



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**GEOMETRIA NO DISCO UNITÁRIO:  
o que Euclides poderia ter feito com um punhado de paralelas**

**CLEYSON DE MEDEIROS ALVES**

**PATOS  
2023**

CLEYSON DE MEDEIROS ALVES

**GEOMETRIA NO DISCO UNITÁRIO:  
o que Euclides poderia ter feito com um punhado de paralelas**

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

**PATOS  
2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A474g Alves, Cleyson de Medeiros.  
Geometria no disco unitário [manuscrito] : O que Euclides poderia ter feito com um punhado de paralelas / Cleyson de Medeiros Alves. - 2023.  
48 p.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2023.  
"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA. "

1. Geometria Hiperbólica. 2. Disco de Poincaré. 3. Quadratura do círculo. 4. Teorema de Pitágoras. I. Título  
21. ed. CDD 516

CLEYSON DE MEDEIROS ALVES

**GEOMETRIA NO DISCO UNITÁRIO: O QUE EUCLIDES PODERIA TER FEITO COM UM PUNHADO DE PARALELAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em 05 / 12 / 2023

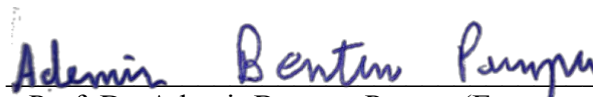
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)



Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez (Examinador)  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)



Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu (Examinador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico a minha mãe, Euzimar. . . .

## AGRADECIMENTOS

- Primeiramente, quero expressar minha gratidão ao meu Senhor, Deus. Sua graça e orientação têm sido a luz que ilumina meu caminho, e sou imensamente grato por sua presença constante. Em todos os desafios e triunfos, reconheço que sou sustentado por sua misericórdia e amor incondicional. Agradeço a Deus por ser a base sólida sobre a qual construo minha jornada. Que todos os louvores sejam dados a Ele, que é digno de toda honra e glória.

- Em seguida, expresso minha profunda gratidão à minha mãe, verdadeira fonte de inspiração e razão pela qual enfrento cada desafio com coragem. Sua presença amorosa e seus ensinamentos moldaram quem sou hoje. Obrigado, mãe, por ser meu porto seguro, por seu apoio inabalável e por ser a força que impulsiona meu crescimento. Seu amor é minha maior bênção, e sou infinitamente grato por tudo.

- Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Dr. Arlandson Oliveira. Seus ensinamentos perspicazes não apenas enriqueceram meu conhecimento, mas também me inspiraram a superar desafios. Em momentos cruciais, sua motivação, encorajamento e confiança em meu potencial foi um farol, como bússolas nos momentos desafiadores, guiando-me para superar as dificuldades. Agradeço sinceramente por sua dedicação e comprometimento, que foram cruciais para meu desenvolvimento, sou privilegiado por tê-lo como mentor e guia nesta trajetória acadêmica.

- Agora, mas não menos importante, gostaria de expressar meu humilde agradecimento aos meus amigos e colegas. Passamos juntos por momentos significativos, compartilhando ideias, ensinamentos e, é claro, um companheirismo que tornou esta jornada ainda mais especial. A amizade de vocês foi uma fonte constante de apoio, risos e conhecimentos, enriquecendo nossa experiência coletiva.

- Por fim, estendo meu agradecimento à UEPB e a todos os professores que contribuíram significativamente em meu conhecimento acadêmico. Grato!!!

*Não fique triste porque acabou,  
Fique feliz porque aconteceu...  
Pense nisso!!!  
Alanzoka*

## RESUMO

No decorrer de nosso estudo de Geometria Hiperbólica (GH), concentramo-nos na análise da quadratriz de Hippias. Essa curva desempenhou um papel significativo na busca por soluções para o problema da quadratura do círculo. Nosso principal objetivo era compreender e abordar esse desafio matemático, para o qual conseguimos oferecer uma solução ao explorar a GH. Mergulhando mais profundamente nessa nova geometria, também dedicamos atenção a que configuração assumiria nela o teorema de Pitágoras. A versão desse teorema na GH enriqueceu nossa compreensão das relações entre os elementos geométrico nesse ambiente não euclidiano. Trabalhamos no modelo proposto pelo matemático Jules Henri Poincaré para a GH. Esse modelo, denominado Disco de Poincaré, nos permite investigar as propriedades e comportamentos dos objetos dessa geometria.

**Palavras-chave:** Geometria Hiperbólica. Disco de Poincaré. Quadratura do Círculo. Teorema de Pitágoras.



## ABSTRACT

During our study of Hyperbolic Geometry (HG), we focused on the analysis of the Hippias quadratrix. This curve played a significant role in the search for solutions to the problem of squaring the circle. Our main goal was to understand and address this mathematical challenge, for which we were able to offer a solution by exploring GH. Diving deeper into this new geometry, we also pay attention to what configuration the Pythagorean theorem would assume in it. The HG version of this theorem has enriched our understanding of the relationships between geometric elements in this non-Euclidean environment. We work on the model proposed by mathematician Jules Henri Poincaré for GH. This model, called Poincaré Disk, allows us to investigate the properties and behaviors of the objects of this geometry.

**Keywords:** Hyperbolic Geometry. Poincaré disk. Squaring the Circle. Theorem of Pythagoras.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA</b>	<b>11</b>
2.1	Os Axiomas de Hilbert para a GH . . . . .	11
2.2	Elementos Hiperbólicos . . . . .	13
2.2.1	Pontos Ideais . . . . .	13
2.2.2	$H$ -Linhas . . . . .	14
2.2.3	Ângulo de Paralelismo . . . . .	19
2.3	Diferenças Entre Geometrias . . . . .	19
2.3.1	Quadriláteros Especiais . . . . .	19
2.3.2	Ângulos Internos . . . . .	24
2.3.3	Distância Hiperbólica . . . . .	25
2.3.4	Área Hiperbólica . . . . .	26
2.3.5	Trigonometria Hiperbólica . . . . .	28
<b>3</b>	<b>OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA</b>	<b>30</b>
3.1	Número Algébrico e Transcendente . . . . .	30
3.2	A Impossibilidade da Quadratura do Círculo . . . . .	31
3.3	A Quadratriz de Hippias . . . . .	31
3.4	A (IM)Possibilidade da Quadratura do Círculo . . . . .	32
3.4.1	Solução/Construção para Quadrar o Círculo na Geometria Hiperbólica . . . . .	34
<b>4</b>	<b>DESCOBRINDO A GEOMETRIA HIPERBÓLICA DAS HIPOTENUSAS</b>	<b>41</b>
4.1	Transformação de Mobius . . . . .	41
4.2	Teorema de Pitágoras Hiperbólico . . . . .	42
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>48</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria Hiperbólica é uma fascinante área da Matemática que se destaca por sua natureza não intuitiva e intrigante. Para entendê-la, é fundamental primeiro considerar a Geometria Euclidiana, a qual foi formulada por Euclides na Grécia Antiga e serviu como um paradigma para a Matemática por séculos.

A Geometria Euclidiana é construída a partir de uma série de axiomas, dos quais o quinto postulado de Euclides é um dos mais notáveis. Este postulado estabelece que, *por um ponto fora de uma reta, é possível traçar uma única reta paralela à reta dada*. No entanto, ao longo do tempo, matemáticos notaram que o quinto postulado de Euclides era diferente em sua natureza dos outros axiomas, parecendo ser menos intuitivo e mais suscetível a questionamentos. Isso levou à busca por uma forma de demonstrar que o quinto postulado poderia ser derivado a partir dos outros axiomas euclidianos, um empreendimento que se estendeu por muitos séculos.

Foi somente no século XIX que matemáticos como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Carl Friedrich Gauss começaram a explorar alternativas à geometria euclidiana. Eles ousadamente propuseram que se poderia construir sistemas geométricos consistentes modificando-se o quinto postulado de Euclides. Nessa tentativa de demonstrar o famigerado postulado, foi construída a Geometria Hiperbólica, na qual adota-se o seguinte axioma das paralelas: Dado um ponto fora de uma reta, existem ao menos duas retas que passam por aquele ponto e são paralelas à reta dada.

A busca por soluções para problemas geométricos desafiadores tem sido uma constante ao longo da história da Matemática. Um desses enigmas clássicos é o problema da quadratura do círculo, um dos três problemas famosos da geometria antiga, ao lado da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo. A quadratura do círculo refere-se à tentativa de construir um quadrado com a mesma área que um círculo, usando apenas régua e compasso. Essa tarefa se revelou uma busca sem sucesso, uma vez que, por mais de dois milênios, matemáticos procuraram uma solução que se mostrou esquiva. Enquanto o problema da quadratura do círculo cativava a imaginação dos matemáticos, há um teorema fundamental que leva destaque: o teorema de Pitágoras. Este teorema estabelece uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, segundo a qual o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. No entanto, à medida que exploramos os limites da geometria clássica, surge a fascinante questão: será que o teorema de Pitágoras mantém sua validade na Geometria Hiperbólica?

Na Geometria Euclidiana, o teorema de Pitágoras é inquestionável, mas a Geometria Hiperbólica desafia as noções intuitivas estabelecidas por Euclides. Em um espaço não euclidiano, as regras familiares da geometria são subvertidas, e conceitos fundamentais podem se comportar de maneira surpreendente. É nesse contexto que nos deparamos com a intrigante dúvida: será que as verdades geométricas que aceitamos implicitamente podem ser reinterpretadas em ambientes não euclidianos? Ao explorar as fronteiras da geometria, somos convidados a questionar e reconsiderar não apenas os problemas clássicos, como a quadratura do círculo, mas também os teoremas que consideramos universais. A Geometria Hiperbólica emerge como um terreno fértil para desafiar nossas intuições e expandir as fronteiras do conhecimento matemático.

Este trabalho representa a continuação dos estudos que tive o privilégio de conduzir du-

rante meu período de Iniciação Científica. Ao longo dessa jornada de pesquisa, mergulhei nas complexidades da Geometria Hiperbólica, procurando desvendar seus mistérios e explorar as possibilidades matemáticas que ela oferece. Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é, assim, uma síntese do meu comprometimento com o avanço do conhecimento nesse campo desafiador. O presente trabalho está organizado como segue. Na primeira parte, introduzimos os elementos fundamentais da Geometria Hiperbólica, com ênfase no modelo no qual trabalhamos: o Disco de Poincaré, constituído pelos  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $|z| < 1$ . Este modelo oferece uma representação visualmente acessível e matematicamente rica do espaço hiperbólico, fornecendo a base necessária para a análise aprofundada que se seguirá. Na segunda parte, exploraremos com detalhes a Quadratriz de Hipias, considerada uma das primeiras curvas concebidas após o círculo, apresentando sua relevância. A Quadratriz, com sua natureza única, desempenha um papel crucial na nossa investigação, uma vez que nos fornece ferramentas valiosas para abordar o desafiador problema da quadratura do círculo, examinando como essa curva oferece uma quase solução para o referido problema. Na terceira parte, vamos nos dedicar à apresentação da solução proposta para a quadratura do círculo na Geometria Hiperbólica. Revelamos como a peculiaridade do espaço hiperbólico pode influenciar e até mesmo possibilitar abordagens inovadoras para resolver esse tipo de problema clássico que perdurou sem solução por séculos. Por fim, no último capítulo deste TCC, traremos à tona o teorema de Pitágoras na sua versão hiperbólica. Desafiaremos as concepções tradicionais desse teorema tão fundamental, explorando como ele se manifesta e se adapta em um ambiente geométrico hiperbólico. Essa análise oferecerá uma visão mais ampla sobre como conceitos matemáticos essenciais podem ser redefinidos em contextos não euclidianos.

Ao longo deste trabalho, buscarei não apenas apresentar resultados e conclusões, mas também refletir sobre os limites de nossa compreensão matemática e as possibilidades que a Geometria Hiperbólica oferece para redefinir paradigmas estabelecidos.

## 2 ELEMENTOS DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica (GH) é uma área fascinante da Matemática que se baseia no Postulado de Lobachevsky, que desafia as suposições fundamentais da Geometria Euclidiana. Ao questionar o quinto postulado de Euclides, que afirmava a existência de apenas uma reta paralela a uma dada reta através de um ponto externo, Lobachevsky deu início a um novo ramo da Matemática. A Geometria Hiperbólica desafiou as noções tradicionais de espaço e forneceu uma base fundamental para o desenvolvimento das Geometrias não euclidianas e da Teoria da Relatividade de Einstein no século XX.

### 2.1 Os Axiomas de Hilbert para a GH

Os axiomas que fundamentam a Geometria Euclidiana, complementando as lacunas deixadas por Euclides, são os axiomas de Hilbert. Os axiomas da Geometria Euclidiana Plana valem para a Geometria Hiperbólica Plana, exceto aqueles que são equivalentes ao Axioma das Paralelas. Para a Geometria Hiperbólica, temos:

#### Termos Indefinidos

- Ponto
- Reta
- Plano

#### (I) Axiomas de Incidência

(I)1 - Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém;

(I)2 - Toda reta contém pelo menos dois pontos;

(I)3 - Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e estão sobre o mesmo plano.

#### (II) Axiomas de Ordem

(II)1 - Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ ;

(II)2 - Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente à reta  $AC$  tal que  $C$  está entre  $A$  e  $B$ ;

(II)3 - Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois;

(II)4 - (Pasch) Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém algum dos três pontos, então, se  $l$  intersecta o segmento  $AB$ , ela também intersecta o segmento  $AC$  ou o segmento  $BC$ .

### (III) Axiomas de Congruência

(III)1 - Se  $A$  e  $B$  são dois pontos em uma reta  $l$  e  $A'$  é um ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto  $B'$  em um dado lado da reta  $l'$  tal que os segmentos  $AB$  e  $A'B'$  são congruentes;

(III)2 - Se um segmento  $A'B'$  e um outro segmento  $A''B''$  são congruentes a um mesmo segmento  $AB$  então os segmentos  $A'B'$  e  $A''B''$  são congruentes entre si;

(III)3 - Sobre uma reta  $l$ , sejam  $AB$  e  $BC$  dois segmentos da mesma reta que, exceto por  $B$ , não têm pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta  $l'$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$ , não têm pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{BC}$  é congruente a  $\overline{B'C'}$ , então,  $\overline{AC}$  é congruente a  $\overline{A'C'}$ ;

(III)4 - Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $\overrightarrow{B'C'}$  é uma semirreta, então existe exatamente uma semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$  em cada lado da reta  $\overline{B'C'}$  tal que  $\angle A'B'C'$  é congruente a  $\angle ABC$ . Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo;

(III)5 - Se, para dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ ,  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC}$  é congruente a  $\overline{A'C'}$  e  $\angle BAC$  é congruente a  $\angle B'A'C'$ , então  $\angle ABC$  é congruente a  $\angle A'B'C'$  e  $\angle ACB$  é congruente a  $\angle A'C'B'$ .

### (IV) Axiomas de Continuidade

(IV)1 - Axioma de Arquimedes: Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $\overline{CD}$  construídas continuamente de  $A$  ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AB}$  passará além do ponto  $B$ ;

(IV)2 - Axioma de Completude da Reta (ou Axioma de Cantor): Se  $\overline{A_n B_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto  $P$  pertencente a todos os segmentos da coleção.

### Axiomas das Paralelas

Considerando o axioma de Playfair para o postulado das paralelas de Euclides:

“Por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta que não intersecta a reta dada.”

Na negação desse axioma tem-se o nascimento da Geometria Hiperbólica:

**(V) Axioma das paralelas para a Geometria Hiperbólica  
(Postulado de Lobachewsky)**

*“Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não encontram a reta dada.”*

**Definição 2.1. (Disco de Poincaré)** O disco de Poincaré  $\mathbb{D}$  é dado como

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} = \{(x, y) = x^2 + y^2 < 1\}$$

e a fronteira definida como

$$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{(x, y) = x^2 + y^2 = 1\}$$

também chamada de absoluta (círculo em  $\infty$ ) ou limite de  $\mathbb{D}$ . Lembrando que os pontos da fronteira não fazem parte de  $\mathbb{D}$ .

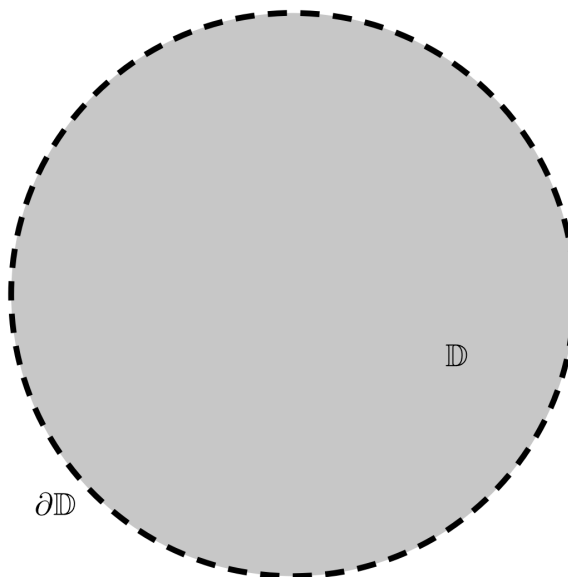


Figura 2.1: Disco de Poincaré

## 2.2 Elementos Hiperbólicos

### 2.2.1 Pontos Ideais

No modelo do disco de Poincaré, indicaremos por  $\mathbb{H}$  o plano hiperbólico que é representado pelo interior de um círculo euclidiano; o bordo ou circunferência deste círculo é chamado de absoluta e representa o infinito, o horizonte. Os pontos da absoluta são chamados de pontos ideais. Denotaremos os pontos ideais da absoluta por  $\Omega$ . Por fim, é conveniente observar que pontos ideais não são pontos do plano hiperbólico (assim como  $+\infty$  ou  $-\infty$  não é ponto da reta real).

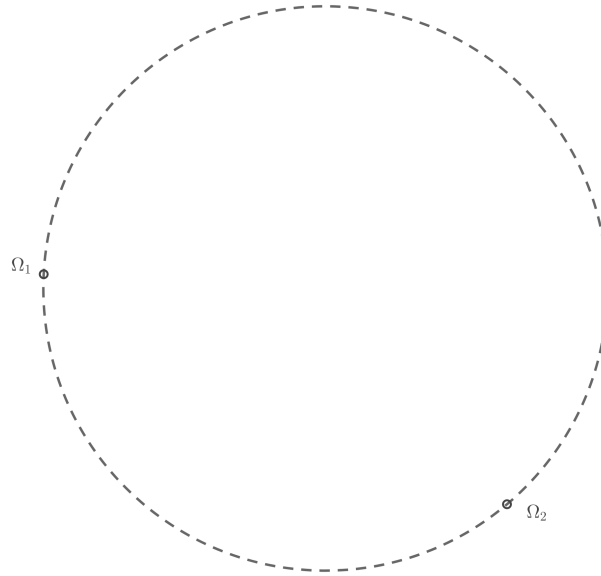


Figura 2.2: Pontos Ideais

### 2.2.2 *H*-Linhas

**Definição 2.2. (Reta Hiperbólica)** Ha dois tipos de *h*-linhas (“*h*” de hiperbólico). (Tipo *I*) Dados dois pontos  $A, B \in \mathbb{D}$  colineares com  $O$  (origem), então a reta hiperbólica é um diâmetro, semelhante à reta euclidiana. (Tipo *II*) Caso contrário, as *h*-linhas em  $\mathbb{D}$  são arcos de circunferências perpendiculares à absoluta. Em geral as *h*-linhas são dadas como

$$(\mathbf{h}\text{-linhas}) := \Gamma = \{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\} \cap \mathbb{D}$$

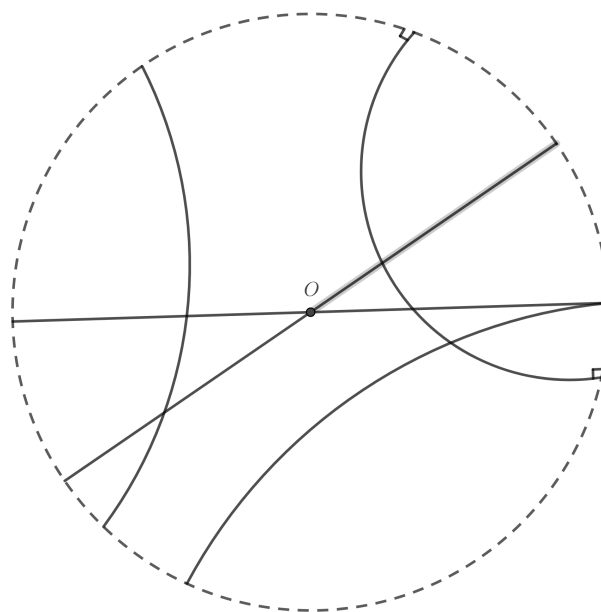


Figura 2.3: Retas Hiperbólicas



### Construção geométrica da reta que passa por dois pontos $A$ e $B$

Para o (Tipo I) considere a interseção da reta euclidiana passando por  $A, B$  e  $O$  com  $\mathbb{D}$ .

Para o (Tipo II), considere os seguintes passos :

1. Trace a  $\mathbb{E}$ -linha (“ $\mathbb{E}$ ” de euclidiano) que passa por  $A$  e  $B$ ;
2. Considere a semirreta  $\overrightarrow{OA}$ ;
3. Trace a reta perpendicular  $s$  à  $\overrightarrow{OA}$  no ponto  $A$ ;
4. Seja  $C$  um dos pontos da interseção  $s \cap \partial\mathbb{D}$ ;
5. Considere a semirreta  $\overrightarrow{OC}$ ;
6. Trace a reta perpendicular  $t$  à  $\overrightarrow{OC}$  no ponto  $C$ ;
7. Seja  $A' = \overrightarrow{OA} \cap t$ ;
8. Trace a reta mediatriz  $m$  do segmento  $\overline{AA'}$ ;
9. Trace a reta mediatriz  $n$  do segmento  $\overline{AB}$ ;
10. Seja  $O' = m \cap n$ ;
11. Trace a circunferência  $\Gamma$  de centro  $O'$  e raio  $\overline{O'A}$ .

A interseção entre  $\Gamma$  e  $\mathbb{D}$  é a  $h$ -linha desejada.

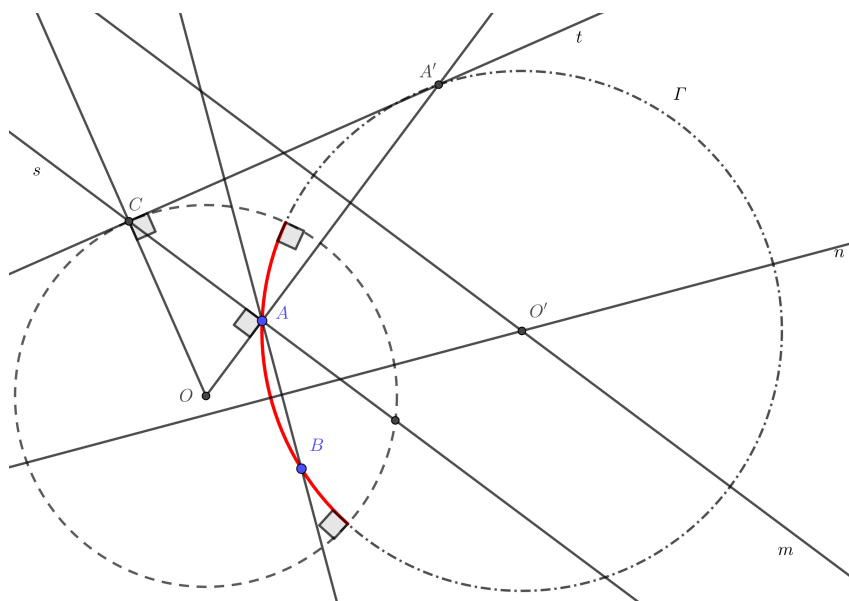


Figura 2.4:  $h$ -linha Passando Por Dois Pontos

Observe que o ponto  $A'$  é o mesmo obtido pela reflexão em relação a um círculo (inversão): dado um ponto  $A \in \mathbb{D}$  o ponto  $A'$  é chamado inverso de  $A$  em relação ao círculo, quando  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$ . De fato, os triângulos  $\triangle OAC$  e  $\triangle OCA'$  são semelhantes, pois possuem o ângulo  $\hat{O}$  comum aos dois triângulos e cada um possuindo um ângulo reto. Assim,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OA'};$$

como  $\overline{OC} = r$ , temos

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

**Definição 2.3. (Ângulo Hiperbólico)** O ângulo (hiperbólico) entre duas  $h$ -linhas que passam por um ponto  $A$  em  $\mathbb{D}$  é o ângulo euclidiano entre suas tangentes (euclidianas) em  $A$ .

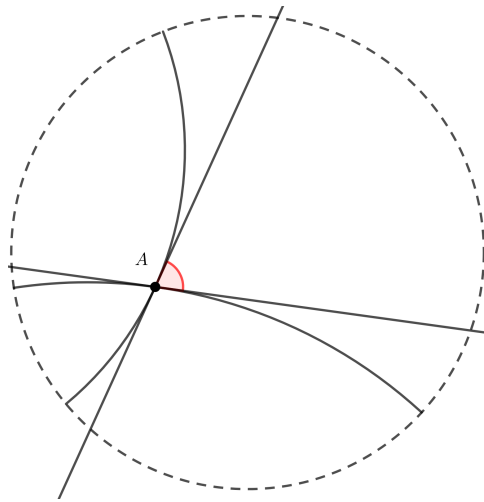


Figura 2.5: Ângulo Hiperbólico

A partir daí, podemos determinar os polígonos em  $\mathbb{D}$ , como triângulos e quadriláteros.

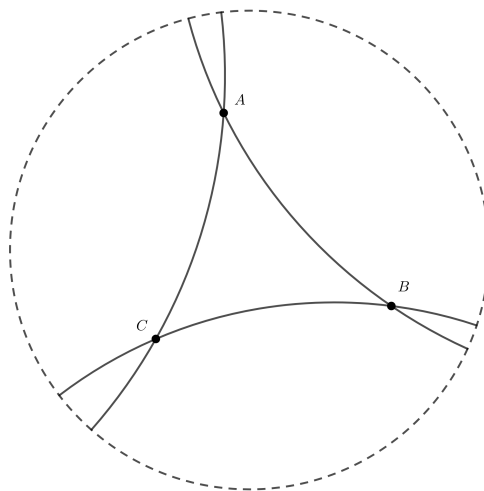


Figura 2.6: Triângulo Hiperbólico

Na figura 2.6 temos o exemplo de um triângulo hiperbólico onde os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a  $\mathbb{D}$ , determinado pela interseção de três  $h$ -linhas. Podemos também ter triângulos com

pontos na absoluta. De modo análogo, os quadriláteros hiperbólicos são determinados com a interseção de quatro  $h$ -linhas.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, existem infinitas retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .*

**Demonstração:** Pelo postulado de Lobachewsky, existem retas  $m$  e  $n$  passando por  $p$ , tais que  $m \cap r = n \cap r = \emptyset$ . Desse modo as retas  $m$  e  $n$  dividem o plano hiperbólico em quatro setores angulares. Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $P$  à reta  $r$ . Consideremos os ângulos  $\beta$  e  $\alpha$  de vértice comum em  $P$  formado pelas retas  $m$  e  $\widehat{PQ}$  e  $n$  e  $\widehat{PQ}$ , respectivamente. Seja um ponto  $R$  em um dos setores angulares, tal que  $\gamma = \widehat{RPQ}$  esteja contido no setor angular  $\beta$  e contenha o setor angular (não esteja contido) em  $\alpha$ . Seja  $t$  a reta passando por  $P$  e  $R$ .

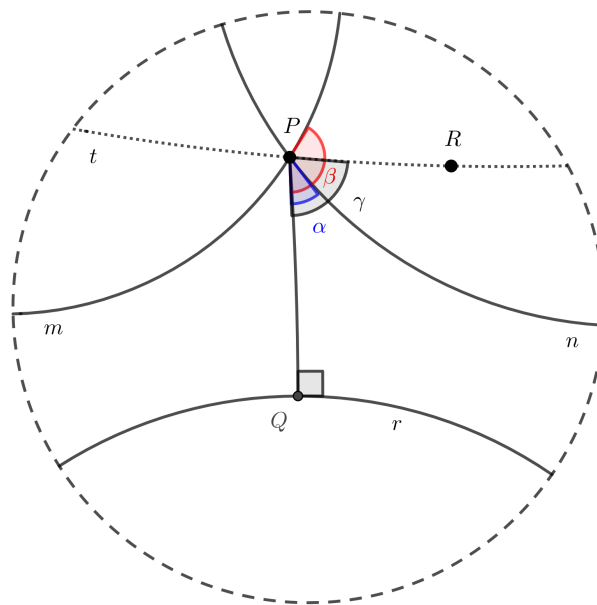


Figura 2.7: Suporte Para Demonstração de Infinitas Retas Paralelas

Logo  $t \neq n$ . Temos que  $t \cap r = \emptyset$ . De fato, se  $t$  interceptasse  $r$  em um ponto  $A$ , teríamos um triângulo  $APQ$ .

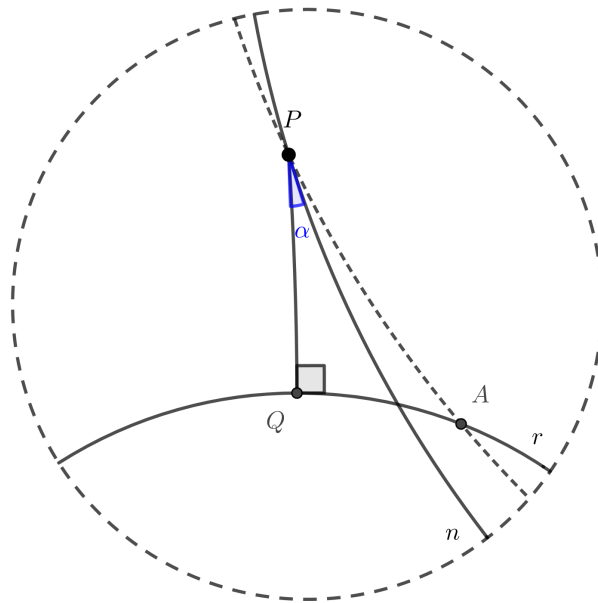


Figura 2.8: Suporte Caso  $t$  Interceptasse  $r$

$n$  entra no triângulo  $APQ$  pelo ponto  $P$ . Pelo axioma de Pasch, teríamos um ponto de interseção entre a reta  $n$  e  $r$ , ou seja,  $n \cap r \neq \emptyset$  (o segmento  $\overline{QA}$  está contido na reta  $r$ ), uma contradição com a hipótese. Da mesma forma para a reta  $m$ ,  $m \cap \overline{QA} \neq \emptyset$ , uma contradição.

Logo  $t \cap r = \emptyset$ . Como há infinitos pontos  $R$  que podem ser escolhidos, conforme acima, concluímos que existem infinitas retas  $t$  que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ . ■

**Proposição 2.2.** *Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, as retas paralelas a  $r$  passando pelo ponto  $P$  formam ângulos congruentes com a perpendicular baixada de  $P$  à reta  $r$ . Além disso, os ângulos congruentes mencionados são agudos.*

**Demonstração:** Suponha que  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $P$  a  $r$ . Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  a medida dos ângulos formados pelas retas paralelas  $m$  e  $n$  com o segmento  $\overrightarrow{PQ}$  em comum. Seja  $R$  um ponto em  $r$ , no setor angular de  $\alpha_1$ , tal que, o ângulo  $\widehat{RPQ} = \alpha_2$ . Seja  $S$  um ponto em  $r$  tal que  $Q \in RS$  e  $\overline{RQ} = \overline{QS}$ .

Logo  $\widehat{QPS}$  tem medida menor que  $\alpha_2$ . Assim, Pelo caso LAL,  $PQR \equiv PQS$ , o que implica  $\widehat{QPS}$  tem medida  $\alpha_2$ , Absurdo! Assim,  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Como  $m$  e  $n$  são distintas, seja  $\delta$  os ângulos opostos pelo vértice em  $P$  (entre as retas  $m$  e  $n$ ).

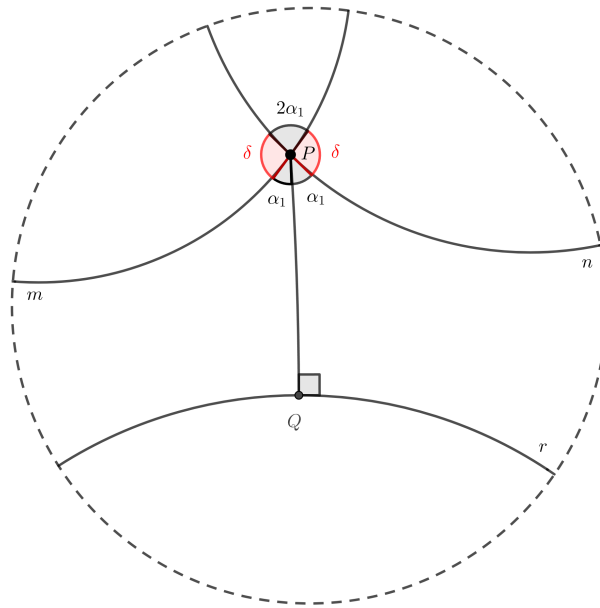


Figura 2.9: Ângulos Agudos

$$\text{Logo } (\alpha_1 + \alpha_1) + 2\alpha_1 + 2\delta = 360^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ - \frac{\delta}{2} \Rightarrow \alpha_1 < 90^\circ. \quad \blacksquare$$

### 2.2.3 Ângulo de Paralelismo

Consideremos o ângulo de paralelismo entre as retas  $n$  e  $r$  no ponto  $p \in n$ . Notemos que a noção de ângulo de paralelismo está associada a um triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  e que seu ângulo interno  $\hat{P}$  é exatamente o ângulo de paralelismo entre  $n$  e  $r$  em  $P \in n$ . Sendo assim, chamemos o ângulo  $\hat{P}$  de **ângulo de paralelismo do triângulo retângulo generalizado**  $PQ\Omega$  relativo à altura  $PQ$ . Como  $n$ ,  $r$  e  $\Omega$  estão fixos, notemos que o ângulo de paralelismo  $\hat{P}$  depende apenas da altura  $PQ$  do triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$ .

Logo, podemos definir uma função, chamada de **função ângulo de paralelismo**, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{R}_+ - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \Theta(h) = \alpha, \end{aligned}$$

tal que  $h$  é a medida da altura  $PQ$  do triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  e  $\alpha$  é a medida (em radianos) de seu ângulo interno  $\hat{P}$ . A função ângulo de paralelismo é bijetora quando o contra domínio é definido no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . O ângulo de paralelismo é uma função contínua também; vide [1].

## 2.3 Diferenças Entre Geometrias

### 2.3.1 Quadriláteros Especiais

Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é dito **Quadrilátero de Saccheri** de **base**  $AB$ , **topo**  $DC$  e **laterais**  $AD$  e  $BC$  quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado base,

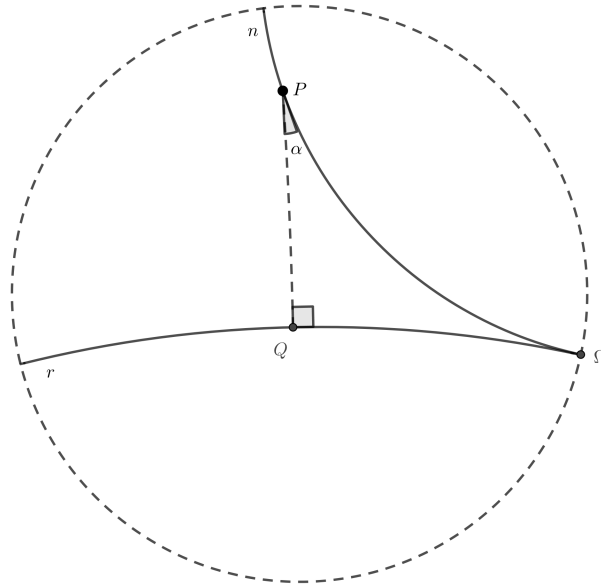


Figura 2.10: Ângulo de Paralelismo

ou seja,  $AD \equiv BC$ ,  $AD \perp AB$  e  $BC \perp AB$ .

Construção do Quadrilátero de Saccheri:

1. Trace  $\mathbb{E}$ -linha  $r$  passando pelo centro do disco;
2. Determine outra  $\mathbb{E}$ -linha  $s$ , perpendicular a  $r$  tal que obtemos os pontos  $\{\Omega_1, \Omega_2\} = s \cap \partial\mathbb{D}$ . (Como na figura);
3. Determine o ponto  $O'$  inverso do ponto  $O$ .
  - (a) Trace a reta  $h$  tangente a  $\partial\mathbb{D}$  no ponto  $\Omega_1$ ;
  - (b) Da mesma forma a reta  $h'$  tangente a  $\partial\mathbb{D}$  no ponto  $\Omega_2$ .  
Temos o ponto  $O' = h \cap h'$
4. Construa a circunferência de centro  $O'$  e raio  $\overline{O'\Omega_1}$ , i.e.,  $\Gamma(O', \overline{O'\Omega_1})$ ;
5. Determine  $r'$  o arco de circunferência, ou seja, a  $h$ -linha de extremos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .
6. Trace uma  $\mathbb{E}$ -linha  $t$  perpendicular a  $r$ , obtemos os pontos  $A, B \in r'$ .
7. Determine as  $h$ -linhas perpendiculares a  $r'$  que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ .
  - (a) Trace as  $\mathbb{E}$ -linhas  $t_1$  e  $t_2$  tangentes à  $r'$  nos pontos  $A$  e  $B$  respectivamente.
  - (b) Trace a  $\mathbb{E}$ -linha  $n$  tal que  $t_1 \cap n = P$  e  $t_2 \cap n = Q$ . (Como na figura).
  - (c) Daí construímos as circunferência  $\pi(P, \overline{PB})$  e  $\pi'(Q, \overline{QA})$ .
  - (d) Em seguida, trace  $\mathbb{E}$ -linha  $n'$  perpendicular a  $r$ , tal que  $n'$  passe por  $\pi$  e  $\pi'$ , obtemos os pontos  $D, C \in \mathbb{D}$ .

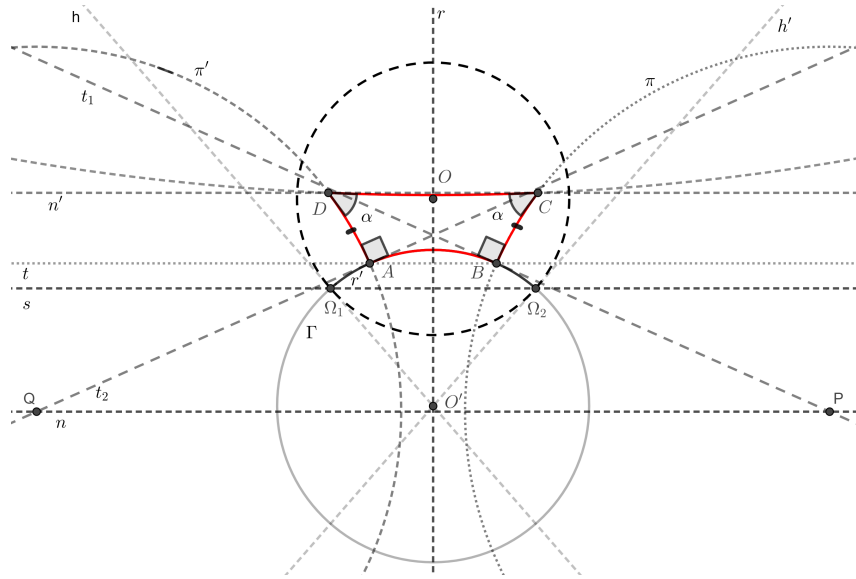


Figura 2.11: Quadrilátero de Saccheri

8. Trace a  $h$ -linha que passe por  $C$  e  $D$ .

O quadrilátero  $ABCD$  é o Quadrilátero de Saccheri.

**Proposição 2.3.** *O segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri  $ABCD$  é perpendicular a esses lados. Além disso, os ângulos do topo  $\widehat{C}$  e  $\widehat{D}$  são congruentes.*

**Demonstração:** Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios do topo e da base respectivamente.

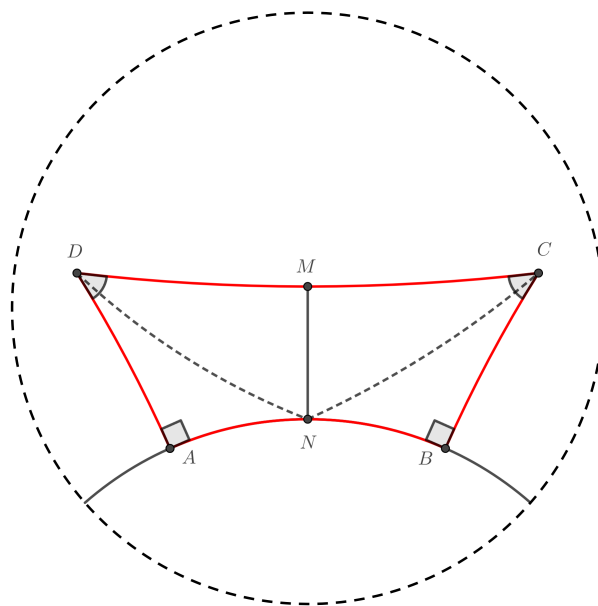


Figura 2.12: Segmento Perpendicular e Ângulos Agudos no Quadrilátero de Saccheri

Pelo caso de congruência LAL:

$$ADM \equiv BCN \Rightarrow DN \equiv CN.$$

Pelo caso de congruência de triângulos LLL:

$$DNM \equiv CNM \Rightarrow NM \perp DC.$$

como

$$A\hat{N}D \equiv B\hat{N}C \text{ e } D\hat{N}M \equiv C\hat{N}M \Rightarrow NM \perp AB.$$

Alem disso,

$$A\hat{D}N \equiv B\hat{C}N \text{ e } N\hat{D}M \equiv N\hat{C}M \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{C}.$$

Prova de que os ângulos do topo são agudos. Considere um ponto ideal  $\Omega$  na reta  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $B$  esteja entre  $A$  e  $\Omega$ , e também um ponto  $E$  na reta  $\overrightarrow{DC}$  fora de  $DC$ .  $\overrightarrow{DC}$  e  $\overrightarrow{A\Omega}$  são hiperparalelas, Logo,  $\overrightarrow{D\Omega}$  divide o ângulo  $A\hat{D}C$ . Analogamente,  $\overrightarrow{C\Omega}$  divide o ângulo  $D\hat{C}E$ .

Temos

$$\alpha = \Theta(AD) = \Theta(BC) = \beta$$

(pois, são ângulos de paralelismo correspondentes aos segmentos congruentes).

Note que  $E\hat{C}\Omega = \delta$  é um ângulo externo do triângulo  $CD\Omega$ , logo  $\delta > \gamma = C\hat{D}\Omega$ . Temos,

$$\begin{aligned} \delta + \alpha &> \gamma + \alpha = \varepsilon = B\hat{C}D = A\hat{D}C \\ &\Rightarrow \delta + \beta > \varepsilon \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon + \beta + \delta = \pi$

$$\Rightarrow \pi - \varepsilon > \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

Portanto os ângulos do topo são agudos. ■

Um quadrilátero é dito **Lambert** quando possuir três ângulos internos retos.

Quadrilátero de Lambert é consequência ao de Saccheri, com um ângulo reto a mais.



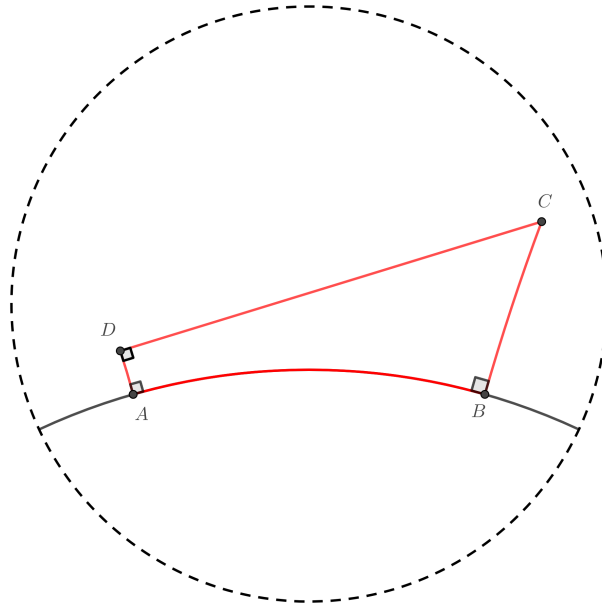


Figura 2.13: Quadrilátero de Lambert

**Proposição 2.4.** *O ângulo interno não conhecido de um Quadrilátero de Lambert é agudo.*

**Demonstração:** Seja  $ABCD$  um quadrilátero de Lambert com  $\hat{D} = \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ . Tomemos um ponto  $E \in \overrightarrow{BA}$  e  $F \in \overrightarrow{CD}$  tal que  $EA \equiv AB$  e  $FD \equiv DC$ . Por congruência de triângulos podemos mostrar facilmente que  $\hat{E} = 90^\circ$  e  $FE \equiv CB$ , ou seja,  $FEBC$  é um quadrilátero de Saccheri. Logo  $\hat{C}$  é agudo. ■

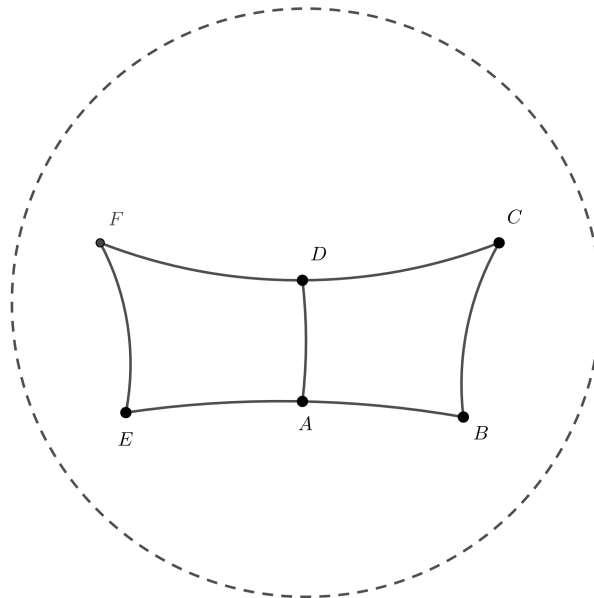


Figura 2.14: Ângulo Interno no Quadrilátero de Lambert

### 2.3.2 Ângulos Internos

**Proposição 2.5.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é menor do que dois retos.*

1) Primeiro faremos a demonstração que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que dois ângulos retos.

Considere um triângulo retângulo  $ABC$  com ângulo reto em  $C$ . Seja  $P$  o pé da perpendicular baixada de  $M$  a  $\overline{CB}$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $AB$ . Seja  $D$  de tal forma que  $D\hat{A}B = \alpha = A\hat{B}C$ . Seja  $Q \in \overleftrightarrow{AD}$  tal que  $AQ \equiv PB$ . Logo pelo caso LAL  $AQM \equiv BPM$ . Assim,  $MQ \perp \overleftrightarrow{AD}$  e  $P, M$  e  $Q$  são colineares. Deste modo o  $ACPQ$  é um quadrilátero de Lambert, ou seja,  $(\gamma = C\hat{A}B) + (B\hat{A}D = \alpha) < 90^\circ$  (pois não existe quadrado na geometria hiperbólica e como a soma dos três ângulos da  $270^\circ$  obrigatoriamente o quarto ângulo é menor que  $\frac{\pi}{2}$ ), logo  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 90^\circ$ .

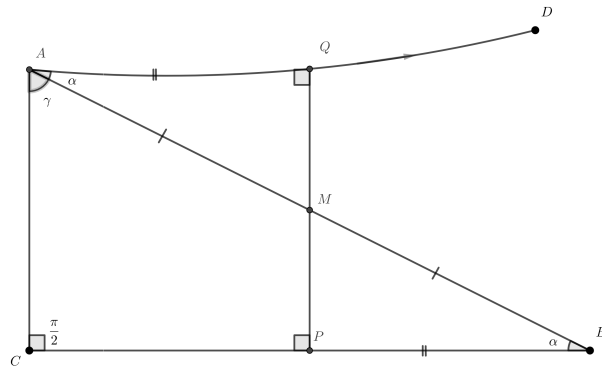


Figura 2.15: Soma dos Ângulos Internos Menor que 180 Graus, no Triângulo Retângulo Hiperbolico

**Demonstração:** Consideremos um triângulo ordinário  $ABC$  qualquer e tracemos a altura relativa ao vértice de maior ângulo (suponha que seja  $A$ ).

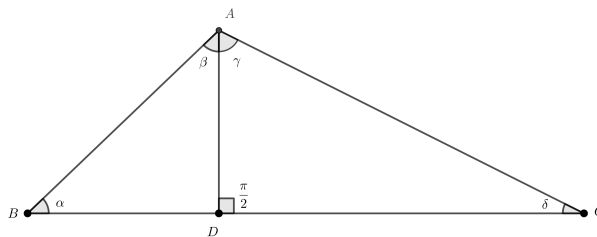


Figura 2.16: Soma dos Ângulos Internos Menor que 180 Graus, em um Triângulo Hiperbolico Qualquer

Assim dividimos o triângulo  $ABC$  em dois triângulos retângulos ordinários  $ABD$  e  $ACD$ , Logo, Pelo item 1)  $(\alpha = D\hat{B}A) + (B\hat{A}D = \beta) < 90^\circ$  e  $(D\hat{A}C = \gamma) + (\delta = A\hat{C}D) < 90^\circ$ . Assim  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 90^\circ$ . ■

(Lembrando que os segmentos dos triângulos são  $h$ -linhas, i.e., segmentos hiperbólicos)

### 2.3.3 Distância Hiperbólica

Introduziremos, na Geometria Hiperbólica, a noção de comprimento de um segmento hiperbólico. Dado o segmento hiperbólico  $AB$ , sejam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  pontos ideais da absoluta.

Definimos o comprimento hiperbólico do segmento  $\overline{AB}$  como:

$$d(A, B) = k \left| \ln \left( \frac{d(A, \Omega_2) d(B, \Omega_1)}{d(A, \Omega_1) d(B, \Omega_2)} \right) \right|,$$

onde  $k > 0$  é uma constante arbitrária, denominada constante de Gauss. Um fato interessante sobre tal definição de distância é que, quanto mais próximos da absoluta os pontos  $A$  e  $B$  estiverem, maior será a distância  $d(A, B)$  e quanto mais distantes tais pontos estiverem da absoluta, menor será a distância  $d(A, B)$ , donde se conclui que, se  $A$  e  $B$  forem pontos da absoluta, a distância entre eles é infinita.

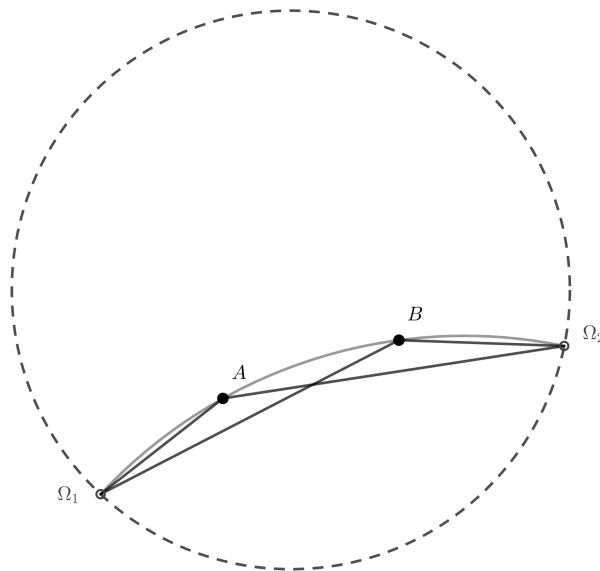


Figura 2.17: Distância Hiperbólica

**Lema 2.1.** *Seja  $A$  um ponto no interior de  $\mathbb{D}$ . A relação entre a distância euclidiana de um ponto  $A$  do círculo e a distância hiperbólica do ponto  $A$  ao centro do disco é dada por:*

$$d(O, A) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right),$$

onde  $x$  é a distância euclidiana entre  $O$  e  $A$ .

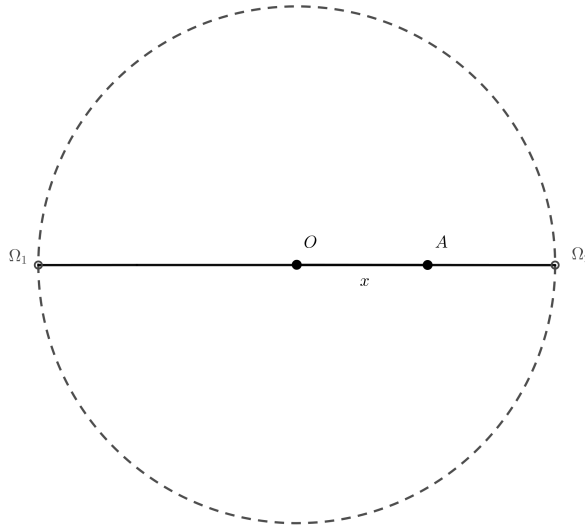


Figura 2.18: Suporte Para demonstração do Lema 2.1

**Demonstração:** Considere o disco de raio unitário com centro em  $O$  e os pontos ideais  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  tal que  $O$  e  $A$  esteja contigo no diâmetro hiperbólico  $\Omega_1\Omega_2$ . Seja  $\overline{\Omega_1 A} = 1+x$  e  $\overline{\Omega_2 A} = 1-x$ . Pela fórmula da distância hiperbólica com  $k = 1$ , tem-se

$$d(O, A) = \ln \left( \frac{1(1+x)}{1(1-x)} \right) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Traremos uma outra definição hiperbólica para quaisquer dois pontos em  $\mathbb{D}$  dissociada de pontos ideais, que servirá para demonstração de um dos teoremas principais deste trabalho. ■

**Definição 2.4.** A distância hiperbólica  $d(z_1, z_2)$ , para quais quer  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , é dada por

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left( \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right).$$

Caso um dos pontos seja a origem, ou seja,  $d(0, z)$ , então temos a seguinte fórmula

$$d(0, z) = \tanh^{-1}(|z|) \tag{2.1}$$

### 2.3.4 Área Hiperbólica

**Definição 2.5.** (Defeito) Seja  $ABC$  um triângulo com ângulos internos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Nestas condições, chamamos de defeito do triângulo o número  $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ .

Na Geometria tradicional, tem-se  $\Delta = 0$ , já que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é justamente  $\pi$ . Na Geometria Hiperbólica,  $\Delta > 0$ .

**Proposição 2.6.** *Todo polígono hiperbólico tem defeito positivo.*

**Demonstração:** Considere  $A_1A_2, \dots, A_n$  um polígono hiperbólico e  $P$  um ponto interior do polígono. Traçando os segmentos hiperbólicos  $\overline{PA_1}, \overline{PA_2}, \dots, \overline{PA_n}$ , obtemos os triângulos  $PA_1A_2, PA_2A_3, \dots, PA_nA_1$ . Cada um dos triângulos acima tem três ângulos internos, um dos quais no vértice  $P$ . Além disso, os triângulos que têm um lado comum, digamos  $\overline{PA_j}$ , contêm ângulos no vértice comum  $A_j$ , que, somados, correspondem ao ângulo interno do polígono no vértice  $A_j$ . Deste modo, a soma dos ângulos internos, no vértice  $P$ , dos triângulos acima referidos, é  $2\pi$  e a soma dos demais ângulos internos dos triângulos corresponde à soma dos ângulos internos do polígono.

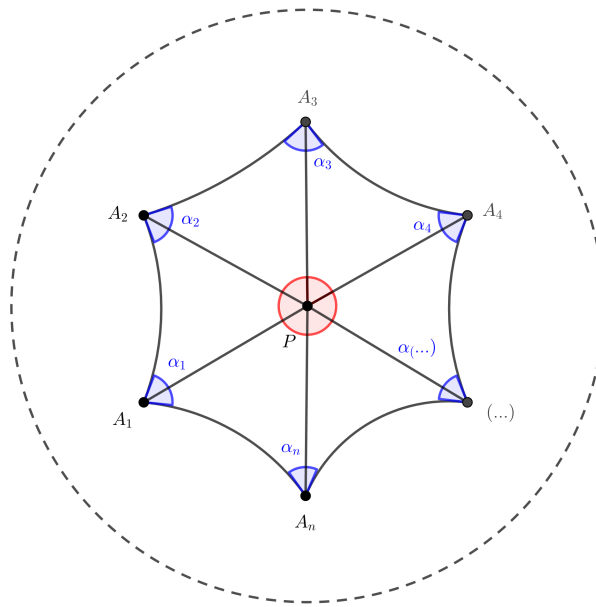


Figura 2.19: Suporte para Demonstração, Defeito Positivo

Assim, denotando por  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  os ângulos internos do polígono, conclui-se que a soma dos defeitos de  $PA_1A_2, PA_2A_3, \dots, PA_nA_1$  é dada por

$$n\pi - (2\pi + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \pi(n - 2) - \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

ou seja, a soma dos defeitos dos triângulos acima referidos nada mais é do que o defeito do polígono  $A_1A_2, \dots, A_n$ . Mas o defeito de cada um dos triângulos é positivo (Proposição 2.5). Daí, segue que o defeito do polígono é uma soma de quantidades positivas e, portanto, é positivo. ■

Como consequência da proposição anterior todo triângulo hiperbólico tem defeito positivo, como provamos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$ .

**Definição 2.6.** Seguindo [9], assim definimos a área de um círculo hiperbólico de raio  $r$ :

$$A_o = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} = 2\pi(\cosh r - 1).$$

## Área do Quadrado

É relevante destacar que o quadrado, na Geometria Hiperbólica, é um polígono com quatro lados congruentes e quatro ângulos agudos e de mesma medida, já que o defeito de todo polígono, em tal Geometria, é sempre positivo.

**Definição 2.7.** (Área de um polígono hiperbólico)

Seja  $A_1A_2\dots A_n$  um polígono hiperbólico com ângulos internos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Então, a área de tal polígono é dada pelo seu defeito, ou seja,

$$Area(A_1A_2 \cdots A_n) = \pi(n - 2) - \sum_{i=1}^n \alpha_n.$$

Assim, a **área do quadrado** é dada por

$$A_{\square} = 2\pi - 4\sigma,$$

onde  $\sigma$  é o ângulo do canto de um quadrado.

### 2.3.5 Trigonometria Hiperbólica

A Trigonometria se ocupa do estudo das relações entre os lados e os ângulos de triângulos. É sabido que, na Geometria Euclidiana, dado um triângulo retângulo qualquer, são definidas as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, dentre outras:

$$\sin \alpha = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}; \cos \alpha = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}; \tan \alpha = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}.$$

As funções trigonométricas também fazem sentido na Geometria Hiperbólica, mas apenas seria possível defini-las da mesma forma que a Geometria tradicional em modelos conformes, como o do disco de Poincaré, nos quais os ângulos são medidos da mesma forma que na Geometria Euclidiana. No entanto, uma resposta mais geral para o problema diz respeito a definir as funções trigonométricas hiperbólicas de forma puramente analítica, para depois utilizá-las no contexto da Geometria. Deste modo, são introduzidas as seguintes definições das funções seno hiperbólico ( $\sinh$ ) e cosseno hiperbólico ( $\cosh$ ):

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A tangente hiperbólica é definida de maneira análoga à da trigonometria tradicional:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Com relação às funções trigonométricas hiperbólicas, também existe uma relação fundamental,  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \\ &= \frac{2 + 2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Podem ser provadas, ainda, outras relações entre as funções trigonométricas hiperbólicas que são bem análogas às da trigonometria tradicional. Bem como, por [3], temos

$$\cosh(2 \tanh^{-1} x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

se fizermos  $x = \tanh t$  na equação acima obtemos

$$\cosh(2t) = \frac{1 + (\tanh t)^2}{1 - (\tanh t)^2} \quad (2.2)$$

Trouxemos apenas algumas identidades necessárias para prova de alguns problemas mais adiante

### 3 OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA

Há três problemas clássicos de construtibilidade que foram cogitados ainda na Grécia Antiga. Na geometria da Antiga Grécia existiram três problemas clássicos considerados de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática. Estes problemas de construção com régua não graduada e compasso resistiram às diversas tentativas dos gregos para resolvê-los. Problemas são eles: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a **Quadratura do Círculo**.

(Duplicação do Cubo) *Construir, com régua e compasso, a aresta de um cubo que tenha volume correspondente a duas vezes o volume de um cubo dado.*

(Trissecção do Ângulo) *Construir, com régua e compasso, um ângulo com medida que corresponde a um terço da medida de um ângulo dado.*

E, em especial nesse trabalho,

**(Quadratura do Círculo)** *Construir, com régua e compasso, um quadrado que tenha a mesma área que um círculo dado.*

Lembrando que todos os problemas devem ser resolvidos em uma quantidade finita de passos. Antes de mostrarmos a impossibilidade do problema da quadratura do círculo e uma resposta para esse problema na geometria hiperbólica, é conveniente apresentarmos os seguintes conceitos.

#### 3.1 Número Algébrico e Transcendente

**Definição 3.1.** (a) Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

é chamado de **Número Algébrico**, ou seja, um número  $\alpha$  é algébrico quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes racionais tal que  $\alpha$  seja raiz.

(b) Um número que não seja algébrico é chamado **Transcendente**.

#### Números Construtíveis

O passo-a-passo na construção por régua e compasso, consideramos uma régua não graduada. Na prática estaremos utilizando os seguintes axiomas euclidianos:



**Axioma 1:** Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta por esses dois pontos utilizando a régua.

**Axioma 2:** Com o compasso, dado um segmento de medida  $r$  e um ponto  $C$ , traçamos uma circunferência de raio  $r$  e centro em  $C$ .

A partir desses axiomas podemos começar com algumas construções básicas.

- Sejam  $r$  uma reta e  $A$  um ponto, podemos construir uma reta  $g$ , que contém o ponto  $A$  e é perpendicular à reta  $r$ .

- Sejam  $r$  uma reta e  $A$  um ponto exterior à  $r$ , podemos construir uma reta  $g$ , que contém o ponto  $A$  e é paralela à reta  $r$ .

- Seja  $\theta$  um ângulo, podemos dividir  $\theta$  em dois ângulos congruentes.

**Definição:** Um número real positivo  $a$  é chamado de **Construtível** se conseguirmos, usando apenas régua não graduada e compasso, construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja  $a$ , a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade.

### 3.2 A Impossibilidade da Quadratura do Círculo

**Teorema:** O problema da quadratura do círculo não tem solução com régua e compasso na Geometria Euclidiana.

**Demonstração:** Considere um círculo de raio  $r$ , que tem área  $\pi r^2$ . Queremos construir um quadrado de lado  $a$ , que tenha a mesma área do círculo, o que resulta em  $a^2 = \pi r^2$ . Deste modo,  $a = r\sqrt{\pi}$ , donde se conclui que  $a$  é construtível se, e somente se,  $\sqrt{\pi}$  é construtível. No entanto,  $\pi$  é transcendente e, por via de consequência, não pode ser construído com régua e compasso, já que todo número construtível é algébrico. Como  $\pi$  não é construtível, segue que  $\sqrt{\pi}$  também não é construtível, o que resulta na impossibilidade de construção, com régua e compasso, na Geometria Euclideana, de um quadrado com a mesma área que um círculo dado. ■

A demonstração de que  $\pi$  é um número transcendente vai além do objetivo desse trabalho, mas pode ser verificada em [11]. Um fato interessante sobre a quadratura do círculo, é um problema solúvel usando a curva **Quadratriz de Hippias**. Mas, ainda há sua (IM)possibilidade para esse problema. Apresentaremos essa curva e porque o problema ainda continua impossível na Geometria Euclidiana.

### 3.3 A Quadratriz de Hippias

#### Sua Construção

A construção dessa curva se dá pelos pontos de intercessão de duas semirretas uniformes tais que, sejam  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  dois raios de uma circunferência de centro em  $O$  e raio  $R$ . Considere as semirretas  $r$  de origem  $B$  e paralela a  $\overline{OA}$ , e  $s$  de origem em  $O$  e que passa por  $B$ . Imagine a

semirreta  $r$  "caindo" paralelamente a  $\overline{OA}$  e a semirreta  $s$  fazendo uma rotação no sentido horário, na mesma direção de  $\overline{OA}$ , com a condição que as duas semirretas terminem seu percurso ao mesmo tempo, até ambas coincidirem com  $\overline{OA}$ . A Quadratriz são os pontos de intercessão entre  $r$  e  $s$ .

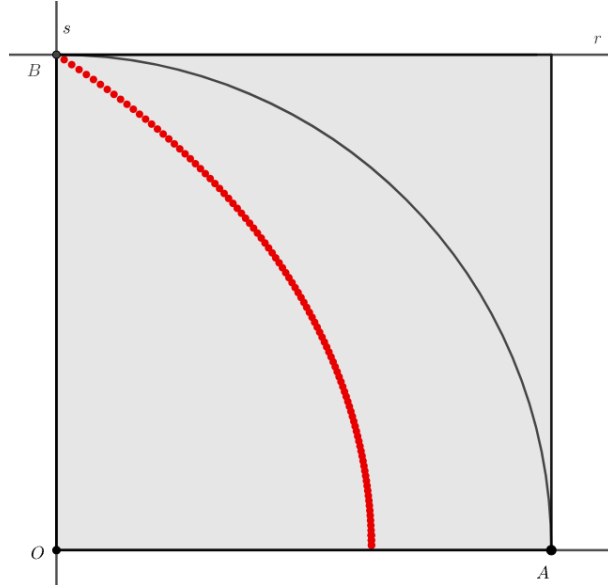


Figura 3.1: Quadratriz de Hippias

### Propriedade da Quadratriz

Dado um ponto qualquer  $(x, y)$  da quadratriz, temos que

$$\frac{y}{R} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi y}{2R} \quad (3.1)$$

Note que  $\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y}{x}$ , aplicando a função  $\tan$  em ambos lados da equação em 3.1, obtemos

$$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi y}{2R}\right) = \frac{y}{x}$$

o que nos leva a concluir que a equação cartesiana da quadratriz é dada por

$$x = \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi y}{2R}\right)} \text{ com } 0 < y < R$$

### 3.4 A (IM)Possibilidade da Quadratura do Círculo

Na construção da quadratriz, quando as duas semirretas coincidirem no seu percurso final, há um ponto "limite" da quadratura que não é possível determiná-lo com régua e compasso, chamemos o ponto  $X$ . O grande feito do geômetra grego Dinostrato, foi perceber que a solução da quadratura do círculo está ligada no calculo da distância  $OX$ . Usaremos o artifício do Calculo Diferencial para determinar essa medida, em suma, um dos limites fundamentais do

cálculo  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sent}}{t} = 1$ .

Considerando-se a equação cartesiana da quadratriz, o valor da distância  $OX$  é igual ao valor de  $x$  quando  $y$  se aproxima de 0.

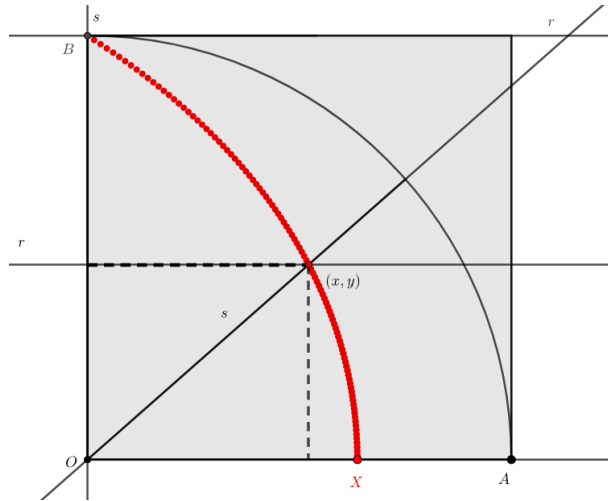


Figura 3.2: Equação Cartesiana da Curva de Hippias

Assim,

$$OX = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi y}{2R}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos\left(\frac{\pi y}{2R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2R}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2R}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{2R}\right)}{\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2R}\right)}{\frac{\pi y}{2R}}} = \frac{2R}{\pi}$$

Como queremos determinar que a área do quadrado seja igual do círculo, precisamos descrever um segmento cuja medida seja  $l = R\sqrt{\pi}$  a partir do segmento  $\overline{OX}$ . Considerando  $R = 1$ , sejam as semirretas  $\overrightarrow{OX}$  e  $\overrightarrow{OY}$  formando um ângulo qualquer em  $O$ . Dados os pontos  $R$  e  $S$  na semirreta  $\overrightarrow{OY}$  com  $R$  entre  $\overline{OS}$  e os pontos  $P$  e  $Q$  na semirreta  $\overrightarrow{OX}$  com  $P$  entre  $\overline{OQ}$ , tais que  $OR = OX = \frac{2}{\pi}$ ,  $RS = OP = 1$  sendo  $SQ \parallel RP$ . Pelo teorema de Tales, temos que

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{OP}{OR} \Rightarrow \frac{PQ}{1} = \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \Rightarrow 2PQ = \pi$$

Com isso, podemos descrever uma construção para um segmento de medida  $\sqrt{\pi}$ . Seja um semi-círculo com diâmetro  $AB = (2PQ = \pi) + 1$  e um segmento perpendicular a  $AB$  cujo ponto de intercessão da circunferência e do segmento  $AB$  é  $C$  e  $D$  respectivamente, sendo  $AD = 2PQ = \pi$ ,  $DB = 1$ . O  $\triangle ABC$  é retângulo em  $\hat{C}$ , portanto, por uma propriedade de triângulo retângulo temos que

$$(CD)^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{\pi}$$

Vimos que com o auxílio da Quadratriz de Hípias e o Cálculo Diferencial, é possível resolver o problema da quadratura do círculo. Porém, se o ponto "limite" da quadratriz, nesse caso o ponto  $X$ , fosse possível construir com régua e compasso, como consequência então o lado do quadrado igual  $\sqrt{\pi}$  seria também construtível com régua e compasso (porém já provado pelo matemático Ferdinand Lindeman que  $\pi$  é um número transcendente, logo, não construtível, portanto  $\sqrt{\pi}$  também não é). Essa é uma das justificativas da impossibilidade de quadrar o círculo na Geometria Euclidiana, o ponto  $X$  não pode ser determinado em uma quantidade finita de passos com régua e compasso, furando a regra de construção geométrica para o problema da quadratura do círculo.

### 3.4.1 Solução/Construção para Quadrar o Círculo na Geometria Hiperbólica

Será realizada a construção de um caso particular, em que o centro do quadrado e do círculo coincidem com o centro  $O$  do disco de Poincaré, o que não implica perda de generalidade. Para realizar tal intento, a primeira observação necessária é que será utilizada a fórmula de distância do referido modelo, com  $k = 1$  e com o raio da absoluta igual a 1. Pelo lema da distância hiperbólica, temos que o comprimento  $\overline{OX}$ , de um segmento que passa pelo centro do disco é dado por

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad (3.2)$$

onde  $x$  é a distância euclidiana entre  $O$  e  $X$ .

Por outro lado, como a área de um círculo hiperbólico de raio  $r$  é dada por

$$4\pi \left( \frac{e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}}{2} \right)^2 \quad (3.3)$$

e a área de um quadrado hiperbólico é  $2\pi - 4\sigma$ , em que  $\sigma$  é a medida de um dos quatro ângulos. Considere-se, agora, um círculo centrado em  $O$ , em que a outra extremidade de um dos raios é  $P$ , tal que a distância euclidiana de  $O$  a  $P$  é  $\frac{1}{2}$ . Daí, por (3.2) segue que

$$d(O, P) = \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \ln \left( \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \ln 3$$

com essa medida do raio ( $\ln 3$ ) podemos obter a área do círculo, por (3.3) obtemos que

$$4\pi \left( \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} \right)^2 = 4\pi \left( \frac{e^{\ln \sqrt{3}} - e^{\ln \frac{1}{\sqrt{3}}}}{2} \right)^2 = 4\pi \left( \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} \right)^2 = \frac{4\pi}{3}$$

Como queremos construir um quadrado de mesma área  $\left( \frac{4\pi}{3} \right)$  devemos obter o ângulo interno  $\sigma$

$$2\pi - 4\sigma = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \sigma = \frac{\pi}{6} \text{ que é um ângulo construtível}$$

Para realizarmos a construção, devemos proceder da seguinte forma:

1- construir dois triângulos  $ABC$  e  $ADK$  congruentes e refletidos, com ângulos internos  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , de tal modo que o ângulo  $A$ , de medida  $\frac{\pi}{6}$ , seja comum aos dois triângulos. Para a construção, desses triângulos, é viável iniciar construindo um triângulo equilátero  $\triangle ADZ$ , depois traçar uma bissetriz no ângulo  $\hat{A}$ , seja  $K$  o ponto de intercessão dessa primeira bissetriz com o segmento  $\overline{DZ}$ . Trace uma segunda bissetriz no ângulo  $D\hat{A}K$ , seja o ponto  $E$  intercessão da segunda bissetriz com o segmento  $\overline{DK}$ . Agora trace um perpendicular ao segmento  $AD$  passando por  $E$ . Obtemos os pontos  $C$  e  $B$  como na figura 3.3.

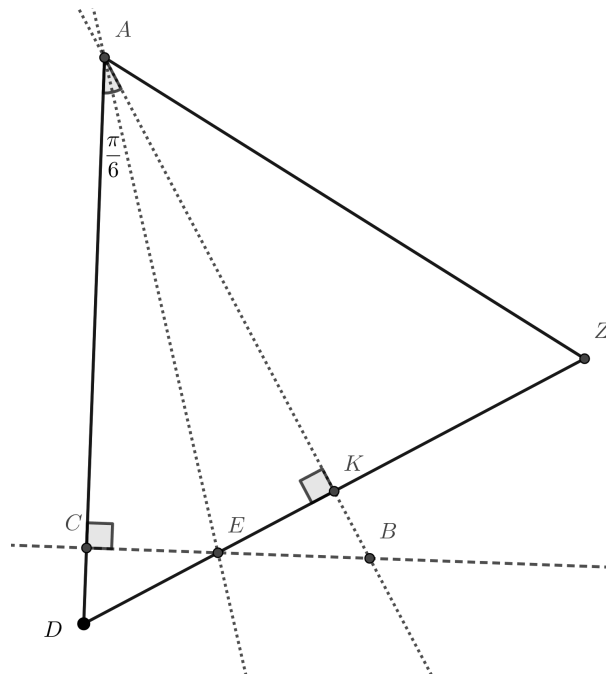


Figura 3.3: Passo 1 da Construção

Considere apenas os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADK$ .

2- traçar os círculos de centros  $B$  e  $D$  e raios de medida  $DE = BE$ , que se intersectarão  $AB$  e  $AD$  nos pontos  $F$  e  $H$ , respectivamente. Os arcos de círculos delimitados por  $E$  e  $F$  e por  $E$  e  $H$  correspondem a dois lados do quadrado que se pretende construir.

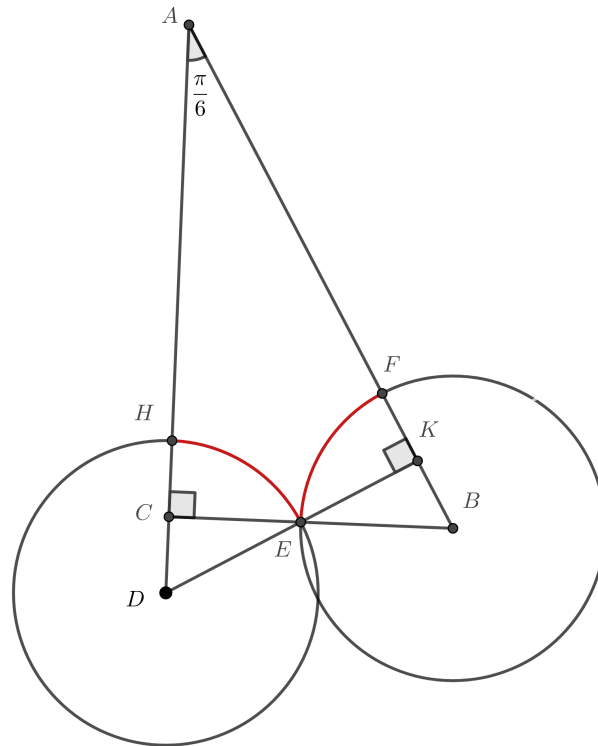


Figura 3.4: Passo 2 da Construção

3- obter o ponto  $O$ , que é o incentro comum aos dois triângulos retângulos. Para tanto, basta traçar duas das bissetrizes dos ângulos de  $\hat{A}BC$  e  $\hat{A}DK$ , que se intersectarão em  $O$ .

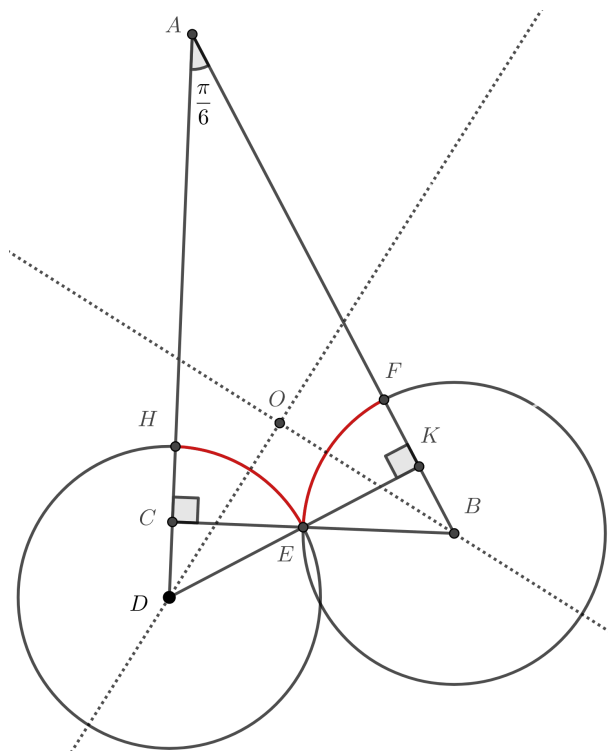


Figura 3.5: Passo 3 da Construção

4-traçar uma circunferência, de diâmetro  $OB$ , que cortará o círculo centrado em  $B$  no ponto  $J$ . O segmento  $\overline{OJ}$ , corresponde ao raio do disco de Poincaré, (como na fig. 3.6)

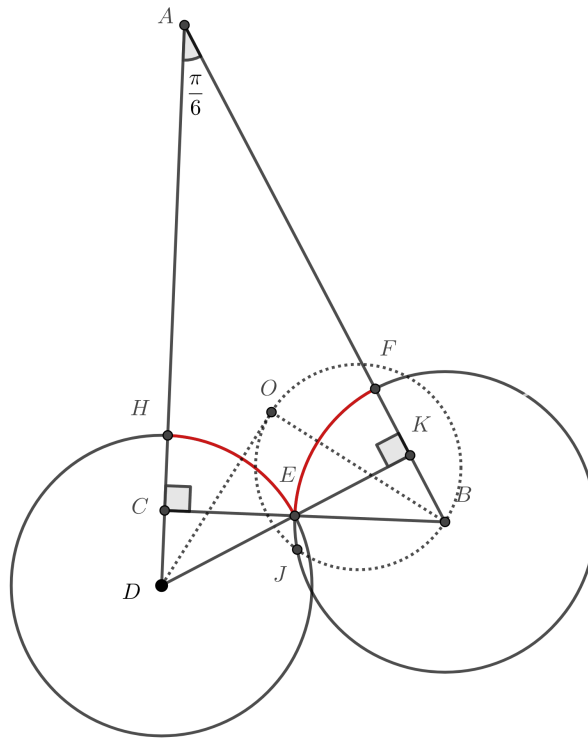


Figura 3.6: Passo 4 da Construção

5-para obter o último vértice e os outros dois lados do quadrado, devemos fazer a reflexão dos círculos dos centros  $B$  e  $D$ , pela  $\mathbb{E}$ -reta  $\overleftrightarrow{HF}$ , suporte da diagonal oposta a  $E$ . Estes dois últimos círculos terão dois pontos de interseção, um dos quais é o vértice  $G$  do quadrado. Os arcos de círculo delimitados por  $F$  e  $G$  e  $H$  e  $G$  são os outros lados do quadrado. (como na fig. 3.7 )

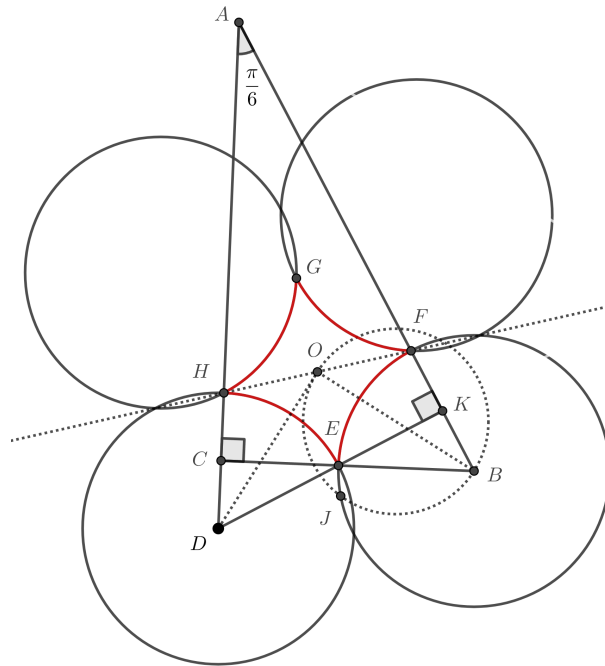


Figura 3.7: Passo 5 da Construção

6-para construirmos o círculo de mesma área que o quadrado  $EFGH$ , devemos lembrar que o raio do disco de Poincaré é  $\overline{OJ}$ , que corresponde à medida euclidiana 1 e que o círculo a ser traçado tem centro  $O$  e raio euclidiano  $\frac{1}{2}$ . Assim, para desenhar o círculo em questão, basta obter o ponto médio  $N$  de  $\overline{OJ}$  e traçar o círculo procurado, que tem raio  $\overline{ON}$ . Após desenharmos o disco de Poincaré com raio  $\overline{OJ}$ , a construção estará finalizada.

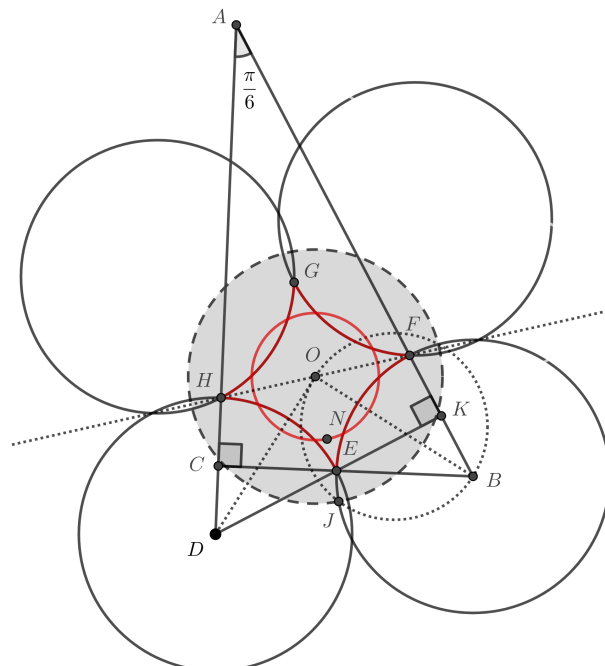


Figura 3.8: Passo 6 da Construção





e pela simetria existente na construção, conclui-se que os outros dois ângulos também medem  $\frac{\pi}{6}$ .

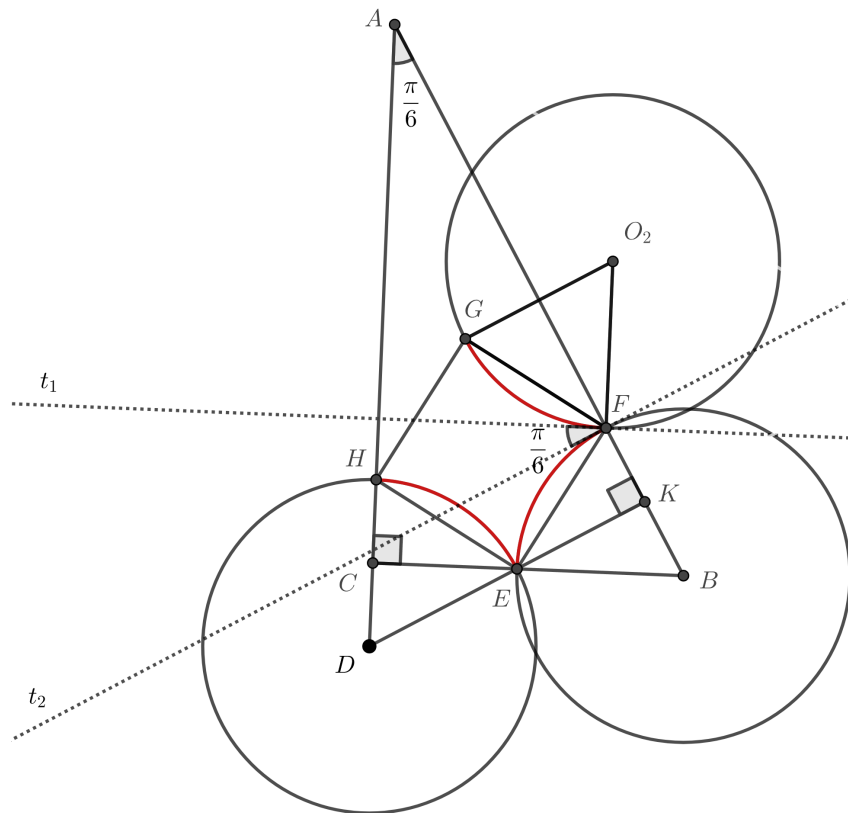


Figura 3.10: Suporte para Prova dos Demais Ângulos de  $\left(\frac{\pi}{6}\right)$

## 4 DESCOBRINDO A GEOMETRIA HIPERBÓLICA DAS HIPOTENUSAS

### 4.1 Transformação de Mobius

**Definição 4.1.** A função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma **Transformação de Mobius** se for da forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ .

As transformações de Möbius incluem translações, homotetias, rotações, inversões e reflexões, bem como quaisquer combinações das anteriores. Além disso, as transformações de Möbius formam um grupo com a operação de composição de funções, mapeam circunferências (generalizadas) em circunferências (generalizadas) e preservam os ângulos e as suas orientações. Não almejamos neste trabalho investigar propriedades dessas transformações; remetemos o leitor interessado a [7].

Um caso particular da composição de Transformação de Mobius é a seguinte aplicação (vide [3]):

**Definição 4.2.** (Transformação Hiperbólica direta)

$$M(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{com} \quad |b| < |a| \quad (4.1)$$

Correlação com  $f(z)$  temos o caso quando  $c = \bar{b}$  e  $d = \bar{a}$ . É um tipo de transformação que está restrito para o próprio disco de Poincaré ( $\mathbb{D}$ ).

**Teorema 4.1.** A transformação Hiperbólica direta  $M(z)$  pode ser escrita como

$$M(z) = K \left( \frac{z - m}{1 - \bar{m}z} \right), \quad (4.2)$$

onde  $K$  e  $m$  são números complexos com  $|K| = 1$  e  $m \in \mathbb{D}$ .

Essa é um tipo de transformação que podemos mapear o ponto  $m$  para a origem, e será usada na demonstração do teorema principal desse trabalho.

**Demonstração:** Sabemos que uma transformação hiperbólica direta é da forma (4.1). Se dividirmos a equação  $M(z)$  por  $\bar{a}$ , podemos reescrevê-la como

$$M(z) = \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{b}{\bar{a}}}{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}z + \frac{\bar{a}}{\bar{a}}} = \frac{a}{\bar{a}} \left( \frac{z - \frac{-b}{a}}{1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}z} \right),$$

como queríamos mostrar. De fato, com  $K = \frac{a}{\bar{a}}$  e  $m = \frac{-b}{a}$ , como  $a$  e  $b$  são complexos, então  $|a| = |\bar{a}|$ , segue que  $|K| = 1$ , e, pela outra condição da transformação hiperbólica direta, temos  $|b| < |a|$  logo  $|m| < 1$ . ■

**Exemplo 4.1.** Determine a forma geral da transformação hiperbólica que mapeia o ponto  $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$  para 0 (origem).

Por (4.2) temos

$$M(z) = K \left( \frac{z - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z} \right) = K \left( \frac{2z - 1 + i}{2 - (1 + i)z} \right), \text{ onde } |K| = 1.$$

Em geral, a forma inversa da transformação hiperbólica direta é escrita como

$$M^{-1}(z) = \frac{z + Km}{\bar{m}z + K}, \quad (4.3)$$

onde  $|K| = 1$  (vide [3]).  $M^{-1}(z)$  é o tipo de transformação que leva a origem ao ponto  $m$ .

## 4.2 Teorema de Pitágoras Hiperbólico

**Teorema 4.2.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo hiperbólico com ângulo reto em  $C$ . Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos hiperbólicos de  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  respectivamente, então*

$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cosh(2b).$$

Antes de passarmos à demonstração do Teorema de Pitágoras hiperbólico, é de suma demonstrarmos outro resultado.

**Teorema 4.3 (Lema Da Origem).** *Seja  $A$  um ponto de  $\mathbb{D}$  diferente da origem  $O$ . Então existe uma  $h$ -linha  $l$  tal que a reflexão hiperbólica em relação a  $l$  mapeia o ponto  $A$  para origem  $O$ .*

**Demonstração:** Seja um círculo euclidiano  $\Gamma$  que intercepte perpendicularmente absoluta em algum ponto  $P$ . A condição que desejamos para que  $A$  seja mapeado para a origem  $O$  com relação a  $h$ -linha  $l$ , é que satisfaça a condição

$$RO \cdot RA = (RP)^2 \quad (4.4)$$

Onde  $RP$  é o raio de  $\Gamma$ . (Como na figura 4.1)

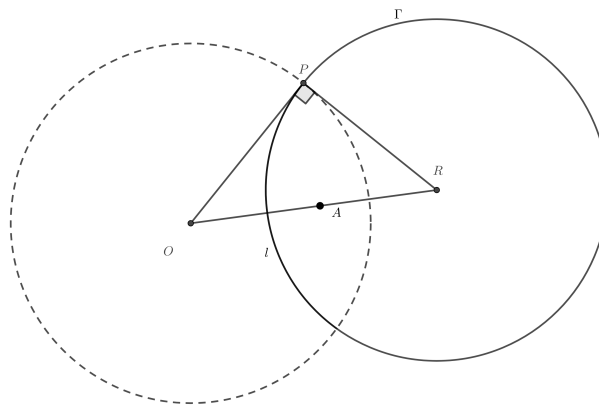


Figura 4.1: Lema da Origem

Como  $\Gamma$  é uma circunferência ortogonal, logo temos um triângulo retângulo  $\triangle OPR$  com ângulo reto em  $P$ . Pelo teorema de Pitágoras euclidiano sabemos que

$$(OP)^2 + (RP)^2 = (OR)^2$$

Desde que  $OP$  seja o raio do disco de Poincaré, ou seja,  $OP = 1$ , temos

$$(RP)^2 = (OR)^2 - 1 \quad (4.5)$$

Por 4.4 e 4.5 obtemos

$$RO \cdot RA = (OR)^2 - 1$$

$$\Rightarrow (OR)^2 - RO \cdot RA = 1$$

$$\Rightarrow RO(OR - RA) = 1$$

Note que  $OR - RA = OA$  portanto obtemos

$$OA \cdot OR = 1$$

Como desejado. Além de  $R$  ser o ponto inverso de  $A$  correlação a absoluta,  $R$  é também o centro de  $\Gamma$  cuja faz inversão do ponto  $A$  para  $O$  em relação a  $h$ -linha  $l$ . ■

**Demonstração:** A demonstração do Teorema de Pitágoras Hiperbólico partirá do Lema da Origem. Dado um triângulo hiperbólico qualquer  $\Delta\alpha\beta\zeta$ , com ângulo reto em  $\zeta$ . Aplicaremos uma inversão hiperbólica (Lema da Origem) para mapear o ponto  $\zeta$  para origem  $O = C$ . (Como na fig. 4.2)

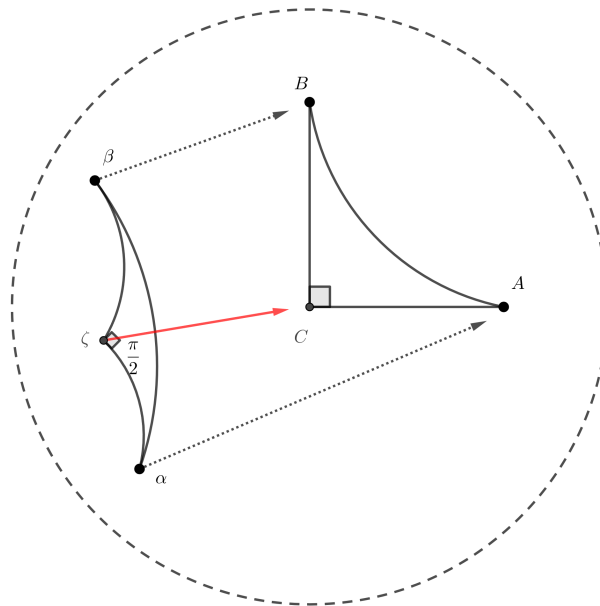


Figura 4.2: Mapeamento do Ponto  $\zeta$  para Origem

Como consequência os segmentos hiperbólicos do triângulo  $\Delta\alpha\beta\zeta$  são refletidos junto com o ponto  $\zeta$ , e é claro que, como todo segmento hiperbólico que passa pela origem são diâmetros euclidianos, juntamente com o ângulo reto que também é preservado na reflexão, com isso, logo teremos um novo triângulo  $\Delta ABC$  mais convencional para trabalharmos. Assim sendo, seja o triângulo  $\Delta ABC$  com o ponto  $C$  no centro de  $\mathbb{D}$ , o ponto  $A$  cuja está do diâmetro horizontal e  $B$  no eixo do diâmetro vertical. Denotamos por  $A = a'$ ,  $B = ib'$  e  $C = 0$  onde  $a', b' \in \mathbb{R}$  em  $\mathbb{D}$  e as  $h$ -linhas  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ . (como na figura 4.3).

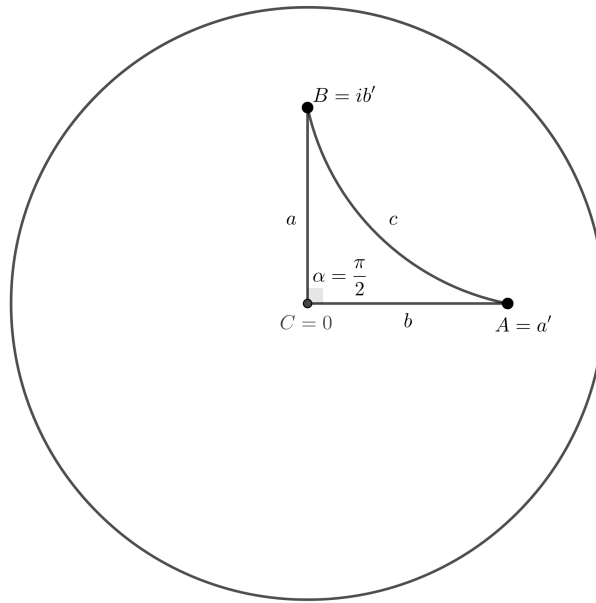


Figura 4.3:

Figura 4.4: Triângulo Hiperbólico

Segue da distância hiperbólica (2.1)

$$a = d(0, b') = \tanh^{-1}(|b'|)$$

$$b = d(0, a') = \tanh^{-1}(|a'|)$$

Para facilitar nossos cálculos, podemos usar outra Transformação de Möbius, dessa vez, mapeamos o ponto  $A$  para o centro de  $\mathbb{D}$ , (denotaremos de  $A \rightarrow A' = 0$ ) por (4.2)

$$M(z) = \frac{z - a'}{1 - \overline{a'}z} = \frac{z - a'}{1 - a'z}$$

Agora o ponto  $B$  para outro ponto qualquer de  $\mathbb{D}$  complexo mantendo o ponto  $a'$  no centro, ( $B \rightarrow B' = b''$ ) obtemos

$$M(ib') = b'' = \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'}$$

Mais uma vez, mapeando o ponto  $C$  da origem para o eixo do diâmetro horizontal, fazendo  $M(0) = -a'$  temos o ponto  $C \rightarrow C' = -a'$ . Obtemos o triângulo hiperbólico  $\Delta A'B'C'$  com  $A' = 0$ ,  $B' = b''$  e  $C' = -a'$ .

Esse processo com as transformações preservam as  $h$ -linhas, ou seja,  $\overline{A'B'} = \overline{AB} = c$ . Assim, pela forma da distância hiperbólica temos

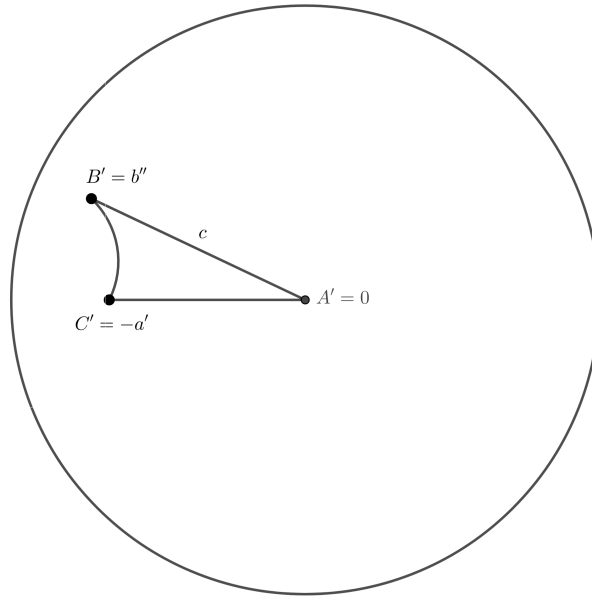


Figura 4.5: Triângulo Hiperbólico

$$c = d(a', b') = d(a'', b'') = d(0, b'') = \tanh^{-1}(|b''|) = \tanh^{-1} \left( \left| \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'} \right| \right)$$

Seguimos por (2.2)

$$\cosh(2a) = \frac{1 + (|b'|)^2}{1 - (|b'|)^2} = \frac{1 + (\sqrt{(b')^2})^2}{1 - (\sqrt{(b')^2})^2} = \frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2}$$

De mesma forma,

$$\cosh(2b) = \frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2}$$

Portanto, como  $c = \tanh^{-1} \left( \left| \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'} \right| \right)$  conclui-se

$$\begin{aligned} \cosh(2c) &= \frac{1 + \left( \left| \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'} \right| \right)^2}{1 - \left( \left| \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'} \right| \right)^2} = \frac{1 + \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a'b')^2}}{1 - \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a'b')^2}} \\ &= \frac{1 + (a')^2 + (b')^2 + (a'b')^2}{1 - (a')^2 - (b')^2 + (a'b')^2} \\ &= \left( \frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2} \right) \left( \frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2} \right) \\ &= \cosh(2a)\cosh(2b) \end{aligned}$$

■

**Exemplo 4.2.** Use o Teorema de Pitágoras Hiperbólico para determinar a hipotenusa do triângulo  $\triangle ABC$  com ângulo reto em  $C$ , cujos vértices são  $A = \frac{1}{5}$ ,  $B = \frac{i}{2}$  e  $C = 0$ .

Considere os segmentos hiperbólicos  $\overline{CB} = a$ ,  $\overline{CA} = b$  e  $\overline{AB} = c$ .

Pela formulada distância hiperbólica 2.1 temos

$$a = d(0, B) = d\left(0, \frac{i}{2}\right) = \tanh^{-1}\left(\left|\frac{i}{2}\right|\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b = d(0, A) = d\left(0, \frac{1}{5}\right) = \tanh^{-1}\left(\left|\frac{1}{5}\right|\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Pela equação do teorema de Pitágoras Hiperbólico temos a seguinte expressão

$$\cosh(2a) \cdot \cosh(2b) = \cosh\left(2\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \cosh\left(2\tanh^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{13}{12} = \frac{65}{36}$$

como queremos determinar a hipotenusa  $c$ , Segue-se

$$\cosh^{-1}(\cosh(2c)) = \cosh^{-1}\left(\frac{65}{36}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{65}{36}\right).$$

Há uma versão interessante desse teorema em relação com o Teorema de Pitágoras da Geometria Euclidiana, ainda mais semelhante se as  $h$ -linhas forem suficientemente pequenas. Por um polinômio de Maclaurin, Sabemos que,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Segue-se,

$$\cosh(2c) = 1 + \frac{(2c)^2}{2!} + \frac{(2c)^4}{4!} + \frac{(2c)^6}{6!} + \dots$$

Vamos desconsiderar o somatório com potência  $\geq 4$ , por considerarmos números suficientemente pequeno, temos

$$\cosh(2c) \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!}$$

De mesmo modo, para  $\cosh(2a)$  e  $\cosh(2b)$ , verifica-se que

$$\cosh(2a)\cosh(2b) \approx \left(1 + \frac{(2a)^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{(2b)^2}{2!}\right) = 1 + 2a^2 + 2b^2 + 4a^2b^2$$

Mais uma vez, se ignorarmos  $4a^2b^2$  por ser tão pequeno quanto os termos que já eliminamos, conclui-se que

$$1 + 2a^2 + 2b^2 \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!}$$

$$a^2 + b^2 \approx c^2$$

O que lembra a versão do Teorema de Pitágoras da Geometria Euclidiana.



## 5 CONCLUSÃO

A Geometria Hiperbólica, um sistema geométrico intrigante e não intuitivo, é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, que por muito tempo serviu como padrão de referência na Matemática. Essa consistência é notável, uma vez que a Geometria Hiperbólica satisfaz os axiomas fundamentais de Euclides, que formam a base da Geometria Neutra, mas modifica o coração da Geometria Euclidiana, que é a noção de paralelismo, trocando o Quinto Postulado de Euclides pelo Postulado de Lobachevsky.

Muitos resultados obtidos na Geometria Euclidiana têm contrapartes hiperbólicas. Isso ressalta a complexidade e a riqueza da Matemática, mostrando como diferentes sistemas podem coexistir e oferecer perspectivas únicas. Nosso estudo da Geometria Hiperbólica constitui trabalho em andamento, que deve culminar no trabalho de conclusão de curso do primeiro autor sob orientação do segundo.

## REFERÊNCIAS

- [1] AGUSTINI, Edson. **Introdução à geometria hiperbólica plana**. 1 ed. Uberlândia: FARMAT UFU; CEaD UFU, 2022.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [3] BRANNAN, David A; ESPLEN, Matthew F; GRAY, Jeremy J. **Geometry**. 2 ed. Cambridge University Press, 2011.
- [4] COLOMBO, Jones; Sousa, Diogo Dantas. **Régua e Compasso na Geometria Hiperbólica**. IX Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Juazeiro do Norte - CE, URCA/IFCE, 2019.
- [5] DAVIS, Noah. **Squaring the circle in the hyperbolic disk**. RoseHulman Undergraduate Mathematics Journal, Vol. 15, N°1, pp. 22-30, 2014.
- [6] FIGUEIREDO, Elisandra Bar; BOLLAUF, Maiara Francine; MIARKA, Roger. **A (IM)Possibilidade da Quadratura do Círculo por Meio da Quadratriz**. Revista do Professor de Matemática, N. 81, p. 40–44, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [7] FISHER, Stephen D. **Complex variables**. 2 ed. Courier Corporation, California: Wadsworth & Brooks, 1999.
- [8] LEE, John M. **Axiomatic Geometry**. Pure and applied undergraduate texts, volume 21. Providence: AMS, 2013.
- [9] LIMA, Johnny Felipe. **O Problema da Quadratura do Círculo no Plano Hiperbólico**. 2017. Dissertação (Mestrado) - PUC-Rio. Rio de Janeiro.
- [10] MAGALHÃES, José Messias. **Um estudo dos modelos da geometria hiperbólica**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas: Rio Claro, 2015.
- [11] OLIVEIRA, João Milton. **A Irrracionalidade e Transcendência do Número  $\pi$** . Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2013.