UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CAMPUS VI – POETA PINTO DE MONTEIRO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAIARA DA SILVA MORATO

ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS: considerações epistemológicas e didáticas

MONTEIRO-PB
2024

MAIARA DA SILVA MORATO

ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS: considerações epistemológicas e didáticas

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Cavalcante

MONTEIRO
2024

M831e Morato, Maiara da Silva.
Ensino de produtos notáveis [manuscrito] : considerações epistemológicas e didáticas / Maiara da Silva Morato. - 2024.
33 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2024.
"Orientação : Prof. Dr. José Luiz Cavalcante, UEPB - Universidade Estadual da Paraíba."

1. Didática. 2. Álgebra. 3. Ensino de matemática. 4. Transposição didática. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/970

Biblioteca José Rafael de Menezes

MAIARA DA SILVA MORATO

ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS: CONSIDERAÇÕES EPISTEMOLÓGICAS E DIDÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no formato de monografia, como requisito para a obtenção do título de graduando no curso de licenciatura plena em Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, Campus VI – Poeta Pinto de Monteiro.

Aprovada em: 25/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

José Luiz Cavalcante

____

Prof. Dr. José Luiz Cavalcante
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Flavia Ap. B. da Silva

____

Profa. Ma. Flavia Aparecida Bezerra da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Daiana Estrela Ferreira Barbosa

____

Profa. Ma. Daiana Estrela Ferreira Barbosa
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico a minha mãe, Maria Aparecida. Pois diante de todas as dificuldades que enfrentamos ela nunca desistiu de mim. Minha base, minha inspiração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, pela minha vida e por minha família, por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da minha graduação, e por nunca me abandonar, e sempre me abençoar.

Agradeço imensamente a minha mãe, Maria Aparecida Cesário da Silva, e a minha irmã Micaely da Silva Morato, sem elas eu jamais conseguiria chegar aonde cheguei, elas sempre foram meu alicerce, inspiração e as minhas maiores incentivadoras.

Agradeço ao meu namorado Bruno Henrique de Freitas Daniel, que desde de sempre me apoiou e incentivou e foi fundamental para que eu chegasse até aqui, sempre sendo carinhoso, atencioso e paciente.

Agradeço aos meus amigos de graduação, Luciene Lopes, Franklin William, Daniel Alves, Vinicius Siqueira, e Gisele Ângelo, pois todos individualmente, fizeram parte de toda minha trajetória, me apoiando, incentivando e dividindo experiências que levaremos para o resto de nossas vidas.

Agradeço ao meu orientador José Luiz Cavalcanti, por ter aceito trabalhar comigo, por ter sido paciente e compreensível, sempre me apoiando, incentivando, e orientando, além de ser um profissional excepcional, é um grande amigo. Saiba que foi um privilégio lhe ter como orientador, desde de sempre lhe admirei, e hoje mais ainda.

Agradeço a banca por ter aceitado avaliar este singelo trabalho, e por contribuírem por mais essa etapa na minha vida.

Agradeço aos professores pelos ensinamentos, paciência, compreensão, por nunca desampararem seus alunos, e por sempre estarem disponível para educação, não importa o momento, vocês são exemplos de profissionais.

Agradeço a gestão (coordenação, aos guardas, as meninas da limpeza e ao pessoal da biblioteca) pelo carisma, e alegria, pois todos os dias que cheguei na UEPB, não deixei de ver um grande sorriso em seus rostos e um belo Bom Dia ou Boa Noite.

MEU MUITO OBRIGADA!

“Preocupação não muda o futuro, apenas tira a paz no presente. Entregue tudo a Deus e confie”
Salmos 37:5

RESUMO

O objetivo do presente trabalho foi analisar as características epistemológicas e didáticas que envolvem o conceito de produtos notáveis como conteúdo do Ensino Fundamental. Inserido nas discussões da Didática da Matemática, o estudo se interessa pelos aspectos epistemológicos e didáticos do processo de transposição didática deste saber no Ensino Fundamental. Nossa questão norteadora buscou responder a seguinte pergunta: quais aspectos epistemológicos e didáticos envolvem o processo de transposição didática de produtos notáveis na álgebra escolar? Elegemos como conteúdo principal o caso do quadrado da soma de dois termos. Investigamos livros de referência utilizados na formação de professores para revelar aspectos epistemológicos, bem como a análise comparativa entre livros didáticos antes da Base Nacional Comum Curricular e após sua promulgação. Os resultados apontam que epistemologicamente os produtos notáveis estão ligados à combinação e ao triângulo de pascal. Além disso, após a promulgação da base nacional comum curricular, os produtos notáveis passaram a ser ensinados no 8º do Ensino Fundamental, embora somente a habilidade do 9º ano mencione o termo “produtos notáveis”, a análise preliminar indica ainda no Ensino Fundamental o principal contexto para apresentar o uso dos produtos notáveis é o geométrico, principalmente após a implantação dos parâmetros curriculares nacionais.

Palavras-Chave: Transposição Didática; produtos notáveis; álgebra escolar; Didática da Matemática.

ABSTRACT

The objective of this work was to analyze the epistemological and didactic characteristics that involve the concept of notable products as content in Elementary Education. Inserted in discussions on Mathematics Didactics, the study is interested in the epistemological and didactic aspects of the process of didactic transposition of this knowledge in Elementary Education. Our guiding question sought to answer the following question: what epistemological and didactic aspects involve the process of didactic transposition of notable products in school algebra? We chose as the main content the case of the square of the sum of two terms. We investigated reference books used in teacher training to reveal epistemological aspects, as well as comparative analysis between textbooks before the National Common Curricular Base and after its promulgation. The results indicate that epistemologically the notable products are linked to the combination and Pascal's triangle. Furthermore, after the promulgation of the common national curricular base, notable products began to be taught in the 8th grade of Elementary School, although only the 9th grade skill mentions the term “notable products”, the preliminary analysis still indicates that in Elementary Education the main The context for presenting the use of notable products is geometric, especially after the implementation of national curricular parameters.

Keywords: Didactic Transposition; notable products; school algebra; Mathematics Didactics

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CCHE	Centro de Ciências Humanas e Exatas
IREM	*Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques*
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática na Escola Básica busca formar cidadãos que possam, a partir do conhecimento matemático, usar estas ferramentas para resolver problemas, ler e intervir no mundo que está ao seu redor. Nesta etapa da escolaridade o currículo é dividido em unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

Cada uma dessas unidades traz diversos objetos a serem ensinados. Apesar de separados em suas unidades temáticas, muitos conceitos estão relacionados. Por exemplo, quando observamos a sentença matemática 3 + 5 = 5 + 3, estamos tratando da propriedade comutativa da adição, porém essa propriedade pode ser interpretada como sendo uma representação do papel que o sinal de igualdade (=) tem em expressões matemáticas. Nesse caso, a mesma sentença pode ser usada para trabalhar aspectos que ajudam a desenvolver o pensamento algébrico, pois o princípio da igualdade é fundamental para estudarmos as equações.

O pensamento algébrico, segundo Blanton e Kaput (2005) se refere aos processos de generalização que somos capazes de fazer a partir de casos particulares, portanto, espera-se que ao observar o caso particular da propriedade comutativa, os estudantes possam generalizar para expressão a + b = b + a, onde a e b são números naturais.

Sendo assim, compreender aspectos relacionados à unidade temática pode ajudar na compreensão das demais. Este é um dos argumentos defendidos por Lins e Gimenez (1997), discutir à aritmética ajuda na construção de significados da álgebra escolar e vice-versa.

De modo geral, aprender os conhecimentos de uma unidade temática, assim como das outras unidades temáticas, é fundamental para formação dos jovens. Esse reconhecimento, fez com que a Matemática, enquanto disciplina escolar passasse a ter um destaque no currículo. Sendo considerada um componente curricular básico, assim como a língua portuguesa.

Apesar da importância da Matemática no currículo, na prática o que vemos são dificuldades materializadas no ensino e consequentemente na sua aprendizagem. É comum encontrarmos pessoas que mesmo depois de toda formação básica, não dominam fatos básicos dessa área de conhecimento.

Essa é uma das preocupações da Educação Matemática. O ensino de Matemática e a sua aprendizagem são temas fundamentais para esta área de pesquisa que começa a se desenhar no início do século XX. Por que os estudantes têm dificuldades em aprender conteúdos matemáticos? Qual o papel dos professores nesse processo? A formação dos professores é adequada? Que materiais didáticos devem ser usados/desenvolvidos para que os estudantes aprendam matemática? Cada uma dessas perguntas podem ser feitas também adicionando à álgebra como saber a ser ensinado/aprendido.

Muitas dessas perguntas têm respostas dentro da Educação Matemáticas e das áreas que contribuem para suas investigações. Porém nem todas as respostas foram dadas. Por esta razão, Fiorentini e Lorenzato (2009) vão dizer que a Educação Matemática tem diversos problemas a serem resolvidos.

Ao entrar no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba me deparei com diversas reflexões. Uma delas, foi que eu, como estudante fazia parte do grupo de alunos que citei nos parágrafos anteriores, ou seja, eu estava em um curso de formação de professores de Matemática, mas não dominava ou não conhecia conceitos básicos.

Ao me ver diante deste cenário tomei consciência de que como futura professora deveria ajudar outras pessoas a não passarem pelas mesmas dificuldades. Foi aí que decidi desenvolver minha pesquisa na área da Educação Matemática. Aliado a essa preocupação estava a minha experiência como bolsista do Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID-CAPES-UEPB). Foi através das vivências no PIBID que pude ver, que assim como eu, muitos estudantes da Educação Básica tinham sérias dificuldades com conceitos elementares.

A álgebra escolar era um desses conjuntos de conhecimentos em que os estudantes tinham mais dificuldades. Muitos resolviam equações, aplicavam ferramentas algébricas, porém não entendiam o que estavam fazendo.

Essa percepção foi constatada também a partir das leituras que fiz na construção desse trabalho. De modo geral, as pesquisas indicam que o ensino de álgebra na escola, quando pautado pela memorização e mecanização de procedimentos, não colabora para o desenvolvimento de aprendizagem ou do pensamento algébrico (Lins e Gimenez, 1997).

Os produtos notáveis, certamente, fazem parte dessa lista de objetos algébricos em que os estudantes, muitas vezes, aplicam, porém não entendem o que estão fazendo. De acordo com Lins e Gimenez (1997) utilizar recursos didáticos como a geometria pode ajudar, mas, somente se os estudantes conseguirem através das atividades atribuir significado às tarefas algébricas. Em outras palavras, de nada adianta utilizar uma balança de dois pratos para explicar o princípio das igualdades equações, se depois esses recursos não serão mais utilizados na contextualização dos problemas propostos.

Diante dessa observação, passamos a nos questionar sobre por quais razões os produtos notáveis eram considerados por estudantes ou professores como um tema difícil de aprender ou ensinar. Diante dessa inquietação, como futura professora me coloquei no lugar de quem vai um dia ensinar esse conteúdo e, como aprendemos com Lee Shulman, o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico e o conhecimento curricular são saberes necessários para formação docente (Shulman, 1986).

Deste modo, antes de compreender por que é difícil ensinar ou aprender determinado conteúdo precisamos entender o objeto. Assim, esta pesquisa se ocupa de um estudo que pretendeu responder às seguintes indagações: quais aspectos epistemológicos e didáticos envolvem o processo de transposição didática de produtos notáveis na álgebra escolar?

Para responder esta indagação apresentamos como objetivo geral analisar as características epistemológicas e didáticas que envolvem o conceito de produtos notáveis como conteúdo do Ensino Fundamental. Para responder a este objetivo, fixamos dois objetivos específicos: 1. Realizar um estudo epistemológico do conceito de produtos notáveis; 2. Identificar características do modelo epistemológico dominante para o ensino de Produtos notáveis.

Como os produtos notáveis englobam diversos casos, para nosso estudo focamos no quadrado da soma entre dois termos, tendo em vista que a partir dele podemos generalizar sua expansão como veremos no capítulo 2 desta pesquisa.

Este trabalho se insere nos quadros da Didática da Matemática. Utilizaremos como uma das referências a noção teórica de Transposição Didática que tem como principal idealizador o francês Yves Chevallard. Desde meados dos anos 1980 o autor vem desenvolvendo o conceito e a partir de 1992 a teoria foi ampliada e hoje é chamada de Teoria Antropológica do Didático (Cavalcante, 2018).

Ao realizar uma pesquisa prévia no acervo da biblioteca do CCHE-UEPB (Centro de Ciências Humanas e Exatas - Universidade Estadual da Paraíba) identificamos 07 trabalhos ligados ao ensino de álgebra na Escola Básica. Nestes trabalhos observamos uma preocupação com conteúdos diversos, principalmente equações, porém não observamos trabalhos diretamente voltados para o ensino de produtos notáveis. Assim, vemos que o presente estudo traz uma contribuição para pesquisa em Educação Matemática aqui no CCHE-UEPB.

Dos trabalhos que buscamos, dois são particularmente significativos para nosso estudo. O primeiro deles é o trabalho de Paulo Rocha (2010) que discutiu a passagem da aritmética para álgebra no livro didático do 7º Ano do Ensino Fundamental. Um dos trabalhos pioneiros sobre a Didática da Matemática no *Campus*-VI, ele utilizou a noção de transposição didática. Nos resultados o autor destacou que apesar dos estudantes terem dificuldades na transição entre aritmética e álgebra, o livro didático apresentava situações que podiam favorecer uma transição mais adequada para os estudantes (Rocha, 2010).

O trabalho de Katielli Santos (2020) discutiu as condições e restrições nos livros didáticos do 1º ano do ensino fundamental para ensinar álgebra nos anos iniciais. Ao realizar a análise praxeológica do livro a autora trabalhou com a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard. Teoria cuja uma das principais noções teóricas é a transposição didática (Bosch e Gascón, 2006). Para Santos (2020) os livros didáticos do 1º Ano apresentam atividades que têm potencial para trabalhar com iniciação algébrica das crianças, porém a ausência de orientações claras no manual do professor é uma restrição importante, pois muitos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental não tiveram uma formação apropriada nesse sentido.

Neste trabalho o foco da análise dos processos de transposição didática também está assentado na observação dos livros didáticos que tratam sobre o ensino de produtos notáveis.

O presente trabalho está organizado em 03 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a nossa fundamentação teórica, discutindo o conceito de transposição didática e questões envolvendo a noção de pensamento algébrico. No segundo capítulo trazemos o percurso metodológico. O capítulo 3 está dividido em duas partes: na primeira apresentamos os produtos notáveis do ponto de vista epistemológico. Na segunda trazemos a análise da transposição didática dos produtos notáveis em duas coleções de livros didáticos.

2. DISCUTINDO A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A Didática da Matemática tem seu berço na França. Em meados dos anos 1960 foram criados os institutos de pesquisa em ensino de Matemática (*Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques* – IREM). Estes espaços abrigam pesquisas sobre o ensino de Matemática, foi neles que nomes como Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Michellé Artigue, dentre outros desenvolveram os quadros teóricos da Didática Matemática.

No caso da transposição didática, sua origem remete aos primeiros trabalhos de Yves Chevallard, já na década de 1970. Em seu trabalho de 1985 ele apresentou a Teoria da Transposição Didática formalmente. Os saberes sofrem transformações no trânsito entre as instituições. Assim, sempre que decidimos ensinar algo a alguém precisamos realizar um trabalho de transposição didática.

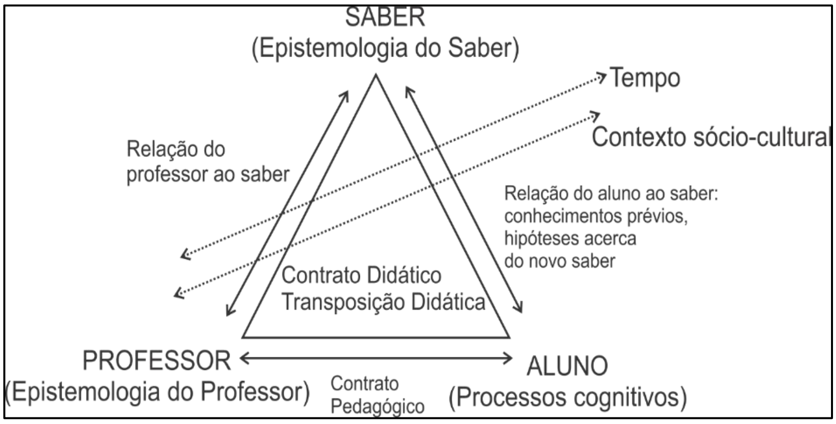
Mais tarde, já na década de 1990, a Teoria da Transposição Didática foi ampliada para Teoria Antropológica do Didático (TAD), que assume que o fenômeno da transposição didática está inserido nas práticas humanas que envolvem a atividade matemática (Chevallard, 1996).

De forma mais clara, quando pensamos em um saber matemático, por exemplo, a noção de função, dependendo de onde este conceito seja utilizado, ele assume uma forma própria. Na instituição “Ensino Fundamental” o conceito está presente em ideias básicas como proporcionalidade entre grandezas e só formalmente apresentado ao estudante no 9º Ano do Ensino Fundamental. Já na instituição “Ensino Médio” é muito comum apresentarmos uma definição próxima do que estudamos no Cálculo do Ensino Superior, ou seja, uma definição baseada na ideia de conjuntos: a função é uma aplicação de A em B ou, simplesmente A □ B. Logo, entre o Ensino Superior e a Educação Básica foi preciso realizar uma transposição didática para que os mais jovens pudessem compreender o conteúdo.

Nesse sentido, quando pensamos no objeto “funções” estamos falando de um saber que é resultado de uma construção humana. Ele nasce da necessidade dos matemáticos ou de quem se utiliza da matemática para modelar a relação entre grandezas. Por isso, existe uma atividade humana envolvida em torno da atividade matemática. Além disso, para Chevallard, Bosch e Gascón (2001), mesmo quando não queremos ensinar algo a alguém estamos ensinando, isto é, o didático é parte das atividades humanas. Por isso que a TAD estuda o homem perante as atividades matemáticas (Almouloud, 2007).

De modo geral, ao observarmos o fenômeno da transposição didática, estamos olhando o exame da trajetória que cumpre o saber científico até o momento em que este, se transforma em objeto de ensino, e passa a compor o triângulo das situações didáticas, e por fim, transformando-se em saber ensinado (Brito Menezes, 2006).

Figura 01 - Triângulo Didático



Fonte: BRITO MENEZES (2006, p. 24)

Nesse triângulo, o professor, o aluno e o saber são os principais componentes. Dessa forma, o saber científico vai sofrer várias transformações, nessas transformações ela passa por níveis intermediários, como por exemplo, saber a ensinar, até configurar como um saber ensinado.

Baseado nesse diálogo podemos dizer que uma das questões centrais da educação Matemática é o estudo evolutivo pelo qual passa a formação do próprio objetivo de estudo. Ao analisar essa evolução, podemos perceber e identificar diversas fontes que influenciam, ou até mesmo, que condicionam as transformações do saber escolar e as práticas educativas (Pais, 2011).

Para Chevallard (1997), o movimento entre saberes a ensinar e saberes ensinados está presente em toda sociedade. No caso da escola, são os livros didáticos que materializam essa dinâmica. As etapas da transposição podem ser resumidas na figura a seguir:

Figura 2 – O processo de transposição didática.

Fonte: Bosch e Gascón (2006, p.392)

As duas primeiras etapas são chamadas de transposição didática externas, enquanto que as duas últimas são próprias da transposição didática interna. O saber sábio se refere ao saber científico na sua forma mais “pura”, por exemplo, o que está nos artigos científicos ou como ensinado/produzido nas universidades. Já o saber a ensinar trata das transformações que o saber sábio sofre para que possa ser ensinado. Na noosfera estão todos os agentes que participam desse processo (Ministério da Educação, Editoras de Livros Didáticos, Pesquisadores, Professores, Pais, etc.).

Este trabalho focou na transposição didática externa. Buscando compreender aspectos do saber sábio (epistemologia) do saber a ensinar (didáticos).

2.1 Álgebra escolar e o pensamento algébrico

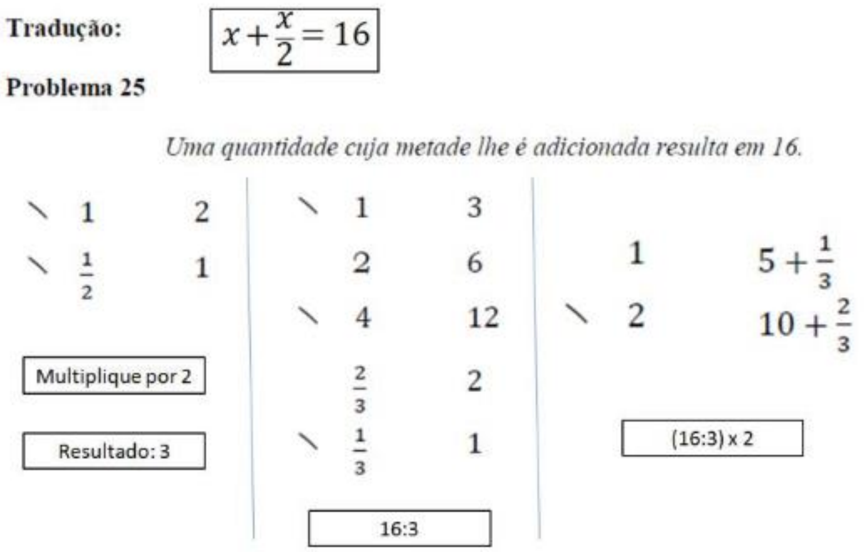
A álgebra é um dos campos de atuação mais importantes da Matemática. Sua construção remonta contribuições de diversos povos. Na Grécia Antiga, por exemplo, que é considerado um dos berços da matemática como a conhecemos, a álgebra aparece principalmente nos trabalhos de Diofanto de Alexandria. Apesar de ter escrito um tratado sobre aritmética, nele já apareciam rudimentos de uma linguagem algébrica. Para economizar na escrita de expressões como o “quadrado de um número” ele utilizava símbolos. Era o início da álgebra sincopada, ou seja, que utilizava certos símbolos para abreviar palavras ou expressões (Eves, 2011).

Porém, antes dos Gregos, outras civilizações já utilizavam conhecimentos que podem ser classificados como pré-álgebra. Embora não houvesse o uso de símbolos, era o pensamento e resolução de problemas algébricos que caracteriza o período retórico ou verbal. Para ilustrar esse fato consideremos o problema 25 no Papiro Egípcio de Rhind, um dos documentos matemáticos mais antigos:

“Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual é a quantidade?”

Utilizando as ferramentas algébricas atuais, podemos modelar o problema e chegar a solução $x = 32/3$ rapidamente. No entanto, precisamos considerar que os egípcios não dominavam tais ferramentas. De acordo com Bertato (2018) muitos especialistas acreditam que os povos egípcios utilizam o método da falsa posição, para ele há evidências que estes povos tinham métodos específicos que envolviam diversas ferramentas como múltiplos e divisores, além das frações unitárias:

Figura 3 – O processo de transposição didática.



Bertato (2018, p. 20).

O exemplo apresentado por Bertato (2018) corrobora com a ponderação de Roque (2012) que destaca que dificilmente podemos pensar no desenvolvimento da álgebra de forma linear. Sua construção é complexa e tem traços de diversas civilizações. Por exemplo, um dos marcos da álgebra ocidental são os trabalhos de François Viète, no entanto, precisamos considerar que outros povos deram grandes contribuições com Hindus e os Árabes:

> Chegaremos, assim, a uma conclusão definitiva sobre quem é o fundador da Álgebra? Não. Pretendemos mostrar que se quisermos aplicar a alcunha de "o pai da álgebra" a algum matemático do período obteríamos múltiplas respostas: Diofanto, sua usarmos a definição A para álgebra; Al-Khawarismi, se usarmos a definição B; Cardano, se usarmos a C; e, finalmente, Viète, se usarmos a D. Ou seja, podemos concluir que alcunhas são inúteis para História da Matemática (Roque, 2012, p. 81-82).

De modo geral, o argumento de Tatiana Roque (2012) trata de que ao longo dos séculos cada civilização foi dando contribuições importantes que culminaram no que conhecemos hoje como álgebra escolar. Mas de fato, o que é álgebra?

De acordo com Kaput (1999) a álgebra escolar:

> Envolve generalizar e expressar essa generalização usando linguagens cada vez mais formais, onde a generalização se inicia na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e virtualmente

> em toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares (Kaput, 1999, 134-135).

Kieran também apresenta uma definição semelhante:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letras mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalização da relação matemática, padrões e regras. Assim, a álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007a, p. 5).

Neste ponto, vale ressaltar que para Lins e Gimenez (1997) a ideia de definição é igualmente difícil. De acordo com os autores, geralmente, as definições apontam sobre para o que fazemos quando lidamos com a álgebra. Aqui a ideia de pensamento algébrico parece ser um caminho interessante para falarmos de álgebra.

De acordo com Maria Blanton e James Kaput, o pensamento algébrico é um “processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas, ligadas aos conjuntos de casos particulares, essa generalização é desenvolvida através de discursos argumentativos, é expressa de forma gradativamente e é adequada a sua idade”. (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

As ideias de Blanton e Kaput (2005) corroboram com as ideias de Lins e Gimenez (1997) que destacam a necessidade de trabalhar com a álgebra precocemente, sempre levando em consideração a possibilidade de atribuir situações e contextos que ajudem os estudantes a atribuírem significados às ferramentas algébricas que estão utilizando..

3. METODOLOGIA

O estudo abordado caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa de cunho bibliográfico, pois a sua exploratória é baseada em leituras e análise de documentos que se baseiam no ensino de produtos notáveis. Fiorentini e Lorenzato (2009) dizem que nessa abordagem os estudos focam na interpretação dos fenômenos e o papel do pesquisador é fundamental para compreender as variáveis investigadas. Nesta abordagem as pesquisas podem ser caracterizadas como: estudo de caso, observações participantes, pesquisa de intervenção, pesquisa documental ou bibliográfica, dentre outras.

Ainda de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009) a nossa pesquisa pode ser considerada exploratória. Esse tipo de pesquisa é aquele em que os pesquisadores buscam fazer uma primeira aproximação com a temática. O nosso trabalho é essencialmente documental, tendo em vista, que nos debruçamos sobre análise de livros de referência, (manuais ou livros usados na graduação) além de livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental.

Nesse sentido, o trabalho foi desenvolvido em três etapas:

1° Etapa- Analisamos os documentos oficiais. Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Curricular Comum no que tange ao ensino de álgebra.

2°Etapa- Investigamos a dimensão epistemológica dos produtos notáveis:

1. Qual a origem dos produtos notáveis?
2. A que contextos os produtos notáveis estão associados nos manuais de referência?
3. Quais as técnicas utilizadas para resolver estes produtos notáveis.

3°Etapa- Essa última etapa consistiu na análise de dados, fazendo o estudo comparativo entre as praxeologias presentes em livros didáticos anteriores à BNCC e posteriores a sua promulgação. Nessa etapa, observamos aspectos matemáticos e didáticos envolvendo os produtos notáveis.

Na seção seguinte apresentaremos os resultados das etapas mencionadas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A nossa investigação procurou responder à seguinte pergunta: quais aspectos epistemológicos e didáticos envolvem o processo de transposição didática de produtos notáveis na álgebra escolar?

Levando em consideração o tempo para realização da pesquisa, decidimos analisar o caso do produto notável “quadrado da soma de dois termos”.

Para tanto, iniciamos já na primeira a análise do lugar dos produtos notáveis no currículo da Educação Básica. Utilizamos dois documentos para esta análise: os

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os PCN foram criados logo após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (9394/96). A partir de 1997 o documento passou a ser uma importante diretriz para o currículo escolar brasileiro.

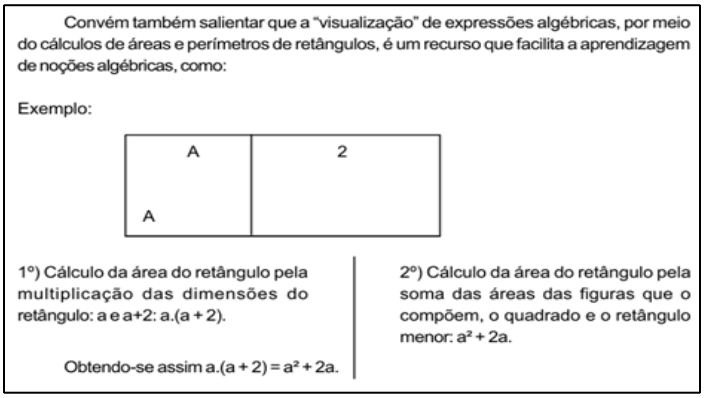
Para os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º Ano) não há menções específicas ao objeto de saber produtos notáveis. Vale destacar que na época em que os PCN foram lançados o currículo não tinha uma unidade específica para álgebra, embora o documento reconhecesse a importância da álgebra:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 1998, p. 50-51).

Pode-se observar que o documento reconhece a importância de trabalhar a álgebra já nos anos iniciais, como destacou também o trabalho de Santos (2020) e Teixeira (2014). Mas destaca que este estudo deve ser aprofundado nos anos finais, tendo a exploração de situações-problema como principal meio para o desenvolvimento do trabalho com álgebra.

Ao tratar da álgebra o documento aponta algumas orientações metodológicas e, embora, não seja explícito recomenda a visualização geométrica de expressões algébricas, recurso que é explorado em muitos livros didáticos, quando se trata do trabalho com produtos notáveis:

Figura 04 - Modelo para visualização geométrica de expressões algébricas


Convém também salientar que a "visualização" de expressões algébricas, por meio do cálculos de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, como:

Exemplo:

1º) Cálculo da área do retângulo pela multiplicação das dimensões do retângulo: a e a+2: a.(a + 2).

Obtendo-se assim a.(a + 2) = a² + 2a.

2º) Cálculo da área do retângulo pela soma das áreas das figuras que o compõem, o quadrado e o retângulo menor: a² + 2a.

Fonte: (Brasil, p. 121)

Lembramos, novamente, conforme apontam Lins e Gimenez (1997), que o uso de recursos para o trabalho com álgebra precisa considerar que os estudantes precisam atribuir significado ao que estão fazendo. Em outras palavras, não é suficiente utilizar figuras de áreas para explicar a construção de uma expressão algébrica se depois esse contexto será abandonado.

Se os PCN não traziam orientações sistemáticas nem menções específicas ao conteúdo de produtos notáveis, com a BNCC esse problema é resolvido em parte, pois o carácter de normativa curricular exigiu a listagem e a localização dos conteúdos em cada ano específico.

Outro avanço importante é que a BNCC introduziu a unidade temática Álgebra que descreve os objetos a serem estudados em cada nível: 1º ao 9º Ano do Ensino Fundamental. Para os anos finais as orientações são semelhantes:

> Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (Brasil, 2018, p. 270 – 271).

Para os produtos notáveis o documento recomenda a sua abordagem como ferramenta para solução de equações no 9º Ano do Ensino Fundamental, não deixando claro sua presença no 8º Ano (antiga 7ª Série), embora na maior parte das coleções o objeto está presente tendo como justificativa a habilidade EF08MA06 como indica o quadro 1:

Quadro 1 – Habilidade da BNCC

Unidade temática Álgebra	
Objetos	**Habilidade**
Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: Brasil (2018)

Em resumo, nos documentos oficiais não temos orientações claras para o seu ensino. Se nos PCN temos orientações gerais sobre o ensino de álgebra e ausência de uma unidade temática específica, na BNCC os produtos notáveis são citados como objetos de ensino obrigatório no 9º Ano do Ensino Fundamental, porém nos dois documentos parece ficar a cargo do professor como irá ensiná-lo, o que indica que os livros didáticos têm um papel importante no processo.

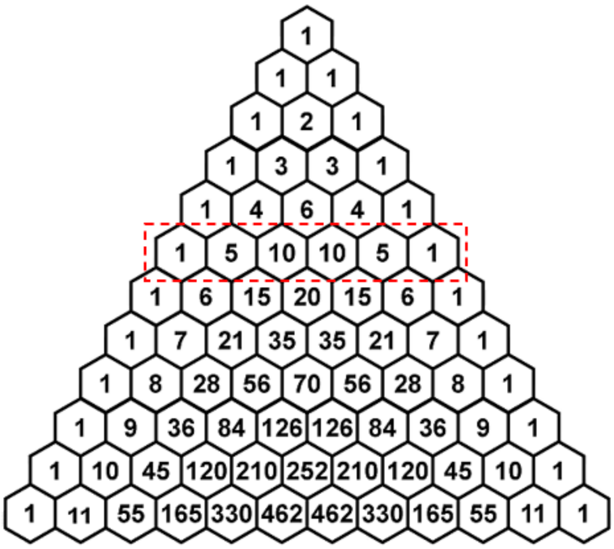
4.1 Considerações Epistemológicas

A origem dos produtos notáveis remonta às origens da própria matemática. Se tomarmos por base o triângulo aritmético, também conhecido como triângulo de Pascal, observamos registros históricos de sua utilização por diversos povos (Chineses, Hindus etc.) há pelo menos cerca de 2000 anos de Blaise Pascal (Porto Silveira, 2001).

Uma aplicação importante do triângulo aritmético está ligada a determinação dos coeficientes binomiais que são utilizados na análise combinatória. Deste modo, o triângulo aritmético pode fornecer os coeficientes do produto de $(a + b)^n$. Onde corresponde às linhas do triângulo aritmético. Por exemplo, para desenvolvermos o binômio $(a + b)^5$, basta observarmos a 6º linha do triângulo cujos coeficientes são 1, 5, 10, 10, 5, 1, o que fornece o desenvolvimento:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$$

Figura 05 – Triângulo Aritmético



Fonte: Adaptado de https://images.app.goo.gl/AzpvRx29126wP2yx6

Este pode ser um indício de que epistemologicamente os produtos notáveis estão associados ao desenvolvimento da análise combinatória. Essa hipótese encontra respaldo em manuais utilizados na formação de professores, como o volume 5 da Coleção Fundamentos da Matemática:

Figura 06 – Desenvolvimento algébrico do Binômio de Newton.

50. Vamos usar as técnicas que estudamos em Análise Combinatória para ter um resultado importante em Álgebra, que consiste em obter o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$.

Já nos são familiares os casos particulares:

$(x + a)^0 = 1$
$(x + a)^1 = x + a$
$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Para todo *n* inteiro, positivo, podemos calcular:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação.

Fonte: (Hazzan, 2013, p. 58).

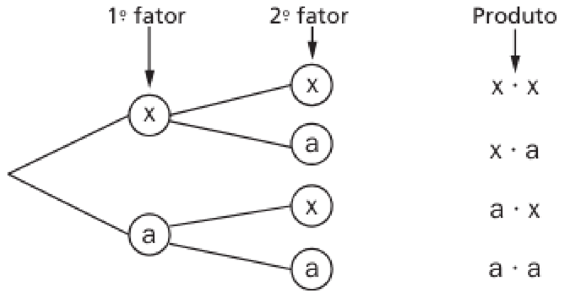
A generalização algébrica pode ser apresentada também com as ferramentas da análise combinatória, vejamos o diagrama de árvores aplicado ao caso $(a + b)^2$:

Figura 07 – Desenvolvimento do Binômio por meio do diagrama de árvores.

52. Exemplo 1:

$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a)$

Usamos o diagrama de árvore para as seleções dos termos.



Soma: $x \cdot x + x \cdot a + a \cdot x + a \cdot a = x^2 + 2ax + a^2$

Portanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Fonte: (Hazzan, 2013, p. 59).

Apesar dos produtos notáveis apresentarem uma fundamentação da análise combinatória, na Escola Básica, eles se apresentam com uma abordagem algébrica. Como veremos na análise de livros didáticos.

4.2 O Quadrado da Soma nos Livros Didáticos

Para observar o processo de transposição didática do Quadrado da Soma utilizamos como referência o livro didático. De acordo com Cavalcante e Rodrigues (2022) os livros didáticos têm um papel fundamental no processo de ensino de Matemática. Eles são apresentados pelos autores como uma instituição cujo valor simbólico é importante para o professor.

A análise que fizemos incluiu exemplares de 03 décadas diferentes: 1981, 1998 e 2022. A justificativa para esta escolha deve-se à intenção de observar a evolução do processo de transposição didática do objeto “Quadrado da Soma”. Nesse sentido, as décadas escolhida se referem aos períodos antes dos PCN, depois dos PCN e antes da BNCC e após a BNCC.

Para o período antes dos PCN localizamos a coleção Matemática de Sardella e Matta (1981). Nela o Quadrado da Soma era chamado de Binômio – Soma, se aproximando da raiz epistemológica da análise combinatória:

Figura 08 – Apresentação dos produtos notáveis

Unidade 3

OS PRODUTOS NOTÁVEIS

NOÇÃO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

No cálculo algébrico, certos produtos tornam-se muito evidentes porque são usados freqüentemente. Por isso mesmo são denominados **produtos notáveis**.

Para obter esses produtos, você poderá utilizar a propriedade distributiva. No entanto, eles podem ser obtidos de uma forma menos trabalhosa, se usarmos algumas regras especiais.

Nesta unidade você vai conhecer os seguintes produtos notáveis:

- quadrado de um binômio-soma; • quadrado de um binômio-diferença; • produto de um binômio-soma pelo seu binômio-diferença; • cubo de um binômio-soma; • cubo de um binômio-diferença.

Fonte: (Sardella; Matta, 1981, p. 37).

Apesar do termo binômio ser empregado a abordagem apresentada letrista com enfoque na manipulação algébrica:

Figura 09 – Apresentação Binômio Soma

QUADRADO DE UM BINÔMIO-SOMA: $(a + b)^2$

$(a + b)^2 = ?$

Observe: $(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + \underbrace{ab + ab} + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Então: $(\underset{1.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{a}} + \underset{2.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{b}})^2 = \underset{1.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{a}}^2 + 2\underset{1.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{a}}\underset{2.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{b}} + \underset{2.^{\circ}\text{ termo}}{\boxed{b}}^2$

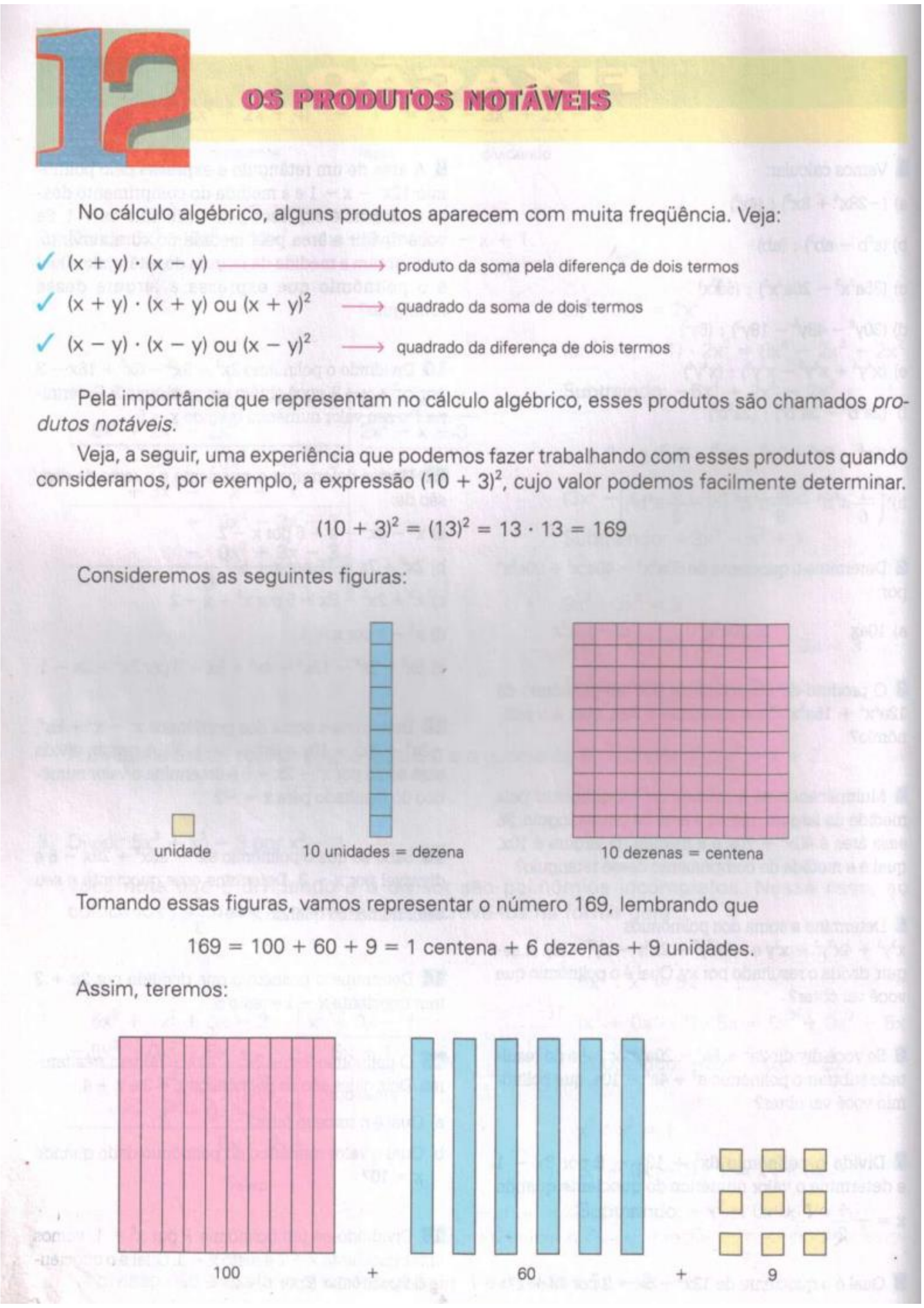
Regra:
- o quadrado do 1.º termo
  mais
- o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo
  mais
- o quadrado do 2.º termo

Fonte: (Sardella; Matta, 1981, p. 37).

De acordo com Lins e Gimenez (1997) a abordagem letrista da álgebra está centrada na manipulação dos termos algébricos. Observamos que tanto na apresentação da figura 08, quanto na figura 09 a introdução do conteúdo não leva em considerações outros contextos além da própria manipulação algébrica. Indicando que antes do PCN, na década analisada não ficava explicita uma preocupação com os contextos de aplicação dos produtos notáveis para além da própria álgebra.

Para o Livro Didático editado após os PCN localizamos a coleção a Conquista da Matemática de Giovanni *et al* (1998). Diferente da obra anterior, nela os produtos notáveis apresentam uma abordagem geométrica:

Figura 10 – Apresentação dos Produtos Notáveis



12 OS PRODUTOS NOTÁVEIS

No cálculo algébrico, alguns produtos aparecem com muita freqüência. Veja:

✓ $(x + y) \cdot (x - y)$ ⟶ produto da soma pela diferença de dois termos

✓ $(x + y) \cdot (x + y)$ ou $(x + y)^2$ ⟶ quadrado da soma de dois termos

✓ $(x - y) \cdot (x - y)$ ou $(x - y)^2$ ⟶ quadrado da diferença de dois termos

Pela importância que representam no cálculo algébrico, esses produtos são chamados *produtos notáveis.*

Veja, a seguir, uma experiência que podemos fazer trabalhando com esses produtos quando consideramos, por exemplo, a expressão $(10 + 3)^2$, cujo valor podemos facilmente determinar.

$$(10 + 3)^2 = (13)^2 = 13 \cdot 13 = 169$$

Consideremos as seguintes figuras:

Tomando essas figuras, vamos representar o número 169, lembrando que

169 = 100 + 60 + 9 = 1 centena + 6 dezenas + 9 unidades.

Assim, teremos:

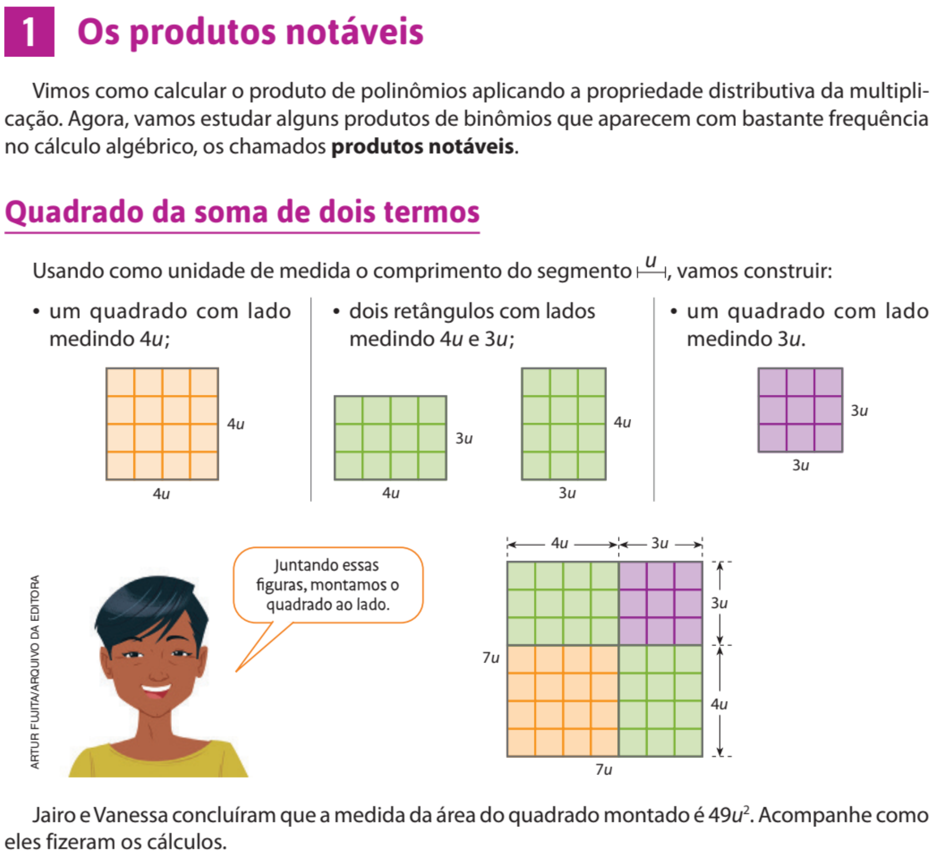
Fonte: (Giovanni *et al*, 1998, p. 72).

Observamos também nos exercícios que alguns focam na exploração geométrica para representar os produtos notáveis. Isto indica que parece haver intenção dos autores no sentido de trabalhar os produtos notáveis também de uma perspectiva geométrica. No entanto, como alertam os PCN somente apresentar essas visualizações não é suficiente:

> A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões. No entanto, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo. Além disso, é preciso que ele perceba que é possível atribuir outros significados às expressões. Assim, as visualizações desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação-problema, mas o trabalho não pode apoiar-se exclusivamente nelas (Brasil, 1998, p. 121).

A última coleção analisada foi "Matemática" assinada por Edwaldo Bianchini (2022). Coleção aprovada no PNLD de 2024 que atende aos requisitos da BNCC. Nela vemos uma abordagem semelhante à obra anterior, especialmente, por tratar os produtos notáveis do ponto de vista geométrico:

Figura 11 – Produtos notáveis e quadrado da soma de dois termos


1 Os produtos notáveis

Vimos como calcular o produto de polinômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. Agora, vamos estudar alguns produtos de binômios que aparecem com bastante frequência no cálculo algébrico, os chamados **produtos notáveis**.

Quadrado da soma de dois termos

Usando como unidade de medida o comprimento do segmento u, vamos construir:

- um quadrado com lado medindo $4u$;
- dois retângulos com lados medindo $4u$ e $3u$;
- um quadrado com lado medindo $3u$.

Jairo e Vanessa concluíram que a medida da área do quadrado montado é $49u^2$. Acompanhe como eles fizeram os cálculos.

Fonte: (Bianchini, 2022, p. 127).

Observamos também na obra que os problemas propostos buscam contextualizar os produtos notáveis por meio de situações problemas:

Figura 12 – Situação-problema de produtos notáveis.

7 As medidas dos lados de um jardim quadrado foram aumentadas em 3 metros.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando x a medida do lado do jardim antes do aumento, dê o polinômio que representa:

a) a nova medida da área desse jardim;

b) o aumento verificado na medida da área do jardim. **7. b)** $(6x + 9)\ m^2$

7. a) $(x^2 + 6x + 9)\ m^2$

Fonte: (Bianchini, 2022, p. 130).

De modo geral, observam-se nas amostras apresentadas diferenças no processo de transposição do Quadrado da Soma ao longo das últimas décadas. O processo indica que a noosfera representada pelo PCN pode ter influenciado na presença da geometria na abordagem dos produtos notáveis. Chevallard (1997) destaca que no processo de transposição didática externa a noosfera assume um pensamento fundamental.

Observa-se que o contexto da análise combinatória não é utilizado nas três coleções, apesar de na obra de 1981 haver uma menção ao termo binômio. A análise, mostrou também que não é possível dizer se as atividades propostas podem favorecer o pensamento algébrico do sentido Blanton e Kaput (2005).

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo principal analisar as características epistemológicas e didáticas que envolvem o conceito de produtos notáveis como conteúdo do Ensino Fundamental. Nossa intenção com a análise era responder à questão: quais aspectos epistemológicos e didáticos envolvem o processo de transposição didática de produtos notáveis na álgebra escolar?

Para tanto, focamos no processo de transposição didática externa. Nesse sentido, analisamos dois agentes da noosfera, principal instituição que age nessa etapa da transposição (Chevallard, 1997). Os agentes foram as diretrizes curriculares (PCN e BNCC) e livros didáticos ou manuais de referência na formação de professores.

Na análise das diretrizes observamos que o lugar dos produtos notáveis não é claro no currículo, tanto que nos PCN não há nenhuma menção explicita ao objeto. Já na BNCC há um avanço em relação ao primeiro documento. Primeiro, ela cria a unidade temática álgebra, que prevê o ensino de álgebra desde os anos iniciais como recomendam as pesquisas na área (Lins; Gimenez, 1997; Blanton; Kaput, 2005; Santos, 2020). Mas também explicita que o objeto produtos notáveis como objeto a ser ensinado explicitamente na habilidade EF09MA09 e de forma implícita na habilidade EF08MA06. Aqui observamos um fenômeno interessante, pois mesmo a habilidade do 8º Ano não falar dos produtos notáveis eles são tema de um capítulo na obra analisada após a BNCC, demonstrando que provavelmente os livros segue uma sequência parecida de conteúdos desde 1981, como vemos no texto de Sardella e Matta (1981).

De modo geral, ao analisar as questões epistemológicas vemos que as raízes dos produtos notáveis podem estar ligadas ao binômio na análise combinatória. Porém, na Escola Básica, principalmente depois dos PCN que recomendam a abordagem geométrica.Do ponto de vista didático, assumindo os livros didáticos como referência observamos que desde 1981 os produtos notáveis vão mudando a abordagem paulatinamente, com ênfase na abordagem letrista num primeiro momento e depois facilitadora num segundo momento (Lins e Gimenez, 1997).

Assim, pensamos que para um estudo futuro podemos observar o processo de transposição interna, ou seja, tentar elucidar se atividades propostas nos livros didáticos ajudam na compreensão e na formação do pensamento algébrico.

Por fim, destaco que esse trabalho foi de grande valia para mim. Por dois motivos: pelo próprio aprendizado de fazer uma pesquisa na área de Didática da Matemática, mas, sobretudo, por que aprender produtos notáveis sempre foi algo que causou aflição. Hoje, vejo que podemos fazer a diferença na vida dos estudantes e o primeiro passo é aprender e compreender os processos de transposição.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed UFPR, 2007.

BERTATO, F. M. **A falsa suposição? Tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind.** In: *Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 18 no 36- pág. 11-29, 2018.*

BIANCHINI, E. **Matemática.** Volume do 8º Ano. Editora Moderna. São Paulo. 2022.

BLANTON, M. & KAPUT, J. (2005). **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 años de Transposición Didáctica. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico.** Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén., 2006. p. 385-406.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental - MEC, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 19 mai. 2024.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental.** Tese de Doutorado - Programa de Pós Grad em Educação - UFPE. Recife. 2006.

CAVALCANTE, J. L. **A dimensão cognitiva na Teoria Antropológica do Didático: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática do PPGEC-UFRPE. Recife. 2018.

CAVALCANTE, José Luiz; RODRIGUES, Rochelande Felipe. FAHRENHEIT 451: Considerações Sobre O Livro Didático De Matemática E Sua Análise À Luz Da Abordagem Antropológica Do Didático. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 25, p. 194–216, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5169. Acesso em: 19 jun. 2024.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didáctica Das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (Original de 1992).

CHEVALLARD, Y. **La Transposiciòn Didáctica Del Saber Sabio Al Saber Enseñado**. Tradução de CLAUDIA GILMAN. 1ª. ed. Buenos Aires: Aique, 1997. Título original (La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. (Original de 1991).

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemática:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2ª. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

GIOVANNI, J. R. **A conquista da Matemática.** Volume 8ª Série. Editora FTD. São Paulo, 1998.

HAZZAN, S. **Fundamentos** de **matemática elementar**, **5** : combinatória, probabilidade /. 8. ed. — São Paulo : **Atual**, 2013.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new Algebra with understanding.** 1999. (consultado em 10 de Setembro de 2023em https://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/Da/DA-TEXTOS/kaput_99AlgUnd.pdf)

KAPUT, J. What is álgebra? What is algebric reasoning? In J. KAPUT, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades** (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates. 2008.

KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades.** Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KIERAN, C. **Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels.** Quadrante. Vol. xvi, n. 1, 2007.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século** *XXI.* Campinas, SP, Papirus, 1997.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PORTO SILVEIRA, J. F. **O triângulo de Pascal é de Pascal?** Disponível em: http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2.html (Acesso em 19/06/2024).

ROCHA, Paulo Romero Ferreira. **A Passagem da Aritmética para Álgebra no livro didático do 7° ano do ensino fundamental: um caso de transposição Didática Externa.** Trabalho de Conclusão de Curso. Centro de Humanas e Exatas - Universidade Estadual da Paraíba**-** Monteiro-Paraíba. 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas,** Rio de Janeiro, Zahar. 2012

SANTOS, K. C. **Álgebra escolar nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexão sobre praxeologias no livro didático.** Trabalho de Conclusão de Curso. Centro de Humanas e Exatas - Universidade Estadual da Paraíba**-** Monteiro-Paraíba. 2020.

SARDELLA, A.; MATTA, E. **Matemática**. Vol 8ª Série. Editora Ática. São Paulo. 1981.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, 15, n. 2, 1986. 4-14.

TEIXEIRA, L. C. A. **Educação algébrica nos anos iniciais: uma experiência com alunos do 2° Ciclo do Ensino Fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso. Centro de Humanas e Exatas - Universidade Estadual da Paraíba**-** Monteiro-Paraíba. 2014.