



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

LUANA MARIA DA SILVA

**A IMPLEMENTAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA
PEDAGÓGICA: UMA ABORDAGEM PRÁTICA COM ALUNOS DO 8º ANO**

**CAMPINA GRANDE-PB
2024**

LUANA MARIA DA SILVA

**A IMPLEMENTAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA
PEDAGÓGICA: UMA ABORDAGEM PRÁTICA COM ALUNOS DO 8º ANO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Departamento do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento

**CAMPINA GRANDE-PB
2024**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586i Silva, Luana Maria da.
A implementação da investigação matemática como estratégia pedagógica [manuscrito] : uma abordagem prática com alunos do 8º ano / Luana Maria da Silva. - 2024.

35 f.: il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento, Departamento de Matemática - CCT".

1. Educação matemática. 2. Método prático. 3. Aprendizagem significativa. I. Título

21. ed. CDD 510.71

LUANA MARIA DA SILVA

**A IMPLEMENTAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA
PEDAGÓGICA: UMA ABORDAGEM PRÁTICA COM ALUNOS DO 8º ANO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Departamento do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 06/11/2024.

BANCA EXAMINADORA

Josevandro B. Nascimento

Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Fabíola da Cruz Martins

Prof.^a Dr.^a Fabíola da Cruz Martins
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.^a. Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A Deus, que esteve comigo em cada etapa deste processo, guiando-me e sustentando-me.
Ao meu filho, William, por ser a parte mais bela de mim e minha maior fonte de motivação. Com todo o meu amor, DEDICO.

“Ensinar matemática significa criar oportunidades para os alunos poderem explorar e investigar problemas e situações, construindo o seu próprio conhecimento” (João Pedro da Ponte).

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	Problema da pesquisa.....	8
1.2	Justificativa	8
1.3	objetivos	9
<i>1.3.1</i>	<i>Objetivos geral</i>	<i>9</i>
<i>1.3.2</i>	<i>Objetivo específicos</i>	<i>9</i>
2	REVISÃO DA LITERATURA	9
2.1	Investigar em matemática	9
2.2	As etapas de uma investigação matemática.....	10
2.3	Investigação matemática em sala de aula	11
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	12
3.1	Classificação da pesquisa	12
3.2	Local e sujeitos do estudo exploratório da pesquisa.....	12
3.3	Local e sujeitos da pesquisa, estudo de caso	13
3.4	Método para o desenvolvimento da investigação.....	13
3.5	Coleta de dados	13
3.6	Tratamento de dados	13
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	14
4.1	A construção da atividade investigativa	14
4.2	Atividade investigativa	14
4.3	Análise da atividade investigativa: pré-aplicação com os estudantes da graduação.....	17
4.4	Aplicação da atividade investigativa com os alunos da escola de campo.....	21
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
	REFERÊNCIAS	33

A IMPLEMENTAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA: UMA ABORDAGEM PRÁTICA COM ALUNOS DO 8º ANO

Luana Maria da Silva¹
Josevandro Barros Nascimento²

RESUMO

O presente trabalho aborda como a investigação Matemática pode se constituir em uma estratégia pedagógica eficaz para desmistificar o preconceito associado ao aprendizado dos conteúdos de Matemática, frequentemente vinculado ao uso de metodologias tradicionais centradas na memorização mecânica de regras, dificultando o engajamento dos estudantes com a disciplina. Neste contexto, a pesquisa tem como objetivo principal verificar de que forma a investigação Matemática pode favorecer o aprimoramento de competências essenciais, como o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação Matemática, nos alunos do 8º ano. Com abordagem qualitativa e fundamentada na revisão da literatura sobre investigação Matemática na sala de aula, a pesquisa foi realizada por meio de um estudo de caso, utilizando uma atividade investigativa baseada nas estratégias propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) em uma Escola Pública Estadual. Após a análise dos resultados observou-se que a investigação Matemática possui um grande potencial para promover uma aprendizagem significativa, contribuindo para o desenvolvimento das competências Matemáticas dos alunos e colocando-os no centro do processo de aprendizagem. Embora a turma não estivesse habituada a esse tipo de abordagem, a atividade permitiu que os alunos explorassem, discutissem e construíssem conhecimento de maneira ativa, fomentando a comunicação, o trabalho em equipe e a argumentação.

Palavras-Chave: educação matemática; método prático; aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This study examines how mathematical investigation can serve as an effective pedagogical strategy to demystify the prejudice associated with learning mathematical content, which is often linked to traditional methodologies that emphasize mechanical memorization of rules, hindering student engagement. The primary objective of the research is to verify how mathematical investigation can enhance essential competencies such as reasoning, representation, communication, and mathematical argumentation among 8th-grade students in fundamental education II. Using a qualitative approach grounded in literature review on mathematical investigation, the research was conducted through a case study, employing an investigative activity based on strategies proposed by Ponte, Brocardo, and Oliveira (2003) at the Escola Estadual Elídio Sobreira in São Sebastião de Lagoa de Roça, Paraíba. The analysis of results revealed that mathematical investigation has significant potential to foster meaningful learning, contributing to the development of students' mathematical competencies and positioning them at the center of the learning process. Despite the class's unfamiliarity with this approach, the activity enabled students to explore, discuss, and construct knowledge actively, promoting communication, teamwork, and argumentation skills.

¹ Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, luana.maria@aluno.uepb.edu.br

² Professor orientador: Me., Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, josevandrob@servidor.uepb.edu.br

Keywords: mathematics education; practical method; meaningful learning.

1 INTRODUÇÃO

A investigação Matemática em sala de aula vem se consolidando como uma estratégia pedagógica cada vez mais adotada por professores, com o objetivo de desmistificar o preconceito em torno do aprendizado da Matemática. O desinteresse e a frustração dos estudantes são sentimentos recorrentes, frequentemente causados pelo medo e pelas dificuldades enfrentadas ao lidar com a disciplina. Na maioria das vezes, essa percepção negativa decorre de metodologias tradicionais, que privilegiam a memorização mecânica de fórmulas e procedimentos, limitando o desenvolvimento das habilidades de interpretação, questionamento e reflexão crítica dos alunos.

Diante desse cenário, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13) afirmam que "investigar em matemática constitui uma poderosa forma de construir o conhecimento", pois coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem, despertando seu interesse investigativo e promovendo sua participação ativa. Ao adotar a investigação Matemática, o professor permite que os estudantes atribuam significados próprios às relações matemáticas, estimulando a descoberta de propriedades e conceitos. Além disso, incentiva os alunos a explorar, questionar e construir conhecimento de forma autônoma e reflexiva.

Diante disso, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como objetivo verificar como a implementação da investigação Matemática influencia o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais relacionadas ao raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática nos alunos do 8º ano. Nessa perspectiva, essa abordagem se justifica por sua relevância em motivar os alunos e contribuir para seu sucesso na disciplina.

Para alcançar esse objetivo, a pesquisa utilizou uma abordagem qualitativa, com a realização de um estudo de caso em uma turma do 8º ano em uma Escola Pública Estadual da Paraíba. Durante o estudo, foi aplicada uma atividade investigativa, baseada nas estratégias propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), com o objetivo de compreender o impacto dessa abordagem na aprendizagem Matemática dos alunos, ao investigar como eles aplicam e expandem os conhecimentos adquiridos.

Espera-se que a investigação Matemática, quando adotada como estratégia pedagógica, promova o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem, permitindo que eles apliquem seus conhecimentos de maneira crítica e criativa, favorecendo um desenvolvimento contínuo e consistente, além de transformar a percepção de que a Matemática é inacessível.

1.1 Problema da pesquisa

No ensino de Matemática, é comum ouvir expressões como “a Matemática é difícil”, “estudar Matemática é chato”, “não sei nada de Matemática”, ou “quem inventou a Matemática”. Essas afirmações refletem a percepção dos alunos de que o componente curricular de Matemática é complicado, o que os leva a acreditar que não conseguem aprender. Isso faz com que a Matemática se torne uma disciplina temida, dificultando o envolvimento dos estudantes nas aulas. O medo da dificuldade percebida cria um obstáculo significativo para o aprendizado, gerando uma visão negativa da disciplina e contribuindo para o aumento das taxas de reprovação, já que muitos alunos consideram a Matemática uma das matérias mais desafiadoras (Silveira, 2017).

Isso muitas vezes é resultado do modelo tradicional de ensino, no qual o professor copia o conteúdo no quadro, lê o que escreveu e considera que a explicação foi suficiente. Após isso, são propostos exercícios de fixação, geralmente com questões repetitivas, que apenas variam os números ou detalhes, reforçando a ideia de que o aprendizado se dá por reprodução mecânica. Esse método limita o desenvolvimento da imaginação e da criatividade dos alunos. Como consequência, os estudantes adotam uma postura passiva, enquanto o professor permanece como figura central na transmissão do conhecimento (Oliveira, 2020).

Portanto, é fundamental que os professores adotem estratégias que não apenas facilitem o processo de ensino, mas também incentivem os alunos a se envolverem mais ativamente com o conhecimento. Isso implica valorizar seus conhecimentos prévios e suas experiências sociais, proporcionando acesso a diferentes áreas do saber e contribuindo para a formação da cidadania, ao conectar o aprendizado matemático com a realidade cotidiana dos estudantes (Ghelli *et al.* 2015).

Considerando esse contexto, a investigação Matemática se sobressai como uma estratégia pedagógica eficaz, ao valorizar situações concretas de ensino e aprendizagem, nas quais os alunos participam ativamente, construindo significados próprios. Além disso, o questionamento “O que aconteceria se...?” não deve ser restrito ao professor. É fundamental que os alunos também o formulem, o que os incentivará a explorar e testar suas próprias ideias, promovendo um ambiente de aprendizado mais participativo e envolvente (Alro; Skovsmose, 2010).

Partindo dessa concepção, surge o seguinte questionamento de pesquisa: **“De que maneira a implementação da investigação matemática no 8º ano influencia o desenvolvimento das competências matemáticas e o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem?”**. Explorar essa questão pode proporcionar uma abordagem mais dinâmica e reflexiva na aprendizagem da Matemática, beneficiando não apenas a prática pedagógica, mas também a formação continuada dos professores.

1.2 Justificativa

O interesse por este tema surgiu das reflexões desenvolvidas durante as aulas do componente curricular "Investigação em Educação Matemática na Sala de Aula", oferecido no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). A partir dessas reflexões, identificou-se a necessidade de propor uma estratégia pedagógica que vá além da abordagem expositiva tradicional.

Fundamentada nos estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) esta pesquisa reconhece a investigação Matemática como uma abordagem pedagógica eficaz, que não apenas facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promove o desenvolvimento de habilidades essenciais, como a interpretação e o raciocínio lógico. Essas competências são fundamentais para a formação de alunos críticos, capazes de resolver problemas de forma independente, o que está em consonância com as demandas atuais do ensino de matemática.

Além disso, a implementação de estratégias pedagógicas inovadoras, como a investigação Matemática, pode contribuir para a formação continuada de professores, influenciando positivamente o cenário educacional. Assim, a pesquisa proposta visa demonstrar os benefícios dessa abordagem, destacando seu potencial para melhorar a qualidade da aprendizagem matemática e, conseqüentemente, o desempenho dos alunos.

1.3 Objetivos

Nesta seção, destacam-se os objetivos do Trabalho de Conclusão de Curso, ou seja, as metas que se pretende alcançar.

1.3.1 Objetivo geral

Verificar de que forma a implementação da Investigação Matemática, enquanto estratégia pedagógica, contribui para o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais relacionadas ao raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática nos alunos do 8º ano.

1.3.2 Objetivos específicos

- Revisar a literatura sobre a utilização da Investigação Matemática em sala de aula como estratégia pedagógica;
- Construir uma atividade investigativa;
- Realizar um estudo exploratório para avaliar a eficácia da atividade investigativa.
- Analisar as contribuições da atividade investigativa no contexto da pesquisa realizada em sala de aula.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção, apresenta-se uma revisão da literatura sob a perspectiva da investigação, servindo como base para o aporte teórico-metodológico da pesquisa.

2.1 Investigar em Matemática

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que o aprendizado do aluno é efetivamente alcançado mediante a mobilização de seus recursos cognitivos com o intuito de atingir um objetivo específico. Essa perspectiva ressalta que o processo educacional não se limita à mera recepção de conhecimento, mas sim à utilização ativa e direcionada das capacidades mentais do aluno para resolver problemas e compreender conceitos e definições no processo de aprendizagem. Braumann, 2002 complementa essa visão, afirmando:

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas conseguir fazer investigação de natureza Matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo; só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detetivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar fazendo erros e aprendendo com eles. (Braumann, 2002, p. 5).

Irme Lakatos (1978, p. 18) também reforça que a Matemática “não se desenvolve por meio de um crescimento monótono do número de teoremas estabelecidos, mas sim, através do aperfeiçoamento crescente de especulações e conjecturas, pela crítica, pela lógica das provas e

refutações”. Nesse sentido, investigar Matemática vai além da memorização de fórmulas; envolve a busca por uma compreensão mais profunda e por soluções inovadoras (Ponte, 2010).

Assim, torna-se essencial adotar a investigação Matemática como estratégia pedagógica, pois ela contribui para a superação das dificuldades educacionais e prepara os alunos para enfrentar desafios mais complexos. Isso está em conformidade com o que Langdon e Snape (1984) destacam no livro *Viva a Matemática*, ao ressaltar que o processo investigativo permite que os alunos experimentem, aprendam com seus erros e ampliem suas perspectivas de maneira envolvente e prática. Além disso, desperta a curiosidade intelectual, promovendo uma atitude investigativa e proativa, o que leva os estudantes a valorizar o processo de descoberta e a apreciar a beleza intrínseca da Matemática, fortalecendo seu desenvolvimento cognitivo e crítico.

2.2 As etapas de uma Investigação Matemática

A investigação Matemática é um processo dinâmico e versátil que, embora se adapte às necessidades específicas de cada situação, segue uma estrutura básica com etapas fundamentais. Conforme afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), essa investigação envolve quatro momentos principais: exploração e formulação de questões, formulação de conjecturas, realização de testes e reformulação, e, por fim, justificação e avaliação. Esses momentos são ilustrados na Figura 1, que destaca o fluxo e a interconexão entre as etapas.

Figura 1: Etapas da Investigação Matemática.



Fonte: Adaptado de Ponte *et al.* (2003)

O processo se inicia com a exploração e formulação de questões, onde ocorrem os momentos iniciais da atividade. Nesse estágio, realiza-se a primeira leitura e o reconhecimento da situação apresentada, sendo o primeiro passo essencial, envolvendo a identificação e compreensão de um problema ou desafio que precisa ser resolvido. Após esse reconhecimento, segue-se a exploração detalhada, que inclui a coleta de dados, observação de variáveis e identificação de relações e padrões (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009). Essa exploração visa obter uma compreensão completa do problema. Em seguida, é necessário

formular questões específicas que orientaram a investigação. Essas questões guiam o foco da pesquisa, ajudando a delimitar o que precisa ser descoberto ou solucionado.

Com as questões bem definidas, o próximo passo é a criação de conjecturas. Nesta fase, é essencial organizar os dados coletados, estruturando e categorizando as informações para facilitar sua análise. Isso pode incluir a criação de tabelas, gráficos ou diagramas para representar visualmente os dados, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis. Uma organização clara e sistemática ajuda a identificar padrões e tendências, fornecendo evidências para apoiar ou refutar as conjecturas. Essas conjecturas surgem da análise dos dados e da exploração da situação problemática, servindo como ponto de partida para a investigação. É fundamental que as conjecturas sejam claras, específicas e testáveis, permitindo sua confirmação ou refutação com base em evidências empíricas. Além disso, o registro das conjecturas é crucial para os alunos esclarecerem suas ideias, estabeleçam um entendimento comum e se engajem mais profundamente na investigação, motivando a participação e facilitando a construção de um propósito comum e consenso sobre as ações a serem tomadas.

Na sequência, realiza-se o teste das conjecturas formuladas. Essa etapa exige uma análise detalhada baseada em testes que avaliem as conjecturas desenvolvidas. É fundamental identificar possíveis necessidades de adaptação na atividade e buscar uma resolução ou objetivo mais preciso. O processo de adaptar e reformular conjecturas é contínuo, envolvendo testes e ajustes constantes. Essa prática assegura que as conjecturas sejam rigorosamente avaliadas e ajustadas conforme os resultados obtidos, garantindo que as conclusões sejam fundamentadas e que as hipóteses sejam refinadas conforme a realidade observada.

Finalmente, a fase de justificação e avaliação ocorre. Nessa etapa, é possível que o processo investigativo não chegue a um resultado ou uma ação a ser executada. É também nessa etapa que os alunos compartilham os resultados e refletem sobre suas observações, avaliando a eficácia das decisões tomadas e considerando se outras abordagens poderiam ter sido mais eficazes. A justificação envolve validar ou ajustar as conclusões obtidas com base no debate e na troca de percepções entre os participantes. É essencial que os alunos confrontem suas estratégias, conjecturas e justificações, permitindo uma reflexão crítica sobre o trabalho realizado, cabendo ao professor desempenhar o papel de mediador, facilitando a discussão e auxiliando na sistematização das principais ideias (Ponte, 2010). Esta fase proporciona uma oportunidade para refletir sobre o processo investigativo e consolidar o aprendizado.

2.3 Investigações Matemática em sala de aula

O ensino da Matemática tem evoluído de uma abordagem centrada na resolução de problemas para um enfoque que valoriza a investigação e a descoberta. Essa perspectiva está alinhada com a afirmação de Susan Pirie (1987), de que é fundamental explorar diversos aspectos da Matemática em múltiplas direções, valorizando a jornada de aprendizado em vez do destino. Nesse sentido, o processo de investigação Matemática deve ser encarado como uma jornada, em que o principal objetivo é a descoberta e a compreensão dos conceitos, mesmo que a resposta final não seja imediatamente acessível. Isso contrasta com a abordagem tradicional, que se foca em objetivos específicos e na obtenção de uma solução correta.

No entanto, ao adotar essa estratégia investigativa em sala de aula, é necessário que os alunos "atuem como matemáticos, formulando questões, criando conjecturas e realizando provas e refutações" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 23). Nesse contexto, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 29) definem a aula investigativa de Matemática como aquela que "mobiliza e desencadeia, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretas do pensamento do aluno, apresentando múltiplas possibilidades de tratamento e

significação”. No entanto, dependendo de como o professor conduz a turma, as aulas investigativas podem se limitar apenas à fase de exploração e problematização, sem avançar para etapas seguintes de formulação e validação de conjecturas.

Diante disso, é fundamental que os professores de Matemática incentivem um trabalho investigativo em sala de aula, proporcionando aos alunos um ambiente propício para a exploração e a descoberta. Conforme Skovsmose (2008), o ambiente investigativo se converte em um novo espaço de aprendizagem quando os alunos se engajam ativamente nos processos de exploração e explicação. Para atingir esses objetivos, o professor deve escolher atividades que despertem o interesse dos alunos e planejar a abordagem para engajá-los efetivamente nesse processo.

Como afirma Ian Stewart, (1995, p. 17). “os problemas são a força motriz da Matemática [...] um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco, abre horizontes inteiramente novos”. Nesse sentido é essencial que as atividades propostas sejam desafiadoras e despertem a curiosidade dos alunos. Cabe ao professor elaborar atividades com objetivos claros, considerando a familiaridade dos alunos com atividades investigativas, a faixa etária, o desenvolvimento matemático, interesses e conhecimentos prévios.

Após definir a atividade investigativa, o professor deve planejar a estrutura da aula, decidindo se o trabalho será realizado individualmente ou em grupos, além de selecionar os materiais necessários. É fundamental que o professor ofereça assistência durante todo o processo, quando necessário, sem, no entanto, fornecer respostas prontas, incentivando os alunos a avançarem em todas as etapas descritas no item 2.2. Isso é essencial para garantir que os alunos tenham a oportunidade de trabalhar de forma autônoma, promovendo uma compreensão profunda e abrangente dos conceitos matemáticos (Braumann, 2002; Ramos, 1997).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar os objetivos propostos, são descritos os procedimentos metodológicos empregados na condução da pesquisa, visando atingir os resultados esperados.

3.1. Classificação da pesquisa

Para realizar a pesquisa e estabelecer o percurso metodológico, optou-se por uma abordagem qualitativa, que visa compreender e esclarecer os detalhes e características do problema em foco por meio de uma análise aprofundada (Del Carratore, 2009). Tal abordagem é fundamental, ao possibilitar uma investigação detalhada e minuciosa dos aspectos estudados.

Além disso, a pesquisa utilizará o método de estudo de caso, uma abordagem que, segundo Lüdke e André (1986), envolve a análise de um caso específico, que pode abranger desde situações simples até complexas. Os autores também destacam que a delimitação clara do caso é fundamental para garantir a precisão e a relevância dos achados, ao permitir a consideração das nuances individuais de cada situação investigada. Assim, embora um caso possa compartilhar características com outros, ele possui singularidades e particularidades próprias, conferindo-lhe um valor significativo no campo da educação.

3.2. Local e sujeitos do estudo exploratório da pesquisa.

O estudo exploratório foi realizado presencialmente com discentes do oitavo período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). A maioria desses discentes já havia cursado a disciplina optativa “Investigação em Educação

Matemática na Sala de Aula”. Conforme destacado por Gil (2008), o estudo exploratório é uma etapa fundamental para validar e aperfeiçoar instrumentos de pesquisa, permitindo a identificação e correção de possíveis falhas antes de sua aplicação em larga escala. A participação desses alunos, com experiência prática na área, proporcionou um *feedback* valioso e pertinente, contribuindo para ajustes na atividade e assegurando que o material fosse eficaz e adequado ao contexto educacional.

3.3. Local e sujeitos da pesquisa, estudo de caso

A pesquisa foi realizada em uma Escola Pública Estadual, localizada no estado da Paraíba. O estudo focou em uma turma única do 8º ano, composta por alunos de 14 a 15 anos. A escolha dessa série foi motivada pelo fato de os alunos já terem estudado conteúdos como o conjunto dos números inteiros, suas operações, equações do primeiro grau e operações inversas, que são indispensáveis para a realização da atividade proposta. Dessa forma, a implementação da atividade investigativa possibilitou avaliar o nível de engajamento dos alunos no processo investigativo, bem como analisar seus conhecimentos e habilidades no contexto da investigação Matemática.

3.4. Método para o desenvolvimento da Investigação

A investigação foi conduzida por uma atividade investigativa sobre o conteúdo já estudado pelos alunos, organizada em duas aulas de 40 minutos. Foram utilizados métodos de observação e análise para avaliar a eficácia da abordagem investigativa no currículo de Matemática. O estudo também examinou a estruturação das aulas investigativas, os procedimentos aplicados e as expectativas de desempenho dos alunos. O intuito é fomentar um aprendizado mais significativo e autônomo, além de proporcionar aos alunos a familiaridade com o processo de fazer Matemática, isto é, que eles desenvolvam as fases de uma investigação matemática.

3.5. Coleta de dados

Segundo Lüdke e André (1986, p. 33) “a combinação de diferentes métodos de coleta de dados possibilita uma compreensão mais rica e completa do fenômeno estudado”. Diante disso, para este estudo, serão utilizados dispositivos como celulares e gravadores para registrar entrevistas e discussões dos grupos, permitindo uma análise detalhada das interações dos alunos durante a atividade. Além disso, foram feitas observações diretas e registros escritos para documentar o progresso e o comportamento dos alunos ao longo das aulas investigativas. Fotografias também foram tiradas para capturar momentos-chave das atividades, proporcionando um registro visual que complementou os dados escritos e gravados. Esses dados foram posteriormente analisados para avaliar a eficácia da abordagem investigativa e seu impacto no aprendizado dos alunos.

3.6. Tratamento de dados

O tratamento dos dados coletados foi realizado por meio de uma análise qualitativa, sustentada por discussões embasadas na revisão da literatura. A análise comparou os resultados obtidos com as teorias e estudos existentes sobre a implementação de abordagens investigativas no ensino de Matemática.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, são apresentados os resultados e as discussões da pesquisa de campo.

4.1 A construção da atividade investigativa

A construção da atividade investigativa foi cuidadosamente planejada para ser educativa, envolvente e adequada ao nível de conhecimento dos alunos. Optou-se por utilizar uma pirâmide numérica como base da atividade, visando abordar o conteúdo de operações com números inteiros de maneira inovadora e desafiadora. Conforme apontado por Kamii e Anderson (2020), trabalhar com esses números, especialmente os negativos, continua sendo uma área desafiadora para muitos estudantes, principalmente no que se refere às operações aritméticas fundamentais. A ausência de aplicações concretas tem contribuído para essa dificuldade, levando professores de Matemática a buscar estratégias didáticas que facilitem a aprendizagem.

Durante o planejamento, foram realizadas discussões com professores de Matemática do 8º ano para definir o nível de complexidade mais adequado para a atividade proposta. A partir dessas conversas, decidiu-se que a pirâmide conteria um número moderado de blocos, proporcionando um desafio que fosse, ao mesmo tempo, estimulante e acessível. Além disso, foi estabelecido que a pirâmide começaria com um exemplo prático, visando facilitar a compreensão dos alunos sobre a dinâmica da atividade.

Além da pirâmide numérica, o enunciado da questão foi cuidadosamente elaborado para engajar os alunos, colocando-os em uma missão no deserto, incentivando-os a ir além do simples "resolva". Spira (2014) ressalta que muitos estudantes, especialmente no ensino básico, estão habituados a resolver questões de forma automática, sem exigir interpretação. Assim, ao utilizar um enunciado mais narrativo e envolvente, busca-se promover o desenvolvimento da leitura, interpretação e raciocínio lógico, incentivando esses processos cognitivos essenciais.

4.2. Atividade investigativa

Apresenta - se a atividade investigativa proposta, que pode ser utilizada por professores e estudantes das licenciaturas.



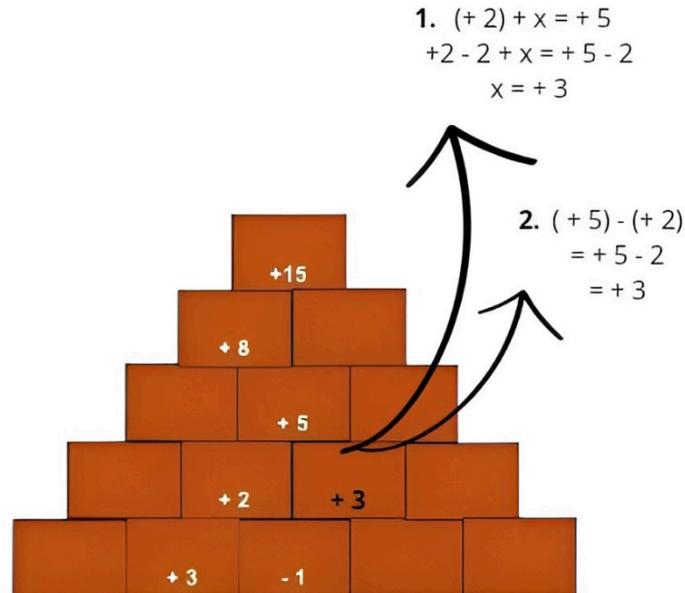
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

Professora: Luana Maria da Silva
Componente curricular: Matemática
Área do Conhecimento: Matemática

2. **Subtração:** Outra abordagem consiste em subtrair o valor conhecido do tijolo superior pelo valor de um dos blocos conhecidos abaixo dele. Essa subtração permitirá que os alunos determinem o valor do bloco oculto.

Observe na Figura 3 os exemplos correspondentes às estratégias 1 e 2, respectivamente.

Figura 3: Pirâmide numérica (estratégias)

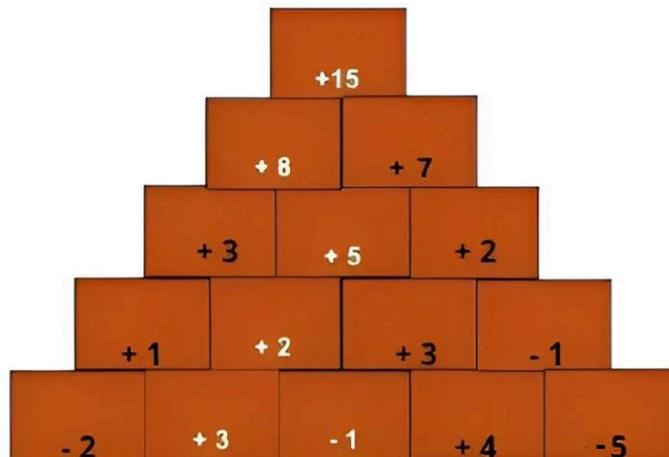


Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Dessa forma, esses métodos permitem determinar todos os valores necessários para completar a pirâmide, utilizando operações diretas, como a adição para calcular valores nas camadas superiores, e operações inversas, como a subtração, para determinar valores ocultos. Esse processo continua até o topo da pirâmide, onde um único número é obtido.

Observe a Figura 4 para uma pirâmide completa, com todos os valores preenchidos.

Figura 4: Pirâmide numérica preenchida



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

10. Possíveis questionamentos para utilizar na aplicação da atividade (item 8)

Ao aplicar a atividade, o professor pode fazer perguntas para incentivar o pensamento crítico dos alunos e ajudá-los a compreender melhor a tarefa. Exemplos de indagações que podem ser feitas:

- Você conseguiu entender como é a estrutura da pirâmide? Como essa estrutura pode ajudar?
- Você acha que a pirâmide fornece alguma pista?
- Como os números conhecidos podem ajudar a descobrir os números ocultos?
- Você consegue encontrar algum padrão?
- Qual operação matemática deve ser aplicada para preencher cada bloco vazio?
- Como ficariam esses números se fossem colocados em ordem crescente? E em ordem decrescente?

11. O que se espera dos alunos na atividade (item 8)

Espera-se que os alunos identifiquem os padrões necessários para descobrir os números dos blocos ocultos e compreendam que a resolução pode ser iniciada tanto pelo topo quanto pela base da pirâmide, reconhecendo que o padrão matemático permanece consistente em ambos os casos. Além disso, espera-se que os alunos aprimorem suas habilidades em operações com números inteiros e fortaleçam sua capacidade de resolver problemas matemáticos de forma lógica e estruturada.

12. Referências: GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. 7º ano: Ensino Fundamental, Anos Finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

Assim, foi realizado um estudo exploratório para validar a atividade investigativa, antes de sua aplicação em campo.

4.3. Análise da atividade investigativa: pré-aplicação com os estudantes da graduação

Conforme discutido no item 3.2, o estudo exploratório foi realizado com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, visando ao aprimoramento da atividade investigativa. A aplicação seguiu três etapas principais: (1) a apresentação e contextualização da estratégia de investigação matemática, (2) a execução da atividade pelos discentes, organizados em grupos, e (3) a discussão coletiva dos resultados, focando em possíveis aprimoramentos da atividade proposta.

Inicialmente, o professor destinou 40 minutos da aula da disciplina “Tópicos Especiais em Educação Matemática”, escolhida por seu objetivo de apresentar aos alunos tendências e metodologias de ensino. Além disso, a escolha se justificou pelo fato de alguns alunos já terem cursado a disciplina optativa “Investigação Matemática em Sala de Aula”. Em seguida, a pesquisadora introduziu a estratégia de investigação matemática, explicando seus principais objetivos e delineando os quatro passos essenciais para desenvolver um olhar mais crítico, com o intuito de verificar se a atividade atendia aos critérios de uma investigação Matemática.

Os alunos foram divididos em três grupos, conforme ilustrado nas imagens 5, 6 e 7, cada grupo composto por três integrantes. Foi concedido tempo para que discutissem sobre a atividade proposta. Durante as discussões, os grupos apresentaram suas observações.

Imagem 5: Grupo I



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Grupo I: O grupo mencionou que não percebeu a pista fornecida pela pirâmide. No entanto, acharam interessante que a pirâmide contenha tantos números negativos quanto positivos, o que possibilita trabalhar com operações inversas.

Pesquisadora: Isso, o objetivo é que os alunos reconheçam que a atividade envolve o conjunto dos números inteiros, por isso foram incluídos números com sinais positivos e negativos.

Com base nas observações do grupo, fica evidente a importância de deixar claro para os alunos os conceitos trabalhados. A introdução ao novo conjunto numérico, que inclui a representação de números negativos, é um desafio, pois até então os estudantes estavam habituados a operar apenas com quantidades positivas nas séries iniciais. Kamii e Anderson (2020) ressaltam que a introdução de novos conceitos, como os números negativos, pode ser especialmente difícil, já que o foco tradicionalmente recai sobre operações com números positivos de forma mecânica. A seguir, a Imagem 6 ilustra o trabalho do Grupo II, seguido de seus comentários.

Imagem 6: Grupo II

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Grupo II: O grupo destacou que o uso de uma equação do primeiro grau é uma forma eficaz de chegar à solução. No entanto, dependendo da turma e da abordagem do professor em sala de aula, os alunos podem ter dificuldade em identificar o bloco oculto como uma letra ou símbolo e, assim, montar uma equação do primeiro grau. Se não conseguirem identificar o padrão, podem acabar preenchendo os espaços de forma aleatória.

Pesquisadora: Nesse contexto, o papel do professor como mediador é essencial. Ele deve incentivar os alunos a justificarem todas as suas respostas, assegurando que haja uma lógica e um padrão coerente na resolução.

Diante dessas observações, fica claro que o papel do professor como facilitador é essencial para guiar os alunos na construção do raciocínio matemático. É importante que o docente esteja atento às explicações dos alunos, ajudando-os a compreender o processo que levou aos resultados e incentivando a reflexão. Conduzir a atividade de forma cuidadosa, garantindo que os alunos justifiquem suas respostas, é fundamental para tornar a experiência investigativa significativa. O objetivo não é apenas acertar, mas, como destaca a Revista Nova Escola (2004), permitir que o aluno explique e compreenda o raciocínio por trás de cada solução, promovendo um aprendizado mais profundo. Após a Imagem 7, seguem-se os comentários do Grupo III.

Imagem 7: Grupo III

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Grupo III: Foi discutido que a atividade investigativa seria uma boa alternativa para o 7º ano, pois os alunos estão começando a aprender sobre o conjunto dos números inteiros.

Pesquisadora: No 7º ano, os alunos estão sendo introduzidos a esse conteúdo pela primeira vez. Eles precisam, inicialmente, compreender o conceito, como operá-lo corretamente e, principalmente, entender as regras para o uso dos sinais. Já no 8º ano, a investigação matemática seria mais apropriada para investigar a compreensão dos alunos sobre operações com números inteiros e a habilidade em lidar com o uso correto dos sinais.

Isso é fortemente ressaltado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que defendem que a investigação matemática deve ser implementada após a exposição do conteúdo, ao requerer um conhecimento prévio que permita ao aluno explorar os conceitos de maneira mais criativa e aberta. Essa abordagem funciona como uma extensão do que já foi aprendido, aprofundando o entendimento e promovendo maior autonomia no processo de aprendizagem.

Na terceira etapa, foi promovida uma discussão entre os grupos sobre possíveis adaptações da atividade investigativa. A seguir, apresenta-se as contribuições de cada grupo:

Grupo I: destacou a importância de manter números positivos e negativos nos blocos, pois a turma do 8º ano também estuda o conjunto dos números racionais, facilitando a identificação do conjunto dos números inteiros e a compreensão das operações inversas.

Grupo II: Avaliou que a atividade é apropriada para alunos do 8º ano. Sugeriram manter a pista da pirâmide, pois, mesmo que os alunos não consigam formular uma equação do primeiro grau, é crucial

perceberem que a soma dos dois blocos inferiores resulta no bloco superior imediatamente acima.

Grupo III: Considerou que a pirâmide numérica não precisava ser modificada, pois tanto o contexto da atividade quanto a estrutura da pirâmide são de fácil compreensão para turmas do 8º ano.

Portanto, concluiu-se que a atividade não requer alterações e é eficaz, na prática. Assim, foi aplicado em campo.

4.4. Aplicação da atividade investigativa com os alunos da escola de campo

Conforme descrito no item 3.3, a investigação foi realizada com uma turma do 8º ano, composta por 16 alunos com idades entre 14 e 15 anos. Antes do início da atividade investigativa, foi solicitada e obtida a devida autorização do professor responsável pela turma.

A atividade, descrita no item 4.2, foi realizada ao longo de duas aulas de 40 minutos. Os alunos foram organizados em quatro grupos, com quatro integrantes cada, conforme mostrado na imagem 8.

Imagem 8: distribuição dos alunos em grupos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

O tempo foi distribuído da seguinte maneira: uma aula e meia foi dedicada à execução da tarefa em grupo, enquanto o restante foi reservado para a apresentação e discussão dos resultados, organizados em duas etapas.

Na primeira etapa, a professora pesquisadora fez uma breve apresentação explicando o propósito de sua presença na turma e, em seguida, entregou o material para a realização da primeira leitura. Durante esse processo, os alunos foram orientados sobre a importância de lerem as questões, debaterem as estratégias, desenvolverem justificativas e discutirem coletivamente os resultados. Isso está conforme o que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), que destacam que o trabalho em grupo potencializa o surgimento de diversas

alternativas para a exploração da tarefa, permitindo que o grupo se concentre em certas ideias e facilite o trabalho conjunto.

A seguir, apresentamos o desenvolvimento dos grupos com base nas observações registradas durante a pesquisa. Optamos por utilizar nomes fictícios para preservar a privacidade dos estudantes. As falas foram extraídas das gravações de áudio realizadas pela professora pesquisadora e ilustram o progresso de cada grupo no processo investigativo. Além disso, essas falas destacam o papel ativo do professor na prática pedagógica, evidenciando sua influência tanto no avanço dos alunos quanto na condução da atividade investigativa. Isso pode ser observado nas falas do grupo I:

Grupo I

Cláudia: Professora, já lemos duas vezes e ainda não entendemos o que é para fazer.

Pesquisadora: vocês não descobriram qual é a missão?

Cláudia: A missão é completar a pirâmide?

Pesquisadora: Exatamente!

Fabício: Mas como vamos completar se a professora não explicou como fazer?

Pesquisadora: Vamos com calma. Vocês já deram uma olhada na pirâmide?

Alunos: Ainda não.

Observou-se inicialmente que todos os alunos do grupo enfrentaram dificuldades para entender o que era necessário fazer. Nesse contexto, o papel do professor é essencial para transformar os alunos em pequenos investigadores, especialmente aqueles com pouca ou nenhuma experiência prévia em atividades desse tipo (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003). É crucial que os alunos compreendam o que significa investigar, pois essa abordagem difere das práticas tradicionais de sala de aula. Esse primeiro contato pode gerar incertezas, sendo fundamental que o professor incentive a participação ativa dos alunos na exploração e descoberta ao longo de toda a atividade. Dando continuidade às falas, temos:

Pesquisadora: E aí, pessoal, conseguiram investigar a pirâmide misteriosa?

Yasmin: Professora, nós olhamos a pirâmide e pensamos o seguinte: começamos de baixo para cima, e somamos todos os valores, +3, -1, +2, +5, +8 e +15 e o total deu 32. Tá certo?

Pesquisadora: Vamos lembrar qual é a missão de vocês?

Cláudia: É completar a pirâmide.

Fabício: Então tá errado, pessoal. Nós não completamos, só somamos os números que já estavam na pirâmide.

Maurício: Então, no caso, são sete números que faltam, certo? Porque são sete blocos vazios.

Pesquisadora: Exatamente! E será que os números que estão à mostra não ajudam vocês a descobrir os números ocultos?

Nota-se, conforme apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), que a fase inicial da exploração pode dar a impressão ao professor de que nada está acontecendo e de que os alunos estão enfrentando dificuldades. No entanto, essa etapa é fundamental para que,

posteriormente, os alunos comecem a formular conjecturas. É nesse momento que eles começam a se familiarizar com os dados e a compreender o propósito da atividade.

Após algum tempo, os alunos conseguiram completar a pirâmide, mas enfrentaram algumas dificuldades. Foi observado que, em vez de utilizarem a subtração — operação inversa da adição —, eles realizaram somas, o que os impediu de identificar um padrão correto. Além de terem desconsiderado o -1, tratando todos os números como se fossem positivos, conforme descrito na imagem 9.

Imagem 9: conjecturas do grupo I

Você é um jovem matemático encarregado de investigar os mistérios das antigas pirâmides, estruturas que foram construídas há milhares de anos. Durante sua expedição, você encontra uma pirâmide misteriosa no meio do deserto. Mas, dessa vez, ela não foi feita de pedras e sim de números, e alguns deles estão escondidos. Observe a pirâmide abaixo.

Sua missão é completá-la, descobrindo os valores escondidos. Use suas habilidades matemáticas para resolver este enigma e revelar todos os segredos dessa pirâmide misteriosa.

Você conseguiu!

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Nessa fase, os alunos identificaram inconsistências em suas conjecturas iniciais e perceberam a necessidade de ajustes. Ao adotarem uma nova estratégia, avançaram para a terceira etapa da investigação, correspondente ao teste das conjecturas. Esse processo evidenciou uma postura investigativa ativa, reforçando o papel central da investigação matemática no desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e criativo, como pode ser observado nas falas a seguir:

Cláudia: Acho que já entendemos como fazer, professora. Veja se está certo.

Maurício: Completamos toda a pirâmide.

Pesquisadora: Me expliquem como vocês fizeram.

Maurício: Fabrício, explica para ela.

Fabrício: Começamos pelo topo da pirâmide. Pegamos o +15 e somamos com o +8, o que resultou em +23. Depois, somamos o +8 com o +5, e obtivemos +13. Em seguida, somamos o +23 com o +5, o que deu +28. Fomos fazendo assim até chegar na base da pirâmide.

Pesquisadora: Vamos olhar esses blocos aqui. você somou o +2 com o +3 e deu -1?

Fabrício: Não, professora. Esses números já estavam preenchidos na pirâmide.

Yasmin: Acho que o padrão que encontramos não está certo.

Pesquisadora: Para ser um padrão, ele precisa seguir uma lógica e não pode falhar em nenhuma parte. Todos concordam?

Alunos: Sim.

Yasmin: Se nosso padrão estivesse correto, o +2 e +3 resultaria em +5, mas na pirâmide o resultado foi -1.

Pesquisadora: Vocês seguiram um caminho e identificaram que ele não deu certo. Agora, é hora de buscar uma nova abordagem, ou talvez ajustar a operação que estavam utilizando.

Maurício: pessoal vamos analisar agora os números que estão aparecendo e vê se a gente consegue encontrar um padrão nisso, aí depois vemos se esse padrão vale para descobrir os blocos que estão faltando

Pesquisadora: isso, a estrutura da pirâmide também é algo muito importante para essa descoberta. Vão pensando, já está chegando a outra fase da atividade investigativa.

O grupo não conseguiu explorar outras maneiras de completar a pirâmide, sendo o tempo um fator crucial, já que perderam boa parte dele tentando compreender a estrutura da pirâmide. Em contraste, o Grupo II conseguiu encontrar uma solução alternativa de maneira mais ágil, demonstrando uma compreensão mais rápida da atividade.

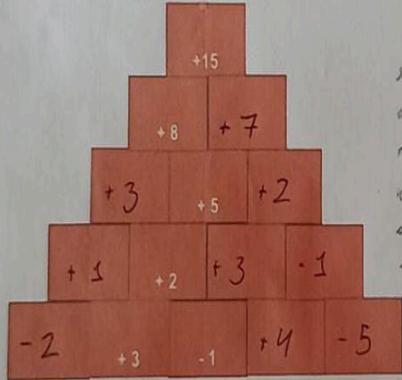
Grupo II

Vale destacar o desenvolvimento desse grupo em especial, pois eram bastante agitados, sendo identificados pelo professor como os que mais conversavam durante as aulas, a ponto de ele ter que interromper várias vezes para chamar a atenção. No entanto, quando receberam a atividade, os alunos surpreendentemente concluíram-na em poucos minutos. Eles expressaram entusiasmo, dizendo que gostaram muito da tarefa e pediram ao professor responsável pela turma que incluísse atividades semelhantes nas aulas, mencionando que acharam a tarefa fácil.

Durante a atividade, os alunos não precisaram, em nenhum momento, pedir orientações sobre o que deveria ser feito. Eles se envolveram ativamente na busca, organização e representação dos dados, evidenciando não apenas a compreensão do problema proposto, mas também a capacidade de aplicar estratégias de maneira independente. Isso está descrito claramente na imagem 10, que mostra que o grupo identificou a pista oferecida pela estrutura da pirâmide e utilizou a lógica para completar os blocos ocultos.

Imagem 10: conjecturas do grupo II

Você é um jovem matemático encarregado de investigar os mistérios das antigas pirâmides, estruturas que foram construídas há milhares de anos. Durante sua expedição, você encontra uma pirâmide misteriosa no meio do deserto. Mas, dessa vez, ela não foi feita de pedras e sim de números, e alguns deles estão escondidos. Observe a pirâmide abaixo.



Consegui perceber o padrão para resolver o "mistério" da torre analisando os números que já estavam escritos, como por exemplo na base da torre, com o "+3" e o "-1" que resulta no número acima o "+2", e seguindo esse padrão, usando os números positivos e negativos, consegui resolver a pirâmide inteira.

Sua missão é completá-la, descobrindo os valores escondidos. Use suas habilidades matemáticas para resolver este enigma e revelar todos os segredos dessa pirâmide misteriosa.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

A justificativa do grupo pode ser observada nas falas a seguir:

Pesquisadora: Como está indo à investigação por aqui, rapazes?

Arthur: Já terminamos, professora.

Pesquisadora: Já?

Emanuel: Foi muito fácil.

Arthur: Eu já tinha visto uma questão parecida na OBMEP, onde precisávamos completar usando a lógica de que duas bases somam a de cima, e assim por diante.

As falas dos alunos estão conforme as observações do professor César Camacho, diretor-geral do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que afirma ser crucial a adoção do material didático da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) nas aulas. Esse material oferece aos alunos uma valiosa oportunidade de aprendizado, incentivando o uso da lógica e da prática, e desempenhando um papel fundamental no desenvolvimento de suas habilidades matemáticas (Alves, 2010). A relevância dessas competências foi ressaltada, por exemplo, na fala de Arthur, que destacou o impacto desse material na dedução de uma estratégia para completar a pirâmide.

Além disso, é importante ressaltar que, durante a realização da tarefa, o professor deve evitar expressar suas opiniões ou confirmar diretamente as conjecturas dos alunos. Isso é indispensável para que eles desenvolvam uma atitude investigativa, permitindo a exploração de novas ideias e a formulação de suas próprias conclusões, promovendo assim uma aprendizagem mais ativa e significativa (Santos; Bellini, 2013). Essa dinâmica pode ser observada nas falas a seguir, que refletem a postura da professora pesquisadora, que, embora

soubesse que a pirâmide estava corretamente completa, não interveio para garantir que os alunos chegassem a essa certeza por conta própria.

Pesquisadora: Vocês verificaram se há alguma dica na pirâmide que confirme se a solução está correta?

Alunos: Sim.

Emanuel: Olha aqui, $+3 + (-1)$ resulta em $+2$.

Pesquisadora: Verificaram se não há nenhum número errado?

Arthur: Sim, dê uma olhada para confirmar se está tudo certo.

Pesquisadora: tem sim um sentido nesse padrão. Vocês conseguiram identificar outro padrão que também poderia completar a pirâmide?

Emanuel: Existe outra forma de completá-la?

Pesquisadora: Sim.

Arthur: Interessante.

Pesquisadora: Tentem explorar essa nova abordagem e lembrem-se de anotar o que descobrirem.

Diante disso, é de suma importância que, quando um grupo finaliza a investigação antes dos demais, o professor continue desafiando os alunos por meio de questionamentos que os mantenham engajados e concentrados. Dessa forma, evita-se que eles conversem e prejudiquem o progresso dos outros grupos que continuam envolvidos no processo investigativo. Tal abordagem pode ser observada nas falas a seguir:

David: Não conseguimos encontrar outro padrão que complete a pirâmide.

Pesquisadora: Entendi. E se vocês organizarem todos esses números da pirâmide em ordem crescente, como ficaria?

Arthur: $-5, -3, -2\dots$

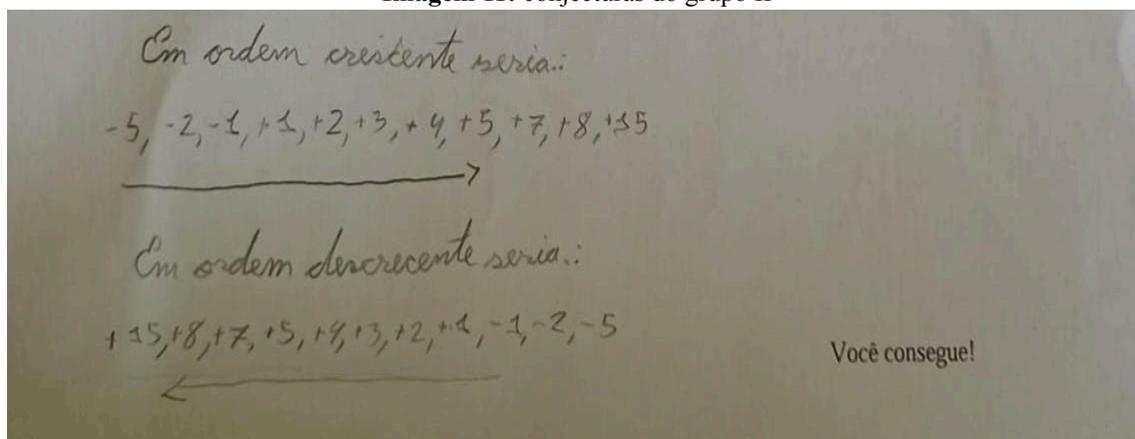
Pesquisadora: Escrevam isso.

Emanuel: Vou organizar esses números em ordem crescente e também em ordem decrescente.

Pesquisadora: Ótimo trabalho, muito bem!

Observa-se um entusiasmo evidente nas falas dos alunos, mostrando que eles sabem ordenar os números inteiros tanto em ordem crescente quanto decrescente, conforme observado na imagem 11.

Imagem 11: conjecturas do grupo II



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Assim, nas últimas falas do grupo é possível observar suas justificativas para a ordenação dos números, evidenciando, por meio do processo investigativo, um domínio significativo das habilidades de relação entre sinais, raciocínio lógico e interpretação de informações.

Davi: Dê uma olhada, professora.

Pesquisadora: Como você ordenou esses números em ordem crescente?

Arthur: Eu me baseei na reta numérica e procurei o menor número entre todos, que é -5.

Pesquisadora: Por que ele é o menor número?

Arthur: Porque está mais à esquerda do zero.

Pesquisadora: Exatamente. E como ficou a ordem decrescente?

Emanuel: É só inverter.

Pesquisadora: Como assim?

Emanuel: Os números que ficaram em ordem crescente, eu vou pegar do final para o início. Pois, na ordem decrescente, começamos do maior para o menor.

Pesquisadora: Isso mesmo, rapazes. Estão de parabéns, arrasaram na missão.

Alunos: (risos).

A seguir, observe o desenvolvimento do Grupo III.

Grupo III

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a participação ativa de todos os membros e a mediação do professor são essenciais para garantir o progresso ao longo da atividade investigativa. No entanto, isso não ocorreu com o grupo em questão, pois a falta de cooperação entre os integrantes era evidente. Apenas Carla e Kamila estavam ativamente envolvidas, o que comprometeu significativamente o andamento das atividades. Essa situação é evidenciada nas falas a seguir, especialmente quando a aluna Kamila direciona uma pergunta a um integrante específico do grupo, em vez de envolvê-los todos na discussão.

Kamila: Professora, tem a ver com os sinais? Não estamos conseguindo encontrar os números dos blocos vazios.

Pesquisadora: Como você deduziu que poderia usar relações de sinais?

Kamila: Porque estão aparecendo os sinais de mais e menos, e quando aparecem, normalmente é porque precisamos usá-los.

Pesquisadora: Exatamente. E quando aparecem números negativos e positivos, de qual conjunto numérico estamos falando?

Kamila: Não sei o que é isso... Você sabe Carla?

Carla: Quando só aparecem números com sinal de mais, são os números naturais. E quando tem mais e menos, estamos lidando com os inteiros.

Kamila: Ah, então aqui temos apenas números inteiros.

Carla: Vamos dar outra olhada na pirâmide para ver se conseguimos entender melhor.

Pesquisadora: Lembrem-se, vocês estão nessa missão juntos, e todos precisam compartilhar suas ideias.

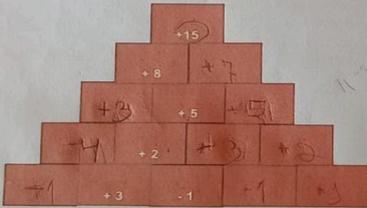
Carla: A estrutura da pirâmide ajuda em algo professora?

Pesquisadora: Sim, será que a pirâmide não fornece nenhuma pista? Verifiquem.

Após algum tempo, tornou-se evidente que as meninas envolvidas na atividade não dominavam a organização dos dados. Na imagem 12, por exemplo, observa-se que não conseguiram manter o único padrão que haviam descoberto ao longo da atividade. Como resultado, conseguiram justificar apenas alguns passos, o que levou a uma estrutura sem sentido. A seguir, observe a imagem e a discussão relacionada, que será apresentada por meio das falas do grupo.

Imagem 12: conjecturas do grupo III

Você é um jovem matemático encarregado de investigar os mistérios das antigas pirâmides, estruturas que foram construídas há milhares de anos. Durante sua expedição, você encontra uma pirâmide misteriosa no meio do deserto. Mas, dessa vez, ela não foi feita de pedras e sim de números, e alguns deles estão escondidos. Observe a pirâmide abaixo.

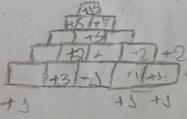


Sua missão é completá-la, descobrindo os valores escondidos. Use suas habilidades matemáticas para resolver este enigma e revelar todos os segredos dessa pirâmide misteriosa.

Você consegue!

Coloquei abaixo +1, em todos os quadros. Peguei os cálculos do porta $+3+3=+2$

$\left. \begin{array}{l} \text{em cima} +5 \\ \text{em baixo} +8 \end{array} \right\}$
 Assim como do +8, coloquei +7, pois $+5+8=13$
 $+8+7=15$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Kamila: Professora, terminamos.

Pesquisadora: Por que vocês colocaram o +7 ao lado do +8?

Kamila: Porque +8 somado com +7 é igual a +15.

Pesquisadora: Entendi. E vocês usaram a mesma lógica no restante?

Kamila: Sim, colocamos o +3 ao lado do +5 para somar e dar +8.

Pesquisadora: E por que, depois do +5, vocês colocaram outro +5? No caso o $(+5) + (+5)$ resulta em +7?

Kamila: Não, na verdade dá +10.

Pesquisadora: Então, é importante revisar tudo com calma. E por que vocês completaram todos os blocos vazios da última camada com +1?

Kamila: Porque o +1 nas duas pontas resulta em +2, que é o número mostrado na segunda camada. Ou seja, professora, se pegarmos os dois números das pontas, o resultado será um número que está à mostra. Esse foi o padrão que encontramos.

Pesquisadora: Vocês perceberam que começaram seguindo um padrão, mas, no meio do caminho, mudaram? Por exemplo, vocês mencionaram que o +8 somado ao +7 resulta em +15, e que o +3 com o +5 resultaria em +8. Em seguida, falaram que os dois números das pontas sempre resultam em um número que está visível na pirâmide.

Kamila: É verdade, professora, acabamos nos perdendo.

Pesquisadora: Mas isso faz parte do processo de investigação. Qual deles vocês acham que tem mais sentido? Não encontraram nenhuma pista na pirâmide?

Kamila: não

Carla: Vamos deixar assim mesmo.

Nessa concepção, observa-se que a falta de uma abordagem coletiva pode ter sido um dos fatores que dificultaram a correção de erros, os quais poderiam ter sido mais facilmente identificados e solucionados por meio da troca de ideias e do trabalho colaborativo. Como consequência, isso impediu que o grupo avançasse para a terceira etapa de teste das conjecturas, interrompendo o progresso em um momento crucial da investigação. A seguir, apresenta-se o desenvolvimento do último grupo.

Grupo IV

Assim que o grupo iniciou a discussão sobre a atividade, rapidamente perceberam que o objetivo era completar a pirâmide. No entanto, levaram bastante tempo para começar a pensar em uma estratégia para isso. Após algum tempo, começaram a identificar um padrão a partir do topo, observando que, ao subtrair o valor do tijolo superior pelo valor de um dos blocos abaixo, era possível descobrir o valor do bloco oculto. Esse padrão já estava presente como uma pista evidente na pirâmide, mas eles não perceberam. Veja isso nas falas a seguir:

Pesquisadora: Como está a investigação por aqui, meninas? Já descobriram qual é a missão de vocês?

Rayssa: Sim, é encontrar os valores que estão escondidos na pirâmide.

Pesquisadora: Exatamente.

Rayssa: Mas estamos tendo dificuldade em descobrir o mistério para encontrar esses números.

Pesquisadora: Será que a estrutura da pirâmide não pode ajudar? Será que ela não oferece alguma pista para desvendar esse mistério?

Paloma: precisamos usar as relações de sinais? Por exemplo, para descobrir o valor do bloco vazio ao lado do +8

Pesquisadora: Como assim? Explique melhor.

Paloma: Porque $+15 - (+8)$ é igual a +7. E +8 mais 7 resulta em +15

Pesquisadora: Sim, mas será que a pirâmide tem algo que confirme o que você está dizendo?

Paloma: Não, ainda não vimos nada, mas acho que, usando essa lógica, podemos descobrir os outros números.

Pesquisadora: Então sigam com essa ideia e vejam se ela funciona para todos os blocos.

O grupo, de modo geral, conseguia expressar verbalmente o que precisava ser feito, mas enfrentava dificuldades em transferir esse raciocínio para o papel. Isso pode ser visto na imagem 13, onde, por exemplo, afirmam que $+15 + 8$ é igual a $+7$, quando, na verdade, queriam dizer que $(+15) - (+8)$ resulta em $+7$, algo que já havia mencionado anteriormente na discussão com a professora pesquisadora. Embora soubessem a resposta correta, não conseguiam registrá-la de forma adequada. E essa dificuldade persistiu ao longo de todo processo.

Imagem 13: conjecturas do grupo IV

Você é um jovem matemático encarregado de investigar os mistérios das antigas pirâmides, estruturas que foram construídas há milhares de anos. Durante sua expedição, você encontra uma pirâmide misteriosa no meio do deserto. Mas, dessa vez, ela não foi feita de pedras e sim de números, e alguns deles estão escondidos. Observe a pirâmide abaixo.

Sua missão é completá-la, descobrindo os valores escondidos. Use suas habilidades matemáticas para resolver este enigma e revelar todos os segredos dessa pirâmide misteriosa.

Usamos a relação de sinal $+15 + 8 = \text{igual } +7$

$+7$

Você conseguiu!

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

O grupo não tinha um domínio significativo para manter o mesmo raciocínio, frequentemente desviando para outro caminho. Eles só conseguiam avançar com o apoio da professora pesquisadora, pois estavam acostumados a serem constantemente questionados e não conseguiam formular suas próprias perguntas de forma independente. Observe isso nas falas a seguir:

Pesquisadora: porque antes do $+5$ tem $+13$?

Renaly: Do lado direito da pirâmide, fizemos a subtração do jeito que já falamos, mas do lado esquerdo fizemos a soma.

Pesquisadora: E como vocês chegaram a essa conclusão?

Luciana: Estamos fazendo sem muito sentido, porque não entendemos direito.

Renaly: Professora, era para ter perguntas para a gente responder. Assim, não conseguimos entender o que a senhora quer. Sabemos que é para completar a pirâmide, mas como começa?

Luciana: Essa atividade é muito difícil, e a senhora não ajuda, não diz se está certo ou errado, só pede para a gente justificar.

Pesquisadora: Quando vocês fazem uma prova, vocês não mostram os cálculos para que o professor veja que realmente sabem o conteúdo?

Luciana: Não, ele só pede para colocarmos a resposta. Não é necessário mostrar os cálculos.

Diante dessas falas, podemos levantar alguns questionamentos importantes: Será que os professores, de modo geral, estão realmente incentivando os alunos a justificar suas ações na coleta e organização dos dados? Ou será que apenas corrigem, dizendo se está certo ou errado, sem investigar o raciocínio por trás? Essas são reflexões que todo educador precisa considerar. Afinal, você está realmente ensinando ou apenas transmitindo conteúdo, sem se preocupar se o aluno está, de fato, aprendendo? Isso está em consonância com o que (Ponte *et al.* 1998, p. 10) defende, ao afirmar que o aluno deve “justificar e provar suas afirmações, explicitando matematicamente suas argumentações perante o professor”.

Portanto, nesta fase, observou-se que todos os grupos conseguiram cumprir as duas primeiras etapas da investigação: o reconhecimento da situação e a criação das conjecturas para resolver o desafio. No entanto, apenas o Grupo 2 avançou para a terceira etapa, desenvolvendo as competências essenciais da investigação sem a necessidade de ajustes. Os demais grupos enfrentaram dificuldades em manter um raciocínio consistente, o que impediu o progresso. A falta de ajustes adequados nas conjecturas e a dificuldade em identificar padrões claros limitaram o avanço desses grupos.

Na segunda etapa, ocorreu a fase de discussão entre os alunos, que foi relativamente breve, onde compartilharam suas descobertas. Todos estavam entusiasmados para entender como o grupo II completou a pirâmide tão rapidamente e qual era a pista contida na sua estrutura.

Diante disso, o grupo II manifestou o desejo de ser o primeiro a apresentar suas descobertas à turma, perguntando se poderia desenhar a pirâmide no quadro para que todos tivessem uma boa visão. Observe a imagem 14 e em seguida a fala da justificação da sua descoberta.

Imagem 14: justificação das conjecturas do grupo II para a turma.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Emanuel: pessoal, meu grupo percebeu que a soma dos dois tijolos de baixo resulta no tijolo de cima, e que, para descobrir o valor de um tijolo, poderia subtrair o número do tijolo de cima por um dos números de um tijolo de baixo, ou como é números pequenos, poderia ser por dedução. Por exemplo, no topo é só pensarmos, qual número que somado com +8 resulta em +15? Sabemos que é o+7 e só era aplicar esse raciocínio para o restante da pirâmide.

Ao ouvir isso, um dos integrantes do grupo I perguntou surpreso: “Era só isso?”. Eles expressaram o desejo de ter mais tempo para completar a pirâmide, pois haviam passado muito tempo tentando encontrar uma solução rápida, mas acabaram seguindo caminhos sem lógica. O grupo III comparou a atividade a um quebra-cabeça que exigia raciocínio, e comentou que, após a explicação dos colegas, a tarefa ficou mais fácil.

Logo, foi perceptível a frustração de alguns alunos por não terem conseguido completar a pirâmide. No entanto, essa frustração gerou uma atitude positiva, pois muitos pediram para levar a atividade para casa, mostrando um desejo de superar o desafio. Esse envolvimento reflete o comprometimento dos alunos com a aprendizagem e sua determinação em encontrar soluções, mesmo fora do ambiente escolar.

Nesse sentido, é fundamental que a fase de compartilhamento das descobertas de cada grupo aconteça. Isso possibilita que os alunos percebam que as dificuldades enfrentadas não foram exclusivas. Além disso, essa etapa os prepara para futuras atividades, incentivando-os a ficarem mais atentos na construção de figuras que precisam ser completadas com números, o que envolve observar a estrutura, procurar por padrões lógicos e organizar os dados de maneira eficiente.

Diante disso, apesar das dificuldades observadas, especialmente relacionadas ao descomprometimento de alguns alunos, possivelmente devido à pouca familiaridade com o formato da atividade, o desempenho geral dos grupos indicou que a atividade foi eficaz em atingir seus objetivos. A maioria dos alunos demonstrou um engajamento significativo nas discussões, explorando, debatendo e construindo conhecimento de forma ativa. Esse processo promoveu a comunicação, o trabalho em equipe e a argumentação, elementos essenciais para uma aprendizagem mais profunda e significativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que a implementação da investigação Matemática como estratégia pedagógica tem um grande potencial para promover uma aprendizagem significativa e dinâmica, contribuindo para o desenvolvimento das competências matemáticas dos alunos e colocando-os no centro do processo de aprendizagem.

Durante a realização da atividade, percebeu-se que os alunos não estavam habituados a trabalhar de forma autônoma, resultado de muitas vezes de uma prática escolar mais tradicional, em que o professor transmite o conteúdo e os alunos apenas respondem às atividades de maneira mecânica.

No entanto, a atividade investigativa proposta para a turma do 8º ano permitiu que os alunos explorassem, discutissem e construíssem conhecimento de maneira ativa, fomentando a comunicação, o trabalho em equipe e a argumentação. Com a mediação constante da professora pesquisadora, que estimulou a curiosidade e o engajamento dos alunos ao longo de todo o processo de aprendizagem, os estudantes puderam validar suas próprias conjecturas, resultando em uma experiência de aprendizado mais participativo e significativo.

Diante disso, é essencial que abordagens como a investigação Matemática sejam implementadas com maior frequência, a fim de promover o desenvolvimento de habilidades fundamentais, como raciocínio lógico, resolução de problemas e autonomia, indispensáveis para a formação de cidadãos críticos e criativos. Além disso, essa estratégia tem o potencial de despertar nos alunos um desejo mais profundo e reflexivo de aprender.

Por fim, sugere-se que estudos futuros ampliem a aplicação dessa estratégia pedagógica em diversos contextos e níveis de ensino, explorando novos formatos e abordagens que enriqueçam o processo educativo em Matemática. Espera-se que este trabalho sirva de inspiração para outros professores adotarem estratégias investigativas em suas aulas, promovendo uma experiência de ensino mais eficaz e gratificante para seus alunos.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. p. 160.

ALVES, W. J. S. **O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUCSP, 2010.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. *In*: PONTE, I. P. *et al.* (ed.), **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5.

DEL CARRATORE, Luís Roberto Rossi. **Pesquisa científica em comunicação: uma abordagem conceitual sobre os métodos qualitativo e quantitativo**. Comunicação & Inovação, 2009.

FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em educação Matemática: percursos Teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática: 7º ano: Ensino Fundamental, Anos Finais**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GHELLI, K. G. M.; SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. **Investigações Matemáticas: Fundamentos Teóricos para Aprendizagem Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. UNIUBE. VIII Encontro de Pesquisa em Educação, III Congresso Internacional Trabalho Docente e Processos Educativos, 2015.

KAMII, C.; ANDERSON, C. **Young Children Continue to Learn about Number: A New Look at the Data**. New York: Routledge, 2020.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas**. São Paulo: Epu, 1986.

LANGDON, N.; SNAPE, C. **Viva a Matemática**. Lisboa: Gradiva Júnior, 1984.

- LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- NOVA ESCOLA: **Revista mensal de educação**. Editora Abril, n.170, março de 2004, 66p.
- OLIVEIRA, G. S. **Metodologia do Ensino de Matemática: fundamentos teóricos e práticos**. Uberlândia - MG: Fucamp, e-book, 2020.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Autêntica Editora, 2003.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- PONTE, J. P. **Explorar e investigar em matemática: uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem**. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 21, p. 13-30, mar. 2010.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. p. 160.
- PONTE, J.P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O. **trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 41-70, 1998.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica editora. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2009.
- PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms: A pack for teachers**. Oxford: University of Oxford, Department of Education Studies, 1987.
- RAMOS, J. S. **Matemática experimental**. Educação e Matemática, 1997. p. 7-10.
- SANTOS, C. H. M.; BELLINE, W. **Investigações Matemáticas em Sala de Aula: Propondo e Analisando a Aplicação de Tarefas Investigativas na Educação Básica**. VIII EPCT - Encontro de Produção Científica e Tecnológica. O Método Científico, 21 a 25 de outubro de 2013.
- SKOVSMOSE, O. **Desafios da Educação Matemática Crítica**. São Paulo: Papirus. 2008.
- STEWART, I. **Os problemas da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.
- SPIRA. **Ensino de Matemática esbarra nos problemas de leitura**. Disponível em: <<https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/ensino-de-matematica-esbarra-nos-problemas-de-leitura-11556153>>. Acesso em: 30 set. 2024.

SILVEIRA, J. O. **Um Estudo sobre Ansiedade Matemática e Motivação em Alunos do Ensino Fundamental**. Monografia Especialização em Educação em Matemática e Ciências dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio – Universidade Tecnológica do Paraná, Londrina, 2017.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, acima de tudo, a Deus, por mais um sonho realizado. Seu cuidado e seu amor me trouxeram até aqui, capacitando-me a cada amanhecer e sustentando-me em todos os momentos. Sou eternamente grata por todas as tuas bênçãos.

Agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, Helena Maria da Silva e Valdemiro Guilherme da Silva. Apesar de não terem tido a oportunidade de estudar, sempre acreditaram no valor da educação e me incentivaram a seguir esse caminho. Sou profundamente grata pelo apoio incondicional que me deram ao longo de toda a minha trajetória.

Agradeço aos meus sete irmãos, especialmente à minha irmã Luciana, que assumiu as responsabilidades da casa e cuidou do meu filho durante minha ausência, permitindo que eu me dedicasse integralmente aos estudos. Sua generosidade e apoio foram fundamentais nessa jornada.

Ao meu filho, um dos presentes mais preciosos que Deus me deu, o meu grande amor a força que me motiva a seguir em frente.

Ao meu orientador, Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento, que, desde o momento em que aceitou meu convite, me acolheu com amizade, respeito e dedicação. Suas orientações e motivações foram fundamentais para o meu crescimento profissional e pessoal, e sou eternamente grata por isso.

Às professoras integrantes da banca examinadora, Professora Mestre Maria da Conceição Vieira Fernandes e Professora Doutora Fabíola da Cruz Martins, agradeço por aceitarem participar deste trabalho científico, oferecendo valiosas contribuições por meio de comentários e sugestões.

Aos meus amigos, que sou imensamente grata a eles por tornarem essa caminhada mais leve e por me apoiarem sempre. Agradeço especialmente à Bárbara e à Aparecida, que estiveram ao meu lado desde o início.

A todos os professores que me inspiraram e revelaram a beleza do ensino, mostrando que aprender pode ser ainda mais enriquecedor do que ensinar.

Agradeço também a todos os meus alunos, com quem tive o privilégio de ensinar e aprender com eles.

Mais uma vez, meu muito obrigada!