UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THAÍS FABLICIO DE CASTRO LEÃO

FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2023

THAÍS FABLICIO DE CASTRO LEÃO

FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Teconologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Israel Buriti Galvão
Coorientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

CAMPINA GRANDE
2023

L437f Leão, Thais Fablicio de Castro.

Funções afins e quadráticas [manuscrito] : estudo e aplicações / Thais Fablicio de Castro Leao. - 2023.

47 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Israel Buriti Galvão , Departamento de Matemática - CCT. "

1. Função de primeiro grau. 2. Função de segundo grau. 3. Educação matemática. 4. Educação básica. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

THAÍS FABLICIO DE CASTRO LEÃO

FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Teconologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em: 22/03/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

À minha família,
DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por conceder as graças necessárias durante este itinerário. E a Nossa Senhora, minha mãe, por ser fonte de sabedoria e fortaleza.

Aos meus pais, Silvana e Flávio, pelo amor, ensinamentos, renuncias feitas para que eu tivesse sempre educação escolar de qualidade, e por tudo que fizeram e fazem por mim, minha gratidão. Amo-vos.

Aos meus irmãos, Thiago e Tamires, só para constar aqui mesmo (risos), brincadeira a parte, vocês são essenciais em minha vida. Amo vocês. A minha sobrinha, Sofia, que mesmo sem entender do que se trata, torna-se fonte de inspiração para eu buscar dá sempre o meu melhor. Tia Thaís te ama.

Aos meus avós, Antônio Fablicio e Edilza Macedo (in memoriam), vô que mesmo sem estudos era um mestre na arte de contar. Voinha que sempre guardava meu lugar na fila do ônibus e sempre atenta aos meus passos desde a educação básica até a licenciatura. Obrigada pelo amor em detalhes.

Ao Professor Iasrael Galvão, por ter aceitado me orientar. Professor Israel, jamais esquecerei esse ato de generosidade fundamental para realização deste sonho, serei grata eternamente ao senhor.

Ao professor Fernando, por ter aceitado me coorientar e conduzir neste trabalho, por toda atenção, consideração, ensinamentos, paciência, dedicação e contribuição fundamental na minha formação, por tudo e por tanto, gratidão. Muito obrigada, professor Fernando. Toda minha admiração e respeito à sua trajetória.

As professoras Emanuela e Kátia, por aceitarem participar da banca avaliadora. Destaco ainda todo apoio, atenção e generosidade dispensados a mim por parte dos coordenadores do curso, a vocês minha gratidão.

A todo departamento de matemática, na pessoa das professoras: Thiciany por quem tenho estima, admiração, respeito, e por em um momento especifico ter sido fonte de incentivo e apoio. A Kátia Suzana por ter sido fonte de inspiração para este trabalho, bem como a professora Isabella Duarte por ter caminhado durante um bom tempo comigo.

Aos meus amigos da graduação, aos meus amigos de escola, neste representados por Ana Rachel e Matheus Balbino, meu primo amigo com quem dividi alegrias e angustias no ensino médio; aos meus amigos irmãos de fé: Pe. Daniel, Pe. Rogério, Maria Américo, Dellany, Karine, João Pedro, meus irmãos "Sal e Luz" e tantos outros que mesmo não citados foram e são fundamentais para meu êxito, a vocês por todo apoio, incentivo, companheirismo, amizade e amor dispensados a mim. Gratidão, amo vocês!

Agradeço a um grande incentivador, amigo e líder excepcional, Emmanuel (Mano), por todo apoio e compreensão, principalmente, nos dias que me ausentei do escritório para assistir aulas; bem como aos corretores que passaram pela Imobiliária, meus amigos: Januário, Heraldo e Afonso, que com boa vontade assumiam minha função no escritório

para que eu pudesse assistir às aulas e por tudo que partilhamos gratidão.

E, por fim, a todos que de alguma forma contribuíram nesse processo de formação acadêmica.

“A Matemática é a honra do espírito humano.” (Leibniz)

RESUMO

Tem por objetivo o presente trabalho, complementar os estudos a respeito das funções, de modo particular, das funções afim ou primeiro grau e da função quadrática ou segundo grau e a aplicação das mesmas. O conteúdo de funções é um dos mais importantes para a matemática, pois este está ligado diretamente com vários outros conceitos da matemática, e também ligado ao estudo das mais diversas áreas de conhecimento. Além disto, o estudo de funções aparece na educação básica, seja nas séries finais do fundamental, quanto no ensino médio. O método para desenvolver este trabalho, foi a realização de uma pesquisa bibliográfica, seja por livros, trabalhos publicados ou sites especializados, levantando sobre a origem da definição, desde relações, sobre função, até chegar nas funçõs afim e quadrática, que são o foco deste trabalho. Já para a representação gráfica, sofwares como *Winplot* e *GeoGebra* foram utilizados. Já as aplicações que compõem este trabalho estão contextualizadas para um melhor entendimento do estudo de funções nas mais diversas áreas.

Palavras-chave: funções; função afim; função quadrática; aplicações.

ABSTRACT

This paper aims to complement the studies on the functions, particularly the linear function and the quadratic function, and their aplications. The functions analysis is one of the most important to mathematics, since it is connected to many other importante concepts of mathemathics, and also to studies on other areas of knowledge. Furthermore, the studies on functions is shown on basic educations, in both the final grades of the Middle School and High School. The method applied on this paper was the bibliografic research on books, other Papers and specialized sites on the internet, inquiring on the origins of its definition, relations, and development to both linear and quadratic functions, wich are the main subject of this paper. The grafic representations on this paper were made with softwares such as Winplot and GeoGebra, and the aplications of this paper were contextualized for a better comprehension on the study of the functions on other areas of knowledge.

Keywords: functions; linear function; quadractic function; aplications.

LISTA DE FIGURAS

Página

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática possui importante papel para o desenvolvimento da sociedade. Da mesma forma, se faz necessário o seu entendimento para produção de novos saberes e para evolução científica.

Ao longo de nossa vida escolar diversos são os conteúdos matemáticos estudados, dentre o quais, podemos destacar o estudo de funções, um dos mais fundamentais, e importantes, uma vez que, de forma simples podemos justificar por meio de uma simples afirmação: tudo está em função de algo. Mas ainda podemos justificar sua importância pelo fato de que o conceito de função está diretamente ligado a vários outros conceitos matemáticos, bem como associado ao estudo de fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento.

No campo da Matemática Básica, o estudo de funções está relacionado de forma direta com a Álgebra, e também com a Geometria Analítica, já que esta utiliza de um sistema de eixos coordenados para sua representação geométrica.

Partindo para outras áreas do conhecimento, podemos citar a conexão do estudo de função com: Física, Química e Biologia. Na Física, vários fenômenos são descritos por meio de funções, por exemplo, no estudo da eletricidade, em que a resistência de um condutor é dada em função de suas características (diferença de potencial e intensidade da corrente).

A decomposição de algumas substâncias químicas radioativas e o crescimento de populações de bactérias pode ser representado através de funções exponenciais. Dentre as inúmeras situações da Química e Biologia respectivamente, estas duas são exemplos de como a função está diretamente ligada a fenômenos dessas naturezas.

Já em áreas como as ciências sociais, econômicas e geográficas, as relações com as funções são úteis para descrever fenômenos, criar modelos que representam a realidade, podendo estes por vezes, simular situações futuras.

Dito isto, por meio deste escrito, podemos notar a grandiosidade e importância do estudo de funções, visto que, podemos observar que esta é importante não só para o desenvolvimento da própria Matemática, mas também para o estudo e compreensão de diversos fenômenos naturais, sociais ou econômicos.

A partir deste entendimento, este trabalho tem por objetivo fazer uma abordagem das **funções afins e quadráticas**, e suas aplicações, desde sua origem, passando por noções de relações e funções.

O método utilizado para o desenvolvimento deste trabalho, foi através de pesquisa bibliográfica, através de livros, trabalhos publicados e sites especializados.

Afim de alcaçar os objetivos, este trabalho foi organizado da seguinte maneira. O capítulo 1 é a introdução apresentando justificativas, objetivos e metodologia. O capítulo

2 tem um breve levantamento histórico sobre a construção do conceito de funções. O capítulo 3 traz noções de relações e função. No capítulo 4 são apresentados estudos e algumas aplicações da função afim. Já no capítulo 5 temos o estudo e algumas aplicações da função quadrática. E por fim, no último capítulo, temos as considerações finais do trabalho.

2 FUNÇÕES

2.1 Levantamento Histórico

O conceito de função chega através de um longo processo de formulação de ideias, de acordo com Yuoschkevitch (1976), em seu estudo acerca da construção do conceito de função, os principais estágios desse desenvolvimento são a **Antiguidade**, a **Idade Média** e a **Modernidade**.

2.1.1 A Antiguidade

Na **antiguidade**, o pensamento matemático não criou uma noção geral da ideia de variável ou de função (BUENO e VIALI, 2009).

Segundo Eves (2004, p.61-62), perto do ano 2000 a.C a aritmética babilônica já havia evoluido para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Nesse mesmo período dentre as diversas tábulas sexagenais, foi encontrada uma que fornece, além de um tábua de quadrados e cubos do inteiros de 1 a 30, também fornece sequência de valores de $n^2 + n^3$ correspondente a esse intervalo.

Ainda neste período, os gregos contribuiram para o conceito de função, nos estudos matemáticos e nas ciências naturais, ainda na Grécia, como parte do Império Romano, os estudos matemáticos e astronômicos já se assimilavam ao estudo da analise atual.

Muitos papiros possuíam problemas do cotidianos dos egípicios como a alimentação do gado, preço do pão,entre outros, e muitos desses problemas eram resolvidos por uma Equação do Primeiro Grau. Desta forma pode-se perceber através desse tipo de solução, ainda que de forma intuitiva os egípicios possuíam uma ideia de relção funcional entre duas grandezas. (FONSECA; SANTOS; NUNES, 2013, p.5).

2.1.2 A Idade Média

Na **Idade Média**, especialmente, na ciência europeia no século XIV, cada caso de depedência entre duas quantidades era definido através de uma descrição verbal ou gráfica.

Neste período, podemos destacar Nicole Oresme, que segundo Eves (2004), foi o maior matemático de sua época (1323 - 1382). Por sua vez, Oresme, desenvolveu esse estudo de funções através da abordagem geometrica, pois foi o mesmo que desenvolveu as teoria das latitudes e das longitudes das formas, considerada a precursora dos esboços gráficos. De acordo com Boyer (1974), os termos latitude e longitude usados por Oresme são equivalentes, num sentindo amplo, à ordenada e abscissas.

2.1.3 A Idade Moderna

Chegando na **Idade Moderna**, no final do século XVI e, principalmente, no século XVII, expressões análiticas de funções começaram surgir. Esse desenvolvimento foi estimulado, segundo Youschkevitch (1976) pelo desenvolvimento da álgebra simbólica e pela extensão do conceito de número, englobando tanto o conjunto dos números reais quanto o número imaginário "i" e o conjunto dos números complexos. Esses foram os conceitos matemáticos fundamentais que proporcionaram a introdução da concepção de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica das funções através de fórmulas.

Neste período, podemos destacar alguns matemáticos que contribuiram para chegarmos ao conceito como:

i. **Galileu - Galilei** (1564 - 1642): de acordo com Boyer (1996) para descrever fenômenos da natureza através da matemática, ele utilizou grandezas físicas que se inter relacionavam como uma maneira de modelar funções, de forma a ter uma variável que dependia da outra. Diferentemente dos seus conteporâneos, seu interesse não era descobrir a causa desses fenômenos, mas descrevê-los algebricamente para que, de posse da condições iniciais, pudesse prever o comportamento de determinados acontecimentos mediante as equações.

ii. **Jean Bernouli** (1667 - 1748): matemático suiço, utilizou o termo função, assim designando os valores obtidos por operações entre variáveis e constantes.

iii. **Leonhard Euler** (1707-1783): fez uso da notação atual, mas foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quem criou o termo função.

iv. **P.G. Lejeune-Dirichlet** (1805-1859): matemático chegou perto da definição elementar moderna de função. Para isso, ele primeiro formulou a ideia de variável como um símbolo que representa indistintamente qualquer elemento de um conjunto de números. Depois caracterizou o conceito central: uma variável y se diz função de uma variável x, se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente.

Como dito inicialmente, o conceito de função passou por um longo processo de formulação, sendo assim, neste capítulo foi apresentado um breve resumo desta construção destacando alguns dos matemáticos, períodos e conceitos utilizados.

3 RELAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos os conceitos de Relações e Função, afim deste subsidiar os capítulos posteriores. Portanto, não faremos um estudo aprofundado desses conceitos - devido aos objetivos principais que o trabalho se propõe - destacaremos sim, os resultados necessários, para uma melhor compreensão do leitor acerca dos assuntos que dependem desses resultados.

3.1 Par Ordenado

Definição 1. Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são números reias, então $\boldsymbol{(a,b)}$ é um **Par Ordenado** de números reais onde o primeiro elemento é $\boldsymbol{a}$ e o segundo elemento é $\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{a \neq b}$, e a ordem é relevante, ou seja, se $\boldsymbol{a \neq b}$, temos que, $\boldsymbol{a \neq b}$ e $\boldsymbol{b \neq a}$, logo temos que: $\boldsymbol{(a,b) \neq (b,a)}$.

Exemplo 1. São exemplos de pares ordenados todos os seguintes conjuntos:

$$(3,-1),\ (1,3) \text{ e } (a,b).$$

Mas, vale salientar que não são só estes, aqui estamos exemplificando para que fique evidente o que nos diz a definição.

Observação 1. Como sabemos, no estudo de conjuntos, aprendemos que a ordem dos elementos não altera o conjunto em si, ou seja:

$$\{3,-1\} = \{-1,3\},\ \{1,3\} = \{3,1\} \text{ e } \{a,b\} = \{b,a\}.$$

No entanto, em alguns momentos teremos a necessidade de distinguir a ordem dos componentes dos pares, como veremos no sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos que $x = 3$ e $y = 2$.

Representando os resultados na forma de conjunto, teremos $\{3,2\}$, pela defição de conjunto, teremos que $\{3,2\}$= $\{2,3\}$, o que não é verdade para este exemplo, pois aplicando o conjunto $\{2,3\}$ no sistema obteremos os seguintes resultados:

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 & \quad 5 = 5\ (verdadeiro) \\ 2 - 3 = 1 & \quad -1 \neq 1\ (falso) \end{cases}.$$

Ou seja, não se aplica neste caso a definição de conjunto, pois desta maneira teria-se que $\{3,2\}$ é igual a $\{2,3\}$. Por outro lado, no nosso exemplo, temos que $(3,2)$ é diferente de $(2,3)$, isto é, a regra/definição de conjunto só se verificou em uma das equações do sistema.

Diante de situações como esta, sentiu-se a necessidade de definir par ordenado, como sendo um conjunto formado por dois elementos e que a ordem destes importa.

Definição 2. Dizemos que dois pares ordenados, (a,b) e (c,d), são **iguais** se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Isto é, se os primeiros elementos de cada par forem iguais, respectivamente, e se acontecer a igualdade entre os segundos elementos dos pares, temos uma igualdade de par ordenado.

Simbolicamente:

$$(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a = b \text{ e } c = d.$$

Exemplo 2. Seja (a,b) um par ordenado, tal que $(a,b) = (2,5)$. Assim:

$$(a,b) = (2,5) \Longleftrightarrow a = 2 \quad e \quad b = 5.$$

Perceba que se invertermos a ordem temos:

$$(a,b) = (5,2),$$

ou seja, agora teríamos que $a = 5$ e $b = 2$.

Ao compararmos com o Exemplo 1 da página 15, vemos que são pares distintos.

3.2 Produto Cartesiano

Definição 3. Definimos **produto cartesiano** de A por B, $A \times B$, o conjunto formado por todos os pares ordenados (x,y), nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B, isto é:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Por outro lado, se A ou B forem vazios, o produto cartesiano de A por B é definido como conjunto vazio.

$$A \times \varnothing = \varnothing \ , \quad \varnothing \times B = \varnothing \quad e \quad \varnothing \times \varnothing = \varnothing.$$

Se $A = B$ ou $B = A$, então o produto cartesiano de A por B pode ser denotado $A \times A = A^2$.

Observação 2. Vale destacar algumas observações à cerca do produto cartesiano:

i. Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

ii. Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

iii. Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio então $A \times B$ é um conjunto infinito.

Para representar um produto cartesiano dispomos de diversas formas, como veremos no exemplo a seguir.

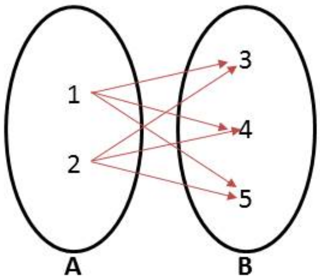
Exemplo 3. Considere os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4,5\}$, denominamos produto cartesiano todos os pares (x,y), tais que $x \in A$ e $y \in B$, indicado pela expressão $A \times B$, simbolicamente representado por:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \ e \ y \in B\}$$

1. Utilizando a representação pelo **Diagramas de flechas**, teremos:

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$

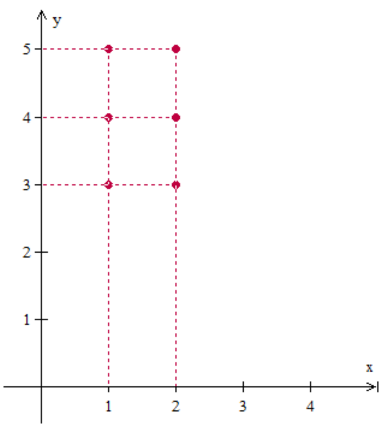
Figura 1 – Diagrama de flechas do produto cartesiano de A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

2. Representando pelo gráfico cartesiano, temos que os elementos de A são representados no eixo x, logo os elementos de B são representados no eixo y. O gráfico de $A \times B$ é constituido pelos pontos pertencentes ao produto $A \times B$, graficamente temos:

Figura 2 – Produto cartesiano de A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Ainda considerando os conjuntos A e B, podemos obter outros produtos cartesianos:

i. $B \times A = \{(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

ii. $A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$

iii. $B \times B = B^2 = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(4,3),(4,5),(5,5),(5,3),(5,4)\}$

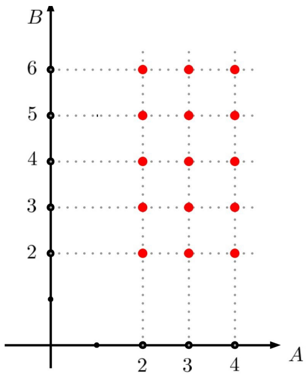
Exemplo 4. Considere dois conjuntos não vazios A e B, com $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5,6\}$. O produto cartesiano de A por B, possui 15 elementos e é dado por

$$A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),$$

$$(3,6),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

No plano cartesiano, temos:

Figura 3 – Produto cartesiano de A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

3.3 Relação binária

Definição 4. Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos **relação binária**, R, de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.

$$R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Longleftrightarrow R \subset A \times B.$$

Se, por ventura, os conjuntos A e B forem iguais e se existe uma relação de A em A, chamamos de relação binária em A:

$$R \text{ é relação binária de } A \Longleftrightarrow R \subset A \times A.$$

O conjunto relação, R, é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$, e é formado por pares ordenados (x, y), em que o elemento x de A está associado ao elemento y de B, portanto, existe uma correspondência.

Disto, tiramos as seguintes nomenclaturas:

1. A é o conjunto de partida da relação R

2. B é o conjunto de chegada ou contra-domínio da relação R.

Quando o par (x,y) pertence a relação R, escrevemos xRy, ou seja, x está relacionado com y.

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow x\ R\ y$$

Se $(x,y) \notin R \Longleftrightarrow x \not R\, y$.

Exemplo 5. Do Exemplo 4, podemos considerar o subconjunto dos pares ordenados (x,y) que satisfazem $x \mid y$, isto é, tais que x é divisor de y. Assim, estabelecemos uma relação R de $A \times B$ dada pelo seguinte conjunto

$$R = \{(x,y) \in A \times B \quad | \quad x \mid y\ \} = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3)(3,6),(4,4)\}.$$

3.4 Domínio e Imagem

Sejam A e B dois conjuntos e R uma relação. O produto cartesiano, $A \times B$, possui uma relação $R : A \to B$, em que A é dito *conjunto de partida* de R e B de *conjunto de chegada* ou contra-domínio da relação.

Definição 5. Considere R uma relação de $A \times B$. Chamamos de **domínio** de R o subconjunto D contido em A que é formado por todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x,y) que pertecem a R.

$$x \in D \Longleftrightarrow (x,y) \in R \mid y \in B$$

Exemplo 6. Se $A = \{0,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ qual é o domínio de

$$R = \{(x,y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}?$$

Solução:

Resolvendo o produto cartesiando de A por B, temos que o conjunto relação é:

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}.$$

Logo, como vimos, o Domínio é formado por todos os primeiros elementos dos pares ordenados, ou sejam: as abcissas.

$$D = \{2,3,4\}.$$

Definição 6. **Imagem** da relação R é o subconjunto $Im \subset B$ formado por todos os segundos elementos dos pares ordenados (x,y) que pertecem a R.

$$y \in Im \Longleftrightarrow \exists x,\ x \in A \mid (x,y) \in R$$

Exemplo 7. Estabelecer o domínio e a imagem das seguintes relações:

a) $R_1 = \{(1,1),(1,3),(2,4)\}$

Solução: Como vimos nas definições de domínio e imagem, temos que o $D = \{1,2\}$ e a $Im = \{1,3,4\}$.

b) $R_2 = \{(2,1),(1,-3),(5,\sqrt{2})\}$

Solução: Nesta relação, o conjunto D é formado pelos elementos $\{1,2,5\}$, pois representam as abcissas dos pares ordenados, a imagem é formada pelos segundos elementos dos pares ordenados, como visto na definição. Logo, $Im = \{-3,1,\sqrt{2}\}$.

Exemplo 8. Sejam os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ e R a relação binária de A em B definita por

$$x \; R \; y \Longleftrightarrow x = y^2$$

Pede-se:

a. enumerar os pares ordenados de R

Solução: Para enumerar os pares ordenados de R de forma mais objetiva, construiremos a seguir uma tabela, na qual iniciaremos com os valores de y, em seguida o resultado deste elevado ao quadrado, para só depois chegarmos aos valores correspondentes em x. Observe:

y	y^2	x
-2	4	4
-1	1	1
0	0	0
1	1	1
2	4	4

Logo, teremos que: $R = \{(0,0),(1,-1),(1,1),(4,-2),(4,2)\}$.

b. enumerar os elementos do domínio e da imagem de R **Solução:** Os subconjuntos D e Im são formados pelos elementos:

3.5 Função

Definição 7. Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma **função** de A em B se, para cada elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ correspondente.

Noutras palavras, para que tenhamos uma função de A em B se faz necessário:

i) um conjunto A não vazio;

ii) um conjunto B não vazio;

iii) uma regra de associação,

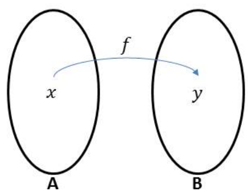
Onde a regra de associação deve fazer com que cada elemento de A associe-se a um único elemento de B. Simbolicamente, temos:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Temos que f é uma relação de A em B:

$$\{\forall x \in A, \exists\ y \in B \mid (x, y) \in f\}.$$

Figura 4 – Diagrama da função f que transforma x de A em y de B



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Para enterdemos melhor o que signifca cada símbolo da notação, explicaremos agora:

i) Vimos que f é a letra escolhida para representar a **função**, $y = f(x)$ é a regra de formação da função, lembrando que toda função necessita de sua lei de formação.

ii) Já o símbolo $A \to B$ significa que os elementos do conjunto A serão aplicados na regra $f(x)$ e terão como resultados os elementos de B, ou seja, a letra x, será substítuida por um elemento qualquer de A.

iii)

- $x \in A \to$ variável independente;
- $y \in B \to$ variável dependente;
- Se x não possui correspondetne em B, não temos uma função.

Exemplo 9. Dados dois conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x$.

Tendo os conjuntos A e B, e a regra de associção

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\},$$

temos que,

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}.$$

Podemos observar que é uma função, pois satisfaz as três regras vistas na definição.

Observação 3. Note que o elemento -1 do conjunto B não se associa a nenhum elemento de A. Mas, isto não impede que seja função, pois, por definição, temos que todos os elementos de A devem estar associados a um elemento de B, mas nem todos os elementos de B precisam estar associados a algum elemento do conjuto A.

Exemplo 10. Dados dois conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 - 2x$.

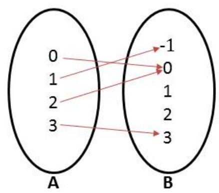
$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - 2x\}.$$

Logo,

$$R = \{(0,0), (1,-1), (2,0), (3,3)\}$$

é função, pois todos os elementos de A associam-se a um único elemento de B. No diagrama, temos:

Figura 5 – Diagrama de flechas da função $y = x^2 - 2x$

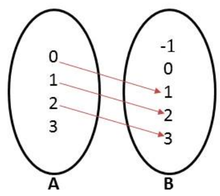


Fonte: Elaborada pela autor, 2023.

Observação 4. Neste exemplo, observamos que um elemento de B é imagem de dois elementos de A o que não impede que seja uma função, pois, um elemento pode ser imagem de n elementos de A, o que não pode é um mesmo elemento de A ter duas imagens.

Contra-Exemplo 1. Dados dois conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, vamos associar cada elemento de A ao seu sucessor em B.

Figura 6 – Diagrama da relação de A e B



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid \; y = x + 1\}.$$

Temos que,

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Logo podemos afirmar que R não é função, pois existe um elemento no conjunto de saída A que não associa-se a nenhum elemento do conjunto B, o que contradiz a definição de função.

Contra-Exemplo 2. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 4, 9\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, vamos associar cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = \sqrt{x}$.

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\} R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), (9, -3)\}.$$

Como vimos, vários elementos de A se associam a mais de um elemento de B, contradizendo o conceito de função.

3.6 Domínio, Contradomínio e Imagem

Dado a função $y = f(x)$ que relaciona elementos do conjunto A aos elementos do conjunto B, podemos definir:

3.6.1 Domínio

Definição 8. Domínio é o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Logo, pela definição de função todo elemento de A tem essa propriedade, por isso, temos que o domínio é igual o conjunto A, ou como definimos em outro ponto, A é dito conjunto de partida, isto é:

$$D = A$$

Observação 5. Se voltarmos, a definição e características de função, veremos que o conjunto A, ou melhor, os elementos do conjunto A são quem determinam o valor da variável dependente y. Noutras palavras, poderiamos dizer que A possui domínio sobre os resultados da função, por isso, é dito conjunto domínio da função.

3.6.2 Contradomínio

Definição 9. O **contradomínio** é o conjunto B, que contém todos os resultados possíveis obtidos aplicando a regra da função a um elemento do domínio. Simbolicamente, temos:

$$C_{dom} = B$$

3.6.3 Imagem

Definição 10. Chamamos de **imagem** o subconjunto do contradomínio formados por todos elementos que se relacionam a algum elemento do domínio, ou seja, é o conjunto formado por todos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

$$Im \subset B.$$

Exemplo 11. Dada a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto y = 2x \end{aligned}$$

Determine o domínio, contradomínio e imagem da função.

i) Pela definição, temos que o **domínio** da função é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Logo, os números que poderão estar no conjunto do domínio são:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...\}$$

ii) O C_{dom} é todo conjunto dos números inteiros, mas observe que nem todos elementos do contradomínio serão resultado de uma multiplicação de um número natural por 2, como por exemplo, o número 9. Assim, embora o 9 pertença ao contradomínio ele não pode ser associado a nenhum número do domínio.

iii) Teremos que o conjunto **imagem** dessa função será o conjunto dos números pares.

3.7 Gráfico

O termo **gráfico** na matemática, normalmente é utilizado quando descrevemos uma figura por meio de uma condição que é satisfeita, unicamente pelos pontos da figura.

Na matemática, uma das representações gráficas mais comum e importante é o gráfico de uma função, que pode ser apresentado como: gráficos de barra, correspôndencia ou relação entre conjuntos, gráficos cartesianos, sendo este último, o nosso objeto de definição neste tópico.

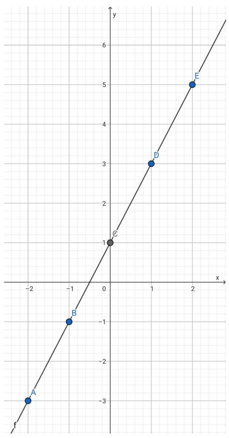
Definição 11. Definimos **gráfico cartesiano** de uma função $f(x)$ como sendo o conjunto de todos pontos (x, y) do plano que satisfazem $y = f(x)$, ou seja, o gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos do plano, da forma $(x, f(x))$, com x variando no domínio de f.

Exemplo 12. Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ e determine o conjunto imagem de f.

Solução: Como, nesse caso, $D = \mathbb{R}$, vamos atribuir alguns valores arbitrários de x

x	$y = f(x) = 2x + 1$	(x, y)
-2	-3	(-2,-3)
-1	-1	(-1,-1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)

Figura 7 – Gráfico da Função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Elabarada pela autora, 2023.

3.8 Função Par e Função Ímpar

Definição 12. Chamamos de **função par** a relação na qual o elemento simétrico do conjunto do domínio tem a mesma imagem no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será par se

$$f(x) = f(-x).$$

Exemplo 13. A função $f : A \to B$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 5\}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$ é par?

Solução: Neste exemplo, utilizaremos o diagrama de flechas para analisar se é ou não uma função par, mas antes, resolveremos $f(x)$ para cada $x \in A$, vejamos:

i. Para $x = -2$, temos: $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

ii. Para $x = -1$, temos: $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

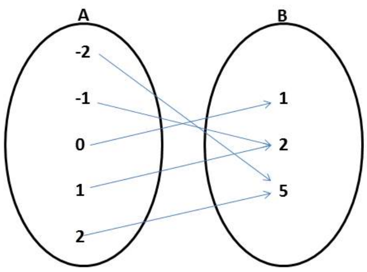
iii. Para $x = 0$, temos: $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

iv. Para $x = 1$, temos: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

v. Para $x = 2$, temos: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

Agora, temos a seguinte representação no diagrama:

Figura 8 – Diagrama da Função Par $f : A \to B$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Logo, pela resolução da função quanto pela representação no diagrama, podemos afirmar que,

$$f(x) = x^2 + 1$$

é uma função par, pois satisfaz a definição, em que o elemento simétrico do domínio tem a mesma imagem no conjunto de chegada, neste caso em particular, temos o 2 e -2 com a mesma imagem 5 e, -1 e 1 também tendo como imagem o 2.

Observação 6. Podemos, ainda, determinar se $f(x)$ é uma função par, mostrando que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D$.:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Observe que os valores obtidos após as substituições permanecem o mesmo.

Definição 13. É dita **função ímpar** toda função em que os elementos simétricos do domínio terão imagens simétricas no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será ímpar se, e somente se,

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{para qualquer } x \in D.$$

Exemplo 14. A função $f : A \to B$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ definida por $f(x) = 5x$ é uma função ímpar?

Solução: Resolvendo a função $f(x)$ para todos o valores de $x \in A$, temos:

i Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$

ii Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 5 \cdot (-1) = -5$

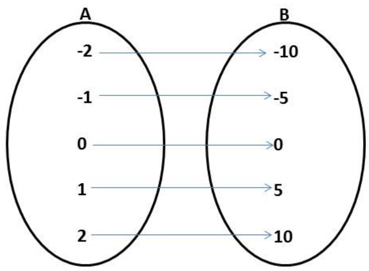
iii Para $x = 0$, temos: $f(0) = 5 \cdot 0 = 0$

iv Para $x = 1$, temos: $f(1) = 5 \cdot 1 = 5$

v Para $x = 2$, temos: $f(2) = 5 \cdot 2 = 10$

Graficamente, temos o seguinte diagrama:

Figura 9 – Diagrama da Função Ímpar $f : A \to B$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Logo, podemos afirmar que $f(x) = 5x$ é uma função ímpar, pois, pelo exemplo, os elementos simétricos -2 e 2 do conjunto A possuem imagens simétricas no conjunto B.

Poderiamos observar de outra forma se a função é ímpar, pois sabemos que para ser **função ímpar** é preciso que $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = 5 \cdot (-x) = -5x = -(5x) = -f(x).$$

Logo a função é ímpar.

4 FUNÇÕES AFINS

A função afim, suas particularidades e aplicações serão estudadas neste capítulo.

4.1 Função Afim

Definição 14. Chamamos de **função afim** uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando existem constantes reais a e b tais que

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ax + b, x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Observação 7. Aqui vale destacar as características de a e b nesssa função.

i . a e $b \in \mathbb{R}$

ii . b é chamado de valor inicial da função, enquanto a constante a é chamada de taxa de variação.

Exemplo 15. Um motorista de táxi cobra uma taxa fixa de $R\$$ $3,00$ pela "bandeirada" mais $R\$$ $1,50$ por quilômetro rodado. Assim, o preço de uma corrida de x quilômetros é dado, em reais, por:

f(x)= 1,50x+3,00

Importante: Podemos aqui, ver de forma mais evidente o que destacamos na observação 7: primeiro a e $b \in \mathbb{R}$; segundo, b neste caso $R\$$ $3,00$ é o valor inicial, ou seja, a partir do momento que você entra no táxi você já começa a pagar este valor, que será acrescido pelo produto entre a taxa de variação "a" e o total "x" de quilometros pecorridos.

Exemplo 16. Utilizando as informações do exemplo anterior, vejamos quanto custa uma corrida de 50 quilômetros.

Solução: Temos que $f(x) = 1,50x + 3,00$. Logo para $x = 50$, teremos que

$$f(50) = 1,50.50 + 3,00$$

$$f(50) = 75,00 + 3,00$$

$$f(50) = 78,00$$

Logo, o valor final de uma corrida de 50 km rodados é $R\$$ $78,00$.

4.1.1 Gráfico

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Traçado de gráficos de funções afim, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$, no plano cartesiano.

1 . $f(x) = 2x + 1$

Atribuindo valores para x, teremos:

i Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 2.(-2) + 1 = -3$

ii Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 2.(-1) + 1 = -1$

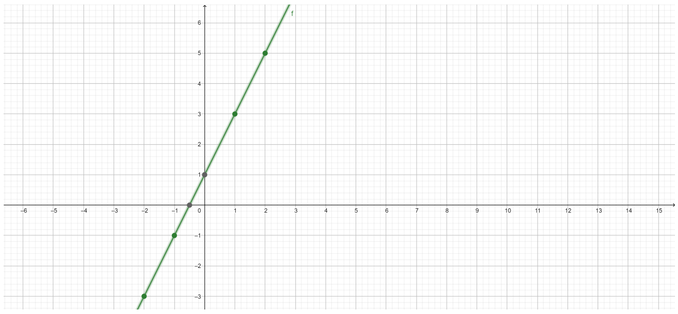
iii Para $x = 0$, temos: $f(0) = 2.0 + 1 = 1$

iv Para $x = 1$, temos: $f(1) = 2.1 + 1 = 3$

v Para $x = 2$, temos: $f(2) = 2.2 + 1 = 5$

No plano cartesiano, temos:

Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

2 . $f(x) = -3x + 2$

Atribuindo valores para x, teremos:

i Para $x = -1$, temos: $f(-1) = -3.(-1) + 2 = 5$

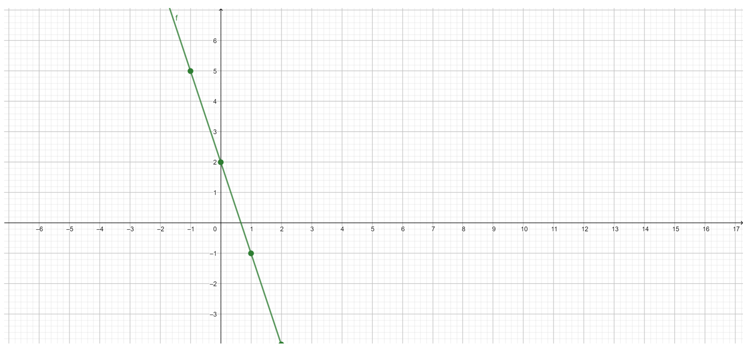
ii Para $x = 0$, temos: $f(0) = -3.0 + 2 = 2$

iii Para $x = 1$, temos: $f(1) = -3.1 + 2 = -1$

iv Para $x = 2$, temos: $f(2) = -3.2 + 1 = -4$

No plano cartesiano, temos:

Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = -3x + 2$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

4.1.2 Imagem

O **conjunto imagem** da função afim $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é $\mathbb{R}$. De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f\frac{y-b}{a} = a; \frac{y-b}{a} + b = y$.

4.1.3 Zeros da Função Afim

Chamamos de **zero da função afim** o valor de x para qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, $f(x) = 0$, noutras palavras poderiamos dizer que, o zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é:

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = 0$$

Disto, para obtermos o zero de uma função afim, basta resolver a equação do 1^0

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução

$$x = -\frac{b}{a}.$$

De fato, resolvendo $ax + b = 0$, $a \neq 0$, temos

$$ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo 17. O zero da função $f(x) = 2x - 2$ é $x = 1$ pois, fazendo $2x - 2 = 0$ obtemos, $x = 1$.

4.1.4 Funções crescentes ou decrescentes

Consideremos uma função f real de variável real. Lembrando que uma função real de variável real é uma função em que o domínio é um subconjunto dos reais, $A \subset \mathbb{R}$, e o contradomínio também, $B \subset \mathbb{R}$.

Matematicamente, seja $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

i . f é crescente $\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

ii . f é decrescente $\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Teorema 1. *Uma função afim é crescente se, e somente, se o coeficiente angular for positivo, ou seja, $a > 0$. Analogamente, uma função afim é decrescente se, e somente, se o coeficiente angular for negativo, ou seja, $a < 0$.*

Demonstração

$$\begin{aligned} f(x) = ax+b \text{ é crescente} &\iff \tfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \\ (x_1 \neq x_2) &\iff \tfrac{f(ax_1+b)-f(ax_2+b)}{x_1-x_2} > 0 \\ (x_1 \neq x_2) &\iff \tfrac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} > 0 \iff a > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = ax+b \text{ é decrescente} &\iff \tfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \\ (x_1 \neq x_2) &\iff \tfrac{f(ax_1+b)-f(ax_2+b)}{x_1-x_2} < 0 \\ (x_1 \neq x_2) &\iff \tfrac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} < 0 \iff a < 0. \end{aligned}$$

Exemplo 18. Classificar em crescente ou descrescente as funções:

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo $(a = 3)$

b) É decrescente, pois o coeficiente angular é negativo $(a = -4)$

4.2 Particularidades da Função Afim

Vejamos os casos particulares importantes da função afim $f(x) = ax + b$.

4.2.1 Função Constante

Definição 15. Dado um número $c \in \mathbb{R}$, chamamos de **função constante** a função $f : R \to R$, definida por $f(x) = c$, $\forall x \in D \subseteq \mathbb{R}$.

Isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

Esta função diferencia-se das outras funções do primeiro grau por não poder ser caracterizada por crescente ou decrescente, sendo, por isso, constante.

Imagem

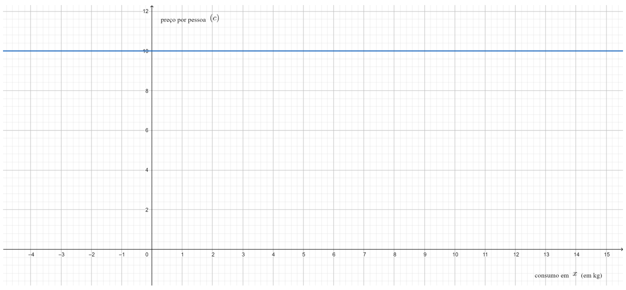
O conjunto imagem da função constante é um conjunto unitário, ou seja, $Im = \{c\}$.

Gráfico

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto $(0, y)$.

Problema 1. *Em um restaurante com o sistema de rodízio que cobra* 10 *reais por pessoa, não importando a quantidade que essa pessoa consome,* $0,2kg, 0,5kg, 2kg...$ *Desta forma o preço único pago será sempre de* 10 *reais. No plano cartesiano, temos:*

Figura 12 – gráfico da função $f(x) = c$, para $c = 10$



Fonte: Elabarada pela autora, 2023.

Como vimos anteriormente, função é uma relação entre dois ou mais conjuntos. Logo, se relacionarmos o consumo x de cada pessoa ao valor pago, obtemos uma função constante: $f(x) = c$.

4.2.2 Função Identidade

Definição 16. Uma função é dita identidade quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa-se o próprio x, isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

Dito isto, temos que a **função identidade** é uma função do tipo:

$$f(x) = ax + b, \text{ onde } a = 1 \text{ e } b = 0$$

Logo,

$$f(x) = x$$

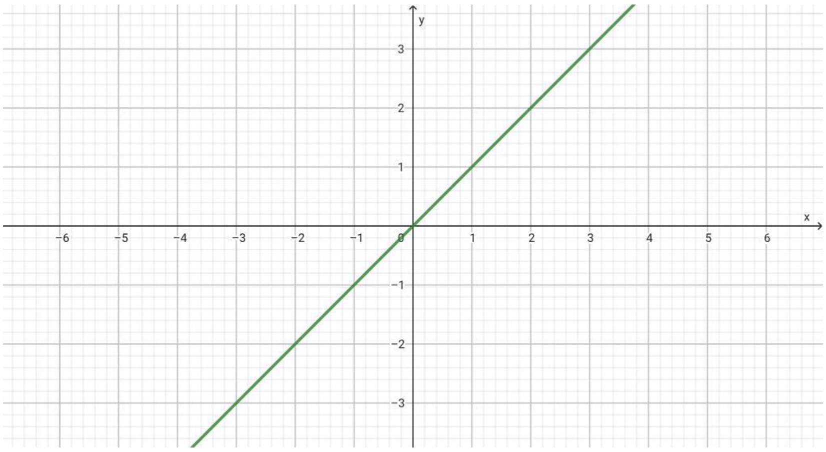
Portanto, para quaisquer valores de x o $f(x)$ será x. Disto, podemos concluir que para cada domínio x a imagem também será x.

Gráfico

O **gráfico** da função identidade é uma reta que passa na origem e contém as bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes.

Exemplo 19. Construamos o gráfico da função $f(x) = x$..

Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = x$



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

4.2.3 Função Linear

Definição 17. Chamamos de **função linear** uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in R$, en que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax, \ a \neq 0 \end{aligned}$$

Disto, temos que a lei de formação da função linear é

$$f(x) = ax$$

Lembrando que a é chamado de coeficiente angular.

Domínio e Imagem

O conjunto **domínio** da função linear é $D = \mathbb{R}$, bem como, o conjunto **imagem** é $Im = \mathbb{R}$.

Gráfico

O gráfico de função linear é sempre uma reta, que passa sempre pela origem do plano cartesiano, ou seja, pelo ponto $(0, 0)$.

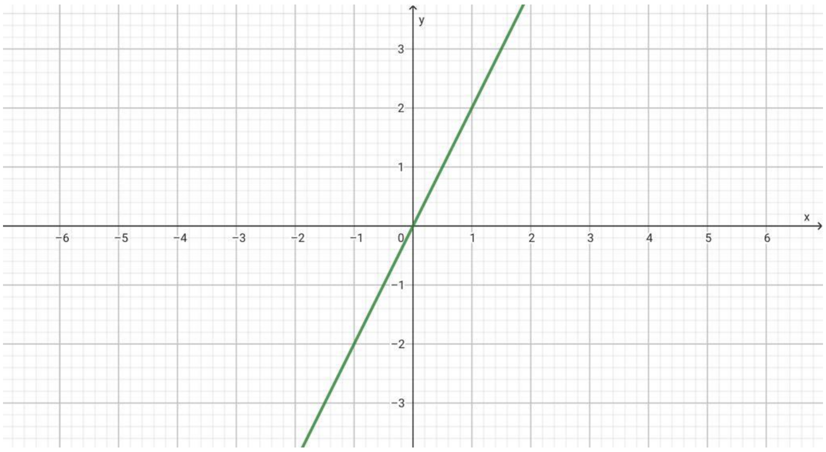
Dessa forma, temos:

i . se $a > 0$, função **crescente**;

ii . se $a < 0$, função **decrescente**;

Exemplo 20. Vejamos a representação do gráfico da função identidade $f(x) = 2x$. No plano cartesiano, temos:

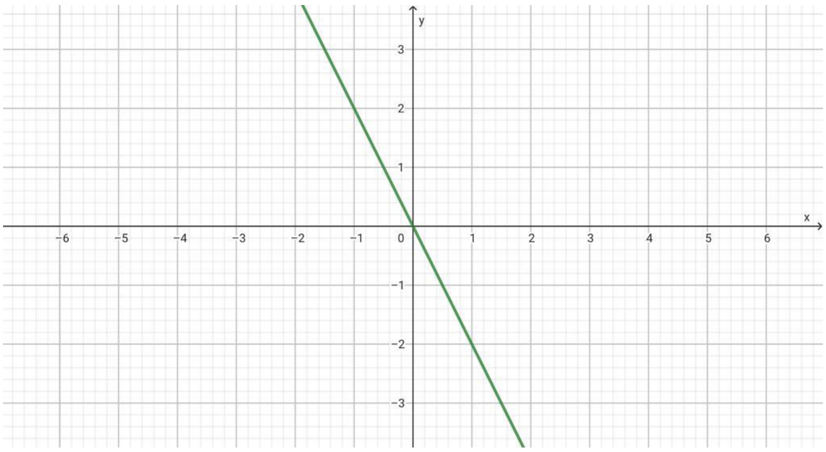
Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = 2x$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Exemplo 21. Vejamos a representação do gráfico da função $f(x) = -2x$.

Figura 15 – Gráfico da função $f(x) = -2x$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Note que o gráfico desta função é decrescente, pois temos que $a = -2$; logo $a < 0$.

4.3 Algumas Aplicações de Função Afim

Exemplo 22. Em uma indústria, a produção de peças tem um custo fixo de $R\$ \ 15,00$, mais um custo variável de $R\$ \ 2,00$ por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) Escreva a função que representa o custo total de x peças;

b) Calcule o custo de produção de 75 peças bem como a taxa de crescimento desta função.

Solução

a) $f(x) = 2,00 \cdot x + 15$

b) Temos que $f(x) = 2x + 15$, logo para $x = 75$, teremos que

$$f(75) = 2,00 \cdot 75 + 15,00$$

$$f(75) = 150,00 + 15,00$$

$$f(75) = 165,00$$

Logo, o custo final de produção é $R\$ \ 165,00$ e a taxa de crescimento da função é o valor da variável a, neste caso, 2.

Exemplo 23. (Função afim e movimento uniforme) Um motociclista pecorre uma estrada movimentando-se de com a função horária $S(t) = 100t - 50$, em que $S(t)$ representa sua posição (em km) e t representa o tempo (em h). Depois de quanto tempo o motociclista passa pelo marco quilômetro zero ($km\ 0$)?

Solução: Para que o motociclista passe pelo marco $0km$, temos que $S(t) = 0km$. Logo:

$$0 = 100t - 50 \Rightarrow 100t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{100} \Rightarrow t = 0,5h$$

Observação 8. A função $S(t) = 100t - 50$ é uma função afim do tipo $S(t) = vt + S(0)$. Quando $t = 0$, temos $S(0) = -50km$, que representa a posição inicial que o motociclista ocupava no início do movimento (estava $50km$ do marco zero). Ele movimentava-se com velocidade constante de $100km/h$ para a frente (velocidade positiva), isto é, $v = 100km/h$. Para que ele chegue ao marco $km0$ partindo do marco $-50km$, ele precisa pecorrer uma distância de $50km$. Como se desloca com velocidade cosntante de $100km/h$, temos:

$$100km - - - - - 1h$$

$$50km - - - - - t$$

Assim, $t = 0,5h$.

5 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 18. Chamamos de **função quadrática**, ou função polinomial do segundo grau, toda função definida por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(x) = ax^2 + bx + c$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como podemos observar, o maior expoente da variavél x é o 2, por isso, ela também é conhecida como função do segundo grau.

Exemplo 24. São exemplos de funções quadráticas:

1) A função $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ é uma função quadrática, com $a = 2$, $b = 3$ e $c = -5$.

2) A função $f(x) = 4x^2 + 6$ é uma função quadrática, com $a = 4$, $b = 0$ e $c = 6$.

3) A função $f(x) = 6x^2 + 4x$ é uma função quadrática, com $a = 6$, $b = 4$ e $c = 0$.

4) $f(x) = x^2$ é uma função quadrática, com $a = 1$, $b = 0$, e $c = 0$.

Como sabemos, na função quadrática o valor de a é diferente de zero, isto garante que funções como as dos exemplos sejam função quadrática, pois, temos $a \neq 0$ e o maior expoente da variável x é o 2.

Nos ítens (2) e (3), podemos identificar casos de função **quadrática incompleta**, ou seja, há ausência de um dos coeficientes, exceto do coeficiente a, pois como vimos na definição o coeficiente a é diferente de zero, sendo assim, a função incompleta não deixa de ser função quadrática se e somente, se $a \neq 0$.

Contra-Exemplo 3. A função $f(x) = x + 5$, não é um exemplo de função quadrática, pois $a = 0$.

Exemplo 25. Dada a função quadrática $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, determine.

a. os coeficientes a, b e c;

b. $f(1)$ e $f(-2)$;

Solução:

a. Em $f(x) = x^2 - 6x + 8$, temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$.

b. $f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 1 - 6 + 8 = 3$
$f(-2) = (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$

5.1 Gráfico

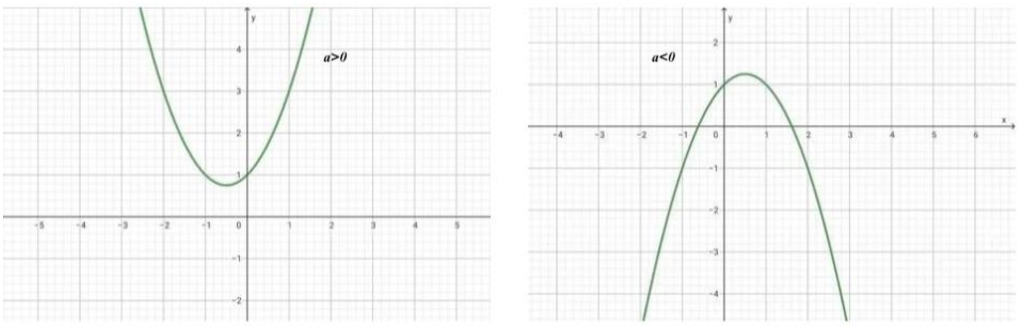
A representação gráfica da função quadrática é dada por uma parábola, dependente direta do sinal do coeficiente a, vejamos.

1) Se $a > 0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para cima.

2) Se $a < 0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Gráficamente temos, respectivamente:

Figura 16 – Representações geométricas de uma função quadrática



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

5.2 Forma canônica da função quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, podemos reescrevê-la em sua **forma canônica**, ou seja, em uma expressão equivalente a inicial que nos possibilita extrair diversas informações.

Para obter essa expressão daremos alguns passos: primeiro utilizando a técnica de completar quadrado; pondo o a em evidência. Assim teremos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\right]$$

e completando quadrado

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

portanto,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

ou ainda,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

que é a chamada **forma canônica** da função quadrática.

Como dito inicialmente, a função quadrática escrita em sua forma canônica, permite-nos descobrir outras informações, como veremos a seguir.

5.2.1 Decorrências da forma canônica

- **Ponto de máximo**
- **Ponto de mínimo**.

Considerando a função quadrática escrita na forma canônica,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

podemos observar que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, para todo x pertencente aos reais, ou seja, possui um valor mínimo que é zero, dessa maneira, se a é um número maior que zero, logo, a função atinge uma valor mínimo, $f(x) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$, visto que o produto $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ será igual zero, pois consideramos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ igual zero, para que a função admita valor mínimo.

Observe ainda, que para a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ser igual à zero, $x = -\frac{b}{2a}$, logo se $a > 0$ e $x = -\frac{b}{2a}$, temos que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2-4ac}{4a}$, ou seja, o ponto mínimo da função.

Por outro lado, se a é um número menor que zero, o produto $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ será negativo, já que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, ou seja, neste caso a função passa a admitir um valor máximo que é $f(x) = \frac{-b+4ac}{4a}$, como foi comentado antes, o valor de x que torna a expressão $\left(\frac{x+b}{2a}\right)^2$ igual a zero é $x = \frac{-b}{2a}$, logo $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2-4ac}{4a}$ também é o ponto máximo da função se, e somente se, $a < 0$.

De modo geral, da forma canônica

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

concluímos que, para qualquer x:

i .Se $a > 0$ a função admite um valor mínimo de $f(x)$ que é $f(x) = -\frac{b^2+4ac}{2a}$, para $x = \frac{-b}{2a}$, ou seja, $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b+4ac}{2a}$;

ii . Se $a < 0$ a função admite um valor máximo de $f(x)$ que é $f(x) = \frac{-b^2+4ac}{2a}$, para $x = \frac{-b}{2a}$, ou seja, $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b+4ac}{2a}$;

Podemos concluir que a função quadrática escrita em sua forma canônica determina os pontos de máximo e mínimo, dependendo apenas do valor de a.

5.3 Valor da função quadrática

Em alguns problemas matemáticos faz-se necessário o cáculo do valor da função em determinado ponto. Para isto, precisamos determinar os **zeros** ou **raízes** da função quadrática, que consiste em determinar um número x e outro $s-x$. Se $p = x(s-x)$ temos $p = sx - x^2$, ou seja, $x^2 - sx + p = 0$.

De outra maneira, podemos dizer que para encontrar x e, portanto, $(s-x)$, basta resolver a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$, ou seja, basta determinar os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula.

Definição 19. Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática são os valores de x para os quais a função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, que podem ser obtidos através dos métodos abaixo relacionados:

1 . **Por fatoração**

Vamos determinar as raízes de algumas funções quadráticas usando fatoração.

Exemplo 26. Determine os zeros das fuções $f(x) = x^2 - 9$ e $f(x) = x^2 + 6x$.

Soluções: 1. Para a função $f(x) = x^2 - 9$, sabemos que a equação do segundo grau correspondente é $x^2 - 9 = 0$. Fatorando o primeiro membro da equação temos: $x^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$. Para que o produto se anule, pelo menos um dos fatores precisa ser zero.

Logo, $(x-3) = 0$ ou $(x+3) = 0$.

- Se $x - 3 = 0$, então $x = 3$.

- Se $x + 3 = 0$, então $x = -3$.

Assim, as raízes da equação $x^2 - 9 = 0$ são -3 e 3 ou os zeros da função quadrática $f(x) = x^2 - 9$ são -3 e 3.

2. Para a função $f(x) = x^2 + 6x$, considerando a equação correspondente $x^2 + 6x = 0$, fatorando o primeiro membro, obetemos: $x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x(x+6) = 0$, logo, $x = 0$ ou $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$. Assim, os zeros da função são 0 e -6.

2 . **Completando quadrado**

Vamos, agora, determinar os zeros de uma funço quadática usando o complemento de quadrado.

Exemplo 27. Determine os zeros da função $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Solução:

Para $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ temos a equação correspondente $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Essa equação é equivalente a uma outra em que dividimos todos os termos por 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Completando quadrado temos: $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ ou \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Os zeros da função: $\frac{3}{2}$ e 1.

Vale destacar que, de modo geral, temos:

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$$

3. **Da forma canônica**

   Da forma canônica, temos a fórmula que fornece as raízes real da função quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, equivale a

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \blacksquare$$

ao fim do desenvolvimento da expressão inicial, chegamos em uma expressão conhecida nossa, ou melhor, uma fórmula, a “famosa” fórmula de Bháskara:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como habitualmente é feito, o termo $b^2 - 4ac$ será representado a partir de agora pela letra grega Δ (delta), denominado discriminante da função quadrática. Sendo assim, podemos rescrever de maneira equivalente a equação da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Esta fórmula nos fornece os zeros da função e, portanto, as raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Já sobre o discriminante Δ, iremos analisar que seu valor influencia diretamente nos resultados das raízes da fução.

5.3.1 Número de raízes

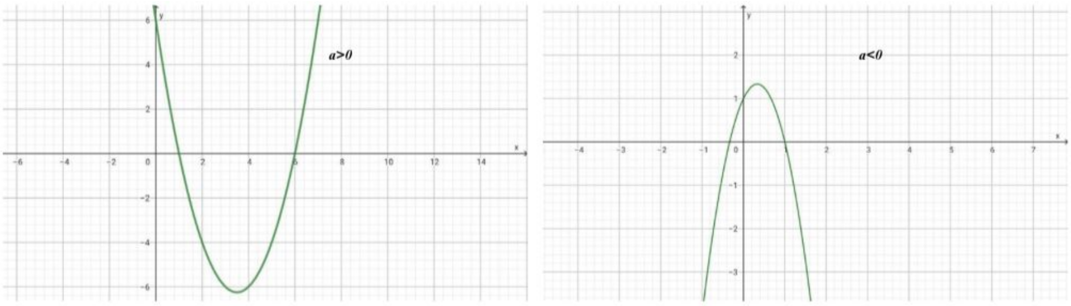
Observe que a existência de raízes reais para equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Sendo assim, temos três situações a considerar:

i . $\Delta > 0$, a equação apresenta duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Geometricamente,

Figura 17 – Gráfico de uma função do segundo grau com $\Delta > 0$



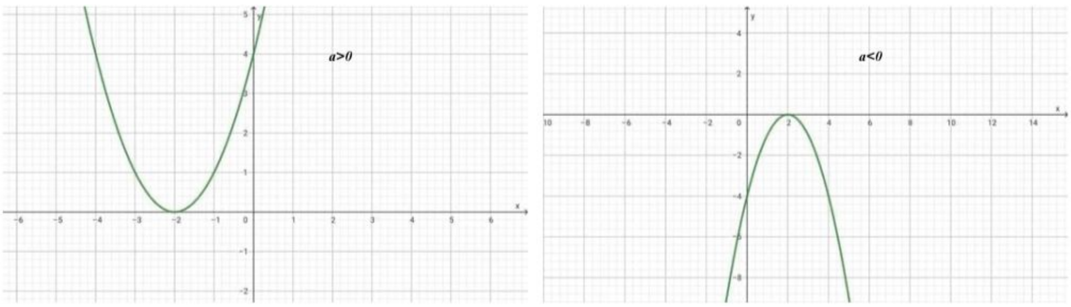
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

ii . $\Delta = 0$, a equação apresenta duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Geometricamente,

Figura 18 – Gráfico de uma função do segundo grau com $\Delta = 0$

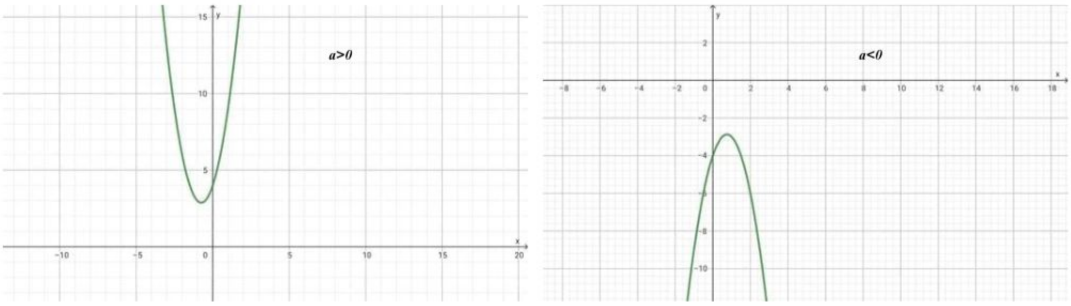


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

iii . $\Delta < 0$, neste caso sabemos que $\Delta \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

Geometricamente,

Figura 19 – Gráfico de uma função do segundo grau com $\Delta < 0$



Fonte: Elaborada pela autora utilizando o GeoGebra

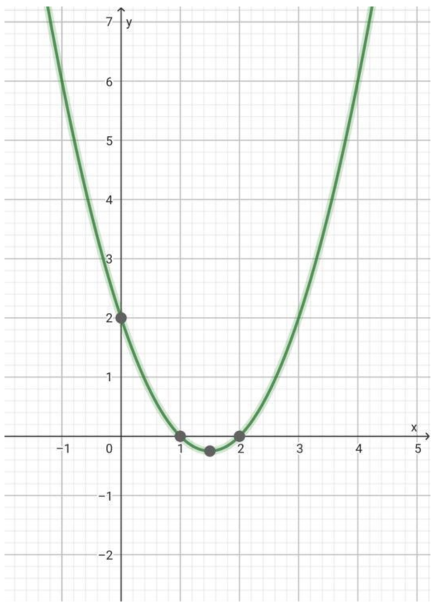
Significado geométrico das raízes

Geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abcissas dos pontos onde a parábola corta o eixo do x.

Exemplo 28. Construindo o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abcissas 1 e 2, que são as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Geometricamente:

Figura 20 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$



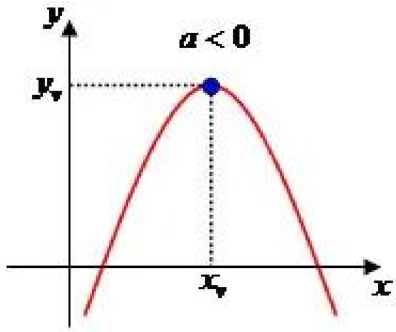
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

5.3.2 Pontos notáveis do gráfico de um função quadrática

Um ponto importante do gráfico é o vértice da parábola, pois indica o ponto de valor máximo e o ponto de valor mínimo. De acordo com valor do coeficiente a, geometricamente teremos:

i Se $a < 0$, a parábola possuirá valor de máximo.

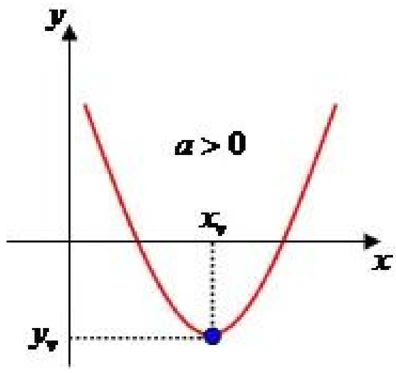
Figura 21 – Valor máximo de uma função quadrática



Fonte: Brasil Escola

ii Se $a > 0$, a parábola possuirá valor de mínimo.

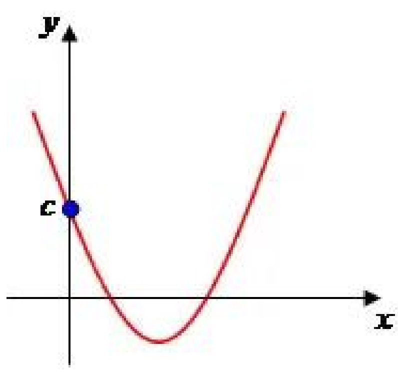
Figura 22 – Valor mínimo de uma função quadrática



Fonte: Brasil Escola

Por fim, não menos importante é o ponto onde a parábola corta o eixo y. Verifica-se que o valor do coeficiente c na lei de formação da função corresponde ao valor do eixo y onde a parábola o intersecta.

Figura 23 – Intercessão dos eixos x e y de uma função quadrática



Fonte: Brasil Escola

5.4 Algumas aplicações de função quadrática

Exemplo 29. Um campeonato de futebol vai ser disputado por 20 clubes pelo sistema que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados. Analise este problema para um número qualquer de clubes.

Solução: Sabendo que cada clube participará no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$. Sabendo que o campeonato brasileiro é disputado por 20 clubes, calculamos a quantidade de jogos com o mesmo raciocínio: $20 \cdot 19 = 380$ jogos. Enfim, para cada quantidade x de clubes participantes, é possível calcularmos o número y de jogos do campeonato, ou seja, y é função de x. Assim, podemos generalizar e escrever uma equação (regra) que permita calcular y a partir de x. Para a resolução deste problema, lembre-se da definição da função quadrática e teremos:

$$f(x) = x \cdot (x - 1) = x^2 - x$$

Exemplo 30. (DANTE 2007) Um automóvel viaja com velocidade de $108km/h$ (ou seja, $30m/s$) num trecho retilíneo de uma estrada quando, subitamente, o motorista vê um acidente na pista. Entre o instante em que o motorista avista o acidente e aquele em que começa a frear, o carro percorre $20m$. Se o motorista frear o carro à taxa constante de $5,0m/s^2$ mantendo-o em sua trajetória retilínea, ele só evitará o acidente se o tiver percebido a, no mínimo, qual distância?

Solução

Como o carro freia com aceleração constante de $5m/s^2$, podemos escrever sua aceleração como $a = -5m/s^2$ Assim, o tempo de frenagem será dado por:

$$a = \frac{\Delta_v}{\Delta_t} = -5 = \frac{-30}{\Delta_t} \Rightarrow \Delta_t = \frac{-30}{-5} = 6s$$

Como a distância pecorrida é dada por

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$$

e temos que $s_0 = 20m$.

Sabendo que, $v_0 = 30m/s^2$, $t = 6s$, $a = -5m/s^2$, calculamos S:

$$S = \frac{(-5) \cdot 6^2}{2} + 30 \cdot 6 + 20 = -90 + 180 + 20 = 110$$

Logo, $S = 110m$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se aborda o conceito de **função** em matemática, muitos da área de exatas tratam o assunto de forma simplista, pois consideram o referido tema, que faz parte de seu programa escolar, como uma mera troca de variáveis entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, abordagem essa que, devidamente explicada podem levá-los à algumas conclusões bem distorcidas da realidade.

Seu estudo decorre da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar. Seu conceito é uma generalização da noção comum de "fórmula matemática". Quando duas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são tais que a cada valor de $\mathbf{x}$ corresponde um único valor bem determinado de $\mathbf{y}$, segundo uma lei qualquer, dizemos que $\mathbf{y}$ é uma função de $\mathbf{X}$.

Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos associando a cada valor do argumento $\mathbf{x}$ um único valor da função $\mathbf{f(x)}$, podendo ser vistas como uma "máquina" ou "caixa-preta", que converte entradas válidas em saídas de forma única e, por isso, alguns autores tratam ou chamam de funções ou relações únicas.

Devemos ter sempre em mente o leque de abrangência dos aspectos cotidianos do nosso meio social e seus respectivos níveis de importância e complexidade como por exemplo: relações de mercado e capital, engenharia, economia (micro e macro), saúde, transportes, indústrias, artes, energia, comunicação, enfim, exemplos das mais diversas áreas de conhecimento aos quais o tema em tela se oferece para estimar, discutir, ponderar, enfim, recomendar de forma sistemática análises claras e objetivas da funcionalidade de um modelo ou parâmetro a ser adotado.

A importância do conhecimento aplicado no nosso dia-a-dia remonta à sua origem e utilização ao longo dos tempos. Evoluiu e tornou-se destaque no desenvolvimento da civilização, facilitando as atividades básicas humanas. Diante desse nível de importância, urge que os profissionais de ensino e instituições educacionais, em todos os níveis, busquem cumprir com suas funções primordiais, ou sejam: **educação de qualidade para todos**.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar blucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BUENO, Rafael. VIALI, Lori. **A Construção Histórica do Conceito de Função**. Educação Matemática em Revista - RS, 1, 37-47, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 4^a edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5^a edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FONSECA, Vilmar; ROCHA, Angela; NUNES, Wallece. **Estudo epistemológico do conceito de funções: Uma retrospectiva.** In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Curitiba, PR, 2013. XI Encontro Nacional de Educação Matemática.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar – vol.1**. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar – vol.1**. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. "Gráfico da função de 2º grau"; Brasil Escola. Disponível em:
`https://brasilescola.uol.com.br/matematica/grafico-funcao.htm.` Acesso em 03 de fevereiro de 2023.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 15, 3-9, 1990.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century**. Moscow: Institute for History of Science and Technology, 1976.