UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDGAR MONTEIRO DOS SANTOS

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM: MÉTODOS E APLICAÇÕES

PATOS
2023

EDGAR MONTEIRO DOS SANTOS

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM: MÉTODOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientador: Prof. Jean Pereira Soares

PATOS
2023

S237e Santos, Edgar Monteiro dos.
Estudo das equações diferenciais de primeira ordem [manuscrito] : métodos e aplicações / Edgar Monteiro dos Santos. - 2023.
70 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.
"Orientação : Prof. Esp. Jean Pereira Soares, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA. "

1. Equações Diferenciais. 2. Resoluções matemáticas. 3. Aplicações de equações. I. Título

21. ed. CDD 515

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 COBIB/UEPB

EDGAR MONTEIRO DOS SANTOS

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM: MÉTODOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em 01 / 12 / 2023

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
JEAN PEREIRA SOARES
Data: 02/12/2023 15:41:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Jean Pereira Soares (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

gov.br Documento assinado digitalmente
FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
Data: 04/12/2023 08:59:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dr. Flank David Morais Bezerra (Examinador)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB/CCEN)

Ademir Benteus Pampu

Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Dedico este trabalho a todos os apaixonados pela matemática, cuja dedicação e fascínio inspiram a busca incessante pelo conhecimento e pela beleza intrínseca dos números, fórmulas e teoremas que compõem o universo sublime da matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, cuja sabedoria e força foram fontes constantes de inspiração, me proporcionando a determinação necessária para perseguir o meu caminho de professor de Matemática. À minha família, que esteve ao meu lado e me apoiou ao longo da minha formação. À minha namorada, que esteve ao meu lado durante toda minha formação, oferecendo seu apoio constante em nos momentos difíceis que tive que enfrentar. À meus colegas e amigos que fiz durante esses longos anos do curso, agradeço pelos momentos de aprendizado que tive ao lado de todos.

Expresso minha profunda gratidão ao meu respeitado professor e orientador, Jean. Sua paciência e orientação clara foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por ser uma fonte constante de inspiração e por contribuir significativamente para o meu crescimento acadêmico.

À todos os professores que fizeram parte da minha graduação, agradeço por cada ensinamento, pela dedicação ao compartilhar conhecimento e por serem os degraus que me impulsionaram a alcançar os patamares atuais. Cada um de vocês teve uma contribuição valiosa para o meu percurso acadêmico. Esta jornada não teria sido possível sem o apoio e a influência de todos vocês. O meu sincero agradecimento a cada pessoa que, de alguma forma, fez parte desta trajetória.

RESUMO

Este estudo se dedicou à análise abrangente das equações diferenciais de primeira ordem, abordando seus tipos, métodos de resolução e fornecendo exemplos didáticos por meio de passos detalhados. O foco primordial recaiu sobre as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com destaque para equações notáveis batizadas em homenagem a matemáticos ilustres. Além disso, explorou-se aplicações simples dessas equações, proporcionando uma perspectiva prática. O trabalho incluiu uma breve contextualização histórica e teórica das equações, destacando classificações e métodos de resolução, com exemplos elucidativos para ilustrar suas aplicações práticas. Esse estudo oferece uma visão aprofundada das equações diferenciais de primeira ordem, enriquecendo a compreensão teórica e prática desses conceitos.

Palavras-chave: equações diferenciais de primeira ordem, métodos de resolução, aplicações práticas.

ABSTRACT

This study was dedicated to a comprehensive analysis of first-order differential equations, addressing their types, solution methods, and providing didactic examples through detailed steps. The primary focus was on ordinary first-order differential equations, with a particular emphasis on notable equations named in honor of distinguished mathematicians. Additionally, simple applications of these equations were explored, offering a practical perspective. The work included a brief contextualization of the historical and theoretical aspects of the equations, highlighting classifications and solution methods, with illustrative examples to portray their practical applications. This study provides an in-depth understanding of first-order differential equations, enriching both the theoretical and practical comprehension of these concepts.

Keywords: first-order differential equations, solution methods, practical applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No século XV, o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) teve início, impulsionado pela descoberta do Cálculo realizada por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). A expressão "equações diferenciais" foi empregada pela primeira vez por Leibniz em 1676, com o propósito de denotar a relação entre as diferenciais dx e dy de duas variáveis x e y. Conforme Ince (1956), o surgimento das equações diferenciais se deu por volta de 1675, quando Leibniz registrou a relação

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Nesse momento, ele não somente solucionou uma equação diferencial, mas também introduziu o icônico e atemporal símbolo de integração $\int$, simbolizando assim um avanço significativo para a matemática.

O método de separação de variáveis foi originalmente elaborado por Jakob Bernoulli (1654-1705) e posteriormente generalizado por Leibniz. Nesse contexto do século XVII, esses pesquisadores focalizaram situações específicas, deixando o desenvolvimento mais amplo das teorias e técnicas para as gerações subsequentes.

No fim do século XVII e começo do XVIII, uma nova geração de estudiosos de equações diferenciais emergiu, aplicando tais equações a problemas nas áreas de astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli dedicou-se minuciosamente ao estudo e à formulação de equações diferenciais para a dinâmica planetária. Ele também incorporou o desenvolvimento da catenária e a aplicação de coordenadas polares. Seu irmão, Johann Bernoulli (1667-1748), foi provavelmente o primeiro a compreender o cálculo de Leibniz e os princípios mecânicos, empregando-os para modelar fenômenos físicos através de equações diferenciais e encontrar suas soluções.

Outro nome notável é Giacomo Riccati (1676-1754), cujo trabalho não pôde ser concluído devido à falta de ferramentas para resolver os casos especiais da equação que hoje leva o seu nome. Tanto Jakob quanto Johann Bernoulli e até o filho de Jakob, Daniel (1700-1782), investigaram os aspectos da equação de Riccati.

Apesar dos avanços consideráveis ocorridos ao longo de cinquenta anos de estudo, ainda não se tinha uma teoria geral consolidada. Isso mudou com a entrada de Leonhard Euler (1707-1783) no cenário das equações diferenciais. Euler compreendeu a função como papel central e sua estrutura, estudou suas propriedades e definições, e desenvolveu procedimentos para resolver uma variedade de equações. Ele foi o primeiro a entender as propriedades e papéis das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e diversas outras funções elementares. Em 1739, introduziu o método de variação de parâmetros.

Após Euler, muitos especialistas seguiram, refinando e expandindo suas ideias. Em

1728, Daniel Bernoulli empregou os métodos de Euler para estudar oscilações e as equações diferenciais que descrevem esses tipos de comportamento.

É notável que as Equações Diferenciais Ordinárias possuem uma importância fundamental no desenvolvimento da Matemática. Além de incorporarem rigor matemático intrínseco, encontramos suas aplicações em uma variedade de campos como Engenharia, Biologia, Física e Química.

Consequentemente, as EDOs têm a capacidade de servir como ferramentas para resolver modelos de fenômenos naturais ."Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstancias" (Boyce e Diprima, 2015, p.85). Dessa maneira, podemos trabalhar com um modelo matemático que representa um problema real, possibilitando a análise de um fenômeno ao empregar um modelo matemático que descreve seu comportamento.

As Equações Diferenciais Ordinárias contam com métodos para obter soluções. Contudo, nem sempre é viável alcançar uma solução explícita. Nesses casos, existem os métodos numéricos, que fornecem uma aproximação dos valores da solução de um problema de valor inicial (PVI). Além disso existem casos onde há a necessidade de aplicar os métodos de transformações que ajudam a simplificar a forma das equações e facilitar sua resolução.

Este trabalho de conclusão de curso visa explorar e aprofundar o entendimento das equações diferenciais de primeira ordem, destacando diversos métodos de resolução e aplicando-os. No início deste estudo, proporcionaremos uma base sólida ao abordarmos conceitos fundamentais e fornecer exemplos elucidativos, essenciais para a compreensão das equações diferenciais. Estabelecemos a importância dessas equações ao abordar conceitos iniciais.

Em seguida, dirigimos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias, explorando suas características quanto ao tipo, ordem e grau. Também aboraremos os tipos de soluções que encontramos quando resolvemos uma equação diferencial. Esse capítulo serviu como uma introdução abrangente, preparando o terreno para o entendimento mais aprofundado das equações diferenciais de primeira ordem.

Logo após iremos dedicar nossa atenção às equações diferenciais lineares, separáveis, exatas e homogêneas. Abordaremos cada tipo de equação em detalhes, fornecendo exemplos concretos e elucidando os métodos específicos de resolução para cada uma delas. A clareza e a compreensão dos procedimentos de resolução serão nosso foco principal nesta seção.

No capítulo seguinte, onde nos concentraremos em equações especiais de primeira ordem, nomeadamente as equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut. Estas equações, devido à sua complexidade intrínseca, requerem métodos de transformação específicos para facilitar sua resolução. Investigaremos essas transformações, tornando transparentes os processos de simplificação e resolução para cada uma dessas equações.

2 NOÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem como objetivo fornecer as bases fundamentais para o entendimento das equações diferenciais. Começaremos apresentando definições cruciais e exemplos ilustrativos que estabelecem um alicerce sólido para nossa jornada através deste estudo.

2.1 Definições básicas e exemplos

Nesta seção, começaremos por abordar alguns conceitos preliminares, a saber: variável dependente e variável independente. Em seguida, introduziremos a definição de equação diferencial e ilustraremos-a com alguns exemplos. Acompanhe as definições a seguir:

- **Variável dependente**

Definição 2.1 *Quando uma variável depende de outra, ou de outras, ela é chamada de dependente. Ela não pode assumir qualquer valor, pois depende de outras variáveis.*

Exemplo 2.1

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

Na equação diferencial, t representa a variável independente, enquanto $x = x(t)$ é a variável dependente.

- **Variável independente**

Definição 2.2 *Se uma variável pode assumir qualquer valor no domínio da função, independentemente de outra variável, ela é chamada independente.*

Exemplo 2.2

$$\frac{dy}{dt} = 3$$

Nesta equação, t é a variável independente e y é a variável dependente. A taxa de mudança de y em relação a t é constante e igual a 3. Isso significa que y pode assumir qualquer valor, independentemente de t, tornando t a variável independente. Baseados nos dois conceitos apresentados anteriormente, podemos, então, formular a seguinte definição:

- **Equação diferencial**

Definição 2.3 *Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

Exemplo 2.3 A seguir, apresento quatro exemplos distintos de equações diferenciais

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

Ao analisarmos as equações apresentadas anteriormente, torna-se evidente que lidamos com diversas equações diferenciais, cada uma classificada com base em suas características de tipo e ordem. Portanto, nas próximas seções iremos estabelecer definições para cada um desses termos. Esse esclarecimento é essencial para nos concentrarmos de forma exclusiva no estudo das equações diferenciais ordinárias.

2.2 Classificações das equações diferenciais

No que diz respeito à sua natureza, as equações diferenciais podem ser categorizadas em duas principais classes: Equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais, conforme detalhado a seguir:

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Definição 2.4 *Uma equação diferencial que inclui exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente.*

Exemplo 2.4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$$

A equação diferencial apresentada é classificada como uma EDO, pois a variável dependente é $y = y(x)$ em relação a uma única variável independente x.

Exemplo 2.5

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 3$$

Neste exemplo, temos uma EDO de primeira ordem, pois a derivada de y em relação a t aparece apenas uma vez. t é a variável independente (tempo), e y é a variável dependente.

Equações Diferenciais Parciais (EDP)

Definição 2.5 *Uma equação diferencial que incorpora derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a mais de uma variável independente.*

Exemplo 2.6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Neste exemplo, u é a variável dependente, que pode representar a concentração de uma substância no espaço, t é a variável independente, que representa o tempo e x é a variável independente, que representa a posição no espaço unidimensional.

Exemplo 2.7

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

A equação diferencial apresentada é classificada como uma EDP, pois a variável dependente é $v = v(s,t)$ em relação a mais de uma variável independente, ou seja, s e t.

Observação Ambos os tipos de equações diferencias (EDO e EDP) podem ser definidos para todos os valores do domínio das funções envolvidas, ou seja, para todos os valores das variáveis independentes relevantes. Essa é uma condição geral nas definições das equações diferenciais.

2.3 Classificação quanto à ordem

Definição 2.6 *A ordem de uma equação diferencial é determinada pela derivada de maior ordem presente na mesma.*

Exemplo 2.8

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

Nesta equação, a derivada de y em relação a x aparece apenas uma vez, o que a torna de primeira ordem.

Exemplo 2.9

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y^2$$

Neste exemplo, a derivada segunda de y em relação a x aparece, tornando-a de segunda ordem.

Exemplo 2.10

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$$

Neste caso, a derivada terceira de y em relação a x aparece, tornando-a de terceira ordem.

Exemplo 2.11

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Neste exemplo, a ordem é 4 porque a derivada de quarta ordem aparece na equação.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS

3.1 Caracterização de uma EDO

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é comumente denotada pelo seguinte símbolismo

$$F\left(x, y, \frac{d^i y}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{3.1}$$

Nesta representação:

• x é a variável independente.

• y é a variável dependente.

• As derivadas de y em relação a x até a n-ésima ordem são expressas como $\frac{dy}{dx}$ elevado a i, onde i denota a ordem de 1 até n.

• F é uma função que envolve x, y, y'(primeira derivada de y), y''(segunda derivada de y), e assim por diante, e a equação é dada como igual a zero.

A equação (3.1) expressa a relação entre a variável independente x e os valores da função desconhecida y, bem como suas n primeiras derivadas, onde:

• y' denota a primeira derivada de y em relação a x, ou seja, $\frac{dy}{dx}$.

• y'' representa a segunda derivada de y em relação a x, ou seja, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

• $y^{(n)}$ indica a n-ésima derivada de y em relação a x, ou seja, $\frac{dy^n}{dx^n}$.

Quando conseguirmos expressar y^n na Equação (3.1), obteremos

$$y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

Isso é conhecido como a forma normal da Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem n.

3.2 Solução de um EDO

Seja $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ uma EDO de ordem n com variável independente x e função desconhecida y e suas derivadas até a ordem n. A solução da EDO é uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I que satisfaça a equação diferencial quando substituímos y e suas derivadas na EDO. A forma geral da solução para uma EDO de primeira ordem é:

$$F(x, y, y') = 0$$

onde y' representa a derivada de y em relação a x.

3.3 Classificação com relação ao tipo de soluções

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) podem ter soluções explícitas ou implícitas, que se referem à forma como a solução é expressa em termos da variável dependente e da variável independente.A seguir, são apresentadas as características de cada tipo de solução:

Solução explícita de uma EDO

Definiçaõ 3.1 *Uma solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente, ou seja, $y = f(x)$, e de constantes, e que, quando substituída na equação diferencial, a transforma em uma igualdade, é chamada de solução explícita.*

Exemplo 3.1 Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{3.2}$$

Para encontrar uma solução explícita, você pode separar as variáveis x e y e, em seguida, integrar ambos os lados da equação:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x\\ dy &= 2x\,dx\end{aligned}$$

Agora, integramos ambos os lados:

$$\begin{aligned}\int dy &= \int 2x\,dx\\ y &= x^2 + C\end{aligned}$$

Vamos substituir a solução $y = x^2$ na equação diferencial original (3.2) para demonstrar que é verdade:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2 + C)\\ \frac{dy}{dx} &= 2x.\end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial (3.2) é satisfeita pela solução $y = x^2 + C$, como demonstrado pela igualdade das derivadas. A constante C representa uma constante de integração que pode ser ajustada de acordo com as condições iniciais específicas do problema.

Exemplo 3.2 A função $y = xe^x$ é uma solução explícita da equação diferencial ordinária

$$y - 2y' + y = 0 \tag{3.3}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois a função $y = f(x)$ é expressa apenas em termos da variável independente x.

Vamos verificar se $y = xe^x$ satisfaz a EDO:

$$\begin{aligned} y - 2y' + y &= xe^x - 2\frac{d}{dx}(xe^x) + xe^x \\ &= xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x \\ &= xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima:

$$\begin{aligned} xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x &= (xe^x + xe^x) - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2xe^x - 2e^x - 2xe^x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função $y = xe^x$ é uma solução explicita para a equação diferencial (3.3), uma vez que, ela a torna verdadeira.

Solução implícita de uma EDO

Definição 3.2 *Uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma relação entre a variável dependente y e a variável independente x expressa por $G(x, y) = 0$. Essa relação não fornece y diretamente em termos de x e, portanto, requer que as soluções sejam determinadas a partir da equação $G(x, y) = 0$ e da EDO subjacente, garantindo que ambas sejam satisfeitas no intervalo considerado.*

Exemplo 3.3 Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{3.4}$$

Para encontrar uma solução implícita, podemos utilizar a seguinte relação:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Aqui, C é uma constante arbitrária, que pode ser determinada com base em condições iniciais específicas. Vamos demonstrar que a relação $x^2 + y^2 = C$ é uma solução implícita da equação diferencial dada:

Começamos calculando a derivada de $x^2 + y^2$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2yy' = 2x + 2xy$$

Agora, substituímos $x^2 + y^2$ na equação diferencial:

$$2x + 2xy = 2xy$$

Simplificando, obtemos: $2x = 0$.

Isso nos leva a $x = 0$, o que é uma solução válida para a relação $x^2 + y^2 = C$.

Portanto, a relação $x^2 + y^2 = C$ é uma solução implícita da equação diferencial (3.4), já que, quando a substituímos na equação, ela a satisfaz e nos fornece soluções implicitamente.

3.4 Classificação quanto ao número de soluções

Ao resolvemos uma equação diferencial de ordem n da forma $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$, estamos buscando uma família de soluções com n parâmetros $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$. Isso implica que uma única equação diferencial possui um número infinito de soluções correspondentes aos inúmeros valores possíveis dos n parâmetros.

Especificamente, ao resolver uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y') = 0$, geralmente obtemos uma solução que inclui uma única constante arbitrária, ou seja, um parâmetro c. Essa solução que envolve uma constante arbitrária representa um conjunto de soluções chamado de família de soluções com um único parâmetro, denotada por $G(x, y, c) = 0$. As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao número de soluções em duas categorias principais: a solução geral e a solução particular.

Solução geral

Definição 3.3 *A solução geral de uma equação diferencial é uma expressão que engloba todas as possíveis soluções para a equação. Ela geralmente envolve constantes arbitrárias, conhecidas como constantes de integração. A solução geral fornece um conjunto infinito de funções que satisfazem a equação diferencial. Em muitos casos, a solução geral é expressa em termos de parâmetros ou constantes arbitrárias que podem ser ajustados para se adequarem a condições iniciais específicas, convertendo-a em uma solução particular.*

Solução particular

Definição 3.4 *A solução particular é uma função específica que atende a uma equação diferencial e a quaisquer condições iniciais ou limites específicos que possam ser dados. Em outras palavras, é uma instância particular da solução geral que se encaixa perfeita-*

mente nos valores iniciais ou nas restrições fornecidas. A solução particular é única para um conjunto de condições iniciais ou limites específicos.

Exemplo 3.4 Considere uma equação diferencial simples, como

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Sua solução geral seria $y(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante arbitrária. A solução particular dependeria das condições iniciais ou dos limites fornecidos. Se nos for dado que $y(0) = 1$, a solução particular seria $y(x) = x^2 + 1$.

Em resumo, a solução geral representa um conjunto de todas as soluções possíveis de uma equação diferencial, enquanto a solução particular é uma solução específica que se encaixa em condições iniciais ou limites específicos.

3.5 Problema de valor inicial (PVI)

Definição 3.5 *Dada uma equação diferencial ordinária na forma*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

juntamente com condições iniciais para a variável dependente y em um ponto

$$t = t_0 \ \ ou \ \ seja, \ \ y(t_0) = y_0$$

o PVI consiste em encontrar uma solução particular $y(t)$ que satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

Aqui, $f(t, y)$ é a função que define a equação diferencial, t é a variável independente, y é a variável dependente, t_0 é o ponto inicial, e y_0 é o valor inicial da variável dependente. O objetivo é encontrar a função $y(t)$ que satisfaça tanto a equação diferencial como as condições iniciais.

Exemplo 3.5 Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -5x^2.$$

Que tem como solução geral $y(x) = -\frac{5}{3}x^3 + C$, onde C é uma constante real. A solução particular que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$ é aquela cujo gráfico passa pelo ponto de coordenadas $(x, y) = (1, 2)$. Para encontrar a expressão desta solução, precisamos determinar uma constante adequada C na solução geral. A fórmula fornece $y(1) = -\frac{5}{3} + C$, enquanto a condição é $y(1) = 2$. Assim, $C = \frac{11}{3}$. Consequentemente, a solução particular que estamos procurando é $y(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{11}{3}$.

Apresentadas as noções iniciais e definições importantes para o entendimento deste trabalho nesta seção, no próximo capítulo, daremos início à exploração das equações diferenciais de primeira ordem. Este capítulo servirá como a base sólida para compreender conceitos mais avançados e técnicas de resolução de equações diferenciais.

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, são apresentados diversos métodos para a resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A determinação das soluções dessas equações geralmente requer o reconhecimento do tipo da equação diferencial, uma vez que um método eficaz para uma equação de primeira ordem pode não ser aplicável a outra. As equações diferenciais de primeira ordem, em grande parte, fornecem informações cruciais para prever o comportamento de suas soluções (Bassanezi; Jr., 1988). Este trabalho abrange uma variedade de equações, incluindo as separáveis, exatas, homogêneas e lineares, cada uma com suas próprias características distintas.

Iniciaremos nossos estudos sobre a resolução de equações diferenciais considerando primeiramento as lineares de primeira ordem.

4.1 Equações Lineares

Seja a equação de primeira ordem dada por

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{4.1}$$

onde f é uma função de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \varphi(t)$ que satisfaz (4.1) para todo t em algum intervalo é chamada de solução. Uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma geral dada pela expressão,

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

onde $a_n(t) \neq 0$, por hipótese. Em particular, quando $n = 1$, temos as equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Definição 4.1 *Sempre que for possível colocar uma equação diferencial de primeira ordem na forma*

$$a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

tal equação é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Outra forma padrão bastante comum é

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t) \tag{4.2}$$

onde P e Q são funções dadas da variável independente t.

Observação Se Q for uma função diferente de zero, a equação é dita como *linear não-homogênea*, ao passo que se Q for a função zero, então ela é dita como *linear homogênea.*

Exemplo 4.1 A equação
$$\frac{dy}{dx} = xy + x^2$$
é linear não-homogênea, porque $P(t) = x$ e $Q(t) = x^2$.

Exemplo 4.2 A equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + senx$$
é linear não-homogênea, porque $P(t) = \frac{1}{x}$ e $Q(t) = senx$.

Exemplo 4.3 A equação
$$\frac{dy}{dx} = (cosx)y$$
é linear homogênea, porque $P(t) = cosx$ e $Q(t) = 0$.

A seguir, iremos explorar o método desenvolvido por Leibniz para determinar a solução desse tipo de equação diferencial.

4.1.1 Método do Fator Integrante

Este método implica na multiplicação da equação linear por uma função $\mu(t)$ específica, selecionada de maneira a tornar a equação resultante mais facilmente integrável. Optaremos por utilizar a segunda forma padrão da equação linear para determinar o fator integrante. Assim, ao multiplicar a equação (4.2) por esta função $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + P(t)\mu(t)y = \mu(t)Q(t) \tag{4.3}$$

Perceba que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação (4.3), temos a derivada do produto $\mu(t)y$, contanto que $\mu(t)$ satisfaça a seguinte equação:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = P(t)\mu(t)$$

Supondo temporariamente que $\mu(t)$ seja positivo, temos

$$\frac{d\mu(t)}{dt}/\mu(t) = P(t)$$

E em consequência,

$$\ln \mu(t) = \int P(t)dt + k$$

Ao definirmos a constante arbitrária k como sendo igual a zero, obtemos a forma mais simplificada da função $\mu(t)$, que é:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} \tag{4.4}$$

Apresentamos as equações lineares de primeira ordem e exploramos o método dos fatores integrantes como uma ferramenta valiosa na resolução dessas equações. Agora, estaremos mergulhando na resolução de exemplos práticos, seguindo um passo a passo para facilitar a compreensão. Esta abordagem detalhada permitirá que adquiriram um entendimento sólido sobre como aplicar os conceitos e métodos apresentados no contexto de equações diferenciais lineares, preparando o terreno para a resolução de problemas mais complexos no futuro.

Exemplo 4.4 Encontre a solução geral da equação diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x + e^{-2x} \tag{4.5}$$

Ao observarmos a equação vemos que ela já está na forma padrão (4.2), onde $P(t) = 3$ e $Q(t) = x + e^{-2x}$. Feito isso vamos iniciar as etapas para determinar a solução geral.

Solução

***P*asso 1.** Calcule o fator integrante usando a função (4.4)

$$\mu(t) = e^{\int 3dx}$$

$$\mu(t) = e^{3x}$$

***P*asso 2.** Multiplique o fator integrante na equação (4.5)

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = xe^{3x} + e^{3x}e^{-2x}$$

Observe que a expressão à esquerda do sinal de igualdade, resulta automaticamente a derivada do produto de $e^{3x}y$, vamos para a próxima etapa.

***P*asso 3.** Integre ambos os lados do sinal de igualdade dessa ultima equação

$$\int (e^{3x}y)\frac{dy}{dx} = \int xe^{3x}dx + \int e^{x}dx$$

***P*asso 4.** Resolva as integrais

$$e^{3x}y = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + e^{x} + c$$

***P*asso 5.** Isole y

$$y = \frac{\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + e^{x} + c}{e^{3x}}$$

***P*asso 6.** Simplifique e reescrever a solução geral como

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + e^{-2x} + ce^{-3x}.$$

Portanto, é a solução geral da equação (4.5), onde c é uma constante arbitrária. Vejamos mais um exemplo para fixar melhor o metódo apresentado.

Exemplo 4.5 Encontre a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3cos2x \tag{4.6}$$

Solução

***P*asso 1.** Calcule o fator integrante usando a função (4.4)

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\mu(t) = e^{ln|x|}$$

$$\mu(t) = x$$

***P*asso 2.** Multiplique o fator integrante na equação (4.6)

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}xy = 3xcos2x$$

simplificando

$$x\frac{dy}{dx} + y = 3xcos2x$$

Novamente a expressão à esquerda do sinal de igualdade é a derivada do produto do fator integrante por y.

***P*asso 3.** Integre ambos os lados do sinal de igualdade dessa ultima equação

$$\int \frac{d(xy)}{dx}dx = \int 3xcos2xdx$$

***P*asso 4.** Resolva as integrais

Se observarmos com atenção, notaremos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade representa a integral do produto de uma derivada. Como a integral é a operação inversa da derivada, ao realizarmos o cálculo, obteremos sempre o resultado contido entre parênteses. Assim dando continuidade a resolução, temos

$$xy = 3\int xcos2xdx$$

Vamos utilizar o metódo de integração por partes para resolver

$$\int xcos2xdx$$

Considere

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = cos2x \qquad v = \frac{1}{2}sen2x$$

Assim temos

$$\frac{1}{2}xsen2x - \int \frac{1}{2}sen2xdx$$

Para facilitar a resolução podemos tirar a constante multplicativa $\frac{1}{2}$ para fora da integração

$$\frac{1}{2}xsen2x - \frac{1}{2}\int sen2xdx$$

Resolvendo a integral chegamos a

$$\frac{1}{2}xsen2x + \frac{1}{4}cos2x + c$$

Logo

$$xy = 3[\frac{1}{2}xsen2x + \frac{1}{4}cos2x + c]$$

$$xy = \frac{3}{2}xsen2x + \frac{3}{4}cos2x + c$$

***P*asso 5.** Isole y

$$y = \frac{\frac{3}{2}xsen2x + \frac{3}{4}cos2x + c}{x}$$

***P*asso 6.** Simplifique e reescreva a solução geral como

$$y = \frac{3}{2}sen2x + \frac{3}{4}x^{-1}cos2x + cx^{-1}.$$

Exemplo 4.6 Encontre a solução do problema de valor inicial dado

$$\frac{dy}{dx} - y = 2xe^{2x} \qquad y(0) = 1 \tag{4.7}$$

Solução

***P*asso 1.** Calcule o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -1dx}$$

$$\mu(t) = e^{-x}$$

***P*asso 2.** Multiplique o fator integrante na equação (4.7)

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - ye^{-x} = 2xe^{2x}e^{-x}$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - ye^{-x} = 2xe^{x}$$

***P*asso 3.** Integre ambos os lados do sinal de igualdade dessa ultima equação

$$\int \frac{d(e^{-x}y)}{dx}dx = \int 2xe^{x}dx$$

***P*asso 4.** Resolva as integrais

$$e^{-x}y = 2\int xe^{x}dx$$

Vamos utilizar novamente o metódo de integração por partes para resolver

$$\int xe^{x}dx$$

Considere

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = e^{x} \qquad v = e^{x}$$

Assim temos

$$xe^{x} - \int e^{x}dx$$

Resolvendo a integral

$$xe^{x} - e^{x} + c$$

Logo

$$e^{-x}y = 2[xe^{x} - e^{x} + c]$$

$$e^{-x}y = 2xe^{x} - 2e^{x} + c$$

***P*asso 5.** Isole y

$$y = \frac{2xe^x - 2e^x + c}{e^{-x}}$$

***P*asso 6.** Simplifique e reescrevar a solução geral como

$$y = 2xe^{2x} - 2e^{2x} + ce^x$$

Agora devemos determinar a solução particular do problema apartir das condições iniciais dadas $y(0) = 1$

$$1 = 2 \cdot 0 \cdot e^{2 \cdot 0} + c \cdot e^0$$

$$1 = 0 - 2 + c$$

$$c = 3$$

A solução do Problema de Valor Inicial será

$$y = 2xe^{2x} - 2e^{2x} + 3e^x.$$

4.2 Equaçoes Separáveis

Definição 4.2 *Sempre que for possível colocar uma equação diferencial de primeira ordem na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad h(y) \neq 0 \tag{4.8}$$

é chamada separável ou terá variáveis separáveis.

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{4.9}$$

Se $y = f(x)$ representa uma solução para a equação (4.9), então temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \tag{4.10}$$

Mas $y = f'(x)dx$, logo, a equação (4.9) é equivalente a

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{4.11}$$

Exemplo 4.7 A equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$
Neste exemplo, $g(x) = 2x$ e $h(y) = y$.

Exemplo 4.8 A equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$$
Aqui, $g(x) = \sin(x)$ e $h(y) = y^2$.

Exemplo 4.9 A equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot e^{2y}$$
Para esta equação, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h(y) = e^{2y}$.

Método de Resolução

A equação (4.11) descreve o procedimento de resolução de equações diferenciais separáveis. Ela nos permite obter uma família de soluções uniparamétricas, geralmente representadas implicitamente, através da integração de ambos os lados da equação $h(y)dy = g(x)dx$.

Observação: Não é necessário utilizar duas constantes na integração de uma equação separável, uma vez que

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$$

Passando c_1 para o outro membro

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1$$

Assim
$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c_3$$

Portanto, uma constante c_2 menos uma constante c_1, resultará uma constante c_3. Em outras palavras c é completamente arbitrária.

A seguir, vamos abordar alguns exemplos utilizando esse método de resolução.

Solução

Exemplo 4.10 Encontre a solução da equação diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

Ao observarmos a equação vemos que ela já está na forma padrão (4.8), onde $g(x) = x^2$

e $h(y) = y$. Feito isso vamos iniciar as etapas para determinar a solução.

***P*asso 1.** Separe as variaveis

$$ydy = x^2dx$$

***P*asso 2.** Integre ambos os membros

$$\int ydy = \int x^2dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$3y^2 = 2x^3 + c$$

***P*asso 3.** Encontre a solução implícita

$$3y^2 - 2x^3 = c.$$

Exemplo 4.11 Encontre a solução da equação diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

Solução

***P*asso 1.** Separe as variaveis

$$ydy = \frac{x^2}{(1+x^3)}dx$$

***P*asso 2.** Integre ambos os membros

$$\int ydy = \int \frac{x^2}{(1+x^3)}dx$$

Vamos utilizar o método de integração por substituição para resolver

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)}dx$$

Considere

$$u = 1 + x^3$$

$$du = 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2$$

Substituindo

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

Assim

$$\frac{1}{3}\ln|u| + c$$

substituindo

$$u = 1 + x^3$$

temos

$$\frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + c$$

Encontrada a solução da integral vamos ter então que

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + c$$

$$3y^2 = 2\ln|1 + x^3| + c$$

***P*asso 3.** Encontre a solução implícita

$$3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c.$$

Exemplo 4.12 Encontre a solução explícita da equação diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{e^{2y}}$$

Solução

***P*asso 1.** Separe as variáveis

$$e^{2y}dy = (x + 1)dx$$

***P*asso 2.** Integre ambos os membros

$$\int e^{2y}dy = \int x + 1dx$$

Para resolver a integral de e^{2y} recorde que

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

Assim temos

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{x^2}{2} + x + c$$

Multiplicando toda a equação por 2

$$e^{2y} = x^2 + 2x + c$$

Aplicando a função logarítmica, temos

$$2y = \ln\left(x^2 + 2x + c\right)$$

***P*asso 3.** Isole y para ter a solução explícita

$$y = \frac{1}{2}\ln x^2 + 2x + c$$

Sabemos que $\frac{1}{2}$ em algum momento já foi expoente dessa função logarítmica, podemos simplificar a solução como

$$y = \ln\left(x^2 + 2x + c\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 4.13 Encontre a solução implícita da equação diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} = [\cos^2 x][\cos^2 2y]$$

Solução

***P*asso 1.** Separe as variáveis

$$\frac{dy}{[\cos^2 2y]} = [\cos^2 x]dx$$

$$\sec^2 2ydy = \cos^2 xdx$$

***P*asso 2.** Integre ambos os membros

$$\int \sec^2 2ydy = \int \cos^2 xdx$$

Vamos usar a substituição para encontrar a solução da integral a esquerda, já a do lado direito podemos usar a identidade trigonométrica

Considere

$$u = 2y$$

$$du = 2dy \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = dy$$

Substituindo temos

$$\int \sec^2 u \frac{du}{2} = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sec^2 u du = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx$$

$$\frac{1}{2}\tan u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x) + c$$

$$\frac{1}{2}\tan 2y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$$

Multiplique ambos os lados por 2

$$\tan 2y = x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c$$

Pegue a tangente inversa de ambos os lados

$$2y = \tan^{-1}(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c)$$

***P*asso 3.** Isole y para obter a solução explícita

$$y = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c).$$

4.3 Equações Exatas

Definição 4.3 *Sempre que for possível colocar uma equação diferencial de primeira ordem na forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.12}$$

então, é chamada uma diferencial exata se existe uma função $f(x,y)$ tal que se verifiquem ambas as condições abaixo

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{4.13}$$

O teorema a seguir nos fornece um critério para identificar quando uma diferencial é exata e, consequentemente, quando uma equação diferencial é exata.

Teorema 4.3 *Seja a equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

com $M(x,y)$ e $N(x,y)$ contínuas e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas *em uma região R definida por $a < x < b$ e $c < y < d$. Então será exata se, e somente se, a igualdade for verdadeira:*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{4.14}$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Primeiramente, demonstra-se que, se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ formam uma diferencial exata, então $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se a expressão $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ for exata, existe uma função $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que, para todo (x,y) em R, temos

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Logo,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

A igualdade das derivadas parciais mistas decorre da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de $M(x,y)$ e $N(x,y)$.

($\Leftarrow$) Para demonstrar que, se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é exata, verificamos se a igualdade em (4.14) é verdadeira. Se for o caso, nosso objetivo é encontrar uma função f tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Para determinar f (se ela existir), integramos $M(x,y)$ em relação a x mantendo y constante, o que nos leva a

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y), \tag{4.15}$$

onde $g(y)$, uma função arbitrária de y.é a "constante" de integração.Diferenciando (4.15) em relação a y e assumindo $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

o que resulta em

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx. \tag{4.16}$$

Realiza-se a integração em relação a y e, em seguida, substitui-se o valor resultante em (4.15), resultando na obtenção da solução $f(x, y)$ para a equação diferencial exata.

A solução implícita da equação é representada por $f(x, y) = c$. É fundamental destacar que a expression $N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$ em (4.16) não varia com base em x, uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx\right) \tag{4.17}$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

Uma vez que por hipótese temos $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$, a prova é semelhante, começando com a suposição de que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

Agora vejamos alguns exemplos de equações exatas verificando (4.14).

Exemplo 4.14 A equação

$$2xydx + (x^2 + e^y)dy = 0$$

Neste exemplo, por (4.12 temos:

$$M(x, y) = 2xy \quad e \quad N(x, y) = x^2 + e^y$$

.

Agora, verificamos (4.14)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Como $M_y = N_x$, esta é uma equação diferencial exata.

Exemplo 4.15 A equação

$$e^{2y}dx + (xe^{2y} + 1)dy = 0$$

Neste exemplo, por (4.12 temos:

$$M(x, y) = e^{2y} \quad e \quad N(x, y) = xe^{2y} + 1$$

.

Agora, verificamos (4.14)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{2y}$$

Como $M_y \neq N_x$, esta não é uma equação diferencial exata.

Exemplo 4.16 A equação

$$(3x^2y + 6x)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$$

Neste exemplo, por (4.12 temos:

$$M(x,y) = 3x^2y + 6x \quad e \quad N(x,y) = x^3 + 3y^2$$

.

Agora, verificamos (4.14)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

Como $M_y = N_x$, esta é uma equação diferencial exata.

Exemplo 4.17 A equação

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

Neste exemplo, por (4.12 temos:

$$M(x,y) = 3xy + y^2 \quad e \quad N(x,y) = x^2 + xy$$

.

Agora, verificamos (4.14)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Como $M_y \neq N_x$, esta não é uma equação diferencial exata.

Estes exemplos ilustram a verificação das derivadas parciais para determinar se uma equação diferencial de primeira ordem é exata ou não. Nos casos em que $M_y = N_x$ a equação é exata, caso contrário, não é. Na seção (4.3.1) iremos ver um método de como tornar equações não exatas em exatas.

Exemplo 4.18 Determine se a equação diferencial é exata. Se for, encontre a solução.

$$(2x + 3)dx + (2y - 2)dy = 0$$

Solução

Passo 1. Conforme o teorema, a equação diferencial é exata se, e somente se a igualdade for verdadeira.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

segue da equação que

$$M(x,y) = 2x + 3 \quad e \quad N(x,y) = 2y - 2$$

Calculando as derivadas parciais de M e N com relação a y e x respectivamente, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Observe que as derivadas parciais de M e N são idênticas, o que implica que a equação diferencial é **exata**.

Passo 2. Encontre uma função potencial $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Para $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, integramos M com relação a x

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int 2x + 3dx$$

temos

$$f(x,y) = x^2 + 3x + g(y) \tag{4.18}$$

onde $g(y)$ é uma função de y que pode depender da integração em x.

Passo 3. Derivar (4.18) parcialmente em relação a y, e igualar a $N(x,y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 3x + g(y)$$

$$g'(y) = 2y - 2$$

Queremos saber quem é $g(y)$

Passo 4. Integrar $g'(y)$ com relação a y para encontrar $g(y)$.

$$g'(y) = \int 2y - 2dy$$

$$g(y) = y^2 - 2y$$

Logo a solução será dada pela substituição de $g(y)$ em (4.18), assim temos que

$$f(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y$$

como a solução da equação diferencial é dada da forma $f(x,y) = c$, temos então que

$$x^2 + 3x + y^2 - 2y = c.$$

Exemplo 4.19 Determine se a equação diferencial é exata. Se for, encontre a solução.

$$(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$$

Solução

Passo 1. Verificar se é exata.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Calculando as derivadas parciais de M e N com relação a y e x respectivamente, temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

Portanto é **exata**.

Passo 2. Integrar parcialmente $M(x,y)$ com relação a x.

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int 3x^2 - 2xy + 2dx$$

temos

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + g(y) \tag{4.19}$$

Passo 3. Derivar (4.19) parcialmente em relação a y, e igualar a $N(x,y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2y + 2x + g(y)$$

$$g'(y) - x^2 = 6y^2 - x^2 + 3$$

$$g'(y) = 6y^2 + 3$$

Passo 4. Integrar $g'(y)$ com relação a y para encontrar $g(y)$.

$$g'(y) = \int 6y^2 + 3dy$$

$$g(y) = 2y^3 + 3y$$

Logo a solução será dada pela substituição de $g(y)$ em (4.19), assim temos que

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y$$

A solução implícita será

$$x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c.$$

Exemplo 4.20 Determine a solução para o problema de valor inicial

$$(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0, \qquad y(1) = 3$$

Solução

Passo 1. Verificar se é exata.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Portanto é **exata**.

Passo 2. Integrar parcialmente $M(x, y)$ com relação a x.

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int 2x - ydx$$

temos

$$f(x,y) = x^2 - xy + g(y) \tag{4.20}$$

Passo 3. Derivar (4.20) parcialmente em relação a y, e igualar a $N(x, y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - xy + g(y)$$

$$g'(y) - x = 2y - x$$

$$g'(y) = 2y$$

Passo 4. Integrar $g'(y)$ com relação a y para encontrar $g(y)$.

$$g'(y) = \int 2ydy$$

$$g(y) = y^2$$

Logo a solução será dada pela substituição de $g(y)$ em (4.20), assim temos que

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$$

A solução implícita será

$$x^2 + y^2 - xy = c$$

Agora vamos aplicar as condições inicias $y(1) = 3$ para encontrar a solução particular, então temos que

$$1^2 + 3^2 - 1 \cdot 3 = c$$

$$7 = c$$

Logo a solução particular será

$$x^2 + y^2 - xy = 7.$$

4.3.1 Fatores Integrantes

A seguir, abordaremos o método de tornar equações não exatas em equações exatas por meio da aplicação de um fator integrante.Na subseção (4.1.1) das equações lineares, vimos um fator integrante que é de grande importância para a resolução daquele tipo de equação. Esse novo procedimento é essencial na resolução de equações diferenciais que não se encaixam diretamente no formato de equações exatas, permitindo-nos ajustar a equação original multiplicando-a por um fator apropriado. Esse fator integrante é cuidadosamente escolhido para transformar a equação em uma forma exata, facilitando a obtenção da solução.

Definição 4.4 *O fator integrante é uma função que, quando multiplicada à equação diferencial ordinária, permite que o lado esquerdo da equação se assemelhe à derivada do produto de duas funções.*

Multiplicando-se a equação diferencial não exata

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Busca-se encontrar uma função $\mu(x,y)$ de forma que a equação resultante seja

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

por $\mu \equiv \mu(x,y) \neq 0$, tem-se

$$\mu M + \mu N y' = 0 \tag{4.21}$$

Desejamos determinar μ de forma a tornar a equação (4.21) exata, o que se verifica se, e somente se,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Equivalentemente,

$$M\mu_y - N\mu_x + (My - Nx)\mu = 0 \tag{4.22}$$

Onde μ_y representa a derivada parcial de μ em relação a y, e o mesmo raciocínio se aplica para μ_x, My e Nx.

Inicialmente, qualquer solução μ da equação (4.22) torna a equação (4.21) exata e, nesse cenário, a solução pode ser obtida utilizando o método de resolução empregado nos Exemplos (4.18), (4.19) e (4.20). A solução resultante da equação (4.21) também atende à equação (4.10), uma vez que é possível dividir a equação (4.21) por μ.

A equação (4.22) pode admitir várias soluções. Para simplificar a questão, é comum assumir que o fator integrante μ depende apenas de x ou exclusivamente de y.

Quando μ é uma função apenas de x, decorre da equação (4.22) que $(N \neq 0)$.

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \tag{4.23}$$

Se o quociente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ depende somente de x.

Da mesma forma, quando μ é uma função apenas de y, podemos deduzir da equação (4.22) que $(M \neq 0)$.

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} \tag{4.24}$$

Se o quociente $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ depende somente de y.

Exemplo 4.21 Determine se a equação diferencial é exata. Se não for, encontre um fator integrante e resolva a equação dada.

$$(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0$$

solução

Passo 1. Verificar se é exata.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2 \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y^2$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação é não exata.

Passo 2. Calcular um fator integrante que dependa somente de uma variável. Vamos tentar determinar essa fator que dependa apenas de x. Para isso vamos utilizar a equação (4.23).

$$\mu = exp\int \frac{M_y - N_x}{N} dx$$

$$\mu = exp\int \frac{-3y^2 - y^2}{xy^2}dx$$

$$\mu = exp\int \frac{-4}{x}dx$$

$$\mu = e^{-4\ln|x|}$$

$$\mu = x^{-4}$$

Passo 3. Multiplicar μ na equação inicial.

$$x^{-4}(x^3 - y^3)dx + x^{-4}(xy^2)dy = 0$$

$$(x^{-1} - x^{-4}y^3)dx + (x^{-3}y^2)dy = 0$$

Agora vamos verificar novamente qual será o resultados das derivadas parciais dessa nova equação.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3x^{-4}y^2 \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^{-4}y^2$$

Logo é **exata.**

Passo 4. Integrar $N(x,y)$ em relação a y.

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int x^{-3}y^2 dy$$

temos

$$f(x,y) = \frac{x^{-3}y^3}{3} + h(x) \tag{4.25}$$

Passo 5. Derivar (4.25) em relação a x, e igualar a $M(x,y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^{-3}y^3}{3} + h(x)$$

$$h'(x) - \frac{3x^{-4}y^3}{3} = x^{-1} - x^{-4}y^3$$

$$h'(x) - x^{-4}y^3 = x^{-1} - x^{-4}y^3$$

$$h'(x) = x^{-1}$$

Passo 6. Integrar $h'(x)$ em relação a x para encontrar $h(x)$.

$$h'(x) = \int x^{-1} dx$$

$$h'(x) = \int \frac{1}{x} dx$$

$$h(x) = \ln|x|$$

Logo a solução será dada pela substituição de $h(x)$ em (4.25), assim temos que

$$\frac{x^{-3}y^3}{3} + \ln|x| = c.$$

Exemplo 4.22 Resolva a equação diferencial

$$y^2 \cos x dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x) dy = 0$$

solução

Passo 1. Verificar se é exata.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \cos x \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 5y \cos x$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação é não exata.

Passo 2. Calcular um fator integrante que dependa somente de uma variável.Vamos tentar determinar essa fator que dependa apenas de y. Para isso vamos utilizar a equação (4.24).

$$\mu(y) = exp \int \frac{N_x - M_y}{M} dy$$

$$\mu(y) = exp \int \frac{5y \cos x - 2y \cos x}{y^2 \cos x} dy$$

$$\mu(y) = exp \int \frac{3y \cos x}{y^2 \cos x} dy$$

$$\mu(y) = exp \int \frac{3}{y} dy$$

$$\mu(y) = e^{3 \ln|y|} = y^3$$

Passo 3. Multiplicar μ na equação inicial.

$$y^5 \cos x dx + (4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x) dy = 0$$

Agora vamos verificar novamente qual será o resultados das derivadas parciais dessa nova equação.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5y^4 \cos x \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 5y^4 \cos x$$

Logo é **exata.**

Passo 4. Integrar $M(x,y)$ em relação a x.

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int y^5 \cos x dx$$

temos

$$f(x,y) = y^5 senx + g(y) \tag{4.26}$$

Passo 5. Derivar (4.26) em relação a y, e igualar a $N(x,y)$.

$$g'(y) + 5y^4 senx = 4y^3 + 5y^4 senx$$

$$g'(y) = 4y^3$$

Passo 6. Integrar $g'(y)$ em relação a y para encontrar $g(y)$.

$$g'(y) = \int 4y^3 dy$$

$$g(y) = y^4$$

Logo a solução será dada pela substituição de $hg(y)$ em (4.26), assim temos que

$$y^5 senx + y^4 = c.$$

4.4 Equaçoes Homogêneas

A fim de estabelecer uma definição formal para uma equação diferencial homogênea, é necessário primeiro definir o conceito de uma função homogênea. Posteriormente, abordaremos os métodos de resolução dessas equações.

Definição 4.5 *Uma função $f(x,y)$ é dita ser homogênea de grau n se, para quaisquer valores de x e y, ela satisfaz a seguinte condição*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \tag{4.27}$$

onde t é uma constante real.

Isso significa que, ao multiplicar tanto a variável independente x quanto a variável dependente y por uma constante t, a função $f(x,y)$ é multiplicada por t^n.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.23 Seja a função

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2$$

temos que

$$f(tx,ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2$$
$$f(tx,ty) = t^2x^2 - 3xyt^2 + 5t^2y^2$$
$$f(tx,ty) = t^2(x^2 - 3xy + 5y^2)$$
$$f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$$

portanto a função $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau 2.

Exemplo 4.24 Seja a função

$$f(x,y) = 4x^3 - 7x^2y + 2y^3$$

temos que

$$f(tx,ty) = 4(tx)^3 - 7(tx)^2(ty) + 2(ty)^3$$
$$f(tx,ty) = 4t^3x^3 - 7t^3x^2y + 2t^3y^3$$
$$f(tx,ty) = t^3(4x^3 - 7x^2y + 2y^3)$$
$$f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$$

portanto a função $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau 3.

Definição 4.6 *Uma equação diferencial de primeira ordem da*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad ou \quad \frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{4.28}$$

é homogênea se, e somente se, $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas da mesma ordem n com respeito às variáveis x e y.

Ou seja, $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas da mesma ordem n se, para quaisquer constantes t (exceto $t = 0$):

$$M(tx,ty) = t^n \cdot M(x,y)$$
$$N(tx,ty) = t^n \cdot N(x,y)$$

Metódo de Resolução

Para resolver uma equação diferencial homogênea no formato (4.28), recorre-se a uma substituição algébrica. Essa substituição é realizada da seguinte maneira: assume-se $y = ux$ ou $x = vy$, onde u e v representam as novas variáveis independentes, transformando assim a equação homogênea em uma equação separável de primeira ordem. Suponhamos $y = ux$; nesse caso, a sua derivada será $dy = udx + xdu$. Substituindo essa expressão na equação (4.28), obtemos:

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[udx + xdu] = 0.$$

Caso a função homogênea possua grau n, é possível expressar:

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[udu + xdu] = 0$$

$$(M(1, u) + uN(1, u))dx + xN(1, u)du = 0$$

Logo,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0$$

A partir desse ponto, para resolver a equação diferencial usando o método de variáveis separáveis, seguimos o procedimento previamente discutido. Após completar a solução, empregamos a relação $y = ux$ para efetuar a substituição e, assim, determinar o valor de y.

Exemplo 4.25 Resolva a equação diferencial homogênea usando a substituição adequada.

$$(y^2 + yx)dx + x^2 dy = 0$$

Antes de partimos para solução desta equação, vamos verificar se as funções que a compõem, são de fato funções homogêneas,

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

assim temos que

$$f(tx, ty) = y^2 + yx$$

$$f(tx, ty) = (ty)^2 + (ty)(tx)$$

$$f(tx, ty) = t^2 y^2 + t^2 yx$$

$$f(tx,ty) = t^2(y^2 + yx)$$

$$f(tx,ty) = t^2 M(x,y)$$

logo é homogênea de grau 2. E a função x^2 é simples de se notar que também será homegênea de mesmo grau. Agora vamos para a solução da equação diferencial.

Solução

Passo 1. Use $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, teremos

$$(u^2x^2 + ux^2)dx + x^2(udx + xdu) = 0$$

dividindo a expressão por x^2 temos

$$(u^2 + u)dx + (udx + xdu) = 0$$

$$(u^2 + 2u)dx + xdu = 0$$

Passo 2. Separe as variáveis

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{(u^2 + 2u)}$$

Passo 3. Integre

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{(u^2 + 2u)}$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|u + 2| = C$$

Multiplicando por 2 temos

$$2\ln|x| + \ln|u| - \ln|u + 2| = 2C$$

$$\ln\left|\frac{x^2u}{u + 2}\right| = 2C$$

$$\frac{x^2u}{u + 2} = C_1$$

Passo 4. Substitua $u = \dfrac{y}{x}$, assim teremos

$$\frac{x^2\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x} + 2} = C_1$$

$$x^2y = C_1(y + 2x).$$

Exemplo 4.26 Resolva a equação diferencial homogênea

$$[y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x\sin\left(\frac{y}{x}\right)]dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

Solução

Passo 1. Use $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, teremos

$$(ux\cos u + x\sin u)dx = x\cos u(udx + xdu)$$

Agrupando os termos idênticos e realizando simplificações, chegamos a

$$\sin udx = x\cos udu$$

Passo 2. Separe as variáveis

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sin u}{\cos u}du$$

Passo 3. Integre

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{\sin u}{\cos u}du$$

$$\ln x = \ln\sin u + \ln C \Rightarrow x = C\sin u$$

Passo 4. Substitua $u = \dfrac{y}{x}$, assim teremos

$$x = C\sin\frac{y}{x}.$$

Exemplo 4.27 Resolva a equação diferencial homogênea

$$xdx + (y - 2x)dy = 0$$

Solução

Passo 1. Use $x = vy \Rightarrow dx = vdy + ydv$, teremos

$$vy(vdy + ydv) + (y - 2vy)dy = 0$$

Dividindo por y temos

$$v(vdy + ydv) + (1 - 2v)dy = 0$$

Multiplicando as variáveis e organizando, temos

$$vydv + (v^2 - 2v + 1)dy = 0$$

Passo 2. Separe as variáveis

$$\frac{vdv}{(v-1)^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{(v-1)dv}{(v-1)^2} + \frac{dv}{(v-1)^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

Passo 3. Integre

$$\int \frac{(v-1)dv}{(v-1)^2} + \int \frac{dv}{(v-1)^2} + \int \frac{dy}{y} = \int 0$$

$$\ln|v-1| - \frac{1}{v-1} + \ln|y| = C$$

Passo 4. Substitua $v = \dfrac{x}{y}$, assim teremos

$$\ln\left|\frac{x}{y} - 1\right| - \frac{1}{\frac{x}{y} - 1} + \ln|y| = C$$

podemos escrever a solução da seguinte maneira

$$(x-y)\ln|x-y| - y = C(x-y).$$

Exemplo 4.28 Resolva o problema de valor inicial

$$(x^2 + 2y^2)dx - xydy = 0, \quad y(-1) = 1$$

Passo 1. Use $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, teremos

$$(x^2 + 2u^2x^2)dx - ux^2(udx + xdu) = 0$$

Dividiremos a expressão por x^2 e, em seguida, realizaremos a multiplicação e a simplificação dos termos equivalentes.

$$(1 + u^2)dx - uxdu = 0$$

Passo 2. Separe as variáveis

$$\frac{dx}{x} - \frac{udu}{1+u^2} = 0$$

Passo 3. Integre

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{udu}{1+u^2} = 0$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = C$$

$$\frac{x^2}{1+u^2} = e^{2C}$$

Passo 4. Substitua $u = \dfrac{y}{x}$, assim teremos

$$\frac{x^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = C_1$$

organizando a equação,

$$x^4 = C_1(y^2 + x^2)$$

Passo 5. Aplique a condição inicial $y(-1) = 1$ para determinar a solução particular, assim temos

$$(-1)^4 = C_1(1^2 + (-1)^2)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}$$

Portanto a solução para o PVI será

$$x^4 = \frac{1}{2}(y^2 + x^2).$$

5 EQUAÇÕES ESPECIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, exploraremos um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que ganharam nomes especiais em homenagem às pessoas que as estudaram profundamente e desenvolveram métodos particulares para a resolução. Essas equações possuem características distintas e apresentam desafios específicos na busca por suas soluções. Ao longo deste capítulo, abordaremos cada uma delas em detalhes, discutindo suas propriedades e apresentando métodos para resolver esses problemas com sucesso.

5.1 Equação de Bernoulli

A primeira das equações diferenciais especiais a ser estudada corresponde à "Equação de Bernoulli". Essa equação recebe seu nome em homenagem a Daniel Bernoulli, um matemático suíço do século XVIII. Daniel Bernoulli fez várias contribuições importantes para a matemática e a física, e a equação de Bernoulli é um exemplo notável disso.

Definição 5.1 *Considere uma equação diferencial que se caracteriza por ter a forma geral*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{5.1}$$

onde P e Q são funções apenas da variável independente x. Tal equação é chamada de equação diferencial de Bernoulli de grau n.

Observe que ao considerar a equação (5.1), quando $n = 0$, obtemos uma equação diferencial linear que pode ser resolvida usando o método discutido na seção (4.1.1). Quando $n = 1$, a equação diferencial se torna linear e separável, permitindo que seja resolvida pelos métodos abordados nas seções (4.1.1) ou (4.2). Entretanto, nos demais casos onde $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a equação (5.1) permanece não linear e pode ser escrita da seguinte maneira

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{5.2}$$

Se definirmos $w = y^{1-n}$, com $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Com essa substituição, a equação (5.2) se converte em uma equação linear.

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)Q(x) \tag{5.3}$$

Ao resolver a equação (5.3) e, em seguida, introduzindo a substituição $y^{1-n} = w$, chegamos a uma solução para a equação (5.1). Isso nos permite encontrar uma expressão que descreve a solução da equação diferencial em questão.

Exemplo 5.1 Resolva a equação diferencial usando a substituição mencionada

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Solução

Passo 1. Seguindo a equação de Bernoulli com as funções $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x$, e $n = 2$, podemos considerar uma mudança de variável.

$$w = y^{1-n} \Rightarrow w = y^{1-2} \Rightarrow w = y^{-1}$$

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2\frac{dw}{dx}$$

Passo 2. Substitua na equação inicial e simplifique.

$$-y^2\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

simplificando

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$

Passo 3. Substitua $w = y^{-1}$, a equação se transforma da seguinte maneira:

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}w = -x$$

chegamos em uma equação diferencial linear, o seu método de resolução já estamos familiarizado

Passo 4. Calcule o fator de integração para essa equação linear

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x} dx} = e^{-lnx} = x^{-1}$$

Passo 5. Multiplique a fator de integração na equação linear.

$$x^{-1}\frac{dw}{dx} - x^{-2}w = -1$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}w) = -1$$

Passo 6. Integre essa ultima equação

$$\int \frac{d(x^{-1}w)}{dx}dx = \int -1dx$$

$$x^{-1}w = -x + c \quad ou \quad w = -x^2 + cx$$

Dado $w = y^{-1}$, podemos facilmente reescrever isso como $y = \frac{1}{w}$ ou

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}.$$

Exemplo 5.2 Resolva a equação diferencial

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0$$

Passo 1. Simplifique e deixe a equação de Bernoulli em sua forma padrão.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$$

Dividindo por toda a expressão por y^3, temos

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2} \tag{5.4}$$

Considere

$$w = y^{-2}$$

$$w' = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{w'}{-2} = y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

Passo 2. Substitua na equação (5.4) e simplifique.

$$\frac{w'}{-2} + \frac{2}{x}w = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando por -2 temos

$$\frac{dw}{dx} - \frac{4}{x}w = \frac{-2}{x^2}$$

chegamos em uma equação diferencial linear

Passo 3. Calcule o fator de integração para essa equação linear

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-4}{x}dx} = e^{-4lnx} = x^{-4}$$

Passo 4. Multiplique a fator de integração na equação linear.

$$x^{-4}\frac{dw}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}w = \frac{-2}{x^2}x^{-4}$$

$$x^{-4}\frac{dw}{dx} - 4x^{-5}w = -2x^{-6}$$

Passo 5. Integre essa ultima equação

$$\int \frac{d(x^{-4}w)}{dx}dx = \int -2x^{-6}dx$$

$$x^{-4}w = \frac{-2x^{-5}}{-5} + c$$

isolando w, temos

$$w = \frac{-2x^{-5}}{-5x^{-4}} + \frac{c}{x^{-4}}$$

Dado $w = y^{-2}$, podemos facilmente reescrever como

$$y^{-2} = \frac{2}{5x} + cx^4$$

$$y = [\frac{2}{5x} + cx^4]^{\frac{-1}{2}}.$$

5.2 Equação de Riccati

A próxima classe de equações diferenciais a ser explorada é a chamada "Equação de Riccati", nomeada em homenagem ao matemático italiano Jacopo Francesco Riccati. Nascido no século XVIII, Riccati contribuiu significativamente para várias áreas da matemática, incluindo a teoria das equações diferenciais. A equação de Riccati é uma equação diferencial não linear de primeira ordem que guarda semelhanças com a equação de Bernoulli. A resolução dessas equações muitas vezes envolve técnicas especiais e, em alguns casos, transformações algébricas para simplificar sua forma. Vamos explorar os métodos associados à resolução da equação de Riccati para aprofundar nossa compreensão das soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

Definição 5.1 *Uma equação diferencial expressa na forma*

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{5.5}$$

é reconhecida como a equação de Riccati.

Se y_1 representa uma solução particular para (5.5), a realização das substituições

$$y = y_1 + u$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

em (5.5) resulta na seguinte equação diferencial para u:

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2 \tag{5.6}$$

Dado que (5.6) é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, é possível reduzi-la à forma linear:

$$\frac{du}{dx} + (Q + 2y_1R)u = -R \tag{5.7}$$

através da introdução da substituição $w = u^{-1}$. Posteriormente, a aplicação de métodos previamente estudados se torna viável.

Exemplo 5.3 Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$$

Passo 1. Identificar a solução particular. Neste caso,

$$y_1 = -e^x$$

é uma solução.

Passo 2. Fazer uma substituição para simplificar a equação. Escolhemos $y = -e^x + u$:

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \frac{du}{dx}$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$e^x + \frac{du}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)(-e^x + u) + (-e^x + u)^2$$

Passo 3. Simplificar a equação resultante.

$$\frac{du}{dx} = u + u^2$$

Essa é uma equação de Bernoulli.

Passo 4. Fazer a substituição $w = u^{-1}$, o que implica $\dfrac{dw}{dx} = -u^{-2}\dfrac{du}{dx}$.

$$-u^2\frac{dw}{dx} = u + u^2$$

Substituir $\dfrac{du}{dx}$ pela expressão acima:

$$-\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{u} - 1$$

Passo 5. Resolver a equação diferencial resultante. Essa é uma equação de variáveis separáveis.

$$\ln(w + 1) = -x + c_1$$

Passo 6. Desfazer a substituição. Lembrando que $w = u^{-1}$:

$$\ln\left(\frac{1}{u} + 1\right) = -x + c_1$$

Passo 7. Simplificar e resolver para u:

$$\frac{1}{u} + 1 = e^{c_1 - x}$$

$$u = \frac{1}{e^{c_1 - x} - 1}$$

Passo 8. Reverter todas as substituições:

$$y = -e^x + u$$

Substituindo u:

$$y = -e^x + \frac{1}{e^{c_1 - x} - 1}.$$

Exemplo 5.4 Verifique se y_1 é solução da equação de Ricatti abaixo e encontre a solução geral

$$2y' \cdot \cos x = 2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2, \qquad y_1 = senx \tag{5.8}$$

Solução

Antes de fazermos essa verificação vamos deixar essa equação na forma padrão da equação de Riccati.

Dividindo toda por $2\cos x$ temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2}{2\cos x}$$

Simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{y^2}{2\cos x} \tag{5.9}$$

Passo 1. Verificar se $y_1 = senx$ é solução.

temos que

$$y_1 = senx \qquad \frac{d(y_1)}{dx} = \cos x \tag{5.10}$$

e que

$$y_1^2 = sen^2 x$$

Substituindo na equação (5.9)

$$\cos x = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x}$$

Simplificando

$$\cos x = \cos x$$

Como a igualdade é satisfeita podemos concluir que $y_1 = senx$ é solução para a equação.

Passo 2. Fazer uma substituição para simplificar a equação. Escolhemos $y = senx + u$:

$$\frac{dy}{dx} = cosx + \frac{du}{dx}$$

Substituindo na equação (5.9), obtemos:

$$cosx + \frac{du}{dx} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{(\operatorname{sen} x + u)^2}{2\cos x}$$

Passo 3. Simplificar a equação resultante

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{(\operatorname{sen}^2 x + 2senxu + u^2)}{2\cos x}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{\operatorname{sen} xu}{\cos x} + \frac{1}{2\cos x} \cdot u^2$$

$$\frac{du}{dx} - \tan xu = \frac{1}{2}\sec xu^2$$

Essa é uma equação de Bernoulli.

Passo 4. Fazer a substituição $w = u^{-1}$, o que implica $\dfrac{dw}{dx} = -u^{-2}\dfrac{du}{dx}$.

$$\frac{dw}{dx} + \tan x w = -\frac{1}{2}\sec x$$

Passo 5. Resolver a equação diferencial resultante. Essa é uma equação diferencial linear. Vamos calcular o fator de integração

$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{\ln|\sec x|} = \sec x$$

Multiplicando o fator integrante na equação linear ficamos com

$$\sec x \cdot \frac{dw}{dx} + \sec x \cdot \tan x w = -\frac{1}{2}\sec^2 x$$

Integrando temos

$$\int \frac{d(\sec x \cdot w)}{dx} dx = -\int \frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$\sec x \cdot w = -\frac{1}{2}\tan x + c$$

Podemos reescrever esse resultado como

$$\frac{1}{\cos x} \cdot w = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + c$$

Isolando w temos

$$w = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x \cdot c$$

Passo 6. Desfazer a substituição. Lembrando que $w = u^{-1}$:

$$u^{-1} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x \cdot c$$

Passo 7. Simplificar e resolver para u:

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x \cdot c}$$

Passo 8. Reverter todas as substituições:

$$y = \operatorname{sen} x + u$$

Substituindo u:

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x \cdot c}.$$

5.3 Equação de Clairaut

A próxima classe de equações diferenciais especiais que abordaremos neste estudo é a chamada "Equação de Clairaut", assim nomeada em homenagem ao matemático francês Alexis Claude de Clairaut. Clairaut, nascido em 1713, destacou-se por suas contribuições significativas à matemática e à física durante o século XVIII. A equação de Clairaut pertence a uma classe peculiar de equações diferenciais de primeira ordem, conhecida como equações diferenciais autônomas. Essas equações apresentam uma forma única que permite soluções específicas e fascinantes. A equação de Clairaut é representada por uma forma específica que a distingue de outras equações diferenciais, oferecendo desafios e propriedades distintas. Vamos explorar a definição dessa equação e examinar métodos específicos para sua resolução.

Definição 5.2 *A equação de Clairaut é uma equação diferencial ordinária que possui a forma geral*

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ou podemos escreve-la também como

$$y = xy' + f(y')$$

onde $f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *é uma função arbitrária de* $\frac{dy}{dx}$*. Essa equação é chamada de forma padrão da equação de Clairaut. É importante também observar que esse tipo de equação é não-linear.*

Vamos mostrar o método de resulação desse tipo de equação através de um exemplo simples.

Exemplo 5.5 Considere a equação diferencial

$$y = x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2 \tag{5.11}$$

onde, nesse exemplo, $f(\frac{dy}{dx}) = (\frac{dy}{dx})^2$. Vamos derivar a equação com relação a x, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \tag{5.12}$$

Essa equação pode ser simplificada usando as regras de derivação. Vamos simplificar cada termo:

1. Derivada do primeiro termo:

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}$$

2. Derivada do segundo termo:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Substituindo esses resultados na equação (5.12), obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$$

podemos simplificar

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

colocando $\frac{d^2y}{dx^2}$ em evidência, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x + 2\frac{dy}{dx}) = 0 \tag{5.13}$$

Portanto, as soluções para esta equação diferencial são encontradas em dois casos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{5.14}$$

ou

$$x + 2\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5.15}$$

em (5.14) podemos integrar

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int 0$$

assim temos que

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Substituino na equação (5.14)

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dz}{dx} = 0$$

que temos como solução,

$$z(x) = c$$

onde c é uma constante. Observe que, com isso

$$\frac{dy}{dx} = z(x) = c$$

Substituindo na equação diferencial (5.11), obtemos

$$y = xc + c^2 \;\; ou \;\; y(x) = c(x + c) \tag{5.16}$$

que fornece uma família de soluções em função do parâmetro c. Considerando agora a equação (5.15) temos o seguinte

$$x + 2\frac{dy}{dx} = 0 \;\; ou \;\; \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} \tag{5.17}$$

Observe que essa é uma equação separável, e ja conhecemos o seu método de resolução, vamos aplical-o

$$dy = -\frac{x}{2}dx$$

e, integrando

$$\int dy = -\int \frac{x}{2}dx$$

resultando em

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + d \tag{5.18}$$

one d é uma constante, que pode ser determinada se substituimos essa soluçãoo na equação (5.11), onde tambem vamos usar mais uma vez a equação (5.17), ou seja,

$$-\frac{x^2}{4} + d = x(-\frac{x}{2}) + (-\frac{x}{2})^2$$

ou

$$-\frac{x^2}{4} + d = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

combine os termos semelhantes

$$-\frac{x^2}{4} + d = -\frac{x^2}{4}$$

chegamos a

$$d = 0$$

com isso a equação (5.18) fica

$$y(x) = -\frac{x^2}{4}$$

A solução fornecida não pode ser expressa como um membro da família de soluções (5.16) para nenhum valor de c, sendo assim é denominada solução singular. É possível agora formalizar as manipulações relacionadas à equação de Clairaut.

Teorema 5.3 *Seja a equação diferencial*

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

essa equação pode ser manipulada de maneira a gerar uma família de soluções expressa por

$$y(x) = cx + f(c) \tag{5.19}$$

onde c é uma constante arbitrária. Além disso, pode ser obtida uma equação diferencial de primeira ordem dada por

$$f'\left(\frac{dy}{dx}\right) + x = 0 \tag{5.20}$$

que proporciona uma solução singular para a equação de Clairaut. Nessa expressão,

$$f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{df}{d(\frac{dy}{dx})}$$

o que significa que a função f está sendo derivada em relação a $\frac{dy}{dx}$ e não em relação a x.

Como o objetivo deste estudo é apresentar de maneira clara e acessível os métodos de resolução das equações diferenciais de primeira ordem, tornando esse conhecimento acessível a um público amplo. Dessa forma, optamos por não incluir a demonstração detalhada dos teoremas envolvidos, a fim de manter o foco no entendimento das técnicas práticas de resolução.

Vejamos mais um exemplo de resolução da equação de Clairaut, para fixação.

Exemplo 5.6 Considere a equação diferencial de Clairaut, determine sua solução geral e singular.

$$y = x\frac{dy}{dx} + sen\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Solução

Passo 1. Identifique na equação $f(y')$ que nesse caso $f(y') = sen(y')$, logo a soluão geral é imediata, substituindo $f(y')$ na equação (5.19)

$$y = cx + \operatorname{sen} c$$

essa representa uma família de soluções da equação.

Passo 2. Para determinar a solução singular precisamos saber $f'(\frac{dy}{dx})$, para isso vamos fazer a derivação

$$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + x = 0$$

ou

$$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + = -x$$

aplicando o arcocosseno em ambos os lados dessa expressão, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \arccos -x$$

note que essa é uma equação separável.

Passo 3. Resolva a equação separável

$$\int dy = \int \arccos -x dx$$

definindo $t = -x$, e $dt = -dx$ temos

$$y = -\int \arccos t dt$$

para resolver essa integral, vamos definir que

$$t = \cos\alpha \qquad e \qquad dt = -\operatorname{sen}\alpha d\alpha \tag{5.21}$$

de modo que

$$\int \arccos t dt = -\int \arccos(cos\alpha) sen\alpha d\alpha$$

ou

$$\int \arccos t dt = -\int \alpha sen\alpha d\alpha$$

utilizaremos agora a integração por partes para resolver essa integral do membro direito considere

$$u = \alpha \qquad du = d\alpha$$

$$dv = sen\alpha d\alpha \qquad v = -cos\alpha$$

assim temos

$$\int \alpha sen\alpha d\alpha = -\alpha cos\alpha + \int cos\alpha d\alpha = -\alpha cos\alpha + sen\alpha$$

substituindo esse resultado

$$\int \arccos t dt = \alpha cos\alpha - sen\alpha$$

voltando para t conforme (5.21)

$$\int \arccos t dt = t \arccos t - \sqrt{1 - t^2}$$

por fim temos

$$y = -t \arccos t + \sqrt{1 - t^2}$$

ou, como $t = $ -x

$$y(x) = x \arccos -x + \sqrt{1 - x^2}$$

que é uma solução singular para a equação de Clairaut.

Exemplo 5.7 Resolva a equação

$$x\frac{dy}{dx} - y = e^{\frac{dy}{dx}} \tag{5.22}$$

Solução

Podemos primeiro reescrever a equação diferencial da seguinte maneira,

$$y = xy' - e^{y'}$$

considere $\frac{dy}{dx} = p$, então temos que $f(y') = -e^{y'}$ e $f(p) = -e^p$.

Passo 1. A solução geral (família de soluções) será dada por

$$y = xc - e^c$$

Passo 2. Para a solução singular, temos que fazer

$$y = -f'(t) \cdot t + f(t)$$

então temos

$$y = e^t \cdot t - e^t \tag{5.23}$$

sabemos que nesse caso $x = -f'(t)$ então $x = e^t$.

Substituindo na equação (5.23)

$$y = xt - x$$

Passo 3. Coloque a equação em termos de x

Se temos que $x = e^t$ podemos aplicar a função logarítmica em ambos os membros, assim obteremos

$$ln(x) = ln(e^t)$$

ou

$$ln(x) = t$$

Substituindo a solução singular será

$$y = xln(x) - x$$

6 ALGUMAS APLICAÇÕES

Crescimento e Decrescimento

O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{6.1}$$

A constante k, que atua como uma constante de proporcionalidade, desempenha um papel significativo em muitas teorias físicas que envolvem crescimento ou decrescimento. Por exemplo, na área da biologia, é comum observar que a taxa de crescimento de certas bactérias é diretamente proporcional ao número de bactérias presentes em um determinado momento. Em um curto intervalo de tempo, a população de pequenos animais, como roedores, pode ser prevista com alta precisão utilizando a solução da equação diferencial (6.1). Na física, um problema de valor inicial, como o apresentado em (6.1), fornece um modelo aproximado para o cálculo da quantidade remanescente de uma substância que está passando por um processo de desintegração radioativa. Além disso, a equação diferencial em (6.1) pode ser empregada para determinar a temperatura de um corpo que está em processo de resfriamento. Em química, a quantidade remanescente de uma substância durante certas reações também pode ser descrita por essa mesma equação (6.1).

A constante de proporcionalidade k na equação (6.1) pode assumir valores positivos ou negativos, e sua determinação é obtida por meio da solução do problema, utilizando um valor subsequente de x em um instante t_1 maior que t_0.

Exemplo 1 Em uma cultura, há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

Solução

Primeiro, resolvemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{6.2}$$

Dado $N(0) = N_0$, podemos utilizar a condição empírica $N(1) = \frac{3}{2}N_0$ para calcular a constante de proporcionalidade k.

Agora, a equação (6.2) torna-se separável e linear. Ao reescrevê-la na forma adequada, obtemos:

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

Vamos calcular o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -kdt}$$

$$\mu(t) = e^{-kt}$$

Multiplicando em ambos os lados da equação esse fator de integração, obtemos imediatamente

$$\frac{dN}{dt}[e^{-kt}N] = 0$$

Integrando ambos os lados dessa ultima equação, temos

$$\int (e^{-kt}N)' = \int 0dt$$

$$e^{-kt}N = c \quad ou \quad N(t) = ce^{kt}$$

Em $t = 0$, temos

$$N(0) = ce^{k0}$$

$$N(0) = c$$

Assim, $N(t) = N_0e^{kt}$

Em $t = 1$, temos

$$\frac{3}{2}N_0 = N_0e^{k} \quad ou \quad e^{k} = \frac{3}{2}$$

Assim, $k = ln(\frac{3}{2}) = 0,4055$ com quatro casas decimais. A expressão para $N(t)$ é portanto

$$N(t) = N_0e^{0,4055t}$$

Para determinar o tempo necessário para que o número de bactérias triplique, procedemos da seguinte forma

$$3N_0 = N_0e^{0,4055t}$$

A partir desta equação, concluímos que $0,4055t = ln(3)$ e assim

$$t = \frac{ln(3)}{0,4055} \approx 2,71 horas$$

Meia-vida

Em física, a meia-vida é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida representa o tempo necessário para que a metade dos átomos de uma quantidade inicial A_0 se desintegre ou se transforme em átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela é. Por exemplo, o rádio ultra-radioativo, Ra-226, possui uma meia-vida de aproximadamente 1700 anos, o que significa que, em 1700 anos, metade de uma quantidade inicial de Ra-226 se transformará em radônio, Rn-222. Já o isótopo de urânio mais comum, U-238, possui uma meia-vida de aproximadamente 4.500.000.000 de anos. Nesse período, metade de uma quantidade de U-238 se transformará em chumbo, Pb-206.

Exemplo 2 Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após 15 anos, foi detectado que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou. Para encontrar a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Solução

Denote por $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t. Como no Exemplo 1, a solução para o problema de valor inicial

$$A(t) = A_0 e^{kt} \qquad A(0) = A_0$$

Onde $A(t)$ é a quantidade de plutônio após um tempo t, A_0 é a quantidade inicial, e k é a constante de proporcionalidade que queremos encontrar.

Sabendo que 0,043% da quantidade inicial se desintegrou após 15 anos, podemos expressar isso como

$$A(15) = A_0 - 0,00043A_0 = A_0(1 - 0,00043) = A_0 \cdot 0,99957$$

Agora, substituindo na equação $A(t)$:

$$A(15) = A_0 e^{15k} = A_0 \cdot 0,99957$$

Isolando k:

$$e^{15k} = 0,99957$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados:

$$15k = \ln(0,99957)$$

Finalmente, podemos encontrar k:

$$k = \frac{\ln(0,99957)}{15} = -0,00002867$$

Logo

$$A(t) = A_0 e^{-0,00002867t}$$

Agora, a meia-vida é o tempo t no qual $A(t) = \dfrac{A_0}{2}$. Calculando o valor de t nessa equação, temos

$$\frac{A_0}{2} + A_0 e^{-0,00002867t} \quad ou \quad \frac{1}{2} = e^{-0,00002867t}$$

$$-0,00002867t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,00002867} \approx 24,180 \; anos$$

Lei de Newton de Resfriamento e Aquecimento

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo com resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante T_m do meio ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{6.3}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. A integração produz então a solução geral

$$T(t) = T_m + Ce^{kt} \tag{6.4}$$

Observe que o resfriamento ocorre com $C < 0$, enquanto o aquecimento ocorre com $C > 0$.

Exemplo 1 Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for exatamente 70°F?

Solução

Na equação (6.3), identificamos $T_m = 70$. Agora, precisamos resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \qquad T(0) = 300 \tag{6.5}$$

e determinar o valor de k de modo que $T(3) = 200$.

A equação (6.5) é linear e separável. Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dT}{T-70} = kdt$$

Integrando ambos os lados temos

$$\int \frac{dT}{T-70} = \int kdt$$

$$\ln|T-70| = kt + c_1$$

$$T - 70 = c_2 e^{kt}$$

$$T = 70 + c_2 e^{kt}$$

Quando $t = 0$, $T = 300$, portanto, $300 = 70 + c_2$ e $c_2 = 230$. Portanto, $T = 70 + 230e^{kt}$ De $T(3) = 200$, encontramos

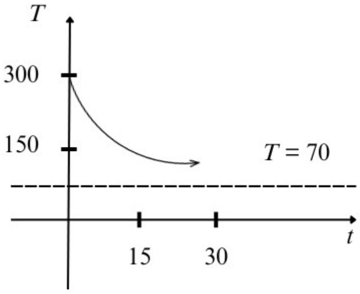
$$e^{3k} = \frac{13}{23} \quad ou \quad k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0.19018$$

Então,

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t} \tag{6.6}$$

Observamos que (6.6) não fornece soluções finitas para $T(t) = 70$, uma vez que o limite de $T(t)$ quando t tende ao infinito é igual a 70. De maneira intuitiva, esperamos que o bolo alcance a temperatura ambiente após um longo período de tempo. O que consideramos como um "longo período de tempo"? Claro que não devemos nos preocupar com o fato de o modelo (6.5) não ser completamente preciso em relação à nossa intuição física. As partes (a) e (b) da Figura 1 mostram claramente que o bolo estará aproximadamente à temperatura ambiente de 70°F em cerca de meia hora.

Exemplo 2 Um filé de salmão, inicialmente a uma temperatura de 50°F, é colocado em um forno com uma temperatura constante de 400°F. Após 10 minutos, a temperatura do filé é medida em 150°F. Considerando que o peixe é fino e macio, suponhamos, como uma primeira aproximação, que sua temperatura é uniforme. Queremos determinar quanto tempo levará até que o salmão atinja uma temperatura de 200°F, considerando-o, por exemplo, "mal passado".



(a)

T(t)	t(minutos)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70,5°	32.3

(b)

Figura 1

Solução

O processo de cozimento é descrito pela equação (6.3) com $T_m = 400$ e k desconhecido. Contudo, k como C pode ser encontrado usando a informção: $T(0) = 50$ e $T(10) = 150$. De fato, a primeira condição e (6.4) produz

$$50 = T(0) = 400 + Ce^0 = 400 + C$$

O que significa que que $C = -350$, e a segunda condição e (6.4) fornecem

$$150 = T(10) = 400 - 350e^{10k}$$

de onde $k = \frac{1}{10} \ln \frac{25}{35} \approx -0,034$. Assim a solução particular da equação diferencial que descreve o nosso problema é

$$T(t) = 400 - 350e^{-0,034t}$$

Para determinar quando o peixe atinge 200°F, temos que rescrever em t a equação

$$200 = 400 - 350e^{-0.034t}$$

cuja solução é

$$t = (-\frac{1}{0,034}) \ln \frac{4}{7} \approx 16,45929$$

Assim, na hipótese de temperatura uniforme, o salmão atingirá 200°F após cerca de aproximadamente 16 minutos e meio.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em conclusão, este trabalho buscou não apenas apresentar os conceitos fundamentais das equações diferenciais de primeira ordem, mas também proporcionar uma compreensão aprofundada por meio de exemplos de fácil assimilação. O objetivo principal foi guiar o leitor por métodos claros e instruções de passo a passo, tornando acessível a resolução dessas equações.

Ao longo do estudo, exploramos equações diferenciais que levam o nome de renomados matemáticos, ressaltando a importância histórica e o legado deixado por esses pensadores. Adicionalmente, foram apresentadas aplicações práticas para ilustrar como as equações diferenciais desempenham um papel crucial em diversos campos, incluindo física, química e biologia.

A motivação por trás deste trabalho vai além do escopo acadêmico, visando despertar o interesse de outros estudantes para a fascinante área das equações diferenciais. A abordagem detalhada e simplificada, com foco em exemplos variados, visa facilitar a assimilação dos conceitos, especialmente para aqueles que estão sendo introduzidos ao estudo das equações diferenciais.

Ao compartilhar esse conhecimento, a intenção é contribuir para a universalização do saber. A disseminação do conhecimento é uma poderosa ferramenta contra o preconceito, a discriminação e a desigualdade na sociedade. Este trabalho, portanto, busca ser uma fonte de apoio para pesquisas futuras e um estímulo ao desenvolvimento contínuo do entendimento sobre equações diferenciais, promovendo, assim, a expansão do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

[1] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Habra Ltda. São Paulo, 1988.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[3] DIACU, Florin. Introdução a Equações Diferenciais: teoria e aplicações. LTC, 2004.

[4] INCE, Edward L. Ordnary Differential Equations, Dover Publications, Inc. New York, 1956

[5] MACHADO, Kleber Daum. Equações diferenciais aplicadas. Ponta Grossa: TODA-PALAVRA Editora, 2012.

[6] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações diferenciais vol. 1. Pearson Makron Books, 2008.