UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VIII
CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

VICTOR JOSÉ SANTOS

ASPECTOS DA COSMOLOGIA NEWTONIANA

ARARUNA - PB
NOVEMBRO DE 2023

VICTOR JOSÉ SANTOS

ASPECTOS DA COSMOLOGIA NEWTONIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos.

ARARUNA - PB
NOVEMBRO DE 2023

S238a Santos, Victor José.
Aspectos da cosmologia newtoniana [manuscrito] / Victor José Santos. - 2023.
30 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Fisica) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos, Coordenação do Curso de Física - CCTS. "

1. Cosmologia . 2. Gravitação. 3. Universo. I. Título

21. ed. CDD 523.1

Elaborada por Tiago J. da S. Pereira - CRB - 15/450 BSC8/UEPB

VICTOR JOSÉ SANTOS

ASPECTOS DA COSMOLOGIA NEWTONIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Física

Aprovada em: 05 / 12 / 2023 .

BANCA EXAMINADORA

José Jamilton Rodrigues dos Santos

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Danilo

Prof. Dr. Danilo Cesar Moreira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Valdecir Alves dos Santos Júnior

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

SUMÁRIO

ASPECTOS DA COSMOLOGIA NEWTONIANA

Victor José Santos [1]

RESUMO

O presente trabalho aborda uma introdução ao estudo da Cosmologia, que se dedica à investigação da origem e evolução do Universo. A Teoria da Relatividade Geral desempenha um papel fundamental na construção da estrutura conceitual da Cosmologia. Contudo, um desafio intrínseco a essa abordagem surge da complexidade matemática inerente à descrição do formalismo tensorial para sua representação. Não obstante, é possível desenvolver uma cosmologia baseada na Teoria da Gravitação Newtoniana, válida em escalas locais, dispensando a necessidade de uma exposição aprofundada aos tensores. Dentro dessa perspectiva, é viável reconstituir as equações de Friedmann, que constituem o núcleo do Modelo Padrão da Cosmologia. Essas equações, formuladas com base na métrica de Friedmann, Robertson e Walker, permitem replicar a dinâmica local do fator de escala da expansão cósmica. Tal formulação se apresenta acessível para um público em fase de graduação. A consideração da densidade e pressão do fluido cósmico enriquece a dinâmica cosmológica padrão, porém sua aplicabilidade se restringe a uma análise localizada do Universo. Este estudo propõe uma abordagem compreensível e acessível, permitindo uma estudo inicial da Cosmologia, sem a necessidade imediata de imersão em complexos formalismos matemáticos.

Palavras-Chave: Cosmologia Newtoniana; Gravitação; Universo.

ABSTRACT

This work addresses an introduction to the study of Cosmology, which is dedicated to investigating the origin and evolution of the Universe. The theory of General Relativity plays a fundamental role in building the conceptual structure of Cosmology. However, an intrinsic challenge to this approach arises from the mathematical complexity inherent in the description of the tensor formalism for its representation. Nevertheless, it is possible to develop a cosmology based on the theory of Newtonian Gravitation, valid on local scales, eliminating the need for in-depth exposure to tensors. Within this perspective, it is feasible to reconstruct Friedmann's equations, which constitute the core of the Standard Model of Cosmology. These equations, formulated based on the Friedmann, Robertson and Walker metric, make it possible to replicate the local dynamics of the scale factor of cosmic expansion. This formulation is accessible to an undergraduate audience. The consideration of the density and pressure of the cosmic fluid enriches standard cosmological dynamics, but its applicability is restricted to a localized analysis of the Universe. This study proposes an understandable and accessible approach, allowing an initial study of Cosmology, without the immediate need for immersion in complex mathematical formalisms.

Keywords: Newtonian Cosmology; Gravitation; Universe.

[1]Aluno de Graduação em Física pela Universidade Estadual da Paraíba – Campus VIII
E-mail: victorjosesantos1052@gmail.com

1 INTRODUÇÃO

As Leis de Newton constituem um conjunto teórico essencial para investigar os fenômenos mecânicos e gravitacionais. No início do século XX, à medida que surgiram limitações na explicação dos fenômenos mecânicos de partículas em altas velocidades, tornou-se claro que era necessária uma sistematização teórica para descrever essa dinâmica. Foi nesse período que as teorias relativísticas foram introduzidas, sendo a Teoria da Relatividade Restrita formulada em 1905 e a Teoria da Relatividade Geral em 1915. Ambas as teorias representam generalizações da Mecânica Newtoniana. Segundo Einstein (1916), antes da formulação das teorias eletromagnéticas por Maxwell, as forças elétricas e magnéticas eram concebidas como ações instantâneas à distância, desprovidas de um meio intermediário. As equações de Maxwell caracterizam campos eletromagnéticos que se propagam com velocidade finita, implicando que as interações não ocorrem de maneira instantânea, mas por meio de processos intermediários como propagações de ondas eletromagnéticas como luz ou radiação. A Física Clássica admitia a possibilidade de ações a distância instantâneas, como na Lei da Gravitação de Newton, sem a necessidade de um meio intermediário. A descoberta de processos intermediários com velocidade finita nas interações eletromagnéticas questionou essa concepção. O sucesso da interpretação de Faraday-Maxwell levou muitos físicos a abandonar a ideia de ações instantâneas à distância, conforme descrito pela Lei da gravitação de Newton. Em vez disso, a física moderna passou a adotar a ideia de processos intermediários e propagação finita de influências físicas e a teoria eletromagnética de Maxwell foi crucial para afastar a comunidade científica da concepção de ações instantâneas, preparando o caminho para o desenvolvimento subsequente da Teoria da Relatividade de Einstein.

A Teoria da Relatividade Restrita, aplicada a referenciais inerciais, propõe que as leis físicas devem manter sua forma nesses referenciais e impõe uma velocidade limite para a luz.

Por outro lado, segundo Einstein (1916), a Teoria da Relatividade Geral representa uma revolução em nossa compreensão do espaço ao postular que as propriedades geométricas não existem de forma independente, mas são condicionadas pela presença de matéria. Essa ideia implica que a estrutura geométrica do espaço-tempo que é influenciado pela presença de matéria e energia do Universo, não pode ser deduzida apenas com a base na geometria euclidiana. A validade da geometria euclidiana é comprometida para o nosso mundo devido à influência de matéria e energia, que é a geometria clássica eventualmente que aprendemos nas escolas, levando a uma interpretação mais complexa do Universo. A sugestão de que nosso Universo pode ser ligeiramente diferente de um mundo euclidiano encontra apoio no fato de que até mesmo massas consideráveis, como a do Sol, têm um impacto mínimo na métrica do espaço ao seu redor. Podemos conceber nosso mundo, do ponto de vista geométrico, como semelhante a uma superfície irregularmente curvada, mas que, em nenhum ponto, se afasta significativamente de um plano, assemelhando-se à superfície de um lago com ondas suaves. O mundo seria descrito como quase-euclidiano e espacialmente infinito, para a densidade média de matéria fosse nula, isso implicaria que a influência da matéria na curvatura do espaço-tempo seria desprezível levando a um Universo quase-euclidiano em largas escalas. Isso implica que se a densidade média de matéria no Universo não for nula, mesmo que seja muito próxima de zero, o mundo não pode ser considerado quase-euclidiano. Essa observação destaca a intrínseca relação entre a distribuição da matéria e a geometria do espaço, proporcionando uma compreensão mais profunda da conexão entre matéria e a estrutura do Universo na perspectiva da Teoria da Relatividade Geral.

Na Gravitação Newtoniana não consegue reproduzir os resultados da Relatividade Geral, mas os caminhos desta última permitem reproduzir os resultados newtonianos nos limites de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades, dando origem ao Princípio da Correspondência. A Relatividade Geral utiliza uma ferramenta matemática complexa, envolvendo geometria Riemanniana e conceitos de cálculo tensorial em um espaço-tempo quadri-dimensional. Ao explorarmos mais a fundo a Cosmologia, poderemos compreender como essa teoria clássica descreve o Universo em grande escala, seus princípios fundamentais e as circunstâncias em que ela se destaca, bem como os momentos em que a Relatividade Geral se faz necessária para uma compreensão mais completa e precisa, na construção de uma Cosmologia Newtoniana.

Com o estudo da Cosmologia para entender a evolução e a estrutura do Universo. A compreensão das leis fundamentais que regem a grande escala cósmica, examinando a distribuição de matéria e energia em larga escala e empregar os princípios da Relatividade Geral, permite a compreensão de suas características fundamentais e os processos que moldaram sua trajetória ao longo do tempo cósmico. Essa interseção entre a Cosmologia Newtoniana e a Teoria da Relatividade Getal que oferece uma perspectiva única para entender o Universo, possibilita a modelagem de Universos dinâmicos e a compreensão de sua evolução temporal, neste cenário, temos um Universo em expansão. Segundo Fabris e Velten (2012), Milne e McCrea propuseram uma abordagem que sugere que a Cosmologia pode ser tratada com uma complexidade matemática menor, utilizando a Gravitação Newtoniana. Ao adotar uma condição de pressão nula ($p = 0$), onde galáxias e aglomerados podem ter se formado em todo o espaço, Milne e McCrea ampliaram esses resultados. A análise da estrutura matemática e dos problemas da Relatividade Geral para a Cosmologia Newtoniana, foi realizada especialmente considerando a condição anteriormente abordada na presença de pressão ($p = 0$). Este trabalho de conclusão de curso explora a obtenção das equações que governam a dinâmica do Universo, considerando as simplificações propostas por McCrea e Milne, numa abordagem newtoniana na Cosmologia.

Para compreender como a pressão influencia a dinâmica do Universo, recorremos aos resultados das equações do matemático russo Alexander Friedmann, derivadas do estudo das equações de Einstein, que servem como base teórica para a Cosmologia Newtoniana.

De acordo com McCrea (1955), Milne e McCrea, em um trabalho conjunto em 1934, elaboraram uma generalização baseada em um caso particular previamente estudado por Milne. Esse estudo demonstrou de que maneira um tratamento "Newtoniano"pode proporcionar uma correspondência precisa para cada modelo de Universo, tal como delineado pelas equações padrão da cosmologia relativística, desde que a pressão dentro do modelo seja igual a zero.

É relevante destacar, que embora o trabalho de McCrea e Milne (1934), tenha contribuído para a compreensão física do tratamento relativístico, não se pretendeu sugerir que essa abordagem eliminasse a necessidade de um tratamento relativístico para compreender os aspectos em larga escala do Universo.

De acordo com McCrea (1955), é plausível agora admitir que nenhum sistema de caráter ilimitado pode ser considerado estritamente newtoniano no contexto original do termo. Qualquer tratamento supostamente newtoniano aplicado a um sistema dessa natureza, deve necessariamente se sujeitar a avaliações comparativas á Cosmologia relativística.

Conforme Milne (1934), a expansão do Universo é frequentemente abordada pelos estudiosos da Relatividade através do conceito de "espaço em expansão", uma abstração matemática que carece de conteúdo físico intrínseco. Partículas em movimento nesse em um espaço estático exibirão os mesmos efeitos observáveis que partículas estacionárias em um espaço em "expansão". Em ambos os casos, o espaço é uma construção matemática baseada em observações potencialmente realizáveis e moldada em torno da matéria em movimento, seguindo regras específicas. A formulação das leis da natureza depende das regras escolhidas, podendo resultar em leis substancialmente distintas, como abordado em outros contextos.

Para Milne (1934), quando Einstein adota o primeiro procedimento cosmológico é refente a um método especifico ou abordagem matemática que foi utilizado para formular as equações da Relatividade Geral; Milne adotou o segundo procedimento; Newtoniano. Nos dois tratamentos cosmológicos independente da abordagem utilizada, seja pelo método de Einstein ou de Milne, o próprio espaço não possui um significado físico, ligada com a ideia da Relatividade Geral, que considera o espaço-tempo como um fenômeno influenciado de matéria e energia presente no Universo, com o inverso de um local estático, onde os eventos ocorrem. O segundo procedimento empregado por Milne tem uma vantagem de estar mais alinhado com os conceitos, de modo geral, mais habitualmente usados na física, referindo-se a estruturas mais familiares na teoria física como a Gravitação Newtoniana.

Conforme Mannheim (2005), a formulação da Lei Newtoniana para calcular o potencial $\phi(r)$ não relativístico em um ponto específico, devido a um sistema estático composto por massas individuais m_i localizadas em pontos distintos $\vec{r}_i$, envolve a agregação dessas contribuições individuais de acordo com um procedimento de soma. A expressão do somatório de potenciais, dado por

$$\phi(\vec{r}) = -\sum_{i}^{N} \frac{Gm_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|},$$

onde G representa a constante de Newton, das trajetórias das partículas de teste do material e são determinadas pela equação

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi,$$

na abordagem da Gravitação Newtoniana; a primeira equação envolve todo o conteúdo que está relacionado aos princípios das leis fundamentais da Gravitação de Newton. Em qualquer teoria aspirante à descrição gravitacional do potencial está associado $\phi(r)$ em regiões cinemáticas, onde a validade da segunda equação foi confirmada, independentemente do conjunto de fontes gravitacionais em questão.

Conforme Mannheim (2005), determinar as regiões cinemáticas apropriadas exige, a verificação das previsões newtonianas em uma região candidata, utilizando fontes já conhecidas e definidas antecipadamente aos dados. Somente após o alcance com sucesso desses resultados, é admissível aplicar novamente a lei na mesma região para inferir a existência de outras fontes previamente desconhecidas. A lei da Gravitação de Newton foi devidamente estabelecida em escalas de distância de sistema solar. Em distâncias consideravelmente maiores, todos os testes que dependem exclusivamente de fontes previamente conhecidas antes da observação foram considerados ineficazes, sendo necessário invocar fontes adicionais como a matéria escura, para a validade da lei de Newton que ainda precisa ser confirmada nessas distâncias. Estabelecer uma lei em uma região cinemática específica não pode ser interpretado como evidência de sua validade em outras regiões.

Neste presente estudo, é apresentada uma análise demonstrativa para a possibilidade de alcançar os mesmos resultados observáveis da Cosmologia em nível local, por meio do emprego da Teoria Newtoniana elementar. Essa abordagem é contrastada com o conhecido modelo relativista elaborado por Einstein e de Sitter (1932), que descreve um Universo caracterizado por espaço plano em expansão, bem como com a teoria relativista da

Gravitação. Segundo Maartens (2011), no modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), pressupõe-se a manutenção da homogeneidade e isotropia em grandes escalas. A homogeneidade implica que o universo exibe uniformidade em todos os pontos do espaço, enquanto a isotropia indica uniformidade em todas as direções. Tais suposições proporcionam a simplificação das equações da relatividade geral, viabilizando previsões relativas à evolução do universo. O modelo FLRW antecipa uma expansão do Universo, assim como a previsão de um padrão específico de temperatura para a Radiação Cósmica de Fundo (CMB). Observações da CMB e da distribuição galáctica são empregadas para testar essas previsões, contribuindo para o aprimoramento da nossa compreensão do cosmos.

2 A RELATIVIDADE GERAL E AS SOLUÇÕES DE FRIEDMAN

Conforme Barrow e Clifton (2005), a concepção da gravidade passou por uma revolução significativa com a apresentação da Teoria da Relatividade Geral, proposta por Albert Einstein. As equações fundamentais desta teoria descrevem a gravidade como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. A formulação matemática dessas equações é complexa, mas sua solução para o Universo em larga escala é essencial para entendermos seu comportamento global.

Para Mukhanov (2005), as equações de Friedmann são um conjunto de soluções para as equações da Relatividade Geral, aplicadas ao universo homogêneo e isotrópico. Estas soluções, também conhecidas como soluções FLRW, descrevem um universo em expansão ou contração. O modelo cosmológico de Friedmann na Cosmologia é utilizado como meio teórico para entendermos a evolução do Universo.

Para Friedman (1999), as equações do autor são derivadas a partir dos princípios fundamentais da Relatividade Geral, descrevem a evolução do universo em termos de seu fator de escala, densidade de energia, pressão, constante cosmológica e curvatura. Ao integrar as equações de campo de Einstein para um Universo homogêneo e isotrópico, Alexander Friedmann apresentou soluções que revelam as possíveis geometrias do Universo, como o Universo aberto, fechado e plano.

A compreensão desses trabalhos demanda não apenas uma análise matemática aprofundada, mas também exige uma interpretação meticulosa das variáveis envolvidas, o que será fundamental para a formulação dos argumentos subsequentes. A influência da matéria escura, por exemplo, é encapsulada nas equações, fornecendo informações valiosas sobre a distribuição de massa no Universo. Além disso, a dinâmica das soluções de Friedmann desempenha um papel crucial na previsão de eventos cósmicos, como a expansão futura ou a possível contração do universo.

Com essas alegações temos a equação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein definida obtida como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}.$$

O Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é uma importante quantidade geométrica na Teoria da Relatividade Geral, que descreve a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo. Ele é obtido através da contração do Tensor de Riemann $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$. Este tensor está intrinsecamente ligado à geometria do espaço-tempo, descrevendo como a curvatura do espaço-tempo varia de ponto para ponto. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é uma representação matemática crucial da geometria do espaço-tempo na Teoria da Relatividade Geral, permitindo-nos entender como a presença de massa e energia afeta a forma como medimos distâncias e intervalos de tempo em um Universo onde o espaço-tempo é curvo.

A curvatura escalar, representada por R, é uma grandeza escalar derivada dos componentes do tensor de Ricci e fornece uma medida de curvatura média do espaço-tempo em um determinado ponto um indicador de quanto é "curvado"ou "achatado"o espaço-tempo. Ela está diretamente relacionada à distribuição de massa e energia no Universo, conforme descrito pelas equações de Einstein.

Por outro lado, o tensor $T_{\mu\nu}$ desempenha um papel crucial ao representar o conteúdo de matéria e energia no Universo. Ele descreve como a matéria e a energia estão distribuídas e como elas influenciam a curvatura do espaço-tempo de acordo com as equações de campo de Einstein. Conforme Fabris e Velten (2012), é visto que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^{\mu}u^{\nu} - pg_{\mu\nu}.$$

As equações de Einstein se conectam com o tensor energia-momento.

A geometria que descreve o Universo homogêneo, isotrópico e que se expande pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2)\right].$$

A secção dos espaços a um tempo constante é definida por uma variável k entre espaços de curvatura espacial, uma das implicações decorrentes das equações de Friedmann é que a curvatura do espaço pode assumir valores positivos, negativos ou nulos. Essa curvatura é determinada pela densidade de matéria e energia presentes no universo. Se a densidade de matéria e energia atingir um patamar suficientemente elevado, a gravidade acabará por desacelerar a expansão do universo, eventualmente conduzindo a um colapso. A curvatura do espaço é positiva, indicando uma geometria esférica. Em contraste, se a densidade de matéria e energia for baixa, a expansão do universo continuará a acelerar. Nesse caso, a curvatura do espaço é negativa, refletindo uma geometria hiperbólica. Quando a densidade de matéria e energia é exatamente igual a um valor crítico, a curvatura do espaço é nula, denotando uma geometria plana. Utilizando a métrica FLRW na equação da Relatividade Geral de Einstein por $G_0^0 = kT_0^0$, obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}. \tag{1}$$

O fator de escala a do Universo, descreve como as distâncias entre objetos cósmicos evoluem com o tempo. Quando $a(t)$ aumenta, o universo se expande. A representação da derivada temporal $\dot{a}$, é a taxa de variação do fator de escala com o tempo, caso o universo esteja se expandindo $\dot{a} > 0$, contraindo $\dot{a} < 0$ ou um Universo com $\dot{a} = 0$ implica que está em um estado estacionário. A cosntante de curvatura espacial do universo, pode assumir valores de -1, 0 ou 1, determinando a geometria do universo. Se $k = -1$, o Universo tem uma geometria hiperbólica (curvatura negativa); se $k = 0$, o universo tem uma geometria plana; e se $k = 1$, o universo tem uma geometria esférica (curvatura positiva). A velocidade da luz c é uma constante importante na Teoria da Relatividade Geral. A constante gravitacional de Newton G, desempenha importante nas equações de campo de Einstein. A densidade ρ, que inclui contribuições de matéria (como átomos e matéria escura) e qualquer outra forma de energia presente no universo. Subsequentemente a equação abaixo é derivada de $G_i^i = kT_i^i$, temos

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi Gp}{3}. \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \tag{3}$$

A equação 3 resulta em uma aceleração do Universo em termos de ρ densidade e pressão p; descreve o comportamento físico das diferentes dinâmicas da matéria e energia do Cosmos.

As equações 1,2 e 3 foram obtidas por Friedmann . O objetivo é demonstrar posteriormente os passos da Cosmologia. Conforme Milne e McCrea (1934), que é referido por Cosmologia Newtoniana; mostram soluções menos complexas com passos desenvolvidos por meio da Gravitação de Newton, para um universo preenchido com matéria e pressão $p = 0$.

Parafraseando Milnte (1934), a Teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein adota o primeiro método mencionado do procedimento Cosmológico e Milne adquiriu o segundo método. O segundo procedimento apresenta a vantagem de utilizar o espaço comumente empregado na Física Clássica. As equações de movimento derivadas para partículas livres em movimento na presença de uma determinada distribuição de matérias.

O segundo método incorpora a Gravitação e a Cosmologia Newtoniana, é particularmente valioso ao estudar situações em que as condições se aproximam do limite Newtoniano. Isso é crucial para entender regimes cosmológicos locais ou situações em que a expansão do Universo é relativamente pequena. A incorporação dos princípios da física convencional oferece uma ponte entre a teoria relativística de Einstein e os fundamentos estabelecidos da Física Clássica, proporcionando uma base sólida para a formulação e análise das equações de movimento em contextos cosmológicos locais. Ao analisar a Teoria da Relatividade Geral e a Cosmologia Newtoniana os dois métodos, contribui para uma compreensão mais abrangente e coerente dos fenômenos observados no Universo em larga escala.

3 FORMULAÇÃO DA COSMOLOGIA NEWTONIANA

De acordo com Souza (2004), a construção de uma Cosmologia Newtoniana requer uma abordagem baseada em fundamentos físicos sólidos e princípios matemáticos. Em primeiro lugar, deve-se estabelecer as leis fundamentais da Mecânica Newtoniana, que servirão como alicerce para a formulação de modelos cosmológicos com a utilização da Gravitação. Estas leis, expressas através das equações diferenciais de movimento, descrevem as interações entre corpos celestes, permitindo a previsão de suas trajetórias e comportamentos ao longo do tempo. A aplicação destas leis ao contexto cosmológico demanda a consideração de uma vasta quantidade de partículas e corpos celestes distribuídos em larga escala.

Além disso, a inclusão do Princípio Cosmológico, que postula a homogeneidade e isotropia em larga escala do universo observável, desempenha um papel essencial na construção de uma Cosmologia Newtoniana coerente. Este princípio fornece a base conceitual para a formulação de modelos que representam o Cosmos como um sistema dinâmico, cuja evolução ao longo do tempo pode ser estudada com base nas leis newtonianas.

A interpretação cosmológica da constante cosmológica, originalmente introduzida por Einstein em seu modelo estático do Universo, também desempenha um papel significativo na cosmologia Newtoniana. Uma constante é incorporada às equações de campo de Newton para permitir soluções que descrevem um Universo estático ou em expansão, proporcionando uma visão mais abrangente da dinâmica cosmológica.

3.1 Modelo do Universo em expansão em termo da densidade

A formulação proposta neste estudo é elaborada a partir dos desdobramentos da Teoria da Relatividade Geral, fundamentada nas soluções das equações decorrentes da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A investigação dessas soluções proporciona uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos cosmológicos, possibilitando a extração de resultados significativos com a Cosmologia Newtoniana. Além disso, a peculiaridade dessa formulação revela a capacidade de obter, a partir de seus pressupostos, resultados que corroboram de forma concisa com a teoria da gravitação newtoniana, oferecendo uma ponte entre as abordagens clássica e relativística da gravidade. Esse enlace entre as teorias representa um avanço significativo, validando e ampliando a compreensão do universo e suas dinâmicas, pela equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$$

se $\vec{g}$ é nulo o único possível modelo, de acordo com o principio cosmológico seria um Universo vazio.

Segundo Souza (2004), utilizando a Lei de Gauss é possível chegar a mesma conclusão. Para continuar utilizando Teoria Newtoniana deve-se modificar a lei de Gauss, imaginar que a quantidade de matéria contida no interior de uma superfície esférica de raio arbitrário é igual pelo produto da área da superfície com o valor do campo gravitacional¿ Pressupõe que o campo gravitacional é nulo sobre esta superfície, a única conclusão é que a massa no seu interior também deve ser nula e seria uma inconsistência existente conhecida nessa época no século XIX. Para persistir no uso da Teoria Newtoniana, é necessário ajustar a lei de Gauss, pode ser concebido que apenas a massa contida dentro de um raio específico, r, é a responsável por determinar o movimento de uma camada esférica centrada em torno de um ponto arbitrário. O Teorema de Birkhoff, conhecido por abordar essa problemática, pode ser demonstrado dentro da formulação da Relatividade Geral, e assim, supera a mecânica Newtoniana. Procederemos a utilizar este resultado para verificar suas implicações, essa é a premissa subjacente à denominada Cosmologia Newtoniana.

A partir dessas discussões para verificar suas consequências da chamada Cosmologia Newtoniana. A ideia é imaginar uma galáxia com massa m, a uma distância r do centro, será atraído por uma massa do interior do volume.

$$
\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\
M &= \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

onde ρ_0 é a densidade de massa atual.

O processo de expansão, desde que não exista criação de massa no interior do volume, pode ser explicado através da Energia Mecânica, dada por

$$
\begin{gathered}
E = K + V = cte \\
E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = cte,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

enquanto K é a energia cinética e V a energia potencial gravitacional.

A equação acima em termos da densidade crítica ρ_{0c} e outras variáveis cosmológicas. Quando essa equação é igual a zero, ela descreve um Universo que está entre expansão e contração do espaço. Caso a densidade real do Universo for exatamente igual à densidade crítica $\rho = \rho_{0c}$, o Universo é plano e a expansão do Universo desacelerará ao longo do tempo, mas não de uma forma acelerada e nunca irá parar de se expandir. Se a densidade real for menor que a densidade crítica $\rho < \rho_{0c}$, o Universo é aberto, a quantidade de matéria e energia não é suficiente para superar a expansão cósmica, e o Universo continua expandindo para sempre, mas com uma desaceleração gradual. E por último em que a densidade real for maior que a densidade crítica $\rho > \rho_{0c}$, o Universo é fechado, a gravidade eventualmente desacelera e reverte a expansão, levando a um eventual colapso do Universo.

Os tipos de Universo para aberto, fechado e crítico, caso a densidade de massa hoje for maior que a densidade crítica $\rho_0 > \rho_{0c}$, o Universo é fechado e vai se contrair em um momento no futuro, caso contrário $\rho_0 < \rho_{0c}$ o Universo vai se expandir infinitamente e para um caso crítico onde $E = 0$, como o modelo Einstein de Sitter em que a expansão ocorre indefinidamente mas a velocidade decorrente da força gravitacional é nula.

Por outro lado segundo Bahcall (2015), a Lei de Hubble é uma relação observada entre a distância e a velocidade de afastamento das galáxias. Ela foi descoberta por Edwin Hubble em 1929 e revelou que o Universo está em expansão. A partir da Lei de Hubble, é possível determinar as distâncias cósmicas verdadeiras das galáxias e quasares, o que permite a determinação da localização e distribuição tridimensional de milhões de galáxias e quasares a partir de suas velocidades observadas de desvio Doppler espectroscópico (redshift). A estrutura em grande escala do Universo, aglomerados de galáxias, supernovas do tipo Ia e a radiação cósmica de fundo em micro-ondas revelaram um Universo surpreendente plano (sem curvatura espacial) e contém 5% de bárions, 25% de matéria escura e 70% de energia escura que causa a taxa atual de expansão do Universo acelerar. A Lei de Hubble é dado por

$$v = H_0 r \tag{6}$$

e utilizando a equação (4) e (6) em (5) para $E = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} m H_0^2 r^2 - \frac{Gm}{r} \frac{4\pi}{3} \rho_{0c} r^3 \\ \frac{4\pi G m}{3} \rho_{0c} &= \frac{1}{2} m H_0^2 \\ \rho_{0c} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \end{aligned} \tag{7}$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble atual e ρ_{0c} é a densidade crítica atual.

Para facilitar o entendimento da equação da expansão, é introduzido um parâmetro de escalas do sistema de referência normalizado, conhecido como coordenadas comóveis, dada por

$$r(t) = R(t)a, \tag{8}$$

onde r é o raio de uma determinada região, R é o parâmetro de que independe do raio atual e a é o fator de escala do Universo. Derivando em relação ao tempo a equação (08), para a constante, temos

$$\dot{R}a = \dot{r}. \tag{9}$$

Rescrevendo a equação (6), encontramos

$$\dot{r} = H_0 r. \tag{10}$$

A constante de Hubble atual H_0 implica que a taxa de expansão é proporcional à distância r para todas as galáxias ou objetos no Universo.

A energia Mecânica total da camada pode ser normalizada em relação a energia da partícula em repouso, a consideração abaixo é definida e utilizada para encontrar as equações de Friedmann:

$$E = -\frac{1}{2} m c^2 k. \tag{11}$$

Em que k é uma constante adimensional ao qual vai determinar o comportamento do modelo relacionado à densidade total de energia e matéria no universo. A presença de k na equação reflete a influência da geometria do espaço-tempo na dinâmica da expansão do universo. Utilizando as equações (6), (8), (9), (10) e (11) em (7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 - \frac{4}{3}\pi G m \rho R^2 a^2 &= -\frac{1}{2}mc^2 k \\ (\dot{R}a)^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho R^2 a^2 &= -c^2 k \\ \dot{R}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 &= -\frac{kc^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Podemos definir a constante como $K_0 = \frac{k}{a^2}$ e utilizando em (12),

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 = -K_0 c^2. \tag{13}$$

Com a condição para introduzir instantes atuais como t_0. Por outro lado, admitindo que não exista criação de massa dentro ou destruição dentro de um raio físico atual a, a equação expressa conservação de massa em termos de parâmetro de escala, em que comparando o instante de densidade atualmente e em outro qualquer instante da densidade de massa no Universo, temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi}{3}\rho R(t)^3 a^3 \\ M &= \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0(t_0)^3 a^3 \end{aligned}$$

para $R(t_0) = 1$, igualando os termos de massa atual e em um instante e qualquer, temos

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}\rho(t)R(t)^3 a^3 &= \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3 \\ \rho R^3 &= \rho_0. \end{aligned}$$

A taxa de expansão varia de acordo com a evolução do Universo podemos relacionar pela lei de Hubble,

$$\begin{aligned} v(t) &= H(t)r(t) = H(t)R(t)a \\ v(t) &= \frac{dr}{dt} = \dot{R}a \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} \\ H(t) &= \frac{1}{R}\dot{R} \end{aligned} \tag{14}$$

A Lei de Hubble com essas relações, em qualquer momento, é uma taxa de variação do parâmetro de escala. Com a equação (14) em (13), temos

$$\begin{aligned} H^2R^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 &= K_0c^2 \\ \left(H^2 - \frac{8\pi}{3}\rho\right)R^2 &= -K_0c^2. \end{aligned}$$

Utilizando a condição de conservação da massa, temos a equação da expansão do Universo, que Friedmann obteve a partir da Teoria da Relatividade Geral na equação (1). Em seguida,

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho R^2 = -K_0c^2$$

admitindo $c = 1$, pode ser reescrita como,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K_0}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho. \tag{15}$$

A equação é a mesma dos resultados obtidos por Friedmann a partir da equação (1), onde a e R são parâmetros de escala, definidos no modelo cosmológico padrão. Os resultados em questão derivam-se analogamente da equação de Friedmann (1), sendo abordados por meio de uma formulação newtoniana, conforme a equação (15) determinado pelo método Newtoniano proposto por Souza (2004). A equação expressa uma relação entre a taxa de expansão do universo, sua curvatura espacial e a sua densidade. Esta formulação é crucial para entender as condições em que o universo se expande ou contrai ao longo do tempo, e como a distribuição de energia afeta essa dinâmica. A resolução desta equação, juntamente com outras considerações cosmológicas da evolução do Universo. Uma aproximação Newtoniana da Relatividade Geral.

3.2 Modelo de Universo Einstein de Sitter

A formulação das leis pertinentes à Natureza está intrinsecamente ligada às diretrizes seguidas na construção do espaço circundante à matéria em movimento.

Conforme postulado por Milne (1934), o espaço representa uma entidade matemática fundamentada em observações que poderiam ser realizadas e é delineado em torno da matéria em movimento de acordo com determinadas normas. Ao adotarmos um espaço estático, temos a capacidade de examinar o fenômeno da expansão como movimentos reais dentro desse espaço estático. As leis pertinentes à natureza serão concebidas de acordo com as normas seguidas na construção desse espaço estático. Ou adotar um espaço dinâmico, proposto pela Relatividade Geral de Einstein, as leis pertinentes à natureza serão formuladas em conformidade com as diretrizes adotadas na construção desse espaço dinâmico.

No presente contexto, optaremos pela formulação Newtoniana das leis relevantes à Natureza, a qual está condicionada às normas seguidas na construção do espaço em torno da matéria em movimento. Importante notar que essas regras podem variar de acordo com o método adotado para analisar o fenômeno de expansão do Universo.

Podemos descrever, com a teoria gravitacional Newtoniana, a influência do movimento da Energia Mecanica Para $E = 0$. Sabemos que a energia cinética para uma partícula qualquer é $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ e energia potencial gravitacinal $E_p = -\frac{GM(r)m}{r}$, logo

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ 0 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM(r)m}{r^2} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{GM(r)m}{r^2} \\ \frac{1}{2}v^2 &= \frac{GM(r)}{r}. \end{aligned} \tag{16}$$

Como a massa $M(r)$ permanece constante seguindo o movimento pela equação (15) e nos fornece para seu volume $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, a partícula possui uma velocidade, obtida da equação (16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^2 &= \frac{4}{3}\frac{G\pi}{r}r^3\rho \\ v^2 &= \frac{8G\pi}{3}r^2\rho. \end{aligned} \tag{17}$$

A equação da continuidade descreve a conservação massa em um fluido em movimento que a massa total de um sistema fechado permanece constante. A equação da continuidade é dada por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(v\rho) &= 0 \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v\rho) &= 0 \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{r^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(v\rho) &= 0 \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v\rho) &= 0
\end{aligned}$$

onde v é uma função dependente de r e t, por (17), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho r^2\left(\frac{8\pi G}{3}r^2\rho\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= 0 \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho r^3\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= 0 \\
\frac{d\rho}{dt} + 3\rho^{\frac{3}{2}}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}} &= 0 \\
\frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}}\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}} &= 0 \\
\rho^{\frac{-3}{2}}\frac{d\rho}{dt} + (24\pi G)^{\frac{1}{2}} &= 0
\end{aligned}$$

integrando, resulta em

$$\int \rho^{\frac{-3}{2}} d\rho = -\int (24\pi G)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$-2\rho^{\frac{-1}{2}} + (24\pi G)^{\frac{1}{2}} t = cte$$

escolhendo uma origem para t e $cte = 0$, temos

$$-2\rho^{\frac{-1}{2}} + (24\pi G)^{\frac{1}{2}} t = 0 \tag{18}$$

logo,

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2} \tag{19}$$

com a equação (17), resulta

$$v = \frac{2r}{3t},$$

sua aceleração da partícula, é definida pela derivada temporal de v em que $\frac{D}{Dt}(r) = v$, é dada por

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{2r}{3t}\right) = \frac{2}{3t}\frac{D}{Dt}(r) + \frac{2v}{3}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2v}{3t} - \frac{2r}{3t^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{v}{t} - \frac{r}{t^2}\right) = \frac{-2r}{9t^2}$$

e precisamente a aceleração newtoniana, de modo que:

$$-\frac{GM(r)}{r^2} = -4\pi G r^3 \frac{1}{6\pi G t^2}\frac{1}{r^2} = -\frac{2r}{9t^2}.$$

As equações (18) e (19) apresentam uma solução para o problema em questão. Conforme a equação (19), a velocidade de proporcionalidade entre velocidade e distância em qualquer ponto do Universo newtoniano segue a lei de Hubble, representada por $v = \alpha r$, onde α é dado por $\alpha = \frac{2}{3t}$; podemos deduzir o seguinte

$$\rho = \frac{\alpha^2}{\frac{8}{3}\pi G}.$$

Logo, podemos obter a densidade do universo local em termos da constante de Hubble.

O Universo Newtoniano obedece as seguintes relações,

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM(r)}{r} \tag{20}$$

derivando (20) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{GM(r)}{r}\right) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{GM(r)}{r^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

tal que

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho r^3. \tag{22}$$

As equações (20) e (21) contém em sua particularidade a equação da continuidade. Diferenciando (20) e utilizando (22), onde consideramos:

$$r = fR(t),$$

derivando em relação ao tempo, chegamos

$$\frac{dr}{dt} = f\frac{dR}{dt}$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f\frac{d^2R}{dt^2} \tag{23}$$

em que f é uma constante que define a posição da partícula e R é uma função que depende de t.

Ao incorporar as expressões contidas em (22) e (23) na equação (20), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \frac{4}{3}\frac{\pi G\rho f^3R^3}{fR} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \frac{4}{3}\pi G\rho f^2R^2 \\
\frac{1}{f^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 \\
\frac{1}{f^2}\left(f\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 \\
\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{8}{3}\pi G\rho
\end{aligned} \tag{24}$$

e para (21), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{4}{3}\frac{\pi G\rho r^3}{r^2} \\
\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho \\
\frac{2}{r}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{8}{3}\pi G\rho \\
\frac{2}{fR}f\frac{d^2R}{dt^2} &= -\frac{8}{3}\pi G\rho \\
\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} &= -\frac{8}{3}\pi G\rho
\end{aligned} \tag{25}$$

substituindo (24) em (25), obtemos

$$\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 = 0. \tag{26}$$

Equações relativísticas idênticas para um Universo com pressão $p = 0$ e a constante cosmológica $\lambda = 0$, como dado em um Universo Einstein de Sitter com espaço plano.

3.3 Modelo do Universo em expansão com pressão nula

Segundo Milne e McCrea (1934), a partícula tem uma velocidade menor que a velocidade de escape do observador; em um espaço de curvatura negativa cada partícula tem a velocidade maior do que a velocidade parabólica. A partir disto as curvaturas positivas, negativas e nulas, correspondem a universos newtonianos elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Das equações anteriores da mecânica Newtoniana, a velocidade de cada partícula não corresponde necessariamente a velocidade parabólica de escape. A velocidade v corresponde à uma partícula a uma distância r do observador no instante t, tem uma direção radial de uma função r e t. Em acordo com a lei da Gravitação Newtoniana, temos

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

ou

$$ma = -\frac{GMm}{r^2}$$

ou ainda,

$$a = -\frac{GM}{r^2}.$$

Vamos definir a aceleração por $a = \frac{Dv}{Dt}$, de modo que

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{GM(r)}{r^2},$$

utilizando (22) e podemos reescrever

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho r, \tag{27}$$

onde ρ é uma função que depende apenas de t.

A equação da continuidade é dada, por

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0. \tag{28}$$

Definindo,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -3F(t) \tag{29}$$

de (28), temos

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 3F(t). \tag{30}$$

Integrando (30) em relação a r, obtemos

$$\int \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v)\partial r = \int 3F(t)r^2 \partial r$$
$$\int \partial(r^2 v) = \int 3F(t)r^2 \partial r$$

e chegamos

$$r^2 v = r^3 F(t) + G(t) \tag{31}$$

dividindo ambos os lados da igualdade da equação (31) por r^2, obtemos

$$v = rF(t) + \frac{G(t)}{r^2}. \tag{32}$$

Considerando $G(t) = 0$ onde não tem um significado físico para a reprodução das equações, a partir de (32), temos

$$v = rF(t). \tag{33}$$

Calculando as derivadas parciais de (33) , encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = rF'(t),$$

ou

$$\frac{\partial v}{\partial r} = F(t),$$

e substituindo em (27), obtemos

$$rF'(t) + rF^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho r$$

ou

$$F'(t) + F^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho. \tag{34}$$

Podemos também escrever de (33),

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = F(t).vb \tag{35}$$

De (35) em (29), resulta

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = F(t) = -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

e com as derivadas em (23), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{fR}f\frac{dR}{dt} &= F(t) = -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{dt} \\ \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} &= F(t) = -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \tag{36}$$

Definindo,

$$\rho = \frac{B}{R^3}, \tag{37}$$

onde B é uma constante.

Substituindo (36) e (37) em (34), chegamos a

$$F'(t) = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2}$$

e sendo

$$-\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho$$

temos

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\frac{4}{3}\pi GB}{R^3} \tag{38}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\frac{4}{3}\pi GB}{R^2}. \tag{39}$$

A equação (39) pode ser reescrita, para

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R}$$

Integrando em relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 dt &= \int \frac{d}{dt}\frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R}dt \\
\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R} + K
\end{aligned} \tag{40}$$

onde K é uma constante. De (40) em (36),

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{R}\left[\frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R} + K\right]^{\frac{1}{2}} \\
F(t) &= \left[\frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R^3} + \frac{K}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

e por (37), obtemos

$$F(t) = \left[\frac{8}{3}\pi G\rho + A\rho^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $K = AB^{\frac{2}{3}}$.

Utilizando as equações (37) em (38), vem

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho,$$

reescrevendo as constantes, temos

$$\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{8}{3}\pi G\rho,$$

onde a constante de Einstein é representado por $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} &= -\frac{1}{3}\kappa c^2\rho \\
\frac{2}{Rc^2}\frac{d^2R}{dt^2} &= -\frac{1}{3}\kappa\rho.
\end{aligned} \tag{41}$$

Com a equação (40), onde $k = -\frac{K}{c^2} = \frac{AB^{\frac{2}{3}}}{c^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R} - kc^2 \\
\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + kc^2 &= \frac{\frac{8}{3}\pi GB}{R}
\end{aligned}$$

de (37), aparece

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + kc^2 &= \frac{8}{3}\pi G R^2 \rho \\
\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} &= \frac{8}{3}\pi G \rho \\
\frac{1}{R^2c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \\
\frac{1}{R^2c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} &= \frac{1}{3}\kappa\rho \qquad (42)
\end{aligned}
$$

onde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$.

Substituindo (41) em (43), obtemos

$$\frac{1}{R^2c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = -\frac{2}{Rc^2}\frac{d^2R}{dt^2}$$

$$\frac{2}{Rc^2}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{R^2c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = 0.$$

Admitindo $c = 1$, obtemos:

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = 0. \qquad (43)$$

Essa expressão representa a equação similar a um dos resultados da equação que foi obtida por Friedmann, da utilização da métrica FLRW nas equações da Relatividade Geral. Agora obtidas por uma aproximação local, baseada na Gravitação Newtoniana. Analisando as equações obtidas por Friedmann (2), temos um resultado com tratamento newtoniano, encontramos a pressão $p = 0$, que determinam a dinâmica do Universo local, como obtido no trabalho original de Milne e McCrea (1934).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A dinâmica do Universo descrita pelo tratamento cosmológico newtoniano (Eq. 15) é o equivalente local para a equação (1); além do ganho teórico, encontramos uma solução com formulação através da Teoria Newtoniana, que define a dimensão espacial de um modelo do Universo com a utilização da Gravitação de Newton. Comparando os resultados para a Eq. de Friedmann:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K_0}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho$$

e

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho$$

percebemos que a seção do espaço de curvatura é interpretada por um fator k na Relatividade Geral, que define a geometria do espaço, e é representado na Cosmologia Newtoniana por fator de escala atual K_0, equivalente a k e a densidade um determinado, onde $k = 0$, corresponde a um Universo com curvatura plano, $k = -1$ para um Universo aberto e $k = 1$ para um Universo fechado. Portanto poderíamos escrever:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho. \tag{44}$$

Com a equação (43) obtida pela formulação newtoniana, podemos comparar com a equação 2, resultado das equações obtidas por Friedmann. Para analisar as duas e adicionar o termo de pressão p que causa a aceleração do Universo. Das equações (43) e (2), temos

$$\frac{2\ddot{R}^2}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = 0$$

e

$$\frac{2\ddot{a}^2}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp.$$

Correlacionando essas duas expressões e adicionando o termo de pressão p na equação cosmológica newtoniana, que define aceleração do Universo local, obtemos

$$\frac{2\ddot{R}^2}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp. \tag{45}$$

Reescrevendo (45), para

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi Gp - \frac{2\ddot{R}^2}{R} - \frac{k}{R^2}$$

e substituindo em 30, vem

$$-8\pi Gp - \frac{2\ddot{R}^2}{R} - \frac{k}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho$$

ou,

$$-\frac{2\ddot{R}^2}{R} = \frac{8}{3}\pi G\rho + 8\pi Gp$$

ou ainda,

$$\frac{2\ddot{R}^2}{R} = -\frac{8}{3}\pi G(\rho + 3p).$$

Portanto,

$$\frac{\ddot{R}^2}{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p). \tag{46}$$

Da equação (46) ao lado da (3), obtemos o resultado de uma aceleração do Universo em propriedades da densidade e pressão p, em comparação com as soluções encontradas por Friedmann, obtemos a partir da formulação newtoniana os mesmos resultados, na Relatividade Geral obtidos a partir do tensor da equação momento-energia e pelo modelo FLRW. Essas expressões foram a base teórica inicial para descrever as características da origem e evolução do Universo, incluindo os mecanismos de formação de estruturas que compõe toda a mateira que preenche o Cosmos.

Vemos que a equação (26), decorre do fato de que as duas expressões que caracterizam o comportamento de R e ρ dentro do contexto do modelo Einstein de Sitter são equiparáveis a uma equação de movimento e uma equação de continuidade. Dado que essas expressões foram inicialmente derivadas das equações de campo de Einstein utilizando o tensor de Riemann-Christoffel, apresentam um notável exemplo da relação entre as equações de campo de Einstein e a dinâmica gravitacional newtoniana.

A densidade ρ no Universo de Einstein-de Sitter surge a partir do modelo newtoniano como $\rho = \frac{1}{6\pi Gt^2}$. Como o tempo τ no contexto relativístico, localmente coincide com o tempo newtoniano t mantido pela partícula, as características observáveis localmente do universo de Einstein-de Sitter são as mesmas que as previstas correlacionadas para as propriedades de um Universo Newtoniano.

A Introdução à Cosmologia com uma abordagem Newtoniana oferece uma justificativa essencial ao reconhecer a importância de adentrar-se nas bases teóricas que moldaram a compreensão do Universo. Ao explorar os princípios estabelecidos por Newton, esse trabalho busca resgatar a relevância da Cosmologia Newtoniana como um estágio crucial na evolução do pensamento cosmológico. Além de proporcionar uma compreensão sólida das interações gravitacionais em escalas astronômicas, esta revisão permite uma transição natural para as teorias mais avançadas da Cosmologia Relativística. O estudo não apenas presta homenagem às contribuições históricas, mas também evidencia a progressão contínua da investigação científica na busca por uma compreensão abrangente da natureza fundamental do Universo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem utilizada para desenvolvimento de uma Cosmologia fundamentada na teoria da Gravitação Newtoniana. A análise aponta para a viabilidade de descrever a dinâmica do Universo por meio de formulações mais acessíveis, destacando a utilidade da abordagem newtoniana para compreensão inicial da Cosmologia sem a imersão imediata em um formalismo tensorial.

Essas duas vertentes teóricas oferecem caminhos distintos para compreender a evolução do Universo. Enquanto a Relatividade Geral traz consigo uma complexidade matemática inerente, o tratamento newtoniano se mostra mais acessível e compreensível para um público em fase de graduação. A equação resultante desse enfoque newtoniano, expressa na equação (44), oferece uma descrição local da aceleração do Universo.

A introdução do termo de pressão nas equações cosmológicas ressalta a importância de considerar não apenas a densidade, mas também a influência dinâmica da pressão na evolução do Universo. As equações obtidas permitem correlacionar a dinâmica descrita pelas formulações newtonianas e as soluções encontradas a partir das equações de Friedmann na Relatividade Geral. Isso destaca a equivalência e a coerência entre as abordagens, demonstrando que, embora expressas de maneiras diferentes, as previsões resultam nos mesmos efeitos observáveis no Universo.

A análise das propriedades do Universo de Einstein de Sitter revela a conexão entre as expressões derivadas das equações de campo de Einstein e a dinâmica gravitacional newtoniana. A equação (26) exemplifica essa equivalência entre as características de R e ρ, mostrando a similaridade entre as previsões feitas a partir das abordagens newtonianas e relativistas.

Os trabalhos de Milne e McCrea (1934), foram cruciais ao mostrar que a Cosmologia pode ser abordada de maneira mais simples, sem a necessidade imediata da complexidade matemática da Relatividade Geral. Enquanto a Cosmologia Newtoniana oferece uma abordagem simplificada, a inclusão da pressão, um componente dinâmico importante descrito pela Relatividade Geral, é crucial para uma compreensão completa da evolução do Universo.

A incorporação ao incluir a pressão nas equações é fundamental para compreender como esse parâmetro influencia a dinâmica do Universo. Os resultados das equações de Alexander Friedmann, derivadas das equações de Einstein, destacam a importância desse componente para uma descrição mais abrangente da cosmologia relativista.

Por fim, a análise comparativa entre as abordagens da utilização da Gravitação Newtoniana e da Relatividade Geral oferece uma visão complementar, ressaltando a importância de considerar a pressão no entendimento da dinâmica e evolução do Universo. Essa abordagem mais acessível, inicialmente proposta pela Cosmologia Newtoniana, não apenas fornece uma base sólida para compreensão, mas a inclusão dos efeitos dinâmicos, como a pressão, é vital para uma compreensão completa do Universo.

REFERÊNCIAS

BAHCALL, N. A. Hubble's Law and the expanding universe. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 112, n. 11, p. 3173–3175, 17 mar. 2015.

EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.

EINSTEIN, A.; DE SITTER, W. On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 18, n. 3, p. 213–214, mar. 1932.

FABRIS, J. C.; VELTEN, H. E. S. Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 4, dez. 2012.

FRIEDMAN, A. On the Curvature of Space. **General Relativity and Gravitation**, v. 31, n. 12, p. 1991–2000, dez. 1999.

MANNHEIM, P. Alternatives to dark matter and dark energy. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 56, n. 2, p. 340–445, abr. 2006.

MAARTENS, R. Is the Universe homogeneous? **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 369, n. 1957, p. 5115–5137, 28 dez. 2011.

MCCREA, W. H. On the significance of Newtonian cosmology. **The Astronomical Journal**, v. 60, p. 271, ago. 1955.

MCCREA, W. H.; MILNE, E. A. NEWTONIAN UNIVERSES AND THE CURVATURE OF SPACE. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. os-5, n. 1, p. 73–80, 1 jan. 1934.

MILNE, E. A. A NEWTONIAN EXPANDING UNIVERSE. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. os-5, n. 1, p. 64–72, 1 jan. 1934.

MUKHANOV, V. Physical Foundations of Cosmology. **Choice Reviews Online**, 10 nov. 2005.

SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**. [s.l.] EdUSP, 2004.