



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PATRICK DA SILVA OLIVEIRA

UMA SOLUÇÃO NA TEORIA  $f(R)$

CAMPINA GRANDE  
2024

PATRICK DA SILVA OLIVEIRA

UMA SOLUÇÃO NA TEORIA  $f(R)$

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Gravitação e Cosmologia

Orientador: Jean Paulo Spinelly da Silva.

CAMPINA GRANDE  
2024

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

O48s Oliveira, Patrick da Silva.  
Uma solução na teoria  $f(R)$  [manuscrito] / Patrick da Silva  
Oliveira. - 2024.  
24 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -  
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,  
Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Teoria da relatividade geral. 2. Teoria  $f(R)$ . 3. Geometria  
cilíndrica. 4. Escalar de Ricci. I. Título

21. ed. CDD 530

PATRICK DA SILVA OLIVEIRA

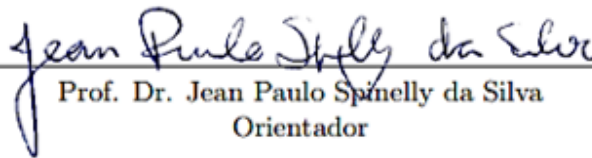
UMA SOLUÇÃO NA TEORIA  $f(R)$

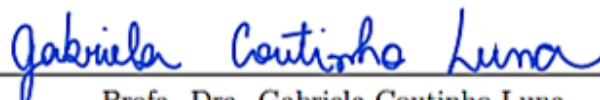
Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

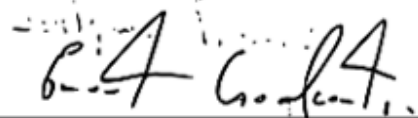
**Área de concentração: Gravitação e Cosmologia.**

Aprovada em: 14/06/2024.

**Banca Examinadora**

  
Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Orientador

  
Profa. Dra. Gabriela Coutinho Luna  
Examinadora (UEPB),

  
Prof. Dr. Everton Cavalcante  
Examinador (UEPB)

Aos meus pais, dona Neide e seu Cláudio, por acreditarem em mim e me inspirarem todos os dias, minha dedicação mais linda.

“Ele estende o norte sobre o vazio e suspende a terra sobre o nada.” (Jó 26:7)

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Do Geocentrismo à Relatividade Geral</b>	<b>7</b>
2.1	Primeiros Modelos Cosmológicos . . . . .	8
2.2	Teoria Newtoniana da Gravitação . . . . .	10
2.3	Relatividade Geral . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Teoria <math>f(R)</math> no Formalismo Métrico</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Solução Cilindricamente Simétrica em <math>f(R)</math>: Caso Particular</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>22</b>
	<b>Referências</b>	<b>22</b>
	<b>Agradecimentos</b>	<b>23</b>

# UMA SOLUÇÃO NA TEORIA $f(R)$

Patrick da Silva Oliveira<sup>1</sup>

## RESUMO

Em 1915, Einstein propôs a Teoria da Relatividade Geral, que é considerada como a teoria relativística da gravitação. Porém, essa teoria se mostra insuficiente, por exemplo, na descrição da expansão acelerada do Universo. Na tentativa de resolver esse problema, alguns autores assumem que, além das componentes conhecidas de matéria e energia, o Universo é preenchido por uma chamada energia escura. Outros, porém, optam por teorias que estendem a Relatividade Geral sem a necessidade de se recorrer a esse tipo de energia. Uma dessas, a denominada Teoria  $f(R)$ , propõe essa generalização assumindo que a ação do campo gravitacional é a integral de uma função do escalar de Ricci,  $R$ . Naturalmente, uma consequência imediata dessa abordagem é que as equações de campo de Einstein são modificadas. Neste trabalho, com o intuito de entender a influência dessa teoria nas soluções das equações de campo, o nosso objetivo é investigar a geometria gerada por uma distribuição de massa e energia cilindricamente simétrica. Para tanto, buscando simplificar os nossos cálculos, consideraremos o caso particular em que  $R$  é nulo.

**Palavras chave:** Teoria da Relatividade Geral; Teoria  $f(R)$ ; Geometria cilíndrica; Escalar de Ricci.

## ABSTRACT

In 1915, Einstein proposed the General Theory of Relativity, which is regarded as the relativistic theory of gravitation. However, this theory proves insufficient in certain instances, such as in describing the accelerated expansion of the Universe. In an attempt to resolve this issue, some authors assume that, in addition to the known components of matter and energy, the Universe is filled with a so-called dark energy. Others, however, opt for theories that extend General Relativity without resorting to this type of energy. One of these, called the  $f(R)$  Theory, proposes this generalization by assuming that the action of the gravitational field is the integral of a function of the Ricci scalar,  $R$ . Naturally, an immediate consequence of this approach is that Einstein's field equations are modified. In this work, with the aim of understanding the influence of this theory on the solutions of the field equations, our objective is to investigate the geometry generated by a cylindrically symmetric mass-energy distribution. To this end, in order to simplify our calculations, we will consider the particular case where  $R$  is zero.

**Keywords:** General Relativity Theory;  $f(R)$  Theory; Cylindrical Geometry; Ricci Scalar.

---

<sup>1</sup>Graduando(a) em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba



# 1 Introdução

A evolução do conhecimento humano sobre o universo é uma jornada longa, bonita e muito fascinante, que vem atravessando longos anos, envolvendo diversas culturas e civilizações. Desde os primeiros modelos geocêntricos, onde a Terra era vista como o centro do universo, até a transição para os modelos heliocêntricos, nossa visão do cosmos passou por profundas transformações. A revolução científica, conforme aborda (Porto e Porto, 2008, p. 4601-2) trouxe consigo a Teoria Newtoniana da Gravitação, que foi formulada para explicar as leis de Kepler sobre o movimento planetário. No entanto, apesar de seu sucesso, a teoria de Newton apresentou limitações, especialmente quando se trata de explicar fenômenos que envolvem altas velocidades e campos gravitacionais intensos, como o caso da precessão do periélio de Mercúrio.

Essas limitações abriram caminho para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG), desenvolvida pelo brilhante cientista alemão Albert Einstein, que reformulou nossa compreensão da gravidade como consequência da curvatura do espaço-tempo causada pela distribuição de massa e energia (Taylor e Wheeler, 1992). Embora a Relatividade Geral tenha sido confirmada por diversos experimentos e observações, ela falha em explicar alguns fenômenos cosmológicos, como a expansão acelerada do universo e as anomalias na rotação das galáxias (Capozziello e Faraoni, 2011). Essas falhas sugerem a necessidade de teorias alternativas, entre as quais se destacam as teorias modificadas da gravitação, como a teoria  $f(R)$ .

Tal teoria propõe modificar a ação de Einstein-Hilbert, substituindo o escalar de Ricci,  $R$ , por uma função genérica dessa quantidade, conforme descrito em (Sotiriou e Faraoni, 2010, p. 5). Essa abordagem permite explorar novas dinâmicas gravitacionais e obter soluções que não são possíveis dentro do escopo da relatividade geral.

Buscando compreender o papel dessa teoria, especificamente como as modificações na ação alteram as equações de campo e, conseqüentemente, as soluções, o nosso objetivo será estudar o problema do espaço-tempo gerado por um objeto cilíndricamente simétrico, no caso particular em que o escalar de Ricci é nulo, conforme proposto por Carvalho (2011).

O trabalho está organizado da seguinte forma: no seção 2, discutiremos a evolução dos modelos cosmológicos, do geocentrismo ao heliocentrismo, a formulação da Teoria Newtoniana da Gravitação e a Relatividade Geral; na seção 3, introduziremos a teoria  $f(R)$  e obteremos as equações de campo modificadas; na seção 4, investigaremos as soluções cilíndricamente simétricas; e, na seção 5, concluímos com uma discussão sobre a relevância dos resultados obtidos.

Ao longo deste artigo, usaremos o sistema de unidades no qual a velocidade de luz é igual a 1,  $c = 1$ , e adotaremos a assinatura  $(-, +, +, +)$ .

## 2 Do Geocentrismo à Relatividade Geral

O homem sempre tentou decifrar a ordem que rege os corpos celestes e buscou desenvolver um modelo cosmológico capaz de explicar e prever a dinâmica do universo. A forma como entendemos a natureza vem sendo modificada à medida que avançamos tecnologicamente, e a consequência disso é que novas teorias cosmológicas surgem e se adequam às descobertas científicas.

Nesta seção, abordaremos de forma breve, a evolução dos primeiros modelos

cosmológicos e discutiremos como isso resultou na formulação da Teoria da Gravitação Newtoniana. Além disso, apresentaremos a teoria relativística da gravitação, conhecida como Relatividade Geral.

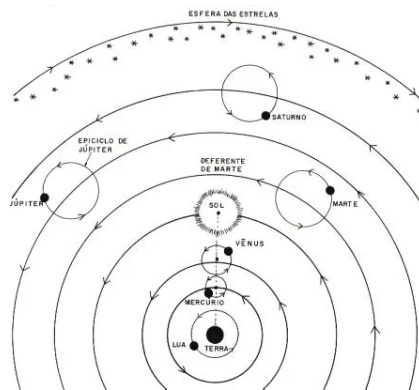
## 2.1 Primeiros Modelos Cosmológicos

O homem sempre olhou para cima e questionou tudo que via, o movimento do Sol, a rotação da Terra, as estrelas e a infinita extensão do universo. Essa sede pelo desconhecido sempre nos impulsionou a descobertas que transformaram nossa compreensão do cosmos e de nosso lugar nele. A história da cosmologia começou nas antigas civilizações, devido à necessidade de explicar os fenômenos naturais que eram observados no cotidiano.

Na Mesopotâmia, por volta de 3000 a.C., os babilônios acreditavam em um universo como uma série de esferas concêntricas, com deuses associados a cada um dos corpos celestes (Harrison, 2000, p. 28). No Egito Antigo, a cosmologia estava associada à religião. Os egípcios imaginavam a Terra como um disco plano, cercado por montanhas e coberto por um domo celeste que abrigava o deus Sol, Ra, que navegava o céu diariamente (Harrison, 2000, p. 28). Já na Grécia Antiga, pensadores como Anaximandro e Pitágoras iniciaram explicações mais racionais para a estrutura do universo, postulando, por exemplo, um modelo que descrevia a Terra como sendo esférica e que flutuava livremente no centro do cosmos (Harrison, 2000, p. 29).

O compilado destas ideias resultaram no modelo de Aristóteles, que influenciou profundamente o pensamento ocidental. Aristóteles, filósofo grego, desenvolveu um modelo cosmológico geocêntrico (o primeiro), onde a Terra era imóvel e ocupava o centro do universo, rodeada por esferas cristalinas perfeitas que carregavam os planetas e as estrelas (Harrison, 2000, p. 30).

Figura 1: Modelo Geocêntrico de Ptolomeu



Fonte: Extraída da internet em 2024.

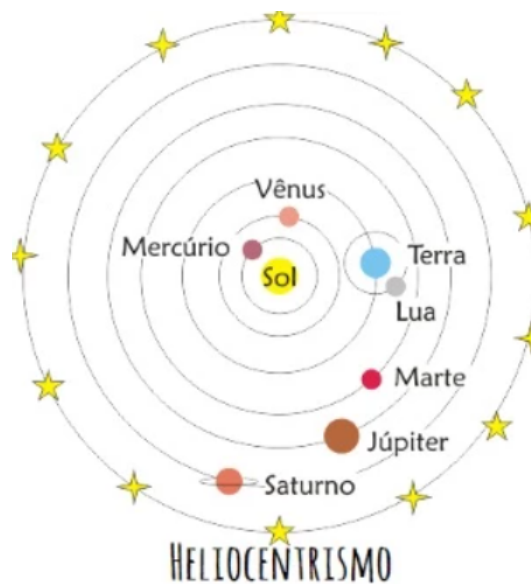
Entre 100 e 170 d.C. na cidade de Alexandria, no Egito, Claudio Ptolomeu, um astrônomo, matemático e geógrafo, consolidou e sistematizou, em sua obra *Almagesto*, as teorias geocêntricas anteriores, colocando a Terra estática no centro do universo. Absorvendo as ideias de Aristóteles, para explicar as complexidades do movimento planetário, em particular o movimento retrógrado, Ptolomeu propôs um modelo no qual as estrelas estariam fixas em uma esfera celeste que girava em torno da Terra e que os

outros corpos celestes, incluindo a Lua e o Sol, também se moveriam em órbitas circulares em torno da Terra. Além disso, ele assumiu que os planetas se moviam através de uma combinação de círculos, chamados de epiciclos, conforme descreve (Harrison, 2000, pp. 30-31). [Ver fig. 1].

Esse modelo, o qual é conhecido como **Modelo Geocêntrico Cosmológico**, refletia não apenas observações astronômicas, mas também uma cosmovisão que colocava os seres humanos em uma posição central e significativa no universo. “Ptolomeu... formulou o geocentrismo que dominou a visão científica e filosófica da antiguidade até o Renascimento” (Birznek, 2015, p. 38).

Em 1543, Nicolau Copérnico, astrônomo renascentista, desafiou o sistema ptolomaico ao propor que o Sol, e não a Terra, estivesse no centro do universo. Este modelo, o qual é conhecido como **Modelo Heliocêntrico Cosmológico**, postula que a terra é apenas um planeta entre outros que orbitam o sol, o que simplificava a matemática dos céus ao eliminar a necessidade de muitos dos complicados epiciclos usados por Ptolomeu. Copérnico manteve as órbitas circulares e as esferas celestes, mas seu modelo colocava o sol no centro do universo e descrevia a terra como um corpo que girava em torno de seu próprio eixo ao mesmo tempo que orbitava o Sol [Ver fig. 2]. Essa perspectiva não só reduziu o número de esferas celestes necessárias, como também proporcionou uma base mais elegante para a reforma do calendário e melhorou a previsão dos movimentos celestes (Birznek, 2015, p. 43).

Figura 2: Modelo Heliocêntrico de Copérnico



Fonte: Extraída da internet em 2024.

O modelo heliocêntrico de Copérnico, apesar de simples e poderoso, ainda possuía falhas significativas. Ele mantinha a noção de órbitas circulares perfeitas, o que não correspondia às trajetórias reais dos planetas e causava imprecisões nas previsões astronômicas. Além disso, ainda eram necessários alguns epiciclos para explicar o movimento retrógrado dos planetas.

Durante a Idade Média e até o Renascimento, a Igreja Católica detinha uma autoridade incontestável em questões de fé e moral, essa influência se estendia significativamente às esferas educacional e científica. Nesse contexto, a aceitação do geocentrismo estava

firmada nas interpretações das escrituras, pois de acordo com as escrituras, Deus criou o homem e fez da terra sua morada, assim, a Terra certamente era o centro de todas as coisas (universo). A adoção oficial da teoria geocêntrica pela Igreja após os trabalhos de Ptolomeu e sua integração pela teologia cristã, especialmente por Tomás de Aquino, solidificou essa visão como ortodoxia religiosa.

A transição do geocentrismo para o heliocentrismo foi marcada por uma resistência significativa, principalmente porque a descrição do heliocentrismo (de colocar o sol e não a terra como centro do universo) desafiava interpretações bíblicas estabelecidas que eram vistas como pilares da verdade religiosa. Qualquer desafio a essas interpretações era considerado heresia e uma ameaça à estabilidade social e religiosa, conforme descreve bem (Harrison, 2000, p. 35).

O medo das consequências de desafiar a Igreja levou muitos acadêmicos e cientistas a evitar, ou ocultar, suas descobertas. A perseguição não se limitava a julgamentos e prisões, mas também a ameaça de execução, embora menos comum para cientistas, era uma realidade presente naquela época, contribuindo para um ambiente de medo e censura. Assim, a ciência não apenas buscava entender o cosmos, mas também se encontrava em uma luta pela liberdade de explorar e expressar novas ideias em um ambiente repressivo e perigoso.

Após o período de transição e conflito entre os modelos geocêntrico e heliocêntrico, a ciência ganhou força com base nas observações empíricas e nos avanços matemáticos. Observações detalhadas feitas por astrônomos como Tycho Brahe e, posteriormente, a aplicação da matemática por Johannes Kepler nas leis do movimento planetário, solidificaram a teoria heliocêntrica, como veremos adiante. Estes avanços permitiram uma compreensão mais precisa e matematicamente consistente do nosso sistema solar. Essa evolução não só mudou nossa visão do cosmos, mas também fortaleceu a posição da ciência como uma disciplina rigorosa e respeitada, capaz de questionar e reformular entendimentos fundamentais sobre o mundo.

Em 1609, em seu trabalho publicado, Johannes Kepler, astrônomo e matemático alemão, revolucionou a cosmologia de Copérnico ao anunciar ao mundo suas três leis de movimento planetário, baseadas em observações minuciosas de Tycho Brahe (Harrison, 2000, p. 40), um grande astrônomo dinamarquês. Estas leis eliminaram a necessidade de esferas cristalinas e órbitas perfeitamente circulares, trazendo uma descrição mais precisa e matemática do cosmos. “Kepler foi capaz de formular leis que descreviam as órbitas elípticas dos planetas, um avanço significativo em relação às teorias anteriores” (Birznek, 2015, p. 46). A *Primeira Lei* estabelece os planetas movem-se em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos; já a *Segunda Lei* diz que linha que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais; por sua vez a *Terceira Lei* afirma que quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

Embora as leis de Kepler fossem empiricamente precisas e fornecessem previsões exatas dos movimentos planetários, elas não eram acompanhadas de uma teoria física que explicasse por que os planetas se moviam dessa maneira. A falta de uma base teórica deixava um vácuo significativo na compreensão da dinâmica celeste.

## 2.2 Teoria Newtoniana da Gravitação

Em 1687 o mundo conhecia o famoso livro “*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*”, ou simplesmente “*Principia*”, (Harrison, 2000, p. 57). Foi nele que Newton

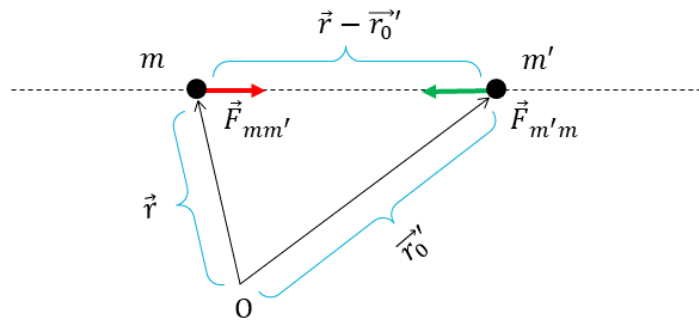
apresentou ao mundo a sua Teoria da Gravitação Universal, nascendo da necessidade de explicar de forma unificada e consistente o movimento dos corpos celestes e dos objetos na Terra. Isaac Newton formulou essa teoria para fornecer uma base matemática que explicasse tanto as leis do movimento planetário de Kepler, observadas no céu, quanto a queda dos objetos, observada na Terra.

De acordo com a Teoria Newtoniana da Gravitação, duas partículas de massas  $m$  e  $m'$  se atraem com uma força cujo módulo é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Formalmente, considerando que as partículas de massas  $m$  e  $m'$  se encontram nas posições indicadas na figura 3, as forças entre elas são dadas por:

$$\vec{F}_{mm'} = -\vec{F}_{m'm} = -G \frac{mm'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_0), \quad (1)$$

onde  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$  é a constante da Gravitação Universal.

Figura 3: Força gerada por uma partícula de massa  $m'$ , que se encontra em  $\vec{r}'_0$ , sobre uma partícula de massa  $m$  localizada na posição  $\vec{r}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

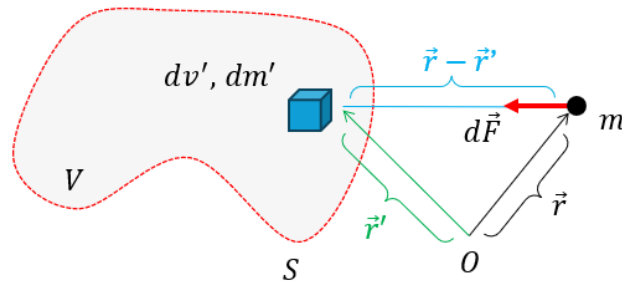
Embora a lei da Gravitação Newtoniana tenha sido originalmente concebida para descrever a interação entre duas partículas, podemos extê-la para determinarmos a força que uma distribuição contínua produz sobre uma partícula. Para tanto, devemos utilizar o princípio da superposição (Harrison, 2000, p. 230), onde cada parte de um corpo (parte infinitesimal) contribuirá com uma força sobre a partícula. Em outras palavras, para obtermos a força sobre uma partícula de massa  $m$ , localizada em  $\vec{r}$ , precisaremos dividir o corpo em pequenos elementos de massa infinitesimal  $dm'$ , e somar a força infinitesimal,  $d\vec{F}'$ , produzida por cada elemento [Ver a figura 4].

Fazendo isso e entendendo que a força  $d\vec{F}'$  deve obedecer à lei da gravitação [Eq. (1)], temos que a força sobre  $m$  será

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dm' \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'. \quad (2)$$

em que  $\rho(\vec{r}')$  é a densidade de massa. É importante destacar que a equação (2) pode ser utilizada para determinarmos a força gravitacional gerada por uma distribuição qualquer, seja ela discreta ou contínua, sobre uma partícula de massa  $m$  em  $\vec{r}$ . Por exemplo, caso

Figura 4: Força gerada por um elemento de massa  $dm'$ , que se encontra em  $\vec{r}'$ , sobre uma partícula de massa  $m$  localizada na posição  $\vec{r}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

a distribuição seja constituída por uma única partícula de massa  $m'$ , localizada em  $\vec{r}'_0$ , a densidade será dada por  $\rho(\vec{r}') = m'\delta(\vec{r}' - \vec{r}'_0)$  e a equação (2) tomará a forma da expressão (1).

Conforme podemos observar nas situações acima, a força gravitacional é do tipo que age à distância. Logo, para justificar este aspecto, dizemos que um corpo massivo produz um efeito na região ao seu redor e que uma partícula, colocada ali, sentirá esse efeito a partir da força que atua sobre ela. Naturalmente, como essa ação está estritamente relacionada à força exercida sobre a partícula e, ao mesmo tempo, depende apenas das características do corpo que a produz, podemos representá-la por um campo vetorial,  $\vec{g}(\vec{r})$ , definido por

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}, \quad (3)$$

onde  $g$  é um campo vetorial, denominado campo gravitacional. Consequentemente, usando (2), segue que:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'. \quad (4)$$

Utilizando a propriedade vetorial (Reitz, 1982)

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (5)$$

podemos escrever o campo gravitacional como

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad (6)$$

onde

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (7)$$

é um campo escalar que representa o potencial do campo gravitacional. A equação (6) nos trás uma propriedade importante: O campo é conservativo.

A equação (7) nos fornece a expressão do potencial gerado por uma determinada configuração de massa. Contudo, também poderemos encontrar  $\Phi(\vec{r})$  por meio de uma

equação diferencial parcial. De fato, tomando o laplaciano em ambos os lados da equação (7) e usando a propriedade (Reitz, 1982)

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (8)$$

obtemos a equação diferencial newtoniana do campo gravitacional, também conhecida como a *equação de Poisson*, (Carmeli, 1982)

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) . \quad (9)$$

Determinando  $\Phi$  a partir da resolução desta equação, usaremos (6) para obtermos o campo  $\vec{g}$  e aplicaremos o resultado em (3) para conhecermos a força e, conseqüentemente, estabelecermos a dinâmica da partícula.

Sobre essa teoria, podemos destacar dois aspectos: o primeiro é que ela obedece ao que chamamos de *princípio da equivalência*, o qual afirma que, em uma pequena região do espaço, não temos a capacidade de distinguir o efeito gerado por um referencial não-inercial, na ausência da gravitação, daquele que é produzido por uma distribuição de massa, em um referencial inercial; já o segundo é que essa teoria falha quando o campo gravitacional é suficientemente forte a ponto de fazer com que as partículas, que se movem em sua presença, atinjam velocidades próximas a da luz ( $c \approx 3.10^8$  m/s).

### 2.3 Relatividade Geral

Em 1905, visando resolver a incompatibilidade teorica que existe entre as equações do eletromagnetismo e as transformações de Galileu, Einstein propôs a chamada teoria da relatividade restrita (TRR). Nela, postulou que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais e que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento relativo entre eles. Como consequência desses postulados, os conceitos de simultaneidade e intervalo de tempo passam a ser relativos, ou seja, dependem do referencial.

Por conta disso, ao contrário da visão clássica newtoniana, que considera o espaço e o tempo como entidades separadas e absolutas, a TRR unifica-os em uma única entidade denominada o espaço-tempo, associada a cada observador inercial. Em essência, na relatividade restrita o espaço-tempo é um diagrama constituído pela combinação de três dimensões espaciais (comprimento, largura e altura) com a dimensão temporal (o tempo) em uma única e contínua estrutura quadridimensional homogênea e isotrópica, isto é, igual em todas as direções e em todos os pontos. Isso significa que, para todos os observadores inerciais, não há distorção do tempo ou do espaço, e o espaço-tempo, associado a cada um deles, é plano, (Harrison, 2000, p. 206).

Quando os objetos se movem a velocidades significativamente menores do que a velocidade da luz, os efeitos da relatividade são desprezíveis. No entanto, à medida que os objetos se aproximam da velocidade da luz, esses efeitos relativísticos se tornam importantes. Portanto, em situações envolvendo altas velocidades, como partículas subatômicas em aceleradores de partículas ou astronaves viajando a velocidades próximas à da luz, é necessário aplicar os princípios da relatividade restrita para uma descrição precisa do fenômeno observado.

No ano de 1915, diante da necessidade de entender como a gravidade opera no contexto relativístico (velocidades comparadas com a da luz), Einstein formulou a teoria

da relatividade geral. Partindo da ideia simples de que o princípio da equivalência também é válido no caso relativístico, ele concluiu que a gravidade deve ser vista como uma curvatura do espaço-tempo, causada pela massa e energia dos objetos, (Harrison, 2000, p. 220).

Como o espaço-tempo da TRG é curvo, a distância entre dois acontecimentos é dada pelo elemento de linha (Carmeli, 1982)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (10)$$

onde o tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , é a quantidade que contabiliza as possíveis deformações do espaço-tempo. Nesse sentido, diferentemente da teoria newtoniana, em que a gravitação é descrita por um único campo,  $\Phi$ , a relatividade geral assume a existência de dez campos, constituídos pelas dez componentes independentes do tensor métrico. Naturalmente, esta concepção requer dez equações de campo que, no limite em que o campo gravitacional é fraco, devem concordar com a de Poisson [Eq. (9)].

Após alguns anos de tentativa, Einstein concluiu que, no caso relativístico, as equações do campo devem ser escritas como (Carmeli, 1982)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (11)$$

em que as quantidades  $R_{\mu\nu}$  e  $R$ , denominadas Tensor de Ricci e escalar de Ricci, são dadas por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho , \quad (12)$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (13)$$

sendo

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g x^\lambda} \right) \quad (14)$$

os símbolos de Christoffel. Além disso,  $\kappa = 8\pi G$  e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, que é uma quantidade que descreve a quantidade de matéria e energia que produz o campo gravitacional.

O lado esquerdo da expressão (11), contém informações relacionadas a geometria do espaço-tempo, já o lado direito é composto por elementos de distribuição de matéria/energia. Assim, as equações de campo de Einstein vinculam a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia, de forma que a presença de matéria e energia diz ao espaço-tempo como se curvar, e a forma como o espaço-tempo está curvado diz à matéria e energia como se mover (Taylor e Wheeler, 1992).

Vale salientar que é possível obtermos as equações de Einstein a partir de um princípio variacional. Para tanto, devemos usar a ação da integral de Einstein-Hilbert,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x (R - 2\kappa \mathcal{L}_F) , \quad (15)$$

Nela,  $R$  é a Lagrangiana para o campo gravitacional e  $\mathcal{L}_F$  é a Lagrangiana para todos os outros campos (Carmeli, 1981).



Atualmente, a TRG é considerada a descrição mais precisa do universo em larga escala. Ela foi confirmada por uma ampla gama de experimentos e observações, tais como a detecção de ondas gravitacionais, que foi confirmada em 2015 pelas observações realizadas pelos detectores LIGO. Estes detectores mediram as distorções no tecido do espaço-tempo, originadas de fusões de buracos negros. Outras evidências incluem a precessão do periélio de Mercúrio e o deslocamento aparente das estrelas observado durante o eclipse solar de Sobral, em 1919, que comprovou que a luz se curva na presença de um campo gravitacional forte, como o do Sol. Essa robustez da relatividade geral nos leva a reconhecer a genialidade de Einstein e a compreender melhor as complexidades do universo que habitamos. À medida que continuamos a testar e expandir seus princípios, a TRG não só se mantém como uma teoria fundamental na física, mas também serve como base para novas teorias que podem um dia revelar ainda mais a beleza e as profundezas do cosmos.

### 3 Teoria $f(R)$ no Formalismo Métrico

Como vimos ao longo deste trabalho, dentre as teorias da gravitação, a TRG é a mais fundamental que possuímos. Ela não apenas reformulou completamente nossa compreensão dos fenômenos gravitacionais, mas também ofereceu previsões exatas para uma vasta gama de fenômenos cosmológicos. Contudo, fenômenos como a expansão acelerada do universo e os desvios nas velocidades orbitais das galáxias não são explicados de forma satisfatória pela Relatividade Geral.

Essa insuficiência possibilitou o desenvolvimento de novas teorias gravitacionais que possam fornecer explicações alternativas ou mais completas sobre o funcionamento do cosmos, como por exemplo a chamada teoria  $f(R)$ , a qual propõe que ação de Einstein-Hilbert seja modificada a partir da substituição do escalar de Ricci,  $R$ , por uma função dessa quantidade.

Existem dois formalismos que nos permitem construir as equações de campo dessa teoria: o de Palatini e o Métrico. Na formulação de Palatini, consideramos a métrica e as conexões como sendo campos independentes e, para obtermos as equações de campo a partir de um princípio variacional, variamos a ação em relação a ambos. Naturalmente, as conexões adotadas nessa formalismo não são as de Christoffel. Já no formalismo métrico, variamos a ação apenas em relação à métrica. É claro que, independentemente do procedimento adotado, as referidas equações devem corresponder às de Einstein quando  $f(R) = R$  (Copozziello e Faraoni, 2011).

Nesta seção, deduziremos as equações modificadas da gravitação seguindo a formulação métrica.

Conforme afirmamos, em  $f(R)$  a ação de Einstein-Hilbert é reescrita como

$$S = S_G - 2\kappa S_M, \quad (16)$$

em que

$$S_G = \int \sqrt{-g} f(R) d^4x \quad \text{e} \quad S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x. \quad (17)$$

Naturalmente, para obtermos as equações do campo gravitacional, devemos exigir que a variação da ação de Einstein-Hilbert seja nula, isto é,

$$\delta S = \delta S_G - 2\kappa \delta S_M = 0. \quad (18)$$

Por simplicidade, faremos todas as deduções em um sistema geodésico, isto é, aquele em que os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  são nulos. Isto não implica em perda de generalidade. Pois, como as equações que buscamos envolvem relações entre tensores, elas devem ser válidas em qualquer sistema de referência. Caso contrário, não obedeceriam o princípio geral da covariância.

Tomando a variação de  $S_G$ , temos:

$$\delta S_G = \int (\delta\sqrt{-g} f + \sqrt{-g} \delta f) d^4x . \quad (19)$$

Mas, usando a propriedade (Carmeli, 1981)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (20)$$

e o fato que

$$\delta f = \delta F (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) , \quad (21)$$

onde  $F = df/dR$ , a equação (19) torna-se:

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} d^4x \left( F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \right) \delta g^{\mu\nu} + \int \sqrt{-g} d^4x F g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} . \quad (22)$$

Fazendo a variação do tensor de Ricci e lembrando que estamos em um sistema geodésico, onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$  e  $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu$ , podemos mostrar, após um cálculo tedioso, que:

$$F g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha W^\alpha + (g_{\mu\nu} \square F - \nabla_\mu \nabla_\nu F) \delta g^{\mu\nu} . \quad (23)$$

onde

$$\square F \equiv \nabla_\alpha \nabla^\alpha F = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial x^\beta} \right) \quad (24)$$

e

$$W^\sigma = F (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) + (\nabla_\mu F \delta_\nu^\alpha - g_{\mu\nu} \nabla^\alpha F) \delta g^{\mu\nu} \quad (25)$$

é um tensor de primeira ordem.

Consequentemente, substituindo (23) em (22), obtemos:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left( F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + g_{\mu\nu} \square F - \nabla_\mu \nabla_\nu F \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (26)$$

$$+ \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha W^\alpha . \quad (27)$$

Usando o teorema da divergência, podemos transformar o segundo termo do lado direito da equação acima em uma integral de superfície. Fazendo isso e usando o fato que, na superfície, as variações do campo  $g_{\mu\nu}$  e das conexões de Christoffel são nulas,

concluiremos que o referido termo será nulo. Desse modo, concluímos que a variação da ação do campo gravitacional é dada por

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left( F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + g_{\mu\nu} \square F - \nabla_\mu \nabla_\nu F \right) \delta g^{\mu\nu} . \quad (28)$$

Por outro lado, usando as técnicas do cálculo variacional, segue que

$$\delta S_M = \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \right] d^4x . \quad (29)$$

Mas, entendendo que a variação e a derivada são operações que comutam, isto é,  $\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu})$ , integrando o segundo termo por partes e, mais uma vez, admitindo que a variação dos campos se anula na fronteira de integração, a equação acima pode ser reescrita como

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (30)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \quad (31)$$

é o tensor energia momento

Por fim, substituindo (28) e (30) em (18), chegamos (Almir, 2016) à

$$F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) F = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (32)$$

que são as equações que representam uma generalização das equações de Einstein, para o caso da teoria  $f(R)$ . Como podemos observar, na situação específica em que  $f(R) = R$  (que é o caso da ação de Hilbert-Einstein), as equações de Einstein são recuperadas.

## 4 Solução Cilindricamente Simétrica em $f(R)$ : Caso Particular

Nesta seção, a partir da resolução das equações modificadas de campo, determinaremos a geometria do espaço-tempo exterior a uma configuração de massa e energia cilíndricamente simétrica, no caso particular em que o escalar de curvatura é nulo. Porém, antes de especificarmos  $R = 0$ , escreveremos tais equações supondo que o escalar de Ricci constante.

Uma vez que estamos interessado na região em que não há distribuição de matéria e energia, precisamos fazer  $T_{\mu\nu} = 0$  em (32). Além disso, como estamos assumindo que  $R$  é constante, deveremos considerar que as operações sobre a função  $F$  serão nulas, isto é, que  $\nabla_\mu \nabla_\nu F = \square F = 0$ . Levando isso em conta, vemos que as equações de campo que utilizaremos são dadas por:

$$F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f = 0. \quad (33)$$

Calculando o traço da expressão acima, ou seja, multiplicando ambos os lados por  $g^{\mu\nu}$ , temos

$$FR - 2f = 0. \quad (34)$$

Logo, isolando  $f$  e substituindo nas equações (33), podemos reescrevê-las da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (35)$$

Conforme enfatizamos, o nosso interesse é buscar uma solução que possua simetrias cilíndrica. Para tanto, utilizaremos as coordenadas de Weyl  $(t, r, \phi, z)$ , pois, quando aplicadas situações que apresentam tal simetria, permitem uma separação natural das variáveis espaciais, facilitando a integração das equações de campo.

Nessas coordenadas, o elemento de linha cilíndricamente simétrico é dado por

$$ds^2 = -e^{2k-2u} dt^2 + e^{2k-2u} dr^2 + w^2 e^{-2u} d\phi^2 + e^{2u} dz^2, \quad (36)$$

onde  $u$ ,  $k$  e  $w$  são funções que dependem apenas de  $r$ . Como consequência, as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são, respectivamente,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2k-2u}, e^{2k-2u}, w^2 e^{-2u}, e^{2u}) \quad (37)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{-2k+2u}, e^{-2k+2u}, w^{-2} e^{2u}, e^{-2u}). \quad (38)$$

Substituindo (37) e (38) em (14), temos que os símbolos de Christoffel não nulos são expressos por

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{11}^1 &= \frac{dk}{dr} - \frac{du}{dr}, & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} - \frac{du}{dr}, & \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{du}{dr} \\ \Gamma_{22}^1 &= e^{-2k} \left( w \frac{du}{dr} - w^2 \frac{dw}{dr} \right) & \text{e} & \Gamma_{33}^1 &= -e^{4u-2k} \frac{du}{dr}. \end{aligned} \quad (39)$$

Utilizando esses termos, vemos da equação (12) que as únicas componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = -\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d^2k}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dk}{dr} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr}, \quad (40)$$

$$R_{11} = -2 \left( \frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{d^2k}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dk}{dr} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2}, \quad (41)$$

$$R_{22} = w^2 e^{-2k} \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad (42)$$

e

$$R_{33} = -e^{4u-2k} \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} \right). \quad (43)$$

Com isso, o escalar de Ricci toma a forma

$$R = 2e^{2u-2k} \left[ - \left( \frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{d^2k}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} \right]. \quad (44)$$

De posse desses resultados, podemos agora escrever as equações diferenciais satisfeitas pelas componentes do tensor métrico. Realmente, fazendo  $\mu = \nu = 0$ ,  $\mu = \nu = 1$ ,  $\mu = \nu = 2$  e  $\mu = \nu = 3$  nas equações (35) e usando (37), (40), (41), (42) e (43), encontramos

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{d^2k}{dr^2} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dk}{dr} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} = \frac{R}{4} e^{2k-2u}, \quad (45)$$

$$-2 \left( \frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{d^2k}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dk}{dr} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{R}{4} e^{2k-2u} \quad (46)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{R}{4} e^{2k-2u} \quad (47)$$

e

$$-\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{du}{dr} = \frac{R}{4} e^{2k-2u}. \quad (48)$$

Embora tenhamos quatro equações diferenciais envolvendo  $w$ ,  $u$  e  $k$ , para determinarmos o comportamento dessas funções, precisaremos apenas de três que sejam independentes. Como não faz sentido eliminarmos nenhuma das quatro, poderemos reduzir esse número a partir da realização de operações entre elas. De fato, efetuando subtrações entre (45) e as outras expressões acima, encontraremos:

$$-\frac{2}{w} \frac{dk}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} + 2 \left( \frac{du}{dr} \right)^2 = 0, \quad (49)$$

$$-\frac{d^2k}{dr^2} - \frac{1}{w} \frac{dk}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} = 0 \quad (50)$$

e

$$-\frac{d^2k}{dr^2} + 2 \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{w} \frac{dk}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{2}{w} \frac{du}{dr} \frac{dw}{dr} = 0. \quad (51)$$

Subtraindo (51) de (50), segue que

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{du}{dr} \frac{dw}{dr} - \frac{1}{2w} \frac{d^2w}{dr^2} = 0, \quad (52)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dr} \left( w \frac{du}{dr} - \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{1}{2w} \left( c_1 + \frac{dw}{dr} \right), \quad (53)$$

onde  $c_1$  é uma constante de integração. Do mesmo modo, somando (50) e (51) e utilizando (52), chegamos à:

$$\frac{d^2k}{dr^2} + \frac{1}{w} \frac{dk}{dr} \frac{dw}{dr} - \frac{1}{w} \frac{d^2w}{dr^2} = 0 \Rightarrow \frac{dk}{dr} = \frac{1}{w} \left( c_2 + \frac{dw}{dr} \right), \quad (54)$$

em que  $c_2$  também é uma constante. Isso significa que, se conhecermos como  $w$  se comporta, as equações (53) e (54) nos permitirão determinar  $u$  e  $k$ .

Uma das soluções possíveis da equação (49) é aquela em que  $w$  é linear, isto é,  $d^2w/dr^2 = 0$ . Assumindo, então, que isto é verdade, temos

$$w = c_3 r + c_4, \quad (55)$$

onde  $c_3$  e  $c_4$  são constantes que surgem ao efetuarmos duas integrações em  $r$ . Por conseguinte, substituindo (55) em (53) e (54) e resolvendo as equações diferenciais resultantes, chegamos à:

$$u = \left( \frac{c_1 + c_3}{2c_3} \right) \ln w + c_5 \quad (56)$$

e

$$k = \left( \frac{c_2 + c_3}{c_3} \right) \ln w + c_6, \quad (57)$$

em que  $c_5$  e  $c_6$  são constantes.

Como essas funções devem satisfazer à equação (49), esperamos que haja uma relação entre  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ . De fato, aplicando (55), (56) e (57) em (49), concluímos que  $c_1 = \pm 2\sqrt{c_2 + c_3} - c_3$ , o que nos leva à

$$u = \pm m \ln w + c_5 \quad (58)$$

e

$$k = m^2 \ln w + c_6, \quad (59)$$

onde  $m = \sqrt{(c_2 + c_3)/c_3}$ . É importante destacar que, além de obedecerem à equação (49), as funções métricas escolhidas acima correspondem ao caso particular em que o escalar de curvatura é nulo.

Sem perdas de generalidade, podemos tomar  $c_4 = 0$ . Fazendo isso, substituindo (55), (58) e (64) em (36), redefinindo  $w = c_3 r$  e efetuando a mudança de coordenadas

$$\tilde{\rho} = A^{\frac{1}{m(m\mp 1)+1}} \rho, \quad (60)$$

$$\tilde{t} = c_3 A^{\frac{1}{m(m\mp 1)+1}} t, \quad (61)$$

$$\tilde{\phi} = e^{-c_5} A^{-\frac{1\mp m}{m(m\mp 1)+1}} \phi \quad (62)$$

e

$$\tilde{z} = e^{c_5} A^{-\frac{\mp m}{m(m\mp 1)+1}} z, \quad (63)$$

em que  $A = \exp(c_6 - c_5)/c_3$ , vemos que a métrica nas coordenadas de Weyl torna-se

$$ds^2 = \tilde{\rho}^{2m(m\mp 1)} [d\tilde{\rho}^2 - d\tilde{t}^2] + \tilde{\rho}^{2\mp 2m} d\tilde{\phi}^2 + \tilde{\rho}^{\pm 2m} d\tilde{z}^2. \quad (64)$$

Finalmente, aplicando as transformações de coordenadas

$$\tilde{t} \rightarrow i\tilde{z} \quad \text{e} \quad \tilde{z} \rightarrow i\tilde{t}, \quad (65)$$

o elemento de linha acima torna-se,

$$ds^2 = \tilde{\rho}^{2m(m\mp 1)} [d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2] + \tilde{\rho}^{2\mp 2m} d\tilde{\phi}^2 - \tilde{\rho}^{\pm 2m} d\tilde{t}^2. \quad (66)$$

Se este elemento de linha for reescrito sem a utilização do sinal  $\pm$ , ele se assemelhará as soluções das equações de campo de Levi-Civita da Relatividade Geral (Levi-Civita, 1917), com a constante  $m$  assumindo valores positivos e negativos. Por outro lado, no cenário em que  $m = 0$ , se tornará

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2 + \tilde{\rho}^2 e^{-2c_6} c_3^2 d\phi^2, \quad (67)$$

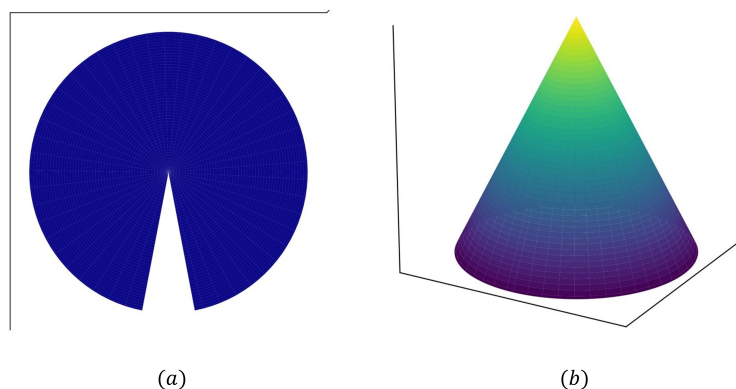
ou ainda,

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi'^2, \quad (68)$$

onde  $\phi' = e^{-c_6} c_3 \phi$ , o qual é semelhante aquele que descreve o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica, segundo a TRG (Vilenkin, 1983; Hiscock, 1985; Linet, 1985).

Este último elemento de linha é idêntico ao do espaço-tempo plano de Minkowski, em coordenadas cilíndricas. Porém, embora pareça contraditório, isto não garante que este elemento representa o espaço-tempo de Minkowski. Na verdade, como o ângulo  $\phi'$  varia entre 0 e  $2\pi e^{-c_6} c_3$ , a geometria associada à (68) corresponde à de Minkowski, a menos de uma fatia compreendida pelo ângulo  $2\pi(1 - e^{-c_6} c_3)$ . Nesse sentido, podemos afirmar que este espaço-tempo é localmente plano e que, globalmente, tem a forma de uma cone, sendo, portanto, não é Euclidiano, conforme as figuras abaixo.

Figura 5: (a) Plano com uma déficit angular. (b) Cone formado plano quando identificamos as arestas da “fatia” angular.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Embora não haja campo gravitacional local e as partículas se movam em linha reta, sem serem atraídas pela distribuição, a estrutura global deve produzir alguns efeitos

gravitacionais similares aos que são gerados por uma corda. Por exemplo, se duas partículas ou dois raios de luz se movimentarem ao longo de caminhos paralelos, em um plano perpendicular à distribuição, e passarem por lados opostos, irão convergir e colidir. Esse fenômeno, o qual é denominado *efeito lente*, foi previsto por Gott (1985) e observado no ano de 1987 (Conie e Hu, 1987).

## 5 Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso, inicialmente, discutimos a evolução da cosmologia, abordando como as teorias da gravitação foram desenvolvidas ao longo da história, seus sucessos e fracassos à luz dos rigorosos testes da ciência. Demos ênfase à transição do geocentrismo ao heliocentrismo e abordamos como a introdução da matemática ajudou na compreensão do cosmos, desmistificando raízes religiosas acerca do universo.

Na sequência, apresentamos a teoria  $f(R)$  como sendo uma teoria alternativa da gravitação relativística. Nela, embora mantenhamos a ideia da Relatividade Geral de que o campo gravitacional é a curvatura do espaço-tempo, assumimos que a ação de Einstein-Hilbert deve ser alterada. Como consequência, conseguimos obter equações de campo mais gerais que incorporam novas dinâmicas gravitacionais.

Por fim, nos dedicamos a investigação da solução cilindricamente simétrica na teoria modificada, na situação em que o escalar de curvatura é nulo. Nesse caso particular, utilizando as coordenadas de Weyl, resolvemos as equações de campo e obtivemos as componentes do tensor métrico. De posse dos resultados, vimos que em dois casos específicos, a solução obtida corresponderá às que são previstas pela TRG para esse tipo de simetria: a de Levi-Civita e da corda cósmica.

Diante do exposto, concluímos esse trabalho dizendo que, mesmo impondo uma condição para o escalar de curvatura, a resolução das equações de campo nos levou a uma solução que não seria possível obter a partir da teoria de Einstein da gravitação. Assim, ficou bem visível que a teoria  $f(R)$  é capaz de nos fornecer soluções que, em casos específicos, seriam válidas na Relatividade Geral, e solidificam o quão relevante essa teoria é, quando diz respeito a compreensão da estrutura do espaço-tempo e dos fenômenos gravitacionais.

## REFERÊNCIAS

CAPOZZIELLO, Salvatore; FARAONI, Valerio. **Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics**. Dordrecht: Springer, 2011.

CARVALHO BIRZNEK, Fernando. **A Evolução das Teorias Cosmológicas: Da Visão do Universo dos Povos Antigos até a Teoria do Big Bang**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Paraná, 2015.

CARVALHO, Gabriela Coutinho de. **Soluções de Corda Cósmica em Teorias  $f(R)$  da Gravitação**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Fluminense, 2011.



CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley & Sons, 1982. ISBN 0-471-86437-4.

CONIE, L. L.; HU, E. M. **Astrophysical Journal**. Vol. 318, p. L33, 1987.

GOTT III, J. R. *Astrophys. Journal* **288**, 422.

HARRISON, Edward. **Cosmology: The Science of the Universe**. 2<sup>a</sup> Edição. Cambridge University Press, 2000.

HISCOCK, W. A. *Phys. Rev. D* **31**, 3288 (1985).

LINET, B. *Gen. Rel. Grav.* **17**, 1109 (1985).

PORTO, C.M.; PORTO, M.B.D.S.M. **A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, n. 4, 4601, 2008.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Foundations of Electromagnetic Theory**. 3<sup>a</sup> ed. Reading: Addison-Wesley, 1982.

SOTIRIOU, Thomas P.; FARAONI, Valerio. **f(R) theories of gravity**, 2010.

SOUZA, Almir Dantas de. **Campo Gravitacional da Corda Cósmica em Teorias f(R)**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Estadual da Paraíba, 2016.

TAYLOR, Edwin F.; WHEELER, John Archibald. **Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity**. 2<sup>a</sup> ed. New York: W.H. Freeman and Company, 1992.

VILENKIN, A. *Phys. Lett.* **133 B**, 177 (1983).

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, seja toda a minha gratidão e louvor, por Ele ser a minha fonte inesgotável de força e coragem diante das adversidades da vida.

À toda minha família, em especial à minha mãe, dona Neide, que, mesmo dizendo que Física é um curso de “doido” e brincando comigo sempre que via nuvens “carregadas”, não renunciava à piada, “as nuvens estão se formando, e você, quando irá se formar?”, aindo assim, nunca mediu esforços para me apoiar e me ver feliz. Por você, minha mãe, eu contaria até o infinito, indo e voltando, cem vezes.

Gostaria de expressar minha gratidão e respeito máximo ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Spinelly, por sua orientação, paciência (que tende a  $+\infty$ ) e apoio ao longo deste trabalho. Você é a pessoa mais genial que conheço. É impossível não gostar da sua didática, tornando os cursos de Eletromagnetismo e Mecânica Quântica encantadores.

Nunca esquecerei sua célebre frase por trás de cada dedução: “Foi feito pra dar certo!”. Sua sabedoria e dedicação foram cruciais para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alex, por suas valiosas contribuições e ensinamentos nas disciplinas de Mecânica Clássica, Física Moderna II e Física III, sempre nos encantando com sua didática, e à Dr. Raíssa, por nos mostrar mais de perto os caminhos da carreira científica. Agradeço também aos demais professores do departamento de Física da UEPB, Campus I, vocês são incríveis. A UEPB é agraciada por tê-los como professores.

Aos meus queridos amigos... Evelyn, Carlos, Rodrigues, Liziane, Carol, Gabi (a cacheada) e Tatiele, meu muito obrigado. Vocês tornaram os meus dias cinzentos em azuis, meus barulhos em poesias. Nosso companheirismo foi essencial para chegarmos aonde chegamos. Deus me presenteou com os melhores amigos que alguém poderia ter. Sei que demorei um pouquinho, rs, mas estou aqui, agora não podem mais fazer piada.

À Thalita, por ser quase minha namorada e me cobrar a escrita do TCC diariamente, à Jessika, pelos melhores conselhos, à Graça (in memoriam), nossas conversas em frente ao CCT eram as mais engraçadas, era tão legal vê-la toda envergonhada. Nunca esquecerei de você, do seu amor pela Física e por Albert Einstein. Acredito muito que Deus já lhe mostrou os confins do universo e sua beleza. À Joseane (in memoriam), por nossas pequenas resenhas, à Wevylly e Igor, por nossas idas e voltas para casa no ônibus escolar, onde as principais conversas eram relacionadas a animes e Física.

Aos meus amigos da AeC, Neto, Luilton, Lidjane, Dai, Mari, Thalyane e Alice, que sempre escutaram minhas conversas sobre buracos de minhoca, buracos negros e viagem no tempo, desculpem se falei demais, eu amo vocês.

A todos que, em algum ponto do contínuo espaço-tempo da vida, colidiram com a minha trajetória, seja positiva ou negativamente, tudo contribuiu para o meu aprendizado. Meu muito obrigado, oro por vocês todos os dias.