



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JULIANA SANTOS DE QUEIROZ

UM ESTUDO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS A PARTIR DA  
HIPÉRBOLE COMO CURVA GERATRIZ

MONTEIRO  
2023

JULIANA SANTOS DE QUEIROZ

UM ESTUDO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS A PARTIR DA  
HIPÉRBOLE COMO CURVA GERATRIZ

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Natan de Assis Lima

MONTEIRO  
2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

Q3e Queiroz, Juliana Santos de.

Um estudo das funções hiperbólicas a partir da hipérbole como curva geratriz [manuscrito] / Juliana Santos de Queiroz. - 2023.

44 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Natan de Assis Lima, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Funções hiperbólicas. 2. Hipérbole. 3. Trigonometria hiperbólica. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/97

Biblioteca  
José  
Rafael de  
Menezes

JULIANA SANTOS DE QUEIROZ

UM ESTUDO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS A PARTIR DA HIPÉRBOLE COMO  
CURVA GERATRIZ

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Aprovada em: 22/12/2023.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Natan de Assis Lima  
Orientador



---

Prof. Dr. Cláudio Odair Pereira da Silva  
Examinador interno (CCHE/UEPB)



---

Prof. Me. Robson Batista de Sousa  
Examinador interno (CCHE/UEPB)

*Este trabalho é dedicado a minha família que sempre foram meu suporte em todos os momentos desta caminhada.*

## AGRADECIMENTOS

Grata a Deus por ter guiado todos meus caminhos até aqui e por tanto ter me ajudado a superar os desafios encontrados ao longo de toda minha jornada.

A minha família, meus pais Francisco das Chagas e Maria da Guia por tudo que fizeram e fazem por mim. E, aos meus irmãos Mariana e Vinicius por todo apoio.

A Mateus por todas as vezes que me incentivou e me fez acreditar que conseguiria.

Ao meu orientador Dr. Natan de Assis por todo auxílio para construção deste trabalho e pelas contribuições durante todo o percurso de minha formação acadêmica.

Aos professores, Dr. Cláudio Odair Pereira da Silva e Me. Robson Batista de Sousa, por aceitarem fazer parte da banca avaliadora e pelas contribuições realizadas.

A todos desta Universidade e o corpo docente pelos momentos de formação.

Aos amigos que aquifiz e que pude compartilhar de momentos de estudos e descontração durante esses anos de curso.

*“E esta é a confiança que temos nele, que, se pedirmos alguma coisa segundo a sua vontade, ele nos ouve.”  
(Bíblia Sagrada, João 5:14)*

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a construção das Funções Hiperbólicas a partir da Hipérbole como curva geratriz. Aqui apresentaremos as funções hiperbólicas, apresentando as suas definições, gráficos, derivadas e suas principais propriedades. Por fim, apresentamos algumas comparações entre a Trigonometria circular e a Trigonometria Hiperbólica.

Palavras-chave: Funções Hiperbólicas; Hipérbole; Trigonometria Hiperbólica.

## ABSTRACT

This work aims to present the construction of Hyperbolic Functions based on the Hyperbola as a generating curve. Here we will present the hyperbolic functions, presenting their definitions, graphs, derivatives and their main properties. Finally, we present some comparisons between Circular Trigonometry and Hyperbolic Trigonometry.

Key-words: Hyperbolic Functions; Hyperbola; Hyperbolic Trigonometry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Hipérbole .....  | 13 |
| Figura 2 – Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ .....    | 17 |
| Figura 3 – Retângulo de coordenadas.....                              | 18 |
| Figura 4 – Simetria em relação a origem .....                         | 19 |
| Figura 5 – Hipérbole rotacionada .....                                | 20 |
| Figura 6 – Setor hiperbólico .....                                    | 22 |
| Figura 7 – Ângulo hiperbólico .....                                   | 23 |
| Figura 8 – Setor hiperbólico .....                                    | 23 |
| Figura 9 – Preservação de Ângulo Hiperbólico .....                    | 24 |
| Figura 10 – Definindo as funções hiperbólicas .....                   | 25 |
| Figura 11 – Coordenadas de um ponto no sistema $XOY$ e no $xOy$ ..... | 28 |
| Figura 12 – Representação gráfica da hipérbole unitária.....          | 30 |
| Figura 13 – Gráfico do seno hiperbólico.....                          | 35 |
| Figura 14 – Gráfico do cosseno hiperbólico .....                      | 35 |
| Figura 15 – Gráfico da tangente hiperbólica .....                     | 36 |
| Figura 16 – Gráfico da cotangente hiperbólica .....                   | 36 |
| Figura 17 – Gráfico da secante hiperbólica.....                       | 37 |
| Figura 18 – Gráfico da cossecante hiperbólica.....                    | 38 |

## LISTA DE TABELAS

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Relações Fundamentais..... | 41 |
| Tabela 2 – Funções.....               | 42 |
| Tabela 3 – Derivadas.....             | 42 |

## SUMÁRIO

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | INTRODUÇÃO.....  | 12 |
| 2     | CURVA GERATRIZ.....                                      | 13 |
| 2.1   | A hipérbole. . . . .                                     | 13 |
| 2.1.1 | <i>Elementos da Hipérbole.</i> . . . . .                 | 13 |
| 2.1.2 | <i>Ramos da hipérbole.</i> . . . . .                     | 14 |
| 2.1.3 | <i>Equação reduzida da hipérbole.</i> . . . . .          | 15 |
| 2.1.4 | <i>Hipérbole <math>xy=k</math>.</i> . . . . .            | 18 |
| 2.1.5 | <i>Hipérbole Rotacionada.</i> . . . . .                  | 19 |
| 2.2   | Ângulo Hiperbólico. . . . .                              | 21 |
| 3     | FUNÇÕES HIPERBÓLICAS.....                                | 25 |
|       | <i>Relações entre as Funções Hiperbólicas.</i> . . . . . | 26 |
|       | <i>Funções hiperbólicas e exponenciais.</i> . . . . .    | 27 |
|       | Gráficos das funções hiperbólicas. . . . .               | 34 |
| 3.1.1 | <i>Gráfico do seno hiperbólico:</i> . . . . .            | 34 |
|       | <i>Gráfico do cosseno hiperbólico:</i> . . . . .         | 35 |
|       | <i>Gráfico da tangente hiperbólica:</i> . . . . .        | 36 |
|       | <i>Gráfico da cotangente hiperbólica:</i> . . . . .      | 36 |
|       | <i>Gráfico da secante hiperbólica:</i> . . . . .         | 37 |
|       | <i>Gráfico da cossecante hiperbólica:</i> . . . . .      | 38 |
|       | Derivadas das funções hiperbólicas. . . . .              | 38 |
|       | Comparando fórmulas trigonométricas. . . . .             | 41 |
| 4     | CONCLUSÃO.....   | 43 |
|       | REFERÊNCIAS.....   | 44 |

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica sobre as funções hiperbólicas, onde nosso principal objetivo consiste na tentativa de ampliar o entendimento de como são definidas cada uma das seis principais funções hiperbólicas, em uma perspectiva que proporcione uma certa originalidade a partir de uma abordagem feita utilizando a curva geratriz hipérbole para dar a definição de cada uma dessas funções.

O matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um dos primeiros a realizar estudos sobre esse tipo de funções.

Geralmente, este conteúdo é estudado durante o curso de Cálculo Diferencial e Integral, e normalmente são apresentadas sem nenhuma conexão com a hipérbole. A apresentação dessas definições acontecem expondo suas definições a partir da combinação da soma e subtração de uma função exponencial par e outra ímpar.

Posto isso, para atender o objetivo de nosso trabalho e explicitar a relevância que este conteúdo possui, iremos realizar um estudo sobre as funções hiperbólicas a partir de sua curva geratriz, isto é, relacionando-as com a hipérbole, tecendo a construção das definições, como estas estão relacionadas e dão origem a algumas proposições, iremos trazer também seus gráficos e o cálculo de suas derivadas.

Iniciamos nosso estudo apresentado a definição da hipérbole em um plano qualquer, apresentando os principais elementos que a compõem. Apresentando as equações da hipérbole, as equações de transformação das coordenadas a um novo sistema de coordenadas decorrente de uma rotação de eixos em torno da origem e as equações reduzidas.

Em seguida, iremos apresentar as funções hiperbólicas, que surgem da comparação da área de uma região limitada por uma hipérbole dada pela equação  $X^2 - Y^2 = 1$ , dando assim origem as definições, gráficos, domínio, imagem, e propriedades de cada uma delas, ver Freitas *et al.*(2015).

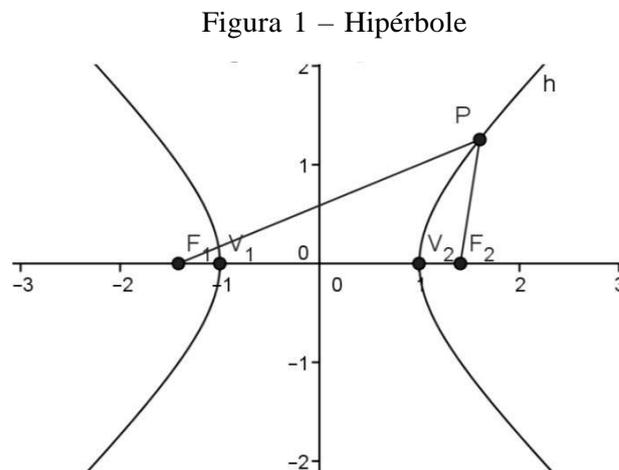
Porfim, traremos o cálculo de suas derivadas, e algumas tabelas que fazem uma breve comparação das fórmulas da Trigonometria Circular e da Trigonometria Hiperbólica.

## 2 CURVA GERATRIZ

### A hipérbole

Definição 2.1. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos de um plano qualquer, situados a uma distância  $2c$  entre si, temos que  $c$  equivale a  $\frac{1}{2}d(F_1, F_2)$ . E, consideremos um número  $a$ , tal que  $a$  satisfaça a relação,  $0 < a < c$ . Chamamos de hipérbole a curva do plano formada pelos pontos  $P$  que satisfazem a relação:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (2.1)$$



Fonte: Freitas(2015, p.12).

Abaixo iremos definir os elementos que estão presentes na Figura 1.

#### *Elementos da Hipérbole*

- Focos: são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ ;
- Eixo focal: é a reta que contém os focos;
- Distância focal: é a distância de um foco a outro, equivalente a  $2c$ ;
- Eixo normal: é a reta perpendicular ao eixo focal;
- Centro da hipérbole: é o ponto médio do segmento  $\overline{F_1F_2}$ ;
- Vértices: são os pontos  $V_1$  e  $V_2$  que intersectam o eixo focal.

A hipérbole da Figura 1 mostra um caso especial da hipérbole em que o eixo focal e o eixo normal coincidem respectivamente com os eixos  $Ox$  e  $Oy$  do sistema cartesiano, e centro da hipérbole com a origem do sistema.

Observação 2.1. Veja que os pontos  $V_1$  e  $V_2$  fazem parte da hipérbole, pois satisfazem a definição 2.1. Para  $V_1$ , temos:

$$d(V_1, F_1) = c - a$$

$$d(V_1, F_2) = a + c$$

dessa forma,

$$|d(V_1, F_1) - d(V_1, F_2)| = |(c - a) - (a + c)| = |c - a - a - c| = |-2a| = 2a.$$

E, para  $V_2$ :

$$d(V_2, F_1) = a + c$$

$$d(V_2, F_2) = c - a$$

logo,

$$|d(V_2, F_1) - d(V_2, F_2)| = |(a + c) - (c - a)| = |a + c - c + a| = |2a| = 2a.$$

Nesta próxima seção, esclareceremos o motivo da hipérbole da Figura 1 possuir dois conjuntos disjuntos de ramos.

### *Ramos da hipérbole*

Temos que a Equação (2.1) equivale ainda a:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a.$$

Quando consideramos

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

temos que

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) + 2a. \quad (2.2)$$

Desta forma, temos que a distância de  $P$  ao foco  $F_1$  é maior que a distância de  $P$  ao foco  $F_2$ . Ou seja,

$$d(P, F_1) > d(P, F_2).$$

Agora, se considerarmos

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$$

temos que

$$d(P, F_2) = d(P, F_1) + 2a. \quad (2.3)$$

Para este último resultado, temos o contrário, que a distância de  $P$  a  $F_1$  é menor que a distância de  $P$  a  $F_2$ , ou seja

$$d(P, F_1) < d(P, F_2).$$

Assim, podemos concluir que um único ponto  $P$  não pode satisfazer simultaneamente as equações (2.2) e (2.3). Por este motivo a hipérbole é formada por dois conjuntos disjuntos de pontos, que são considerados ramos da hipérbole.

Os pontos sobre o ramo da direita satisfazem a equação (2.2), e os pontos sobre o ramo da esquerda satisfazem a equação (2.3).

### *Equação reduzida da hipérbole*

Iremos determinar as equações da hipérbole em relação ao sistema de eixos  $xOy$ , para quatro casos distintos.

**Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $Ox$ .**

Consideremos o caso da hipérbole da Figura 1, cujo eixo focal e normal coincidem respectivamente com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , e centro da hipérbole com a origem do sistema. Dessa forma os focos terão coordenadas  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ . Tome  $P$  um ponto de coordenadas  $(x, y)$  sobre a hipérbole. Desenvolvendo a equação (2.1) em termos de coordenadas, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

daí, somando  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  aos dois lados da igualdade, ficamos com

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado e calculando, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

implica em

$$\pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2$$

que é o mesmo que,

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Agora, elevando novamente ambos os membros ao quadrado, encontramos

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

o que implica

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4.$$

Assim,

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Colocando os fatores em comum em evidência, tem-se

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Sendoc >0, definimos  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ , logo

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividindo esta última equação por  $a^2b^2$ , obtemos

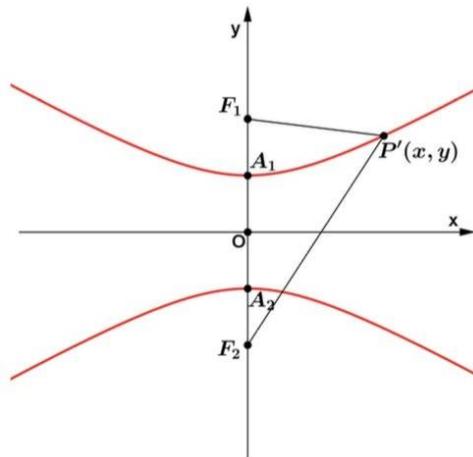
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é denominada equação reduzida da hipérbole, quando o eixo focal coincide com o eixo  $Ox$ .

**Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $Oy$ .**

No caso em que a reta focal coincide com o eixo  $Oy$  e a hipérbole tem centro na origem dos eixos coordenados, como ilustrado na Figura 2, a equação reduzida fica na seguinte forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

Figura 2 – Hipérbole  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 

Fonte: Santos (2015, p.21).

O procedimento feito para encontrar a forma da equação (2.5) acontece de modo análogo ao feito anteriormente.

Hipérbole com centro diferente da origem e eixo focal coincide com o eixo  $Ox$ .

Para o caso em que o eixo focal coincide com o eixo  $Ox$ , mas o centro da hipérbole é um ponto qualquer  $C = (x_0, y_0)$  diferente da origem do plano cartesiano, temos que a equação reduzida para este caso é da forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.6)$$

Para a obtenção da equação acima, os cálculos podem ser encontrados no livro??) e deixamos para o leitor conferir.

Hipérbole com centro diferente da origem e eixo focal coincide com o eixo  $Oy$ .

Para o caso em que o eixo focal coincide com o eixo  $Oy$ , mas o centro da hipérbole é um ponto qualquer  $C = (x_0, y_0)$  diferente da origem do plano cartesiano, temos que a equação reduzida para este caso é da forma:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.7)$$

Novamente, para a obtenção da equação acima, os cálculos podem ser encontrados no livro??) e deixamos para o leitor conferir.

### Hipérbole $xy=k$

Nesta seção, iremos estudar a hipérbole de equação  $xy = k$ , com  $k > 0$ , onde  $x$  e  $y$  não podem ser nulos. Quanto maior for o valor de  $x$ , menor será o valor de  $y$ , e quanto maior o valor de  $y$  menor será o de  $x$ . Ou seja, isso significa que a hipérbole se aproximará do eixo  $Ox$  ou  $Oy$  indefinidamente sem tocá-los. Dessa forma, os eixos coordenados servem de assíntotas para a hipérbole.

Observação 2.2. As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproximará indefinidamente dos eixos coordenados, sem encostar. A tendência da hipérbole é tangenciar as suas assíntotas no infinito.

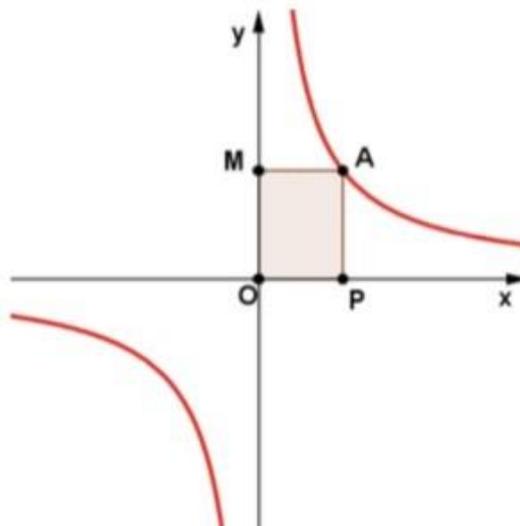
- Para  $x$  e  $y$  positivos tem-se um dos ramos da hipérbole no primeiro quadrante;
- Para  $x$  e  $y$  negativos tem-se um dos ramos no terceiro quadrante.

Apresentaremos a seguir algumas proposições relacionadas a um tipo de retângulo especial, onde este possui vértices na origem do sistema de coordenadas, um ponto no eixo  $Ox$ , outro no eixo  $Oy$  e um último ponto na hipérbole. É denominado como retângulo de coordenadas do ponto  $A$ , com  $A$  sendo ponto da hipérbole.

A proposição a seguir leva em conta a área denotada por esse retângulo.

Proposição 2.1. A área do retângulo é igual a  $k$  e não depende do ponto  $A$  da hipérbole.

Figura 3 – Retângulo de coordenadas



Fonte: Santos (2015, p.22).

*Demonstração.* Temos que as coordenadas do ponto  $A$  (qualquer que seja ele) são dados por  $(x, y) = (\overline{OP}, \overline{OM})$ . Daí, a área do retângulo  $OPAM$  é

$$A_{OPAM} = \overline{OP} \cdot \overline{OM} = x \cdot y = k,$$

para qualquer ponto da hipérbole. ◆

A proposição abaixo, faz referência a simetria dos ramos da hipérbole e ao centro de simetria existente.

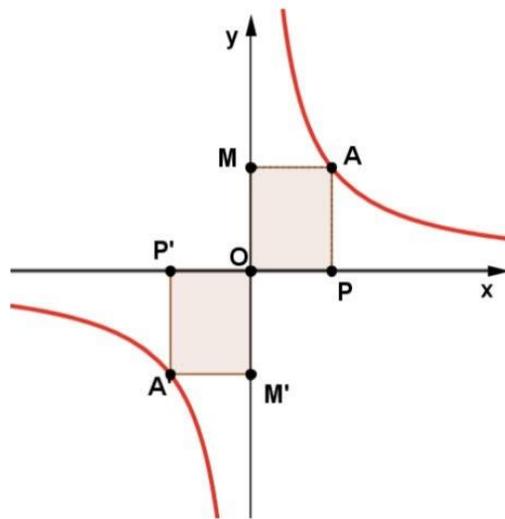
*Proposição 2.2. A hipérbole possui os ramos simétricos, portanto há a existência de um centro de simetria em relação a origem do sistema de coordenadas.*

*Demonstração.* Seja o retângulo de coordenadas de ponto  $A$ , situado no primeiro quadrante da Figura 3. Tome  $P'$  simétrico a  $P$ , em relação ao eixo  $Oy$ ,  $M'$  simétrico a  $M$  em relação ao eixo  $Ox$ . Sendo  $A'$  o ponto de coordenadas  $(\overline{OP'}, \overline{OM'})$ , temos que  $A'$  pertence a esse outro ramo da hipérbole pois os retângulos  $OPAM$  e  $OP'A'M'$  possuem a mesma área, onde

$$x' \cdot y' = \overline{OP'} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OM} = k,$$

com  $OP = OP'$  e  $OM = OM'$ .

Figura 4 – Simetria em relação a origem



Fonte: Santos (2015, p.24).

O ponto  $A'$  é simétrico ao ponto  $A$  em relação ao sistema de coordenadas, pois as coordenadas  $|OM|$  e  $|OM'|$  são iguais. ◆

### Hipérbole Rotacionada

Considerando os dois pares usuais de eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$ , e dois novos pares de eixos  $OX$  e  $OY$ , estes obtidos após uma rotação de um ângulo  $\beta$  no sentido anti-horário em torno da origem, como mostra a figura abaixo, temos a seguinte proposição



A equação da hipérbole  $xy = k$  no sistema de coordenadas  $xOy$ , tem como pontos de formação o par ordenado  $(x, y)$ . Ao multiplicamos a coordenada  $x$  desse ponto por um  $m > 0$ , obtemos  $(mx, y)$ . Com essa multiplicação a equação da hipérbole assumirá a forma  $xy = mk$ . Devido, a operação realizada na coordenada  $x$ , e por a coordenada  $y$  ter permanecido inalterada. Ao realizarmos novamente uma operação de multiplicação no ponto  $(mx, y)$  agora sendo a coordenada  $y$  multiplicada por  $\frac{1}{m}$ , obtemos  $(mx, \frac{y}{m})$ . Sendo  $(x, y)$  ponto da hipérbole de equação  $xy = k$ , o ponto  $(mx, \frac{y}{m})$  também pertence a mesma hipérbole e é distinto de  $(x, y)$ , quando  $m \neq 1$ .

Definição 2.2. A operação que transforma  $(x, y)$  em  $(mx, \frac{y}{m})$ , ambos pontos da mesma hipérbole  $xy = k$ , com coeficiente  $m > 0$  é denominada de rotação.

### Ângulo Hiperbólico

Antes de definirmos ângulo hiperbólico, vamos determinar a equação da hipérbole  $xy = k$ , com  $k = \frac{1}{2}$  em um novo par de eixos, após uma rotação de um ângulo  $\beta = \frac{\pi}{4}$  radianos em torno da origem.

Utilizando das equações de transformação (2.8) e (2.9) substituindo os valores de  $x$  e  $y$  respectivamente na equação da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$ , temos o seguinte

$$(X \cos(\beta) - Y \sin(\beta)) \cdot (X \sin(\beta) + Y \cos(\beta)) = \frac{1}{2}$$

como o ângulo de rotação é dado por  $\beta = \frac{\pi}{4}$ , temos:

$$X \cos \frac{\pi}{4} - Y \sin \frac{\pi}{4} \cdot (X \sin \frac{\pi}{4} + Y \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

daí,

$$X \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (X \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$$

colocando o fator em comum  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  em evidência, ficamos com

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y) = \frac{1}{2}$$

e, realizando algumas operações entre os produtos, obtemos

$$\frac{1}{2} (X^2 - Y^2) = \frac{1}{2}$$

ou ainda,

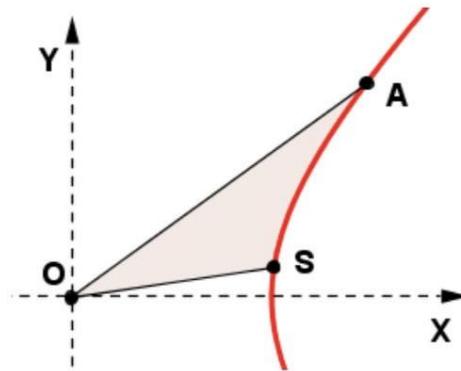
$$X^2 - Y^2 = 1. \tag{2.10}$$

A equação (2.10) é a equação correspondente da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  nos novos eixos  $OX$  e  $OY$ , após a rotação de um ângulo  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

Observação 2.3. Para mais, denominamos a equação (2.10) como sendo a equação da hipérbole unitária, pois a distância do centro aos vértices é igual a 1.

Definição 2.3. Sejam  $A$  e  $S$  dois pontos que estão sobre o mesmo ramo da hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$ . A região que fica delimitada pelos segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OS}$  e pela parte compreendida pela hipérbole entre os pontos  $A$  e  $S$  é denominado setor hiperbólico.

Figura 6 – Setor hiperbólico



Fonte: Santos (2015, p.25).

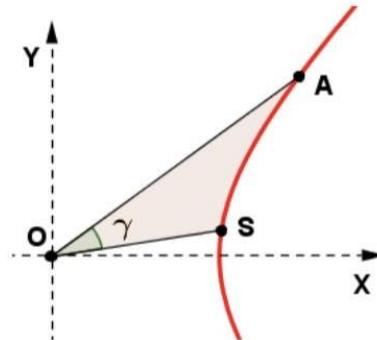
Podemos agora definir o ângulo hiperbólico compreendido por este setor.

Definição 2.4. Dados dois pontos  $A$  e  $S$  pertencentes ao mesmo ramo da hipérbole, definimos o ângulo hiperbólico  $\kappa$ , entre os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OS}$ , como sendo duas vezes a área do setor hiperbólico  $OSA$ .

Observação 2.4. O ângulo hiperbólico não representa um ângulo da mesma forma como acontece com as funções circulares, enquanto que nas funções circulares este é dado em graus ou radianos, o ângulo nas funções hiperbólicas é dado em unidade de área. E, como a curvatura da hipérbole cresce indefinidamente, temos que o ângulo hiperbólico varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Observação 2.5. As definições de ângulo da trigonometria circular e da trigonometria hiperbólica são dadas de maneira análoga, porém possuem conceitos diferentes. A medida do ângulo central do círculo trigonométrico é dado como sendo o dobro da área do setor circular por ele limitado. Para algum caso em que o ângulo possuir medida  $\kappa$  graus (ou

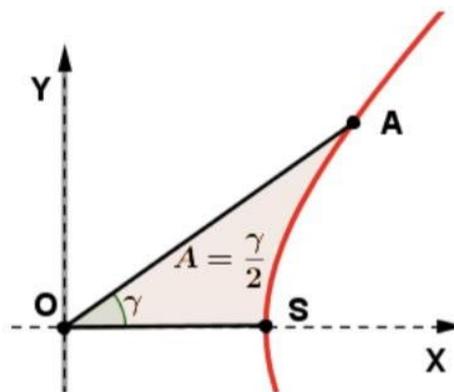
Figura 7 – Ângulo hiperbólico



Fonte: Santos (2015, p.26).

radianos), então a área do setor circular por ele representado mede  $\frac{\kappa}{2}$  unidades de área, ver Observação 1.14, em Santos *et al.* (2015). De modo análogo, acontece para os ângulos hiperbólicos que são representados com relação à área do setor hiperbólico. Dado um ponto  $A$  na hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$ , define-se o setor  $OAS$  e o ângulo  $AOS$ . Assim, o ângulo terá medida  $\kappa$  quando área do setor hiperbólico por ele determinado for de  $\frac{\kappa}{2}$  unidades de área.

Figura 8 – Setor hiperbólico

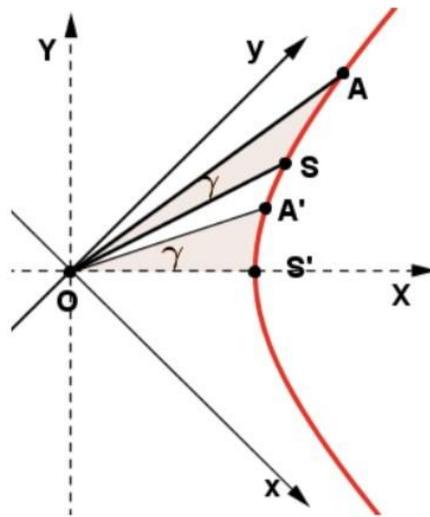


Fonte: Santos (2015, p.26).

A Proposição apresentada a seguir trata-se da possibilidade em transpor um ângulo qualquer na hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$  dentro do sistema de coordenadas  $XOY$ , onde a medida do ângulo transportado permanece a mesma do ângulo inicial.

Proposição 2.4. *Dado um ângulo hiperbólico  $\kappa$  na hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$ , observe na Figura 9 que este ângulo está determinado pelos pontos  $O, A$  e  $S$ , pontos que formam o setor hiperbólico. Existem  $A'$  e  $S'$  pontos dessa mesma hipérbole, com  $S'$  pertencente ao eixo  $OX$ , onde o ângulo determinado por  $O, A'$  e  $S'$  é igual ao ângulo  $\kappa$ .*

Figura 9 – Preservação de Ângulo Hiperbólico



Fonte: Santos (2015, p.26).

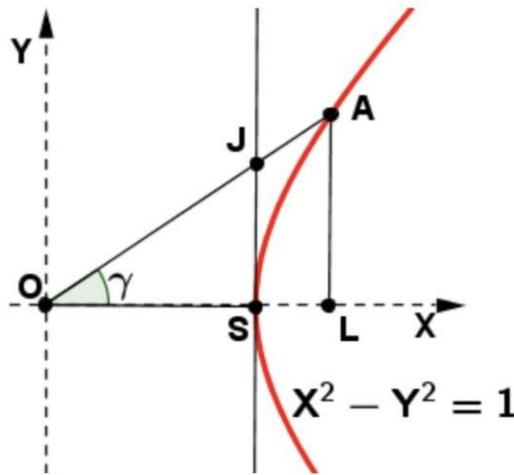
*Demonstração.* Ver Propriedade 3.3 em Rodrigues (2014).

□

### 3 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Iremos definir as seis principais funções hiperbólicas a partir da curva da hipérbole unitária  $X^2 - Y^2 = 1$ . Seja  $A$  um ponto na hipérbole, de modo que  $\angle AOS = \kappa$ , então o ângulo  $\angle AOS$  tem medida  $\kappa$ . E, seja  $SJ$  a reta tangente a hipérbole no ponto  $S$ .

Figura 10 – Definindo as funções hiperbólicas



Fonte: Santos (2015, p.30).

Definição 3.1. Definimos as funções seno e cosseno hiperbólicos, respectivamente por:

$$\sinh(\kappa) = \frac{LA}{OS} \quad \text{e} \quad \cosh(\kappa) = \frac{OL}{OS}.$$

Como  $OS = 1$ , então

$$\sinh(\kappa) = LA \tag{3.1}$$

e

$$\cosh(\kappa) = OL. \tag{3.2}$$

Com as funções seno e cosseno hiperbólicos definidas, podemos assim definir as demais funções hiperbólicas.

Definição 3.2. Definimos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, por

$$\operatorname{tgh}(\kappa) = \frac{\operatorname{senh}(\kappa)}{\operatorname{cosh}(\kappa)} = \frac{LA}{OL}$$

$$\operatorname{cotgh}(\kappa) = \frac{\operatorname{cosh}(\kappa)}{\operatorname{senh}(\kappa)} = \frac{OL}{LA}$$

$$\operatorname{sech}(\kappa) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(\kappa)} = \frac{1}{OL}$$

$$\operatorname{cosech}(\kappa) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\kappa)} = \frac{1}{LA}.$$

### *Relações entre as Funções Hiperbólicas*

Nesta seção, iremos apresentar algumas propriedades dessas funções.

**Proposição 3.1.**  $\operatorname{cosh}^2(\kappa) - \operatorname{senh}^2(\kappa) = 1$

*Demonstração.* Como mostra a Figura 10, para o ponto  $A$  de coordenadas  $X = OL$  e  $Y = LA$ , substituindo esses pontos na equação da hipérbole unitária, temos

$$(OL)^2 - (LA)^2 = 1$$

logo,

$$\operatorname{cosh}^2(\kappa) - \operatorname{senh}^2(\kappa) = 1 \quad (3.3)$$

□

**Proposição 3.2.**  $\operatorname{tgh}(\kappa) = \frac{SJ}{OS}$ , onde  $J$  é o ponto de interseção entre a reta tangente à hipérbole no ponto  $A$  e a reta determinada pelos pontos  $O$  e  $A$ .

*Demonstração.* Utilizando semelhança de triângulos, entre os triângulos  $OSJ$  e  $OLA$  da Figura 10, temos que

$$\frac{LA}{OL} = \frac{SJ}{OS}$$

como  $OS = 1$ , segue que

$$\frac{LA}{OL} = SJ$$

logo,

$$\operatorname{tgh}(\kappa) = \frac{LA}{OL} = SJ.$$

□

Proposição 3.3.1- $\operatorname{tgh}^2(\kappa) = \operatorname{sech}^2(\kappa)$

*Demonstração.* Se dividirmos a equação (3.3) por  $\cosh^2(\kappa)$ , temos

$$1 - \frac{\sinh^2(\kappa)}{\cosh^2(\kappa)} = \frac{1}{\cosh^2(\kappa)}$$

ou seja,

$$1 - \operatorname{tgh}^2(\kappa) = \operatorname{sech}^2(\kappa).$$

□

Proposição 3.4- $\operatorname{cotgh}^2(\kappa) - 1 = \operatorname{cosech}^2(\kappa)$

*Demonstração.* Se dividirmos a equação (3.3) por  $\sinh^2(\kappa)$ , temos

$$\frac{\cosh^2(\kappa)}{\sinh^2(\kappa)} - 1 = \frac{1}{\sinh^2(\kappa)}$$

ou seja,

$$\operatorname{cotgh}^2(\kappa) - 1 = \operatorname{cosech}^2(\kappa).$$

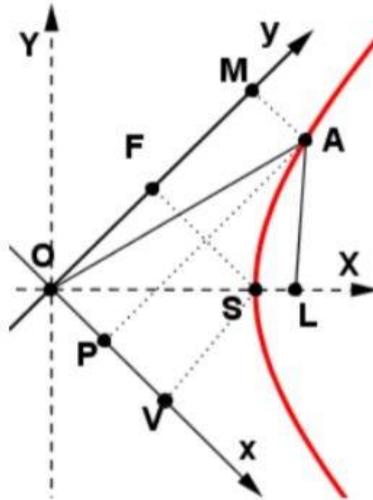
□

### *Funções hiperbólicas e exponenciais*

Seja  $A$  um ponto sobre a hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$ , tal que  $\angle OSA = \frac{\bar{\kappa}}{2}$ , determinando assim um ângulo hiperbólico de medida  $\bar{\kappa}$ .

As coordenadas do ponto  $A$  nos eixos  $XOY$  são dadas por  $(X, Y) = (OL, LA) = (\cosh(\bar{\kappa}), \sinh(\bar{\kappa}))$  e nos eixos  $xOy$  as coordenadas do ponto  $A$  são  $(x, y) = (OP, OM)$ .

Figura 11 – Coordenadas de A no sistema  $XOY$  e no  $xOy$



Fonte: Santos (2015, p.32).

Fazendo uso das Equações de transformação (2.8) (2.9) e sendo o ângulo de rotação  $\beta = 45^\circ$ , temos:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\bar{\kappa}) - \sinh(\bar{\kappa}))$$

e

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\bar{\kappa}) + \sinh(\bar{\kappa}))$$

Agora para o ponto  $S$ , temos que suas coordenadas no sistema  $XOY$  correspondem a  $(0, 1)$  e no sistema  $xOy$  a  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Podendo assim, calcular a área das regiões  $PVSA$  e  $MFSA$  que são dadas por:

$$A_{PVSA} = \frac{1}{2} \ln \frac{OF}{OP} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\bar{\kappa}) - \sinh(\bar{\kappa}))} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\bar{\kappa}) - \sinh(\bar{\kappa}))$$

$$A_{MFSa} = \frac{1}{2} \ln \frac{OM}{OF} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\bar{\kappa}) + \sinh(\bar{\kappa}))}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\bar{\kappa}) + \sinh(\bar{\kappa}))$$

Como  $A_{OSA} = A_{PVSA}$ , temos

$$\frac{\bar{\kappa}}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\bar{\kappa}) - \sinh(\bar{\kappa}))$$

ou seja,

$$\bar{\kappa} = -\ln(\cosh(\bar{\kappa}) - \sinh(\bar{\kappa}))$$

ou ainda, aplicando a função exponencial, ficamos com

$$e^{-\theta} = \cosh(\theta) - \sinh(\theta). \quad (3.4)$$

Agora, como  $A_{OSA} = A_{MFSA}$ , analogamente

$$e^{\theta} = \cosh(\theta) + \sinh(\theta). \quad (3.5)$$

Para determinarmos  $\cosh(\theta)$ , basta somarmos as equações (3.4) e (3.5), assim obtém-se

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2 \cosh(\theta) \Rightarrow \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad (3.6)$$

e, para determinarmos  $\sinh(\theta)$  basta subtrairmos (3.4) e (3.5)

$$e^{\theta} - e^{-\theta} = 2 \sinh(\theta) \Rightarrow \sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \quad (3.7)$$

Observação 3.1. Veja que

$$(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \cdot (\cosh(\theta) - \sinh(\theta)) = e^{\theta} \cdot e^{-\theta} = 1. \quad (3.8)$$

Com as funções seno e cosseno hiperbólicos definidas na forma de exponenciais, podemos definir as demais.

**Definição 3.3.** Definimos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, respectivamente por:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(\theta) &= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}; \\ \operatorname{coth}(\theta) &= \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}; \\ \operatorname{sech}(\theta) &= \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}; \\ \operatorname{csch}(\theta) &= \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}. \end{aligned}$$

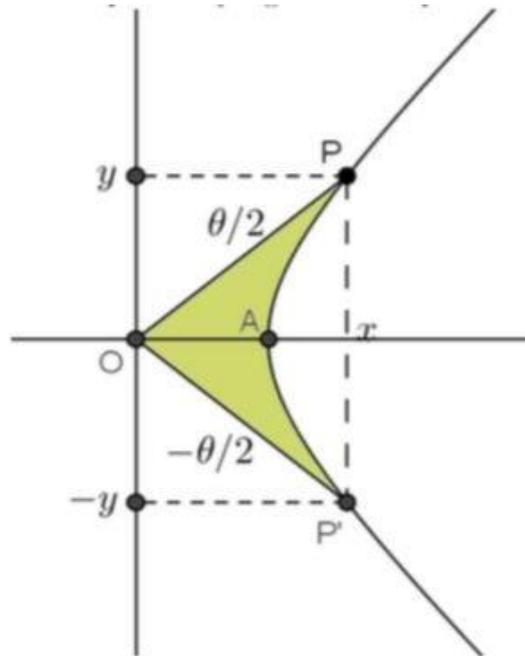
**Proposição 3.5.** Temos que a função  $\cosh$  é par, enquanto a função  $\sinh$  é ímpar.

**Demonstração.** Para isso, novamente iremos fazer uso da curva da Hipérbole unitária. Sendo  $P$  um ponto na hipérbole, onde a área do setor  $OAP$  tem medida  $\frac{\theta}{2}$ , as coordenadas do ponto  $P$  são dadas por  $X = \cosh \theta$  e  $Y = \sinh \theta$ .

Para isso, iremos considerar uma área negativa, uma área abaixo do eixo  $X$ . Como a hipérbole unitária é simétrica em relação ao eixo  $x$ , então basta traçar uma reta paralela ao eixo  $y$  passando por  $P$ . A interseção dessa reta com a curva da hipérbole é o ponto  $P'$ , simétrico de  $P$ .

Logo,  $A_{OAP'} = \frac{-\bar{\pi}}{2}$ . O ponto  $P'$  tem coordenadas  $X = \cosh(-\bar{\pi})$  e  $y = \sinh(-\bar{\pi})$ .

Figura 12 – Representação gráfica da hipérbole unitária



Fonte: Freitas (2015, p.29).

Note que as coordenadas  $x$  dos pontos  $P$  e  $P'$  são as mesmas, devido a simetria da hipérbole unitária.

Logo, o  $\cosh$  é uma função par, pois

$$\cosh(\bar{\pi}) = \cosh(-\bar{\pi}).$$

Agora, observando as coordenadas de  $P$  e  $P'$  no eixo das ordenadas, temos que  $d(0, y) = d(0, -y)$ .

Logo, o  $\sinh$  é uma função ímpar, pois

$$\sinh(\bar{\pi}) = -\sinh(-\bar{\pi}).$$

□

Observação 3.2. As funções Seno e Cosseno hiperbólicos, não são periódicos. Isto ficará mais claro quando estudarmos os gráficos dessas funções.

Na continuação, serão apresentadas algumas relações entre arcos das funções seno e cosseno hiperbólicos.

Proposição 3.6. O seno e cosseno hiperbólicos da soma de dois arcos são dados por :

$$\sinh(\hat{u}+\beta) = \sinh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cdot \cosh(\hat{u}) \quad (3.9)$$

e

$$\cosh(\hat{u}+\beta) = \cosh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\hat{u}) \cdot \sinh(\beta) \quad (3.10)$$

Demonstração. Escrevendo  $(\hat{u}+\beta) = \bar{\alpha}$ , temos

$$\sinh(\hat{u}+\beta) = \sinh(\bar{\alpha})$$

e

$$\cosh(\hat{u}+\beta) = \cosh(\bar{\alpha})$$

Utilizando das equações (3.7) e (3.6), podemos escrever

$$\sinh(\hat{u}+\beta) = \frac{e^{(\hat{u}+\beta)} - e^{-\bar{\alpha}(\hat{u}+\beta)}}{2} = \frac{e^{\hat{u}} \cdot e^{\beta} - e^{-\bar{\alpha}\hat{u}} \cdot e^{-\bar{\alpha}\beta}}{2}$$

e

$$\cosh(\hat{u}+\beta) = \frac{e^{(\hat{u}+\beta)} + e^{-\bar{\alpha}(\hat{u}+\beta)}}{2} = \frac{e^{\hat{u}} \cdot e^{\beta} + e^{-\bar{\alpha}\hat{u}} \cdot e^{-\bar{\alpha}\beta}}{2}.$$

Agora, utilizando das equações (3.4) e (3.5), e após termos realizado as devidas substituições e realizado todas as operações necessárias, tem-se

$$\sinh(\hat{u}+\beta) = \sinh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cdot \cosh(\hat{u}) \quad (3.11)$$

e

$$\cosh(\hat{u}+\beta) = \cosh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\hat{u}) \cdot \sinh(\beta)$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 3.1. O seno e cosseno hiperbólicos da diferença de dois arcos são dados por :

$$\sinh(\hat{u}-\beta) = \sinh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) - \sinh(\beta) \cdot \cosh(\hat{u}) \quad (3.12)$$

e

$$\cosh(\hat{u}-\beta) = \cosh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) - \sinh(\hat{u}) \cdot \sinh(\beta) \quad (3.13)$$

*Demonstração.* A demonstração ocorre de maneira análoga à anterior, quando escrevemos  $(\hat{\alpha} - \beta) = (\hat{\alpha} + (-\beta)) = \pi$ , trocando apenas  $\beta$  por  $-\beta$ .  $\square$

**Corolário 3.2.** Para o ângulo duplo das funções seno e cosseno hiperbólicos, valem as seguintes relações:

$$\sinh(2\hat{\alpha}) = 2\sinh(\hat{\alpha}) \cdot \cosh(\hat{\alpha}) \quad (3.14)$$

e

$$\cosh(2\hat{\alpha}) = 2\sinh^2 \hat{\alpha} + 1 \quad (3.15)$$

ou

$$\cosh(2\hat{\alpha}) = 2\cosh^2 \hat{\alpha} - 1. \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Como  $\sinh(2\hat{\alpha}) = \sinh(\hat{\alpha} + \hat{\alpha})$  e  $\cosh(2\hat{\alpha}) = \cosh(\hat{\alpha} + \hat{\alpha})$ , utilizando da Proposição 3.6 temos,

$$\sinh(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}) = \sinh(\hat{\alpha}) \cdot \cosh(\hat{\alpha}) + \sinh(\hat{\alpha}) \cdot \cosh(\hat{\alpha}) = 2\sinh(\hat{\alpha}) \cosh(\hat{\alpha})$$

e

$$\cosh(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}) = \cosh(\hat{\alpha}) \cdot \cosh(\hat{\alpha}) + \sinh(\hat{\alpha}) \cdot \sinh(\hat{\alpha}) = \cosh^2(\hat{\alpha}) + \sinh^2(\hat{\alpha}).$$

De acordo com (3.3) temos duas opções de substituição,

$$\cosh(2\hat{\alpha}) = \sinh^2(\hat{\alpha}) + \sinh^2(\hat{\alpha}) + 1 = 2\sinh^2 \hat{\alpha} + 1$$

$$\cosh(2\hat{\alpha}) = \cosh^2 \hat{\alpha} + \cosh^2 \hat{\alpha} - 1 = 2\cosh^2 \hat{\alpha} - 1$$

como queríamos provar.  $\square$

**Proposição 3.7.** O seno e cosseno hiperbólicos do arco metade são dados por:

$$\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sinh(\beta) - 1}{2}$$

e

$$\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sinh(\beta) + 1}{2}.$$

*Demonstração.* Simbolizando  $2\hat{\alpha} = \beta$  e utilizando do resultado da Equação (3.15). Temos assim,

$$\cosh(\beta) = 2\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1$$

isolando  $\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$$\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(\beta) - 1}{2}}$$

Agora, pela Equação (3.16) temos,

$$\cosh(\beta) = 2\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$$

isolando  $\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$$\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(\beta) + 1}{2}}$$

□

Proposição 3.8. A forma de produto entre seno e cosseno hiperbólicos, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} + \beta) + \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} - \beta) &= \sinh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) \text{ ou} \\ \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} + \beta) - \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} - \beta) &= \sinh(\beta) \cdot \cosh(\hat{u}) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Somando o primeiro membro das Equações (3.9) e (3.12) temos,

$$\sinh(\hat{u} + \beta) + \sinh(\hat{u} - \beta) = 2\sinh(\hat{u}) \cosh(\beta)$$

dividindo esta última equação por 2, obtemos:

$$\frac{1}{2} \sinh(\hat{u} + \beta) + \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} - \beta) = \sinh(\hat{u}) \cosh(\beta).$$

E agora, se subtrairmos as Equações (3.9) e (3.12) temos,

$$\sinh(\hat{u} + \beta) - \sinh(\hat{u} - \beta) = 2\sinh(\beta) \cosh(\hat{u})$$

dividindo esta última equação por 2, obtemos:

$$\frac{1}{2} \sinh(\hat{u} + \beta) - \frac{1}{2} \sinh(\hat{u} - \beta) = \sinh(\beta) \cosh(\hat{u}).$$

□

Proposição 3.9. As fórmulas do produto entre duas funções cosseno hiperbólico e entre duas funções seno hiperbólico, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}+\beta) + \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}-\beta) &= \cosh(\hat{u}) \cdot \cosh(\beta) \\ \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}+\beta) - \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}-\beta) &= \sinh(\hat{u}) \cdot \sinh(\beta) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Somando as Equações (3.10) e (3.13) temos,

$$\cosh(\hat{u}+\beta) + \cosh(\hat{u}-\beta) = 2 \cosh(\hat{u}) \cosh(\beta)$$

dividindo esta última equação por 2, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cosh(\hat{u}+\beta) + \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}-\beta) = \cosh(\hat{u}) \cosh(\beta).$$

E, subtraindo (3.10) e (3.13) temos,

$$\cosh(\hat{u}+\beta) - \cosh(\hat{u}-\beta) = 2 \sinh(\hat{u}) \sinh(\beta)$$

dividindo esta última equação por 2, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cosh(\hat{u}+\beta) - \frac{1}{2} \cosh(\hat{u}-\beta) = \sinh(\hat{u}) \sinh(\beta).$$

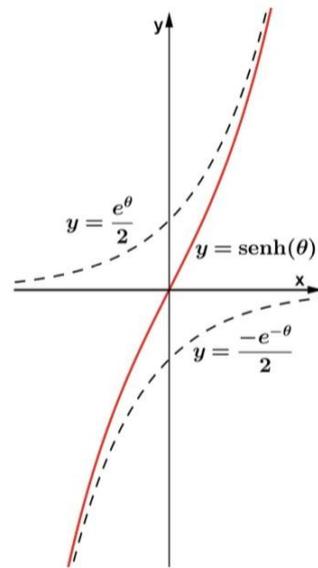
□

## Gráficos das funções hiperbólicas

### *Gráfico do seno hiperbólico:*

A função seno hiperbólico é uma função real, que possui domínio e imagem sendo todo o conjunto dos números reais.

Figura 13 – Gráfico do seno hiperbólico



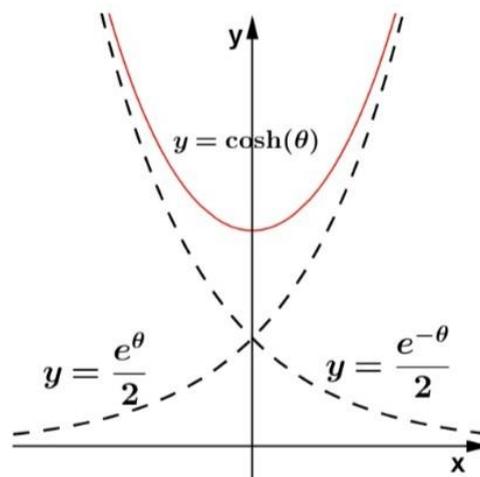
Fonte: Santos (2015, p.33).

Como já mencionado ela é uma função ímpar, ou seja,  $\sinh(\bar{\pi}) = -\sinh(-\bar{\pi})$ .

### *Gráfico do cosseno hiperbólico:*

Enquanto, a função cosseno hiperbólico possui domínio como sendo todo o conjunto dos números reais, e imagem o conjunto definido pelo intervalo  $[1, +\infty)$ .

Figura 14 – Gráfico do cosseno hiperbólico



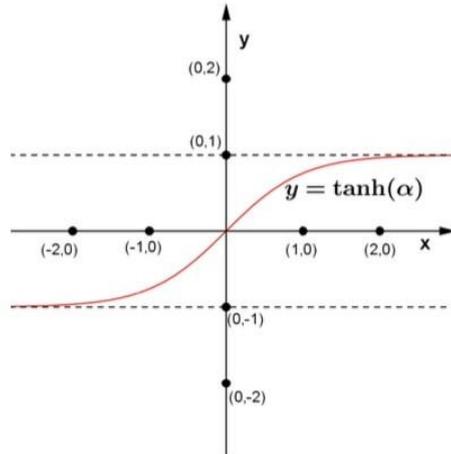
Fonte: Santos (2015, p.34).

Como já mencionado é uma função par, ou seja,  $\cosh(\bar{\pi}) = \cosh(-\bar{\pi})$ .

**Gráfico da tangente hiperbólica:**

A função tangente hiperbólica é estritamente crescente, possui domínio o intervalo  $(-\infty; +\infty)$  e imagem o intervalo  $[-1,1]$

Figura 15 – Gráfico da tangente hiperbólica



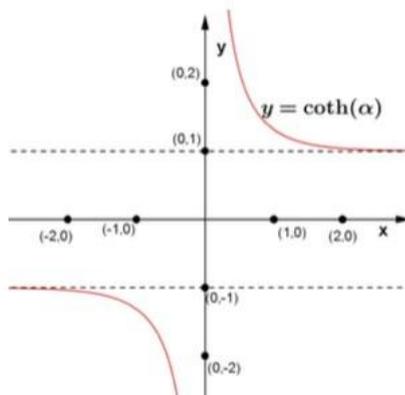
Fonte: Santos (2015, p.40).

A função tangente hiperbólica é uma função ímpar, ou seja,  $\tanh(\pi) = -\tanh(-\pi)$ .

**Gráfico da cotangente hiperbólica:**

A função cotangente hiperbólica é estritamente decrescente no intervalo  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ . Possui domínio o conjunto  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  e imagem o conjunto  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Figura 16 – Gráfico da cotangente hiperbólica

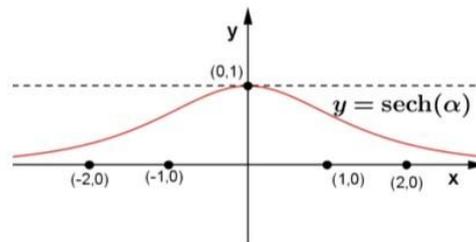


Fonte: Santos (2015, p.43).

### Gráfico da secante hiperbólica:

Não é monótona nos reais, essa função possui como domínio todo o conjunto dos números reais, e imagem o intervalo  $(0,1]$ .

Figura 17 – Gráfico da secante hiperbólica

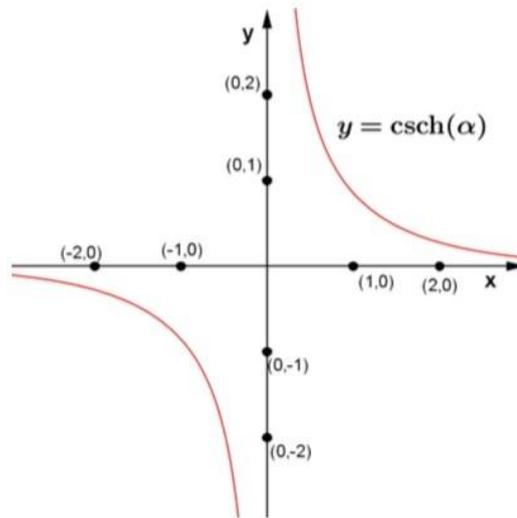


Fonte: Santos (2015, p.45).

### Gráfico da cossecante hiperbólica:

A função cossecante hiperbólica é estritamente decrescente no intervalo  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Figura 18 – Gráfico da cossecante hiperbólica



Fonte: Santos (2015, p.47).

### Derivadas das funções hiperbólicas

Nesta seção apresentaremos as derivadas das principais funções hiperbólicas, os resultados foram obtidos através da utilização dos métodos de derivação apresentados em Thomas (2002).

Proposição 3.10. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh x.$$

Demonstração. Com efeito, sendo  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , então

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{(e^x + e^{-x})(2) - (e^x - e^{-x})(0)}{2^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh x.$$

□

Proposição 3.11. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh x.$$

*Demonstração.* Com efeito, sendo  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , então

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{(e^x - e^{-x})(2) - (e^x + e^{-x})(0)}{2^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh x.$$

□

*Proposição 3.12.* Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}(x)) = \operatorname{sech}^2 x.$$

*Demonstração.* Com efeito, sendo  $\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{2^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}(x)) = \operatorname{sech}^2 x.$$

□

*Proposição 3.13.* Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x.$$

*Demonstração.* Com efeito, sendo  $\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2^2}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2}{(e^x - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}x) = \operatorname{cosech}^2 x.$$

□

Proposição 3.14. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$$

Demonstração. Como  $\operatorname{sech}x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right) &= \frac{(0)(e^x + e^{-x}) - (2)(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2}{(e^x + e^{-x})} \cdot \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x).$$

□

Proposição 3.15. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech}(x)) = -\operatorname{cosech}(x) \cdot \operatorname{cotgh}(x).$$

*Demonstração.* Como  $\operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{e^x - e^{-x}} \right) &= \frac{(0)(e^x - e^{-x}) - (2)(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{2}{(e^x - e^{-x})} \cdot \frac{(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech}(x)) = -\operatorname{cosech}(x) \cdot \operatorname{cotgh}(x).$$

□

## Comparando fórmulas trigonométricas

Nessa seção faremos uma comparação das fórmulas da Trigonometria Circular com as da Trigonometria Hiperbólica. Seguindo a ideia trabalhada em Santos *et al.* (2015) para expor algumas dessas comparações.

A primeira tabela faz comparação acerca das relações fundamentais.

Tabela 1 – Relações Fundamentais

| Trigonometria Circular                                     | Trigonometria Hiperbólica                                    |
|--|--|
| $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$                                | $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$                                |
| $1 + \operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{sec}^2(x)$     | $1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$     |
| $\operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x)$ | $\operatorname{cotgh}^2(x) - 1 = \operatorname{cosech}^2(x)$ |

Fonte: Santos (2015, p.51).

Nesta segunda tabela é feita uma comparação das definições das funções tangente, cotangente, cossecante e secante, decorrentes inicialmente das funções seno e cosseno.

Tabela 2 – Funções

| Trigonometria Circular                                 | Trigonometria Hiperbólica                                 |
|--|---|
| $tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$          | $tgh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\text{cosh}(x)}$          |
| $\text{cotg}(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$ | $\text{cotgh}(x) = \frac{\text{cosh}(x)}{\text{senh}(x)}$ |
| $\text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$            | $\text{cosech}(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)}$             |
| $\text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$              | $\text{sech}(x) = \frac{1}{\text{cosh}(x)}$               |

Fonte: Santos (2015, p.52).

Essa última tabela faz uma comparação em relação as derivadas de cada uma das principais funções.

Tabela 3 – Derivadas

| Trigonometria circular   | Trigonometria Hiperbólica   |
|--|---|
| $\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = \text{cos}(x)$                    | $\frac{d}{dx}(\text{senh}(x)) = \text{cosh}(x)$                     |
| $\frac{d}{dx}(\text{cos}(x)) = -\text{sen}(x)$                   | $\frac{d}{dx}(\text{cosh}(x)) = \text{senh}(x)$                     |
| $\frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \text{sec}^2(x)$                   | $\frac{d}{dx}(\text{tgh}(x)) = \text{sech}^2(x)$                    |
| $\frac{d}{dx}(\text{cotg}(x)) = -\text{cosec}^2(x)$              | $\frac{d}{dx}(\text{cotgh}(x)) = -\text{cosech}^2(x)$               |
| $\frac{d}{dx}(\text{sec}(x)) = \text{sec}(x)\text{tg}(x)$        | $\frac{d}{dx}(\text{sech}(x)) = -\text{sech}(x)\text{tgh}(x)$       |
| $\frac{d}{dx}(\text{cosec}(x)) = -\text{cosec}(x)\text{cotg}(x)$ | $\frac{d}{dx}(\text{cosech}(x)) = -\text{cosech}(x)\text{cotgh}(x)$ |

Fonte: Santos (2015, p.53).

## 4 CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como objetivo apresentar um estudo das Funções Hiperbólicas utilizando da Hipérbole como curva geratriz, para que assim fosse possível ter uma compreensão de como são dadas as definições de cada uma das funções hiperbólicas.

O estudo através da Hipérbole, revela que a forma de como os conceitos vão sendo construídos permitem uma boa assimilação sobre o objeto de estudo, propiciando uma aprendizagem de construção significativa, sendo assim possível acompanhar todos os resultados e propriedades existentes.

Em vista, de como acontece os estudos desses tipos de função normalmente nos cursos de Cálculo pode-se constatar que há uma certa limitação, principalmente no que diz respeito a como são dadas as devidas definições.

A partir dos resultados encontrados durante os estudos feitos para a realização desta pesquisa, constatamos que o conteúdo referente as Funções Hiperbólicas devem ser apresentados de modo que seja feita uma associação a partir da construção junto a Hipérbole, pois assim não há saltos na construção de como são dadas as definições.

## REFERÊNCIAS

FREITAS, M. d. B. C. d. S. B. *et al.* As funções hiperbólicas e suas aplicações. Universidade Federal da Paraíba, 2015. Citado na página 12.

RODRIGUES, K. F. Ângulos hiperbólicos e funções hiperbólicas. Mestrado Profissional em Matemática, 2014. Citado na página 24.

SANTOS, J. J. C. d. *et al.* Estudo e aplicações das funções hiperbólicas. Universidade Federal da Paraíba, 2015. Citado nas páginas 23 e 41.

THOMAS, G. B. Cálculo: Volume 1. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. Citado na página 38.