



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VIII - ARARUNA  
CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE  
DEPARTAMENTO DE LICENCIATURA EM FÍSICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**JOSÉ WEVERSON ARAÚJO DA SILVA**

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS ANULARES**

**ARARUNA**

**2023**

JOSÉ WEVERSON ARAÚJO DA SILVA

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS ANULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em Licenciatura em Física.

**Área de concentração:** Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

**Orientador:** Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior.

**ARARUNA**

**2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586a Silva, Jose Weverson Araujo da.

Análise da transferência de calor em dutos anulares [manuscrito] / Jose Weverson Araujo da Silva. - 2023.  
42 p. : il. colorido.

Digitado. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde, 2024. "Orientação : Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior, Coordenação do Curso de Física - CCTS. "

1. Mecânica do fluidos. 2. Transferência de calor. 3. Engenharia. I. Título

21. ed. CDD 532

JOSÉ WEVERSON ARAÚJO DA SILVA

## ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS ANULARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em Licenciatura em Física..

Área de concentração: Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

Aprovada em: 06 / 12 / 2024.

### BANCA EXAMINADORA

Valdecir Alves dos Santos Júnior

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Jamilton Rodrigues dos Santos

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Morgana de Vasconcellos Araújo

Dra. Morgana de Vasconcellos Araújo  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

A minha mãe Rosilene Araújo e meu Irmão  
Wesley Araújo, DEDICO.

## **AGRADECIMENTOS**

Externo meus agradecimentos a toda minha família que sempre me apoiou nos momentos cruciais da minha vida para chegar até aqui, em especial a minha mãe que por mais preocupada que estivesse em meus viotes em dias de estudo, sempre me apoiou de maneira direta nessa jornada, a todos os meus amigos que estiveram ao meu lado e tornaram essa caminhada mais leve e a todos os meus professores que tiveram papel fundamental para a realização desse dia, em especial ao meu orientador o qual foi essencial para a realização deste trabalho. Agradecimento especial também a FAPESQ, órgão que financiou este trabalho, enquanto participei do PIBIC. Enfim obrigado a todos que fizeram parte desse processo.

## RESUMO

Dutos com geometrias de seções transversais anulares são recorrentes em diversos campos de engenharia, como na indústria farmacêutica, alimentícia e em equipamentos de troca de calor. Este trabalho visa apresentar um estudo hidrodinâmico, apresentando perfis de velocidade e de transferência de calor em dutos de seções transversais anulares, em particular: circular anular circular, retangular anular circular e retangular anular retangular. Essas geometrias são parametrizadas utilizando o software Maple 21, para compor um conjunto de funções bases assim sendo usadas para a aplicação do método integral baseado em Galerkin. Afim de compreender o comportamento do fluido no interior destas geometrias, parâmetros hidrodinâmicos e térmicos, como o número de Poiseuille e número de Nusselt, são apresentados e comparados por gráficos e tabelas com valores encontrados na literatura. O método da integral baseado em Galerkin é aplicado para resolver as equações de momento linear e de energia via aplicação computacional e em particular foi considerado o fluxo e a temperatura constantes nas paredes dos dutos.

**Palavras-Chave:** Perfis de velocidade. Transferência de calor. Método integral baseado em Galerkin. Geometrias anulares.

## **ABSTRACT**

Ducts with annular cross-sectional geometries are prevalent in various engineering fields, such as the pharmaceutical and food industries, as well as in heat exchange equipment. This work aims to present a hydrodynamic study, providing velocity and heat transfer profiles in ducts with annular cross-sectional geometries, specifically: circular-annular-circular, rectangular-annular-circular, and rectangular-annular-rectangular. These geometries are parametrized using Maple 21 software to create a set of basis functions used in the application of the Galerkin-based integral method. In order to understand the fluid behavior within these geometries, hydrodynamic and thermal, parameters such as the Poiseuille number and Nusselt number, are presented and compared through graphs and tables with values found in the literature. The Galerkin-based integral method is applied to solve the linear momentum and energy equations through computational implementation, with constant flow and temperature considered on the duct walls for study.

**Keywords:** Velocity profiles. Heat transfer. Galerkin-based integral method. Annular geometries.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 01</b>	– Perfis de velocidade.....	14
<b>Figura 02</b>	– Perfis de temperatura.....	15
<b>Figura 03</b>	– Condições de fronteira $H_1$ .....	16
<b>Figura 04</b>	– Duto com geometria genérica.....	17
<b>Figura 05</b>	– Interface da ferramenta de software Maple 2021 student edition.....	30
<b>Figura 06</b>	– Interface da ferramenta de software Maple 2021 student edition con gráficos plotados.....	30
<b>Figura 07</b>	– Perfil de velocidade em duto circular anular circular.....	34
<b>Figura 08</b>	– Perfil de temperatura em duto circular anular circular.....	35
<b>Figura 09</b>	– Duto circular anular circular com raios $a_1=1$ $b_2=1$ e $a_1=0,75$ $b_2=0,75$ .....	36
<b>Figura 10</b>	– Perfil de velocidade adimensional.....	36
<b>Figura 11</b>	– Perfil de temperatura em condição de fronteira $H_1$ .....	37
<b>Figura 12</b>	– Perfil de velocidade em duto retangular anular retangular.....	37
<b>Figura 13</b>	– Perfil de temperatura em duto retangular anular retangular.....	38
<b>Figura 14</b>	– Duto retangular anular circular com raios $a=2$ $b=2$ e $c=1$ .....	39
<b>Figura 15</b>	– Perfil de velocidade adimesional.....	39
<b>Figura 16</b>	– Perfil de temperatura em condição de fronteira $H_1$ .....	40

## LISTA DE TABELAS

Quadro 01 –	Valores de parâmetros de interesses duto circular anular circular.....	38
Quadro 02 –	Valores de parâmetros de interesses duto retangular anular retangular.....	40

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	Elemento da matriz $A_A$ (constantes)
$A, B, C$	Matrizes
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$A_c$	Área da seção transversal dimensional/adimensional que escoo o fluido, (m <sup>2</sup> /adimensional)
$b_j$	Elemento da matriz $B$ (constantes)
$c_i, s$	Coefficientes constantes, elementos da matriz $C$
$d_h$	Diâmetro hidráulico dimensional, (m)
$\frac{dp}{dz}$	Gradiente de pressão, (Pa/m)
$D_h$	Diâmetro hidráulico adimensional
$f$	Fator de atrito Fanning, (adimensional)
$f_i$	Funções básicas; funções Galerkin
$fRe$	Número de Poiseuille, (adimensional)
$g$	Função de parametrização
$L$	Comprimento característico, (m)
$L_h$	Comprimento hidráulico
$L[ ]$	Operador linear
$N$	Número de funções básicas (adimensional)
$p$	Pressão, (Pa)
$P$	Perímetro, (m)
$Re$	Número Reynolds, (adimensional)
$u$	Velocidade axial local, (m/s)
$\underline{u}$	Solução aproximada
$u_m$	Velocidade média, (m/s)
$u _{\Gamma}$	Valor da função $u$
$U$	Velocidade normalizada, (adimensional)
$U_{max}$	Velocidade máxima normalizada, domínio $A_c$
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$X, Y, Z$	Coordenadas adimensionais
$X_{max}, Y_m$	Valores máximos de $X$ e $Y$ no
$W$	Velocidade adimensional

$W_m$	Velocidade média adimensional
$W_{max}$	Velocidade máxima adimensional
$\varepsilon$	Erro diferente de zero
$\mu$	Viscosidade do fluido, (Pa·s)
$\rho$	Densidade do fluido
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento, (Pa)
$\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$	Derivadas parciais (X, Y)
$\Gamma$	Fronteira e $\Omega$
$\Omega$	Domínio de estudo, subconjunto de $R^n$
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$H_1$	Condição de fronteira: Fluxo de calor na parede constante com temperatura na parede constante
$N_u$	Número de Nusselt
$T$	Temperatura adimensional
$T_b$	Temperatura média adimensional
$\Gamma$	Fronteira do duto
$T_s$	Temperatura de superfície
$T_w$	Temperatura na parede

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Objetivo.....</b>	<b>13</b>
<i>1.1.1 Objetivo geral.....</i>	<i>13</i>
<i>1.1.2 Objetivo específico.....</i>	<i>13</i>
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>14</b>
<b>2.1 escoamento em dutos.....</b>	<b>14</b>
<i>2.1.1 Camada limite.....</i>	<i>14</i>
<i>2.1.2 escoamento completamente desenvolvido.....</i>	<i>16</i>
<i>2.1.3 Condições de fronteira.....</i>	<i>16</i>
<i>2.1.4 Equações de conservação.....</i>	<i>17</i>
<i>2.1.5 Equação da quantidade de movimento linear.....</i>	<i>17</i>
<i>2.1.6 Equação de energia.....</i>	<i>18</i>
<b>2.2 Parâmetros adimensionais.....</b>	<b>18</b>
<i>2.2.1 Adimensionalização da equação de movimento.....</i>	<i>19</i>
<i>2.2.2 Adimensionalização da equação de energia.....</i>	<i>20</i>
<i>2.2.3 Adimensionalização para a condição de fronteira <math>h1</math>.....</i>	<i>21</i>
<b>3 PARÂMETROS DE ESCOAMENTO.....</b>	<b>24</b>
<b>3.1 Diâmetro hidráulico.....</b>	<b>24</b>
<b>3.2 Fator de atrito.....</b>	<b>24</b>
<b>3.3 Número de Nusselt para condição de fronteira <math>h1</math>.....</b>	<b>25</b>
<b>3.4 Método integral baseado em galerkin.....</b>	<b>27</b>
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>30</b>
<b>4.1 Domínio computacional.....</b>	<b>30</b>
<b>4.2 Perfil de velocidade pelo método integral de Galerkin.....</b>	<b>31</b>
<b>4.3 Perfil de temperatura para condição de fronteira <math>h1</math> pelo método integral de Galerkin.....</b>	<b>33</b>
<b>4.4 Procedimento numérico.....</b>	<b>34</b>
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>36</b>
<b>5.1 Duto circular anular circular.....</b>	<b>36</b>
<i>5.1.1 Perfis de velocidade.....</i>	<i>36</i>
<i>5.1.2 Perfis de temperatura.....</i>	<i>37</i>
<i>5.1.2 Parâmetros de interesse.....</i>	<i>38</i>
<b>5.2 Duto retangular anular retangular.....</b>	<b>38</b>
<i>5.2.1 Perfis de velocidade.....</i>	<i>38</i>
<i>5.2.2 Perfis de temperatura.....</i>	<i>39</i>
<i>5.2.3 Parâmetros de interesse.....</i>	<i>40</i>
<b>6 CONCLUSÕES.....</b>	<b>41</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A transferência de calor em dutos anulares é de grande importância em diversas áreas da engenharia e produção alimentícia. Os dutos anulares são amplamente utilizados em aplicações como trocadores de calor, tubulações de refrigeração e aquecimento, e sistemas de transporte de fluidos como no saneamento básico, na distribuição de água e na produção do petróleo, entre outras aplicações.

Várias pesquisas na literatura apresentam resultados sobre escoamento de fluidos no interior de dutos com geometrias arbitrárias. Em particular, o estudo de transferência de calor nesses entes pode trazer respostas significativas quando se quer obter resultados, por exemplo, em trocadores de calor como: resfriadores automotivos, placas frias e dissipadores de calor de microcanais (Muzychka; Yovanovich, 2009).

Transferência de calor em geometrias arbitrárias se torna importante quando se quer minimizar ou potencializar o aquecimento ou resfriamento de um fluido no interior de diversos equipamentos em engenharia. Geometrias como triangular isósceles (Irvine, 1963), elípticas Schenk Han (1966) e Rao (1969), circular Kakac; Ozgu, (1969), triangular equilátero, triangular de cantos arredondados, seno, rômbico e trapezoidal (Shah; London, 1978) são exemplos de algumas formas encontradas nesses dispositivos. Assim, diversos autores vêm ao longo dos anos se esforçando para apresentar resultados de transferência de calor e massa em geometrias arbitrárias.

Quando se considera dutos anulares, pode-se observar muito presente esta geometria. Por exemplo, em equipamentos como: evaporadores, condensadores, caldeiras, coletores solares planos e até mesmo na indústria alimentícia, quando se deseja aquecer ou resfriar alimentos líquidos de alta viscosidade. (Vaz Junior, 1986)

Outra aplicação importante do uso da geometria anular é na área de perfuração de poços, em particular, poços de petróleo, quando se faz a retirada de cascalho através da região anular (Nirenberg, 2017).

Desta forma, o entendimento da mecânica de fluidos no interior de geometrias anulares se torna um assunto de interesse até mesmo nos dias atuais, e realizar a compreensão de simulação analítica/numérica para transferência de calor em dutos anulares se torna de grande interesse e é a contribuição que este trabalho se propõe realizar. A aplicação do método de Galerkin é escolhida pela facilidade com que seu emprego se utiliza da geometria em seu desenvolvimento e construção das funções bases que compõem a solução do

problema. Variações na geometria da parte externa do duto será realizada para comparar, por exemplo, se um duto retangular com ângulo circular possui mais eficiência de troca de calor do que um duto circular com ângulo circular, assim como, escolhas de outras geometrias anulares.

Santos Júnior (2020) e Santos Júnior (2018) têm contribuído para estudos analíticos/numéricos de várias maneiras, explorando como diferentes formas afetam parâmetros como fatores de atrito e perfis de velocidade. Eles realizaram estudos em geometrias arbitrárias utilizando o método integral baseado em Galerkin. A eficácia do método para investigar geometrias prontas para uso foi demonstrada nesses estudos. Geometrias de dutos anulares podem ter seu perfil de velocidade e fator de atrito apresentados por este método.

Nesse sentido, este estudo visa contribuir para a compreensão do comportamento hidrodinâmico e termodinâmico de fluidos quando escoam em canais de geometria anular. Para escoamento laminar totalmente desenvolvido nesta geometria, foram realizadas medidas de perfis de velocidade, números de Poiseuille, números de Nusselt entre outros parâmetros apresentando resultados que permitem uma discussão mais aprofundada do fenômeno. Essas contribuições são relevantes para o entendimento do escoamento em dutos com geometrias e podem ser aplicadas em diversas áreas da engenharia.

## **1.1 Objetivo**

### ***1.1.1 Objetivo geral***

- Realizar uma análise termodinâmica de escoamento de fluidos no interior de dutos de geometrias anulares com fluxo axial e temperatura na parede constante.

### ***1.1.2 Objetivo específico***

- Estimar valores para o número de Nusselt em condição de fronteira H1.
- Realizar comparações do efeito térmico nas geometrias estudadas, dando assim uma resposta de melhor escolha quando aplicado à engenharia de transferência de calor.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Escoamento em dutos

#### 2.1.1 Camada limite

O escoamento de fluidos em dutos é amplamente utilizado em aplicações de aquecimento e resfriamento. Em termos do fluxo interno, o fluido fica completamente confinado pelas paredes internas do duto, o que limita o crescimento da camada limite. A velocidade do fluido em um duto varia de zero na superfície até um máximo no centro do duto em condições de não deslizamento. Portanto, quando se trata de escoamentos de fluidos, é prático trabalhar com uma velocidade média que permaneça constante (Çengel, 2012, *apud* Santos Júnior, 2018). A velocidade média através de uma seção transversal é definida como:

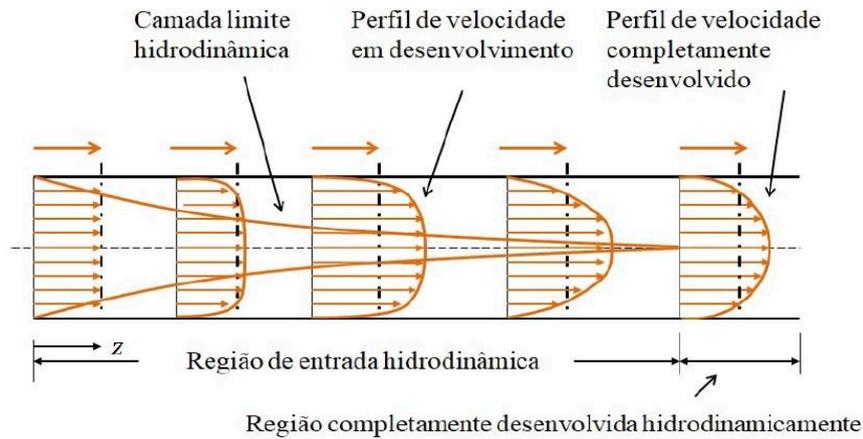
$$u_m = \int_{A_c} \frac{u(x,y)}{A_c} dA_c \quad (1)$$

Onde  $u(x,y)$  é a velocidade local

A camada limite hidrodinâmica ou apenas camada limite é a região do escoamento em que os efeitos da força de cisalhamento viscoso são sentidos. A região de entrada hidrodinâmica é a região de a partir da entrada do duto até o ponto onde a camada limite funde-se na parte central, e o seu comprimento é chamado de comprimento hidrodinâmico de entrada  $L_h$ . Na região de entrada o escoamento é chamado de escoamento em desenvolvimento hidrodinâmico, além dessa entrada, ao qual o perfil de velocidade está completamente desenvolvido, e mantenha-se inalterado, é chamado região completamente desenvolvida hidrodinamicamente (Çengel, 2012 *apud* Santos Júnior, 2018).

O perfil de velocidade na região completamente desenvolvida é parabólico para escoamento laminar em dutos de seção transversal circular. O mesmo não ocorre para dutos com seções transversais diferentes. Na Figura 1, são apresentados esses perfis de velocidade, assim como a camada limite hidrodinâmica e as regiões de entrada em desenvolvimento e completamente desenvolvida:

**Figura 1:** Perfis de velocidade



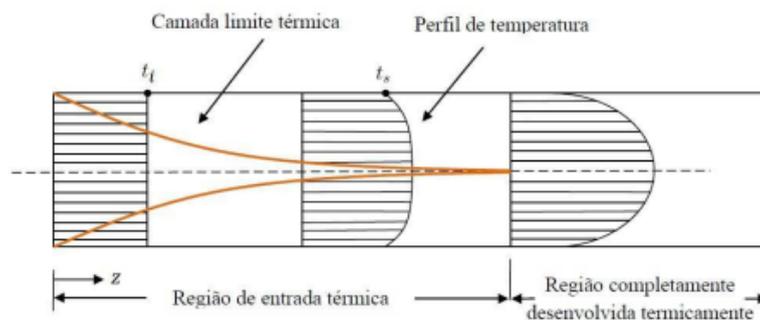
Fonte: Santos Júnior, 2018. p. 47.

A região de entrada térmica é a região do escoamento ao longo da camada limite térmica que se desenvolve e alcança o centro do duto e o comprimento dessa região é chamado de comprimento de entrada térmico  $L_t$ . A região ao qual o perfil adimensional de temperatura permanece inalterado, é chamado de região completamente desenvolvida termicamente (Çengel, 2012 *apud* Santos Júnior, 2018). Onde a temperatura média é definida como:

$$t_m = \int_{AC} \frac{c_p u(x,y)t(x,y)dA_c}{c_p u(x,y)dA_c} \quad (2)$$

É chamado de região completamente desenvolvida a região cujo o escoamento é tanto hidrodinâmica quanto termicamente desenvolvido e em ambos os perfis de velocidade e de temperatura adimensional permanecem inalterados, conforme a Figura 2.

Figura 2: Perfis de temperatura



Fonte: Santos Júnior, 2018. p. 48

### 2.1.2 Escoamento completamente desenvolvido

Por influência do desenvolvimento da camada limite, temos alguns tipos de escoamento que ocorrem em dutos, são eles, normalmente, hidrodinamicamente em desenvolvimento, simultaneamente em desenvolvimento e completamente desenvolvido (Shah e London, 1978 *apud* Santos Júnior, 2018).

Considerando o escoamento completamente desenvolvido de um fluido o perfil de velocidade não dependerá da distância axial  $z$ , isto pois a partícula que se move no fluido apresenta uma movimentação constante, desta forma também temos que o fator de atrito também se manterá constante. Assim temos que:

$$\frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} u(x, y) = 0 \quad (3)$$

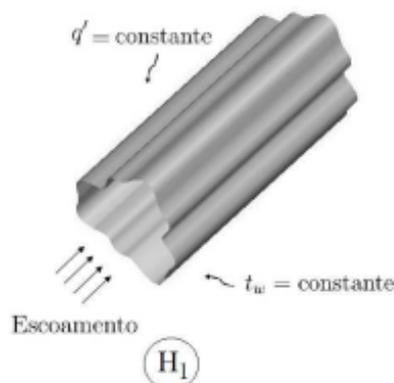
$$u(x, y, z) = u(x, y) \quad (4)$$

Assim temos  $u(x, y, z) = u(x, y)$ .

### 2.1.3 Condições de fronteira

Em problemas de transferência de calor, uma variedade de condições de fronteira pode ser especificada. As condições de fronteira são categorizadas em duas classes: a primeira classe, a temperatura da parede periférica ou fluxo de calor na parede são uniforme; já na segunda classe a temperatura da parede periférica ou fluxo de calor na parede são arbitrários (Shah e London, 1978 *apud* Santos Júnior, 2018). A seguir, é apresentada a condição de fronteira de primeira classe que será denotada por condição de fronteira  $H_1$  (Figura 3).

**Figura 3:** Condição de fronteira  $H_1$



**Fonte:** Santos Júnior, 2018. p. 49.

Um caso de condição de fronteira é quando a distribuição de fluxo de calor na parede é especificada nas direções axial como também periférica. Há quatro casos especiais desta condição de fronteira que são consideradas na literatura (Shah e London, 1978 apud Santos Júnior, 2018). O caso da condição de fronteira  $H_1$  será apresentado neste trabalho onde o fluxo de calor axial na parede é constante com temperatura na parede periférica uniforme constante. Assim temos que:

$$\{q' = h(t - t_m) = \text{constante } t|_{\Gamma} = t = \text{constante, independente de } (x, y, z) \quad (5)$$

#### **2.1.4 Equações de conservação**

Será apresentado neste ponto as equações diferenciais e condições de fronteira para os problemas de velocidade e temperatura para o problema em estudo que envolve escoamento laminar, estado estacionário, completamente desenvolvido com fluido de fase única em duto de seção transversal constante.

#### **2.1.5 Equação da quantidade de movimento linear**

Temos que a equação da quantidade de movimento é descrita como sendo:

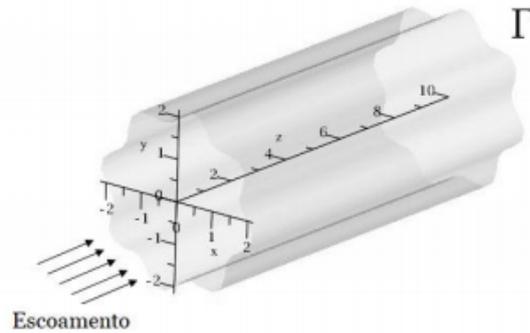
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = c_1, \quad (6)$$

Onde  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $u = u(x, y)$  é a velocidade local do fluido e  $p$  a pressão, tendo a condição de fronteira dada por:

$$u(x, y) = 0 \text{ em } (x, y) \in \Gamma \quad (7)$$

O  $x$  e  $y$  são as coordenadas da seção transversal do conduto com a direção do escoamento do fluido ao longo do eixo axial  $z$ , e temos  $c_1 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$ , que é independente de  $x$  e  $y$ . Observe na Figura 4.

**Figura 4:** Duto com geometria genérica



Fonte: Santos Júnior, 2018. p. 50

### 2.1.6 Equação de energia

A equação de energia dentro das condições do nosso estudo é dada por:

$$\rho C_p u \frac{\partial t}{\partial z} = k \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Com a seguinte condição de fronteira,

$$u(x, y) = 0 \text{ e } t = t_w \text{ em } (x, y) \in \Gamma \quad (9)$$

Onde o  $C_p$  é o calor específico, o  $\rho$  é a densidade,  $u$  é a velocidade local,  $k$  é a condutividade térmica,  $t$  é a temperatura e  $t_w$  a temperatura na parede do duto.

### 2.2 Parâmetros adimensionais

No estudo de escoamento de fluidos em dutos, há vários parâmetros adimensionais que podem ser utilizados. O comprimento característico  $L$  é um dos mais comuns de ser usado. Considerando as análises dimensionais, uma grandeza ou número adimensional é quando não se tem unidade de medida física para definir o mesmo. Logo é o que se denota de número puro. Esses números adimensionais são definidos como produtos ou quocientes de quantidades onde as unidades de medida física são simplificadas. Dependendo do seu valor,

estes números apresentam um significado físico que caracteriza determinadas propriedades para alguns sistemas (White, 2010 *apud* Santos Junior, 2018).

### 2.2.1 Adimensionalização da equação de movimento

Considere as seguintes variáveis em coordenadas adimensionais:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad W(X, Y) = -\frac{u(X, Y)}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp(z)}{dz}} \quad e \quad U = \frac{u}{u_m} = \frac{W}{W_m} \quad (10)$$

Onde temos o  $L$  como o comprimento característico, o  $u_m$  é a velocidade média do fluido,  $W$  sendo a velocidade adimensional local,  $W_m$  é a velocidade média adimensional e  $U$  é a velocidade adimensional normalizada.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X} &= -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial u}{\partial X} \\ &= -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) \\ &= -\frac{1}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}} L \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} &= -\frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{1}{\frac{L}{\mu} \frac{dp}{dz}} L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= - \frac{1}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = - \frac{1}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Assim, temos que a Equação (6) se torna,

$$- \left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp(z)}{dz} \quad (12)$$

Que nos dá:

$$\frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial Y^2} = - 1 \quad (13)$$

Com  $W(X, Y) = 0$  em  $(X, Y) \in \Gamma$ .

### 2.2.2 Adimensionalização da equação de energia

Considere as seguintes variáveis:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad W(X, Y) = - \frac{u(X, Y)}{\frac{L^2}{\mu} \frac{dp(z)}{dz}} \quad e \quad U = \frac{u}{u_m} = \frac{W}{W_m} \quad (14)$$

Onde temos o  $L$  como o comprimento característico, o  $u_m$  é a velocidade média do fluido,  $W$  sendo a velocidade adimensional local,  $W_m$  é a velocidade média adimensional e  $U$  é a velocidade adimensional normalizada.

Considere também para a condição de fronteira  $H_1$ :

$$T = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{2} \frac{dt_b}{dz}} \quad (15)$$

$$T_b = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{2} \frac{dt_b}{dz}} \quad (16)$$

Onde temos que  $t_b$  é a temperatura da mistura, que é definida por:

$$t_b = \frac{1}{u_m A_c} \int u t dA_c \quad (17)$$

### 2.2.3 Adimensionalização para a condição de fronteira $h_1$

Assim, nesta condição tem-se:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{dt_w}{dz} = \frac{dt_b}{dz} = \text{constante} \quad (18)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial X} &= - \frac{1}{L^2 \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \frac{\partial t}{\partial x} \\
&= - \frac{1}{L^2 \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) \\
&= - \frac{1}{L^2 \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} L \frac{\partial t}{\partial x} \\
&= - \frac{1}{L \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \frac{\partial t}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} &= - \frac{1}{L \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{1}{L \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right] \\
&= - \frac{1}{L \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} L \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = - \frac{1}{L \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} L \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

Assim, temos que a equação (8) fica,

$$\rho C_p u \frac{\partial t_b}{\partial z} = - k \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \tag{20}$$

Como  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ , teremos que:

$$-\frac{u}{u_m} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \quad (21)$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = -U \quad (22)$$

Com  $U = 0$  e  $T = 0$  em  $\Gamma$ .

### 3 PARÂMETROS DE ESCOAMENTO

#### 3.1 Diâmetro hidráulico

O primeiro parâmetro a ser introduzido nesta seção é o diâmetro hidráulico, é utilizado quando se trata de escoamento em regiões que tem sua geometria não circular, que é dado por,

$$d_h = \frac{4A_c}{P} \quad (23)$$

onde  $A_c$  é a seção transversal do duto,  $P$  é o perímetro molhado, o comprimento de parede em contato com o fluido escoando em qualquer seção transversal (Ebdian. 1998 *apud* Santos Junior, 2018). O fator 4 é introduzido para que o diâmetro hidráulico seja igual ao diâmetro do duto para uma seção circular (Çengel, 2012 *apud* Santos Júnior, 2018).

#### 3.2 Fator de atrito

Um outro parâmetro para escoamento muito utilizado é o fator de Fanning,  $f$ , que é definido por

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{u_m^2}{2}} \quad (24)$$

onde  $\tau_w$  representa a tensão de cisalhamento,  $u_m$  é a velocidade média e  $\rho$  é a densidade. (Ebdian, 1998 *apud* Santos Júnior, 2018).

Na região completamente desenvolvida utiliza-se a definição  $fRe$ , que chamamos de número de Poiseuille.

$$fRe = \frac{C_1 d_h^2}{2u_m} \quad (25)$$

O produto  $fRe$  é frequentemente utilizado em análises de perda de carga em escoamentos de fluidos incompressíveis em dutos. Ao multiplicar o fator de atrito de Fanning  $f$  pelo número de Reynolds  $Re$ , obtemos o produto  $fRe$ .

O significado físico deste produto está relacionado à forma como as perdas de carga variam com a velocidade do fluido e outras características do escoamento. Especificamente:  $fRe$  Menor: Indica um escoamento predominante no regime laminar, onde as forças viscosas são mais significativas do que as forças inerciais. Neste caso, as perdas de carga são geralmente proporcionais à velocidade do fluido e ocorrem de maneira suave e previsível.

fRe Maior: Indica um escoamento predominante no regime turbulento, onde as forças inerciais são mais significativas do que as forças viscosas. Neste caso, as perdas de carga podem aumentar mais rapidamente com o aumento da velocidade do fluido devido à turbulência, resultando em uma relação mais não linear entre as perdas de carga e a velocidade.

Em resumo, um fRe menor sugere um escoamento mais laminar e previsível, enquanto um fRe maior sugere um escoamento mais turbulento, com um aumento mais significativo das perdas de carga em relação à velocidade do fluido. Essa distinção é importante para o projeto e análise de sistemas de tubulação, onde a eficiência energética e a minimização das perdas de carga são considerações importantes.

### **3.3 Número de Nusselt para condição de fronteira $h_1$**

O número de Nusselt é uma homenagem a Wilhelm Nusselt, engenheiro alemão. Este número é uma grandeza utilizada para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção. Temos que o número de Nusselt é dado pela razão entre o fluxo de calor por convecção e o fluxo de calor por condução (Santos Júnior, 2018). O número de Nusselt (Nu) é uma medida adimensional que descreve a eficiência da transferência de calor em um fluido em escoamento. Ele é comumente utilizado para caracterizar a convecção térmica e relaciona as taxas de transferência de calor por convecção e condução em um fluido. No caso de um escoamento laminar completamente desenvolvido, o número de Nusselt pode ser expresso para diferentes configurações, como em torno de um cilindro ou uma placa plana.

O número de Nusselt é uma medida da eficiência relativa da transferência de calor por convecção em comparação com a condução térmica no fluido. Quando o número de Nusselt é maior, isso indica uma maior taxa de transferência de calor por convecção em relação à condução, o que geralmente é desejável em muitas aplicações de engenharia.

A interpretação física do aumento do número de Nusselt está relacionada ao aumento da eficiência da transferência de calor por convecção. Em outras palavras, um Nu maior implica que o escoamento do fluido está promovendo uma transferência de calor mais eficaz do que a condução térmica pura. Em termos práticos, isso pode significar uma dissipação de calor mais eficiente em trocadores de calor, radiadores ou outros dispositivos de transferência de calor, o que é crucial em muitas aplicações industriais e tecnológicas. Portanto, ao otimizar o número de Nusselt, os engenheiros podem melhorar o desempenho térmico de sistemas e dispositivos.

Tomando-se o perfil de temperatura adimensional  $T$  e o de mistura  $T_b$  dados por,

$$T = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{2} \frac{dt_b}{dz}} \quad (26)$$

$$T_b = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{2} \frac{dt_b}{dz}} \quad (27)$$

e desde que:

$$N_u = \frac{h \bar{d}_h}{k} \quad e \quad q'' = h(t_w - t_b) \quad (28)$$

tem-se que,

$$N_u = \frac{q'' \bar{d}_h}{k(t_w - t_b)} \quad (29)$$

como na condição de fronteira  $H_1$ ,

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{dt_w}{dz} = \frac{dt_b}{dz} = \frac{q'' P}{\rho u_m A_c C_p} = \frac{q'' 4}{\rho u_m A_c \bar{d}_h} \quad (30)$$

segue que,

$$N_u = \frac{\rho u_m A_c \bar{d}_h}{4} \frac{\bar{d}_h}{k(t_w - t_b)} \frac{dt_b}{dz}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_m}{\alpha} \frac{d_h^2}{4} \frac{1}{(t_w - t_b)} \frac{dt_b}{dz} \\
&= \frac{d_h^2}{4} \frac{1}{\frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz} (t_w - t_b)} \\
&= \frac{d_h^2}{4} \frac{1}{L^{2T_b}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$N_u = \frac{\left(\frac{d_h}{L}\right)^2}{4t_b} \quad (31)$$

logo

$$N_u = \frac{D_h^2}{4t_b} \quad (32)$$

sendo  $D_h = \frac{d_h}{L}$  o diâmetro hidráulico adimensional.

### 3.4 Método integral baseado em galerkin

Considere um caso geral de uma equação diferencial da forma

$$L[u(x)] = f(x), \quad x \in \Omega.$$

$$u(\Gamma) = u|_{\Gamma} \text{ com } \Gamma \text{ fronteira de } \Omega \quad (33)$$

onde  $L[ ]$  é o operador Linear,  $f$  uma função qualquer de  $x$  e  $u|_{\Gamma}$  é o valor da função  $u$  na fronteira de  $\Omega$ . Assim procura-se uma solução aproximada para o problema na forma:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (34)$$

onde  $\phi_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), é um grupo de funções bases, escolhido de antemão para satisfazer as condições de fronteira, então  $\bar{u}$  é o somatório dessas funções bases.

Para que  $\bar{u}(x)$  seja uma solução aproximada da equação (33), uma vez que as funções  $\phi_i(x)$ , são linearmente independentes, precisamos que:

$$L[\bar{u}(x)] - f(x) = \varepsilon, \quad (35)$$

onde  $\varepsilon$  é um erro diferente de zero.

Desta forma, pelo método baseado em Galerkin, a integral do erro sobre a região de interesse juntamente com as funções bases  $\{\phi_i(x)\}$  deve ser zero. Assim,

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \varepsilon d\Omega = 0 \quad \forall i. \quad (36)$$

Em vista disso:

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \{L[\bar{u}(x)] - f(x)\} dx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Desta forma, chega-se ao sistema de equações

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right] - f(x) \right\} dx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (38)$$

A Equação (38) possibilita encontrar os  $c_i$ 's. Para que possamos ilustrar o modelo, iremos tomar  $n=2$ , desta forma teremos o conjunto de funções bases  $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$ .

$$\int_{\Omega} \phi_1(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^2 c_i \phi_i(x) \right] - f(x) \right\} dx = 0, \quad (39)$$

e

$$\int_{\Omega} \phi_2(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^2 c_i \phi_i(x) \right] - f(x) \right\} dx = 0, \quad (40)$$

que conduz a:

$$c_1 \int_{\Omega} \phi_1(x) L[\phi_1(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} \phi_1(x) L[\phi_2(x)] dx = \int_{\Omega} \phi_1(x) f(x) dx \quad (41)$$

e

$$c_1 \int_{\Omega} \phi_2(x) L[\phi_2(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} \phi_2(x) L[\phi_2(x)] dx = \int_{\Omega} \phi_2(x) f(x) dx \quad (42)$$

onde, na forma matricial assume a forma:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \phi_1(x) L[\phi_1(x)] dx & \int_{\Omega} \phi_1(x) L[\phi_2(x)] dx \\ \int_{\Omega} \phi_2(x) L[\phi_1(x)] dx & \int_{\Omega} \phi_2(x) L[\phi_2(x)] dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \phi_1(x) f(x) dx \\ \int_{\Omega} \phi_2(x) f(x) dx \end{bmatrix} \quad (43)$$

Ou ainda pode ser na forma matricial sendo dada por:

$$AC = B \quad (44)$$

com os coeficientes das matrizes  $A$  e  $B$  dados respectivamente por:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i(x) L[\phi_j(x)] dx, \quad (45)$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} \phi_i(x) f(x) dx, \quad \forall i, j = 1, 2. \quad (46)$$

Desta forma, conseguimos descobrir os  $c_i$ 's para o sistema e quando substituído na expressão  $\bar{u}(x)$ , chegasse à solução aproximada desejada.

## 4 METODOLOGIA

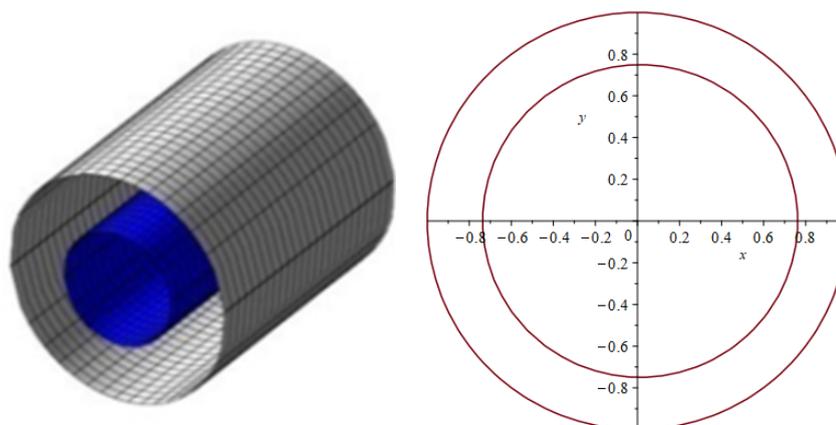
A escolha da utilização do método da integral baseado em Galerkin teve como intuito a facilidade de resolução da equação do momento linear para assim encontrar o perfil de velocidade, bem como a partir da equação de energia encontrar o perfil de temperatura, desta forma também foi possível encontrar outros parâmetros de escoamento de um fluido completamente desenvolvido apresentados nos dutos de interesse deste trabalho.

Para a realização deste estudo consideramos um escoamento laminar, completamente desenvolvido - tanto hidrodinamicamente, quanto termicamente - Newtoniano, ao qual desconsideramos dissipação viscosa e com propriedades físico-químicas constantes.

### 4.1 Domínio computacional

Considere um duto de secção transversal circular anular circular ilustrado na Figura 5,

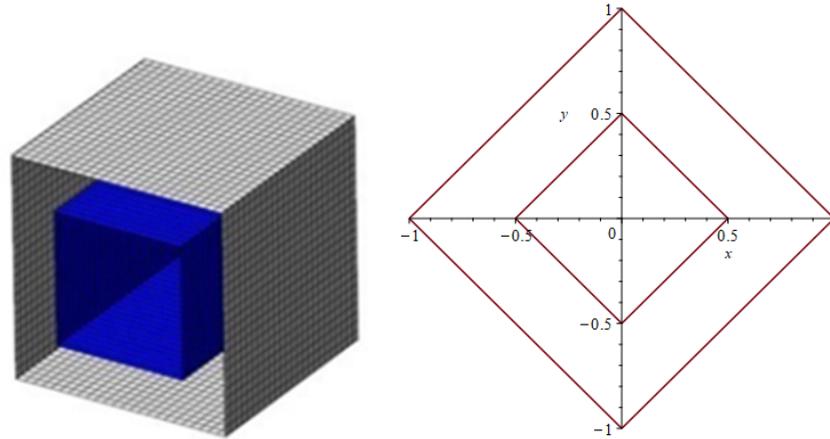
**Figura 5:** Duto circular anular circular com raios  $a_1 = 1$   $b_1 = 1$  e  $a_2 = 0,75$  e  $b_2 = 0,75$



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

Considere um duto de secção transversal retangular anular retangular ilustrado na Figura 6,

**Figura 6:** Duto retangular anular retangular com raios  $a=1$   $b=0,5$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

## 4.2 Perfil de velocidade pelo método integral de Galerkin

Considerando a equação (13) e uma solução da forma

$$W = \sum_{n=1}^N d_n f_n(X, Y) \quad (47)$$

onde  $f_n \in \{f_j\}_{j=1..N}$  um conjunto de funções bases e os  $d_n$ 's são constantes a serem avaliadas.

Desta forma, ao considerar a equação (47), e substituindo na equação (13) obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \sum_{n=1}^N d_n f_n(X, Y) \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \sum_{n=1}^N d_n f_n(X, Y) \right) = -1 \quad (48)$$

$$\sum_{j=1}^N d_j \left( \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) = -1 \quad (49)$$

Ainda de forma compacta:

$$\sum_{j=1}^N d_j \nabla^2 f_j(X, Y) = -1 \quad (50)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \quad (51)$$

Aplicando o método de integral de Galerkin na Equação (50), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N d_j \left[ \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j dA_c \right] = - \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i dA_c \quad (52)$$

Assim temos que a equação (52) pode ser escrita na forma matricial:

$$AD = B \quad (53)$$

onde as matrizes  $A$  e  $B$  têm elementos:

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j(X, Y) dA_c, \quad (54)$$

e

$$b_i = - \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i(X, Y) dA_c. \quad (55)$$

sendo  $A_c$  a área adimensional da seção transversal do duto. Desta forma, a matriz  $D$ , representada pelos coeficientes  $d_n$ , é encontrada por

$$D = A^{-1}B, \quad (56)$$

onde temos  $A^{-1}$  é a inversa da matriz  $A$ . Tendo assim a multiplicação por  $\frac{1}{A_c}$  é acrescentada somente para fins de computação numérica.

A definição padrão para a velocidade média é usada para calcular  $W_m$ , assim:

$$W_m = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} W dA_c,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \sum_{j=1}^N d_j f_j dA_c, \\
&= \sum_{j=1}^N d_j \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_j dA_c.
\end{aligned} \tag{57}$$

Assim podemos escrever:

$$W_m = \sum_{j=1}^N d_j b_j, \tag{58}$$

Desta forma a velocidade adimensional normalizada  $U$  pode ser dada da forma:

$$U = \frac{W}{W_m} = \frac{u}{u_m} = \frac{C_{f_e} Re}{2 \frac{d_h^2}{L^2}} \sum_{j=1}^N d_j f_j \tag{59}$$

Logo, podemos então utilizar o número de Poiseuille dado anteriormente na Equação (25)

como:

$$fRe = - \frac{c_1 d_h^2}{2u_m} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2u_m} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2 \left( -\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz} W_m \right)} = \frac{D_h^2}{2W_m} \tag{60}$$

### 4.3 Perfil de temperatura para condição de fronteira $h_1$ pelo método integral de Galerkin

Considerando que a Equação (22) é uma solução da forma

$$T(X, Y) = \sum_{j=1}^N d_j f_j(X, Y) \tag{61}$$

onde  $f_n \in \{f_j\}_{j=1..N}$  um conjunto de funções bases e os  $d_n$ 's são constantes a serem avaliadas.

Desta forma, ao considerar a Equação (61), e substituindo na Equação (22) obtemos:

$$\nabla^2 \left( \sum_{j=1}^N d_j f_j \right) = -U \Rightarrow \sum_{j=1}^N d_j \nabla^2 f_j = -U \tag{62}$$

Aplicando o método de GBI, obtemos que:

$$\sum_{j=1}^N d_j \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j dA_c = - \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i U dA_c \quad (63)$$

Temos que na forma matricial:

$$AD = B \quad (64)$$

onde as matrizes  $A$  e  $B$  têm elementos:

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j dA_c \quad (65)$$

e

$$b_i = - \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i U dA_c. \quad (66)$$

Desta forma, a matriz dos coeficientes é dada por

$$D = A^{-1}B \quad (67)$$

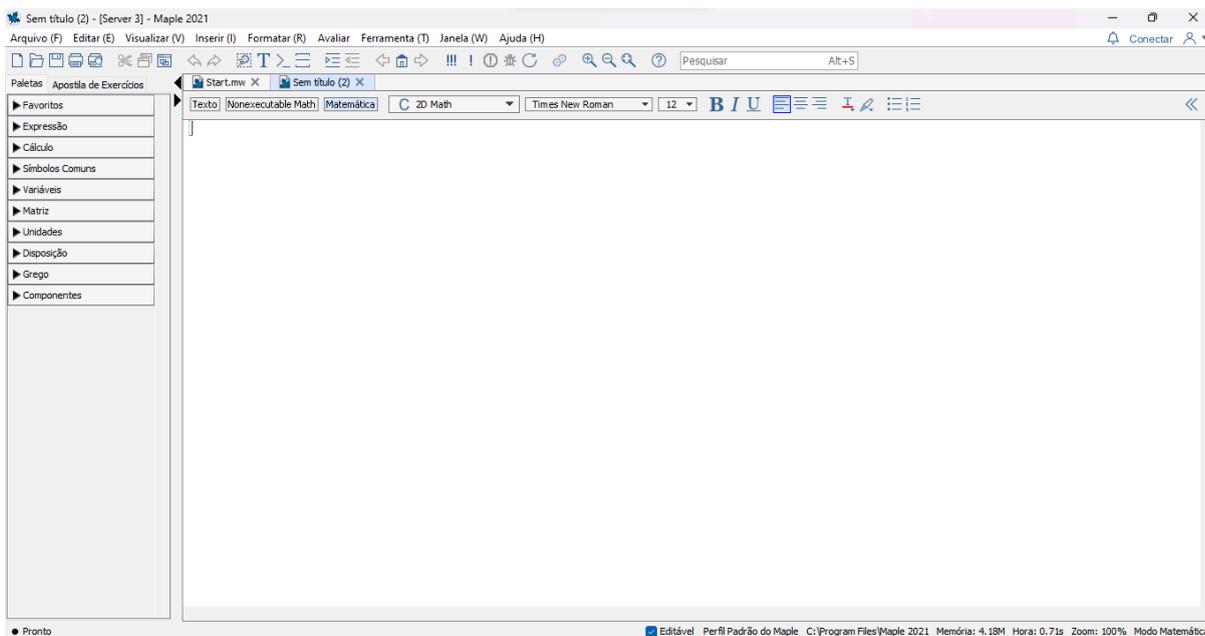
desta forma temos que a temperatura adimensional:

$$T_b = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} T U dA_c. \quad (68)$$

#### 4.4 Procedimento numérico

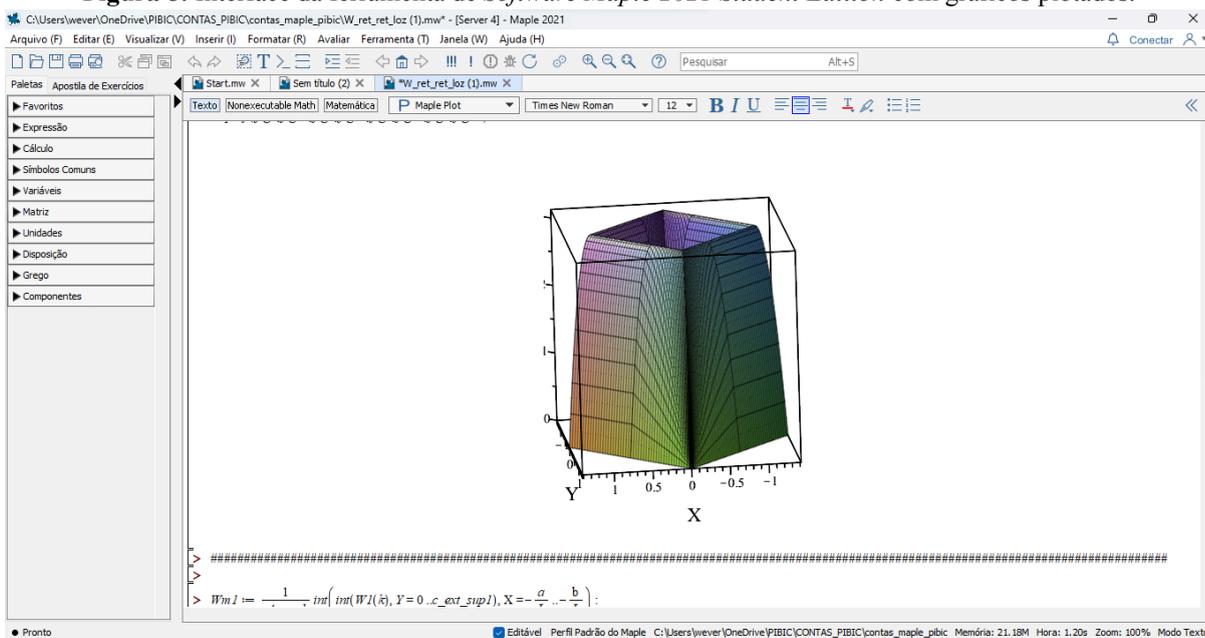
Neste trabalho utilizamos um software que oferece pacotes com cálculos de integrais definidas, derivações, álgebra matricial, tais como: adição, multiplicação, transposição, inversão, cálculos de autovalores e autovetores, assim como pacotes de plotagem de dados numéricos. O software utilizado foi o *Maple*, o mesmo é um programa desenvolvido pela *Maplesoft*, sendo um sistema algébrico computacional comercial genérico. Com a disposição deste programa conseguimos fazer a análise numérica com a utilização das ferramentas computacionais que dispõe o software. A versão utilizada foi o *Maple 21 Student Edition*.

**Figura 7:** Interface da ferramenta de *Software Maple 2021 Student Edition*.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

**Figura 8:** Interface da ferramenta de *Software Maple 2021 Student Edition* com gráficos plotados.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Para as simulações no *Software Maple 21* foi utilizado a licença do professor orientador deste trabalho.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

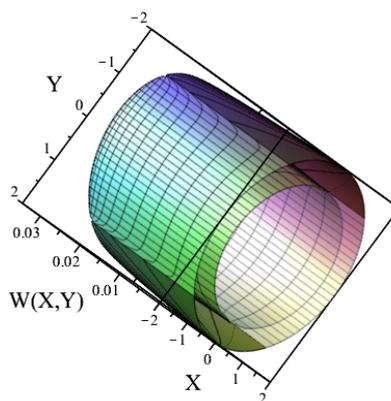
Neste momento do trabalho, discute-se os resultados obtidos usando o método de integral de Galerkin. Para este estudo, adotou-se o escoamento em dutos retos de seção transversal constante, laminar, newtoniano e em regime permanente.

Dessa forma, o intuito deste trabalho é avaliar as geometrias circular-anular-circular, retangular-anular-circular e retangular-anular-retangular, além de discutir a transferência de calor ao longo do ânulo da geometrinna. Utilizou-se a ferramenta de software com métodos numéricos, especificamente o Maple 21. O Maple 21 possibilitou realizar os cálculos e plotar os gráficos, sendo essencial para a determinação de parâmetros de interesse, como a velocidade média, temperatura média, diâmetro hidráulico, número de Poiseuille e número de Nusselt, entre outros. Assim, foi possível avaliar as geometrias e apresentar os resultados para um melhor entendimento do comportamento de escoamento nesses dutos.

### 5.1 Duto circular anular circular

#### 5.1.1 Perfis de velocidade

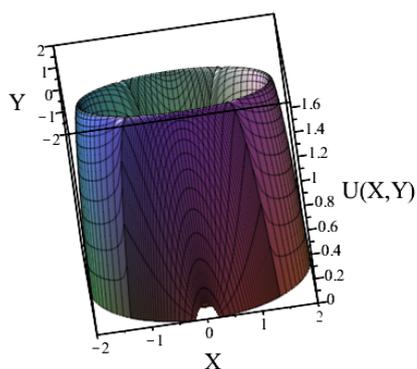
**Figura 9:** Perfil de velocidade em duto circular anular circular.



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

A solução da equação de momento linear possibilitou encontrar o valor da velocidade adimensional, conforme ilustramos na Figura 10. O gráfico está plotado em coordenadas cartesianas adimensionais, tomando o  $U(X,Y)$ .

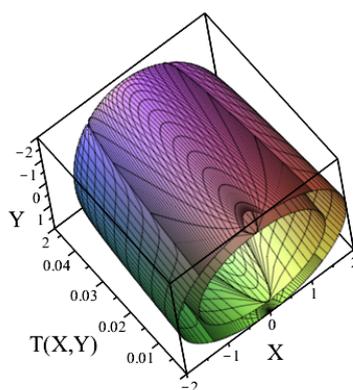
**Figura 10:** Perfil de velocidade adimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

### 5.1.2 Perfis de temperatura

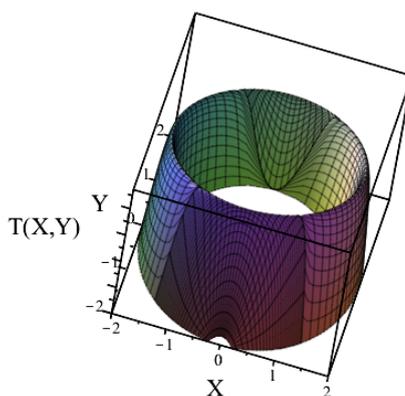
Figura 11: Perfil de temperatura em duto circular anular circular.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.]

A solução da equação de energia possibilita encontrar o valor da temperatura para condição de fronteira  $H_1$ , conforme ilustramos na Figura 12. O gráfico está plotado em coordenadas cartesianas adimensionais, tomando o  $T(X,Y)$ .

Figura 12: Perfil de temperatura adimensional em condição de fronteira  $H_1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

### 5.1.2 Parâmetros de interesse

**Tabela 1:** Valores de parâmetros de interesses duto circular anular circular.

Parâmetros	Valores
$A_c$	5,49778714378220
$P$	21,9911485751288
$D_h$	1,00000000000000
$W_m$	0,02098275922652
$fR$	23,8290872330997
$T_m$	0,00484665061800
$N_u$	8,25312223896942

**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

Com a Tabela 1, mostramos os resultados pretendidos no início deste trabalho, obtivemos os principais parâmetros do estudo, como o número de Poiseuille e o número de Nusselt.

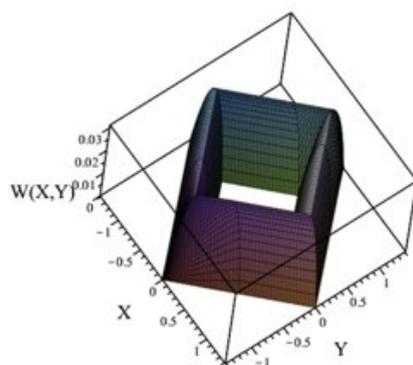
O número de Nusselt quantifica a eficiência da transferência de calor por convecção em relação à condução térmica em um fluido. Um valor mais alto do número de Nusselt indica uma transferência de calor por convecção mais eficiente em comparação à condução, o que é frequentemente desejável em diversas aplicações de engenharia. Quando comparamos os resultados obtidos na tabela 2, vemos que a geometria que apresenta um valor mais alto de Nusselt é a circular anular circular.

## 5.2 Duto retangular anular retangular

Há diversas décadas temos que muitos estudos foram aplicados a geometrias retangulares, a fim de estudar a soluções tanto analíticas quanto numéricas das equações de momento e energia (Santos Júnior, 2018). As aplicações para a geometria retangular anular retangular são diversas quando se trata da engenharia de transferência de calor. Exemplos desta utilização é no sistema de ventilação ou em sistemas de ar-condicionado. O perfil de velocidade e de temperatura são apresentados nas figuras, Figura 14 e Figura 16 respectivamente.

### 5.2.1 Perfis de velocidade

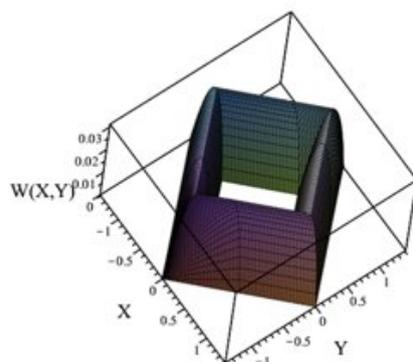
**Figura 13:** Perfil de velocidade em duto retangular anular retangular.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A solução da equação de movimento possibilita encontrar o valor da velocidade adimensional, conforme ilustramos na figura 14. O gráfico está plotado em coordenadas cartesianas adimensionais, tomando o  $U(X,Y)$ .

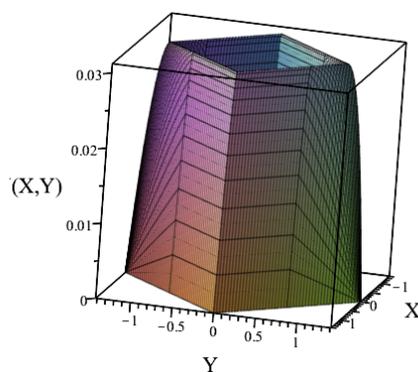
**Figura 14:** Perfil de velocidade adimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

### 5.2.2 Perfis de temperatura

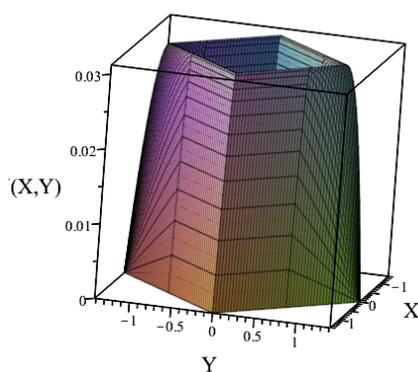
**Figura 15:** Perfil de temperatura em duto retangular anular retangular.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A solução da equação de energia possibilita encontrar o valor da temperatura para condição de fronteira  $H_1$ , conforme ilustramos na Figura 16. O gráfico está plotado em coordenadas cartesianas adimensionais, tomando o  $T(X,Y)$ .

**Figura 16:** Perfil de temperatura em condição de fronteira  $H_1$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

### 5.2.3 Parâmetros de interesse

**Tabela 2:** Valores de parâmetros de interesses duto retangular anular retangular.

Parâmetros	Valores
$A_c$	3,000000000000001
$P$	16,9705627484772
$D_h$	0,70710678118654
$W_m$	0,02178030303030
$fRe$	11,4782608695622
$T_m$	0,01725512133019
$N_u$	7,24422608267975

**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

## 6 CONCLUSÕES

O trabalho realizou um estudo analítico/numérico com escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos anulares, sendo estes o duto circular anular circular, retangular anular retangular e retangular anular circular utilizando-se do método de integral baseado em Galerkin.

Para conseguir atingir as metas desses estudos, foi-se considerado o fluido em escoamento como sendo newtoniano e completamente desenvolvido, tanto hidrodinamicamente quanto termicamente. Considerou-se também condições de não deslizamento nas paredes do duto e assim trabalhamos com parâmetros adimensionais médios, como velocidade e temperatura.

Os resultados obtidos são correspondentes a uma seção transversal do duto, desta forma os parâmetros de interesse apresentados neste estudo correspondem exclusivamente a esta seção em específico.

Tivemos resultados satisfatórios com relação ao uso do método integral baseado em Galerkin ao usar este método na solução das equações de quantidade de movimento e de energia quando tratamos de dutos de seção transversal.

Neste trabalho apresentamos três geometrias de dutos e abordamos como resultado final os parâmetros de interesse quando tratamos de fluidos, os parâmetros como número de *Poiseuille*,  $fRe$  e número de Nusselt para a condição de fronteira  $H_1$  como era o objetivo deste trabalho.

Com base nos dados obtidos, observamos que a geometria circular anular circular apresentou o maior número de Nusselt entre as demais, assim podemos chegar a concluir que dentro das geometrias estudadas está se apresenta como sendo a melhor escolha nos processos de transferência de calor.

Sugere-se para trabalhos futuros a exploração de outras geometrias anulares, como a geometria circular anular retangular e retangular anular circular de forma a aprofundar o conhecimento e contribuir para o avanço da engenharia de transferência de calor.

## REFERÊNCIAS

IRVINEJR, T. F. **Noncircular Duct Convective Heat Transfer. Modern Developments in Heat Transfer.** AcademicPress.p.1-17,1963.

KAKAC,,S.;OZGU,M.R. **Analysis of Laminar Flow Forced Convection Heat Transfer in the Entrance Region of Circular Pipe.** *Warme-und Stoffubertragung*, v. 2. p. 240 -245, 1969.

MUZYCHKA, Y. S.; YOVANOVICH, M. M. **Pressure drop in laminar developing flow in noncircular ducts: A scaling and modeling approach.** *Journal of Fluids Engineering*, v. 131, n. 11, 2009.

NIRENBERG, H. **Correcção do fator de atrito para região anular excêntrica.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

RAO, S. S. et al. **Laminar Forced Convection in Elliptic Ducts.** *Appl. Sci. Res.*, v. 17. n. 21. p. 185-193, October,1969.

SANTOS JÚNIOR, V. A. **Escoamento de fluido em dutos de seção arbitrária utilizando o método integral baseado em Galerkin. Estudo de caso: óleo pesado.** Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade Federal de Campina Grande, PB, 2018.

SANTOS JÚNIOR, V.A.; FARIAS NETO, S.R.; LIMA, A.G.B.; GOMES, I.F.; GALVÃO, I.B.; FRANCO, C.M.R.; CARMO, J.E.F. **Heavy Oil Laminar Flow in Corrugated Ducts: ANumerical Study Using the Galerkin-Based Integral Method.** *Energies*, 13, 1363. 2020.

SCHENK, J.; HAN, B. S. **Heat Transfer from Laminar Flow in Ducts whit Elliptic Cross-Section.** *Appl. Sci. Res.*, v. 17. p. 96 -114, 1966.

SHAH, R. K.; LONDON, A. L. **Laminar Flow Friction and Forced Convection in Ducts.** Supplement 1to *Advences in Heat Transfer.* Academic Press, Inc., New York, 1978.

VAZ JUNIOR, Miguel. **Uma solução do problema de transferência de calor conjugado em regime laminar em dutos anulares duplamente aletados.** Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. 1986.