x-1) = 20$$

$x^2 - 3x + 2 = 20 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Assim, temos:

$$x = \frac{-(-3) \pm 9}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

I) $x_1 = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

II) $x_2 = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

Portanto, $S = \{6\}$.

Mediante as discussões realizadas em nossa pesquisa, pode-se confirmar o que autora Kuroiwa (2016) (Lista de dificuldades I) relata acerca de que as dificuldades existem e são internas ao aluno, principalmente a ausência de conhecimentos prévios necessários para aplicar no conteúdo das equações do 2º grau e que dessa forma contribui diretamente em seus erros nas tentativas de resoluções das equações do 2° grau.

Por fim, verificamos que foram confirmadas as falas da autora Martins (2014) listadas na Lista de dificuldades e exemplos II que trouxemos nessa pesquisa, a exemplo, das dificuldades de os alunos não compreenderem os valores presentes nas equações, verificar se realmente a solução aplicada é adequada para aquela equação e reconhecer os polinômios em sua forma fatorada, o que acaba evidenciando os erros em suas resoluções para as equações do 2º grau.

No próximo capítulo iremos trazer as considerações finais acerca do que apresentamos em nossa pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante esta pesquisa fizemos algumas discussões acerca dos erros cometidos pelos alunos ao responderem um questionário presencial sobre o conteúdo de equações do 2° grau o que evidenciou as dificuldades que esses alunos possuem, concordando com afirmações de autores que tiveram o interesse em estudas sobre esse assunto.

Pudemos perceber que os alunos da turma do 9° Ano, da referida escola já mencionada nos capítulos anteriores desta pesquisa, apresentaram dificuldades ao resolverem as equações do 2° grau, dentre elas as principais dificuldades que encontramos foi: a falta de conhecimentos prévios, compromisso e reponsabilidade dos alunos com sua aprendizagem, a compreensão dos valores presentes nas equações e reconhecer os polinômios em sua forma fatorada. Dessa forma, foram evidenciados os erros que eles cometem ao tentarem solucionar essas equações e também que existem influências internas aos alunos que contribuem para sobressair os contratempos demonstrados por eles, a exemplo do cuidado do próprio discente com sua aprendizagem. Com isso, podemos ver que assim como as autoras Kuroiwa e Martins citaram aconteceu também na pratica de nossa pesquisa.

Compreendemos que há várias metodologias para o ensino e aprendizagem dos alunos, e das mais diversas possíveis, que contribuem para o estudo desse assunto, dentre eles podemos destacar o ensino significativo que é feito a partir dos erros cometidos, o qual defendemos durante a construção deste trabalho, além disso fazendo a conexão daquilo que o aluno já possui de conhecimento matemático. Dentre as contribuições que esse método trás é a aprendizagem a partir dos erros, o que ajuda o educando a enxergar onde o erro foi cometido e corrigir, o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de trazer um feedback tanto para o aluno quanto ao professor no desenvolvimento, no que se refere à aprendizagem e a maneira como o docente vai tratar seus apontamentos para as próximas aulas e a forma com que ele abordará o conteúdo.

Mediante essas observações feitas inicialmente, podemos considerar que os resultados obtidos durante a pesquisa foram satisfatórios e assim podemos concluir que esse trabalho cumpriu com seu objetivo principal de verificar os erros cometidos pelos alunos ao desenvolverem as soluções para as equações do 2° grau, mostrando que o estudo de erros pode ser de grande valia para o ensaio e aprendizagem de Matemática.

Portanto, aos nossos queridos leitores queremos deixar algumas dicas, as quais podem ajudá-los em sua prática docente e futuras pesquisas. Considerando as dificuldades dos estudantes, uma abordagem que combina esse método é atividades práticas, que podem ser úteis. Como por exemplo, sessões práticas para resolver equações do 2º grau, acompanhadas de revisões regulares e discussões em grupo para analisar os erros e descobrir soluções juntos.

Além disso, a criação de atividades interdisciplinares, podem ser valiosas, a exemplo de desafios matemáticos envolvendo elementos de história, filosofia ou ciências, pois a Educação Matemática usa contribuições de várias áreas. Assim, uma sugestão para os futuros pesquisadores é desenvolver uma pesquisa de campo envolvendo atividades práticas verificando os erros dos alunos e os ajudando a diminuir os erros cometidos por eles ao desenvolver soluções para as equações do 2º grau. Outra pesquisa que poderia ser feita é sobre a atuação ou papel da família na vida escolar dos discentes e também acerca da formação do professor.

REFERÊNCIAS

AMARO, Ana; PÓVOA, Andreia; MACEDO, Lúcia. **A arte de fazer questionários**. 2004. 11 f. Monografia (Especialização) - Curso de Química, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2005. Disponível em: https://www.mobilizadores.org.br/wp-content/uploads/2015/03/A-arte-de-fazer-question%C3%A1rios.pdf Acesso em: Jan. 2023

BAUMGART, J. K. História da álgebra. In: **Tópicos de história da matemática:** para uso em sala de aula. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo. Atual, 1992.

BRASIL, MEC, **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**, versão aprovada pelo CNE, novembro de 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: março de 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Matemática. Secretaria da Educação fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:** escolhendo entre cinco abordagens. 3. Ed. Porto Alegre: Penso, 2014

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. Ed. [s. l.]: Autentica, 2021

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 9º ano:** ensino fundamental, anos Finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DALFOVO, M. S.; LANA, R. A.; SILVEIRA, A. Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, [s. l.], v. 2, n. 3, p. 1–13, 2008. Disponível em: https://portaldeperiodicos.animaeducacao.com.br/index.php/rica/article/view/17591. Acesso em: 17 jan. 2023.

EVES, H. **Introdução à História da matemática**; Tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FRAGOSO, Wagner de Cunha. Uma **Abordagem Histórica da Equação do 2º Grau**. In. Revista do professor de matemática, no 2000, p. 20-25

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. Saberes necessários à prática educativa. 35 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3a ed. Ver. E ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIANCATERINO, Roberto. **A matemática sem rituais**. RJ: Wak, 2009.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2017

KUROIWA, Elisabete Tiyoko Nishimura. **Uma abordagem peculiar da equação do segundo grau no ensino fundamental e médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Presidente Prudente, SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2016.

MAIA, Naurelita. **O que é metodologia?** Disponível em: http://educadoresdesucesso.blogspot.com.br/2011/02/o-que-e-metodologia.html Acesso em: Jan. 2023.

MARTINS, Helena Sofia Sousa Garcez. **Dificuldades na resolução de equações de 2.º grau dos alunos do 8.º ano.** 2014. Relatório da prática de ensino supervisionada (mestrado em ensino da matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

MOL, R. S. **Introdução à História da matemática**/ Rogério S. Mol. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

MOREIRA, M.; MASINI, E. **Aprendizagem significativa, a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2004.

NOBRE, Sergio. **História da Resolução da equação de 2º grau**: Uma Abordagem Pedagógica. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, v.2, p.1-13, 2010. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf. Acesso em: fevereiro, 2023.

PILETTI, Claudio. **Didática Geral**. 23 ed. São Paulo: Ática, 1999

ROSAMUND, Sutherland. **Ensino eficaz de Matemática**. São Paulo: Artmed, 2009.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1997.

APÊNDICE A

UEPB/CAMPUS I/CCT/DM — Data: 05/12/2022
Aluno: Lucas Eduardo dos Santos Silva Souza — Disciplina: Matemática
Escola: EMEF Abel Barbosa Silva

Trabalho de Pesquisa de Conclusão de Curso

Atividade equação do 2º grau

1. Identifique quais alternativas abaixo são equações do 2º grau

a) $x + 2 = 0$

b) $y + 2x = 1$

c) $2x + 2x^2 + 1 = 0$

d) $x^{-2} + 3x + 2 = 0$

2. Identifique os coeficientes das equações do 2º grau abaixo

a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$

b) $x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $0{,}5x^2 + x - 1 = 0$

d) $x^2 = 0$

3. Encontre as raízes para as equações do 2º grau abaixo

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $5x^2 - x = 0$

d) $7x^2 + 3x + 4 = 0$

4. Se você multiplicar um número real x por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número x. Qual é esse número?

5. Em uma área retangular será construído o novo Posto de Saúde da cidade. Suponha que a área seja igual a $20m^2$, determine o valor do x.