



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS**  
**CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**LEONARDO FELIX DA SILVA**

**PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

**PATOS**

**2024**

LEONARDO FELIX DA SILVA

**PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática pura e aplicada

**Orientador:** Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

**PATOS**

**2024**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586p Silva, Leonardo Felix da.  
Probabilidade geométrica [manuscrito] / Leonardo Felix da  
Silva. - 2024.  
35 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de  
Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Probabilidade geométrica. 2. Problema da agulha de  
Buffon. 3. Aproximação para  $\pi$ . I. Título

21. ed. CDD 519

LEONARDO FELIX DA SILVA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 22/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ademir Benteus Pampu** (\*\*\*.824.629-\*\*), em **28/11/2024 14:57:45** com chave **458a9350adb211efb08206adb0a3afce**.
- **Rozana Bandeira da Silva** (\*\*\*.173.924-\*\*), em **28/11/2024 15:11:47** com chave **3b3c8da2adb411ef804b06adb0a3afce**.
- **Jean Pereira Soares** (\*\*\*.449.544-\*\*), em **28/11/2024 16:49:42** com chave **e943e0b4adc111ef8fc91a1c3150b54b**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse [https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar\\_documento/](https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/) e informe os dados a seguir.

**Tipo de Documento:** Termo de Aprovação de Projeto Final

**Data da Emissão:** 02/12/2024

**Código de Autenticação:** 8e8a2f



"A teoria das probabilidades é apenas o bom senso reduzido ao cálculo."

Pierre-Simon Laplace

## RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar um lado da probabilidade que não é muito explorado, principalmente nas salas de aula, que é a probabilidade geométrica. Começamos o trabalho com uma breve revisão de conceitos mais básicos de probabilidade, utilizando exemplos, e posteriormente apresentamos definições mais abrangentes de probabilidades, como a definição frequentista, a definição axiomática de probabilidade e a lei dos grandes números. O principal tópico de estudo foi o problema das agulhas de Buffon, que é um dos principais problemas da probabilidade geométrica. Dividimos o problema em três situações e realizamos suas demonstrações. Após isso, fizemos uma aplicação interessante desse problema, onde é possível encontrar uma aproximação para o valor de  $\pi$ . No trabalho, também é apresentada uma forma de estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ , a proporção áurea  $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$  e  $\sqrt{3}$  a partir do problema da agulha de Buffon, onde a agulha é substituída por um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular, respectivamente.

**Palavras-Chave:** Probabilidade geométrica. Problema da agulha de Buffon. Aproximação para  $\pi$ .

## ABSTRACT

The present work aims to present an aspect of probability that is not widely explored, especially in classrooms, which is geometric probability. We begin the work with a brief review of the more basic concepts of probability, using examples, and then present broader definitions of probabilities, such as the frequentist and axiomatic definitions of probability, and the law of large numbers. The main topic of study was Buffon's needle problem, which is the principal problem in geometric probability. We divided the problem into three situations and carried out their demonstrations. After that, we made an interesting application of this problem where it is possible to find an approximation of  $\pi$ . The work also presents a way to estimate the irrational numbers  $\sqrt{2}$ , the golden ratio  $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ , and  $\sqrt{3}$  using Buffon's needle problem, where the needle is replaced by a square, a regular pentagon, and a regular hexagon, respectively.

**Keywords:** Geometric probability. Buffon's needle problem. Approximation for  $\pi$ .

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	7
<b>2 RESULTADOS PRELIMINARES.....</b>	<b>9</b>
2.1 Espaço amostral e evento.....	9
2.2 Definição axiomática de probabilidade.....	11
2.3 Algumas propriedades de probabilidade.....	13
2.4 Distribuição Binomial.....	13
2.5 Probabilidade condicional.....	14
2.6 Variáveis aleatórias.....	15
2.6.1 Valor Esperado, Esperança ou Média.....	16
2.7 Lei forte dos grandes números.....	17
2.8 Definição de Probabilidade Geométrica.....	18
<b>3 O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON.....</b>	<b>21</b>
3.1 Introdução ao problema das agulhas de Buffon.....	21
3.2 Demonstração do problema da agulha de Buffon.....	21
3.3 Estimando o valor de $\pi$ .....	26
<b>4 ESTIMANDO IRRACIONAIS.....</b>	<b>30</b>
4.1 Estimando números irracionais.....	30
4.2 Cálculos de Probabilidade.....	30
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>34</b>
REFERÊNCIAS.....	35



## 1 INTRODUÇÃO

A teoria da probabilidade é um campo crucial da Matemática que se ocupa da análise de fenômenos aleatórios e da modelagem da incerteza. Desde seus primórdios, com os trabalhos de pioneiros como Blaise Pascal e Pierre de Fermat, a probabilidade evoluiu para se tornar um componente essencial do currículo educacional, influenciando áreas como estatística, física, economia, biologia e ciências sociais.

A aplicação da probabilidade no cotidiano é vasta e prática, desde a avaliação de riscos em seguros e investimentos até a previsão de fenômenos naturais e a tomada de decisões informadas em situações de incerteza. A compreensão desses conceitos ajuda as pessoas a navegarem melhor no mundo real. No âmbito educacional, o estudo da probabilidade fortalece as habilidades de raciocínio matemático dos alunos, ensinando-os a trabalhar com números, a compreender e interpretar dados, e a usar modelos matemáticos para representar situações reais.

No documento Norteador da Educação Brasileira a “Base Nacional Comum Curricular” (BNCC), o ensino de probabilidades inicia-se nos últimos anos do ensino fundamental, com foco em experimentos aleatórios, análise de eventos e cálculos básicos de probabilidades. No ensino médio, esses conceitos são aprofundados, levando a experimentos mais complexos e abordagens mais formais e abrangentes.

O problema da agulha de Buffon é um problema clássico de probabilidade geométrica, que pode explorar diversas habilidades específicas da BNCC e enriquecer o ensino de probabilidade. Por exemplo, a habilidade EM13MAT511 — “Reconhecer a presença de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar as implicações em cálculos de probabilidade” — pode ser usada diretamente com esse experimento. Ao lançar uma agulha através de retas paralelas e ver se ela cruza uma linha, os alunos são expostos a um espaço amostral contínuo e a eventos que não são necessariamente equiprováveis, expandindo assim a sua compreensão dos tipos de eventos e probabilidades.

Além disso, o uso da probabilidade geométrica no problema da agulha de Buffon ajuda os alunos a explorar as propriedades contínuas dos espaços amostrais e, assim, compreender as aplicações da Matemática no mundo real. Tais atividades também podem promover uma

melhor compreensão do conjunto dos números reais, permitindo a discussão da distribuição dos números racionais e irracionais e como a densidade dos números racionais afeta a probabilidade em experimentos contínuos.

Esse trabalho buscou mostrar que a probabilidade não se trata apenas do cálculo da razão de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis, mas que a partir dessa razão podemos atingir resultados mais interessantes e por vezes inesperados. No segundo capítulo fizemos referência a alguns resultados e propriedades mais conhecidos de probabilidade como a de espaço amostral, evento, probabilidade condicional e eventos mutuamente exclusivos como também apresentamos definições que normalmente não são citadas aos estudantes do ensino básico, mas que com certeza agregariam muito na aprendizagem sendo elas a definição frequentista, a definição axiomática de probabilidade, o teorema da lei dos grandes números e a definição de probabilidade geométrica.

No terceiro capítulo tratamos de um dos principais problemas da probabilidade geométrica que é o problema das agulhas de Buffon que se trata do cálculo da probabilidade de uma agulha lançada aleatoriamente em um plano com retas paralelas cair intersectando alguma dessas retas. Também estimamos o valor de  $\pi$  usando o problema da a agulha de Buffon.

Já no terceiro e último capítulo fizemos uma aplicação interessante do problema da agulha de Buffon onde ao substituir a agulha por um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular conseguimos estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e a proporção áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

### 2.1 Espaço amostral e evento

O espaço amostral é definido como o conjunto de todas as soluções possíveis de um experimento e é representado pela letra  $S$ . Observe os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.1.1** Se o experimento consiste em jogar duas moedas e após o lançamento verificar a face voltada para cima, considerando  $K$  quando a face voltada para cima for cara e  $C$  quando a face voltada para cima for coroa, então o espaço amostral será o conjunto com todas as possibilidades desse experimento:

$$S = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}.$$

Note que o lançamento de duas moedas pode resultar em quatro combinações: ambas "cara" ( $K,K$ ), a primeira "cara" e a segunda "coroa" ( $K,C$ ), a primeira "coroa" e a segunda "cara" ( $C,K$ ), ou ambas "coroa" ( $C,C$ ).

**Exemplo 2.1.2** Se o experimento consiste em verificar o sexo de um recém-nascido, considerando  $m$  como sexo masculino e  $f$  como sexo feminino, então o espaço amostral será o conjunto de todas as possibilidades desse experimento:

$$S = \{m, f\}.$$

Ou seja, se o resultado for ( $m$ ) significa que o bebê é do sexo masculino e se o resultado for ( $f$ ) significa que o bebê é do sexo feminino. Note que a chance do bebê ser do sexo masculino ou do sexo feminino é a mesma. Quando cada ponto do espaço amostral tem a mesma probabilidade de ocorrer, dizemos que esse espaço amostral é equiprovável.

**Exemplo 2.1.3** Se o experimento consiste em lançar dois dados e anotar o número da face voltada para cima então o espaço amostral será composto de 36 possibilidades que representam os pares de números das faces voltadas para cima dos 2 dados:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

**Exemplo 2.1.4** Se o experimento consiste em registrar o tempo de duração da vida útil de uma lâmpada fluorescente representado pela letra  $t$ , então o espaço amostral será:

$$S = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}.$$

Observe que diferentemente dos exemplos anteriores, no exemplo 4 temos que o espaço amostral é um intervalo de números reais, nesse caso dizemos que esse é um **espaço amostral contínuo**, ou seja, é um espaço amostral que contém um intervalo (tanto finito quanto infinito) de números reais.

Definimos como evento de um experimento, todo subconjunto formado por possíveis resultados deste experimento, ou seja, qualquer subconjunto do espaço amostral é conhecido como um evento e é representado pela letra E. Ademais, dizemos que E ocorreu quando o resultado do experimento estiver contido em E. Observe alguns exemplos de evento:

**No exemplo 2.1.1**, considerando  $E = \{(C, K), (C, C)\}$ , então E é o evento em que a primeira moeda lançada da coroa.

**No exemplo 2.1.2**, se  $E = \{m\}$ , então E é o evento em que o bebê é do sexo masculino. Analogamente, se  $G = \{f\}$ , então G é o evento em que o bebê é do sexo feminino.

**No exemplo 2.1.3**, considerando  $E = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ , então E é o evento em que a soma do resultado dos dados é igual a 5.

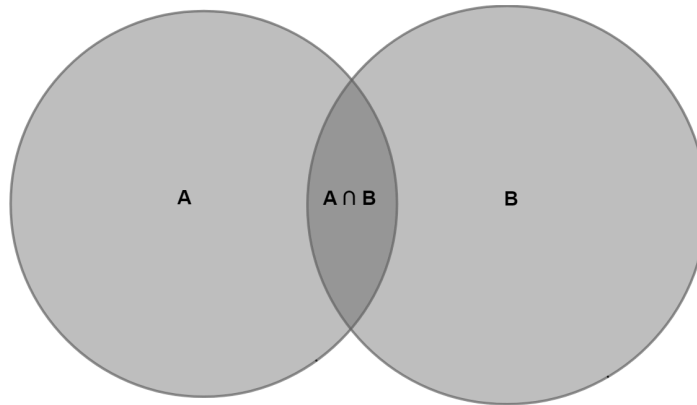
**No exemplo 2.1.4**, se  $E = \{t; 0 \leq t \leq 7000\}$ , então E é o evento em que a lâmpada não dura mais que 7000 horas.

Sejam A e B, quaisquer dois eventos de um espaço amostral S, podemos definir um novo evento A união B (denotado por  $A \cup B$ ) definido como um evento formado por todos os resultados possíveis pertencentes a A ou B, ou seja, o evento  $A \cup B$  ocorrerá se A ou B ocorrer. Em termos matemáticos temos que  $A \cup B = \{F \in S; F \in A \text{ ou } F \in B\}$ .

Levando em consideração o exemplo 2.1.2, se o evento  $E = \{m\}$  e  $G = \{f\}$ , então  $E \cup G = \{m, f\}$ . Dessa forma,  $E \cup G$  corresponde a todo espaço amostral S.

De forma análoga, para quaisquer dois eventos A e B, podemos definir o novo evento A interseção B (denotado por  $A \cap B$ ) definido como o evento formado por todos os elementos que pertencem tanto em A quanto a B. Ou seja, o evento  $A \cap B$  ocorrerá apenas se A e B ocorrerem. Em termo matemáticos temos que  $A \cap B = \{F \in S; F \in A \text{ e } F \in B\}$ . Esse conceito pode ser representado graficamente com um diagrama de Venn, como mostrado abaixo:

Figura 2.1: Representação da união de conjuntos utilizando o diagrama de Venn.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

No diagrama acima, cada círculo representa um evento (A ou B). A região onde os dois círculos se sobrepõem representa  $A \cap B$ , ou seja, os resultados que pertencem simultaneamente a A e B.

Levando em consideração o exemplo 2.1.1, se  $E = \{(K, K), (K, C), (C, K)\}$  é o evento em que pelo menos uma cara aparece nas duas moedas e  $G = \{(K, C), (C, K), (C, C)\}$  é o evento em que pelos menos uma coroa aparece, então  $E \cap G = \{(K, C), (C, K)\}$  é o evento em que exatamente uma cara e uma coroa aparecem.

No exemplo 2.1.3, se  $E = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$  é o evento em que a soma do resultado dos dados é igual a 5 e  $G = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$  é o evento em que a soma do resultado dos dados é igual a 6, então o evento  $E \cap G$  não poderia ocorrer, pois os eventos E e G não tem nenhum resultado em comum. Esse tipo de evento é chamado de evento vazio e é representado pelo símbolo  $\emptyset$  (ou seja,  $\emptyset$  se refere ao evento formado por nenhum resultado). Ademais, se  $E \cap G = \emptyset$ , então dizemos que E e G são **mutuamente exclusivos**.

## 2.2 Definição axiomática de probabilidade

Seja S um espaço amostral. Considere uma função  $P: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre o conjunto das partes de S, ou seja, P associa a cada elemento  $E \subset S$  um número real  $P(E)$ . Tal função é uma probabilidade se:

- (i)  $0 \leq P(E) \leq 1, \forall E \subset S$ ;

(ii)  $P(S) = 1$ ;

(iii)  $E, G \subset S, E \cap G = \emptyset \Rightarrow P(E \cup G) = P(E) + P(G)$ ;

O axioma (iii) também pode ser representado da seguinte forma:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

A definição axiomática acima foi introduzida por Kolmogorov no século XX e é chamada de definição geral de probabilidades.

**Exemplo 2.1.5** Considere um evento  $E \subset S$  e, para todo  $n \geq 1$ , uma sequência de  $n$  repetições independentes do experimento em questão. Se  $n_E$  é o número de ocorrências de  $E$ , definimos:

$$P(E) = \frac{n_E}{n} = fn(E).$$

Essa definição é um caso particular da definição axiomática e é chamada de **definição frequentista de probabilidade** e ela é um caso particular da definição axiomática de probabilidade quando consideramos que todos os pontos do espaço amostral têm a mesma probabilidade de ocorrerem.

Para mostrar que a definição frequentista é um caso particular da definição axiomática, primeiramente suponha que para todo evento  $E \subset G$  o limite  $fn(E) = P(E)$  existe. Dessa forma, esse limite, define uma função  $P: p(S) \rightarrow R$ . Isso significa que  $P$  é uma função que toma como entrada um evento (um subconjunto de  $S$ ) e retorna um número real que representa a probabilidade desse evento.

Ademais, temos que

$$0 \leq n_E \leq n \Rightarrow 0 \leq fn(E) = \frac{n_E}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(E) = fn(E) \leq 1.$$

$$n_S = n, \forall n \geq 1 \Rightarrow fn(S) = 1, \forall n \geq 1 \Rightarrow P(S) = fn(S) = 1.$$

Note que se  $E, G \subset S$  com  $E \cap G = \emptyset$ , então o número de ocorrências simultâneas de  $E$  e  $G$  em  $n$  experimentos realizados deve ser 0 e, portanto,  $n_{E \cup G} = n_E + n_G$ . Dessa forma,

$$P(E \cup G) = \frac{n_{E \cup G}}{n} = \frac{n_E}{n} + \frac{n_G}{n} = P(E) + P(G).$$

### 2.3 Algumas propriedades de probabilidade

Se considerarmos uma probabilidade conforme estabelecido na Definição axiomática, temos que:

(i)  $P(\emptyset) = 0$ ;

(ii) Se  $E_1, E_2, \dots, E_n$  são eventos mutuamente exclusivos, ou seja,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para todo  $i, j$  tais que,  $1 \leq i < j \leq n$ , então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i);$$

(iii) Para quaisquer eventos  $E, G \subset S$ , temos que

$$P(E \cup G) = P(E) + P(G) - P(E \cap G);$$

(iv)  $P(E) = 1 - P(E^c)$ ;

(v)  $E \subset G \subset S \Rightarrow P(E) \leq P(G)$ ;

Não iremos no ater a demonstração dessas propriedades, mas suas demonstrações podem ser encontradas no livro probabilidade além da combinatória tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico de Vitor Amorim e Grazielle Mozer [1]

### 2.4 Distribuição Binomial

A distribuição binomial é uma das mais importantes na teoria da probabilidade, porque modela situações em que um experimento aleatório é repetido várias vezes independentemente, e cada repetição resulta em apenas dois resultados possíveis. Esses são geralmente conhecidos como "sucesso" e "fracasso". Tais aspectos das distribuições frequentemente aparecem em problemas práticos, por exemplo, encontrar a probabilidade de uma série de testes ser bem-sucedida — desde jogar moedas até considerar taxas de aprovação em exames.

**Definição 2.4.1:** Considere uma sequência de  $n$  experimentos aleatórios independentes com dois resultados possíveis: sucesso, com probabilidade  $p$  para cada experimento, e fracasso, com probabilidade  $1 - p$  também para cada experimento. Se  $X$  é a variável aleatória que descreve o número de sucessos nessa sequência, então, a distribuição de probabilidades de  $X$  é chamada de Distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

## 2.5 Probabilidade condicional

Considere um experimento aleatório onde lançamos dois dados justos e independentes. Cada dado possui seis faces numeradas de 1 a 6. O espaço amostral desse experimento pode ser representado pelo conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  onde  $a$  e  $b$  são os resultados das faces voltadas para cima dos lançamentos do primeiro e do segundo dado, respectivamente. Assim, o espaço amostral contém 36 elementos, pois há 6 possíveis resultados para o primeiro dado e 6 possíveis resultados para o segundo dado, resultando em 36 combinações possíveis conforme o exemplo 2.1.3. Como os dados são justos e independentes, cada um desses 36 resultados possíveis tem a mesma probabilidade de ocorrer. Portanto, a probabilidade de qualquer resultado específico  $(a, b)$  ocorrer é dada por:  $P((a, b)) = \frac{1}{36}$ .

Agora, digamos que o resultado do primeiro dado seja 2. Sabendo disso, qual seria a probabilidade de que a soma dos dois dados seja igual a 6? O evento "o resultado do primeiro dado é 2" pode ser representado pelo conjunto de todos os pares  $(2, b)$ , onde  $a$  e  $b$  varia de 1 a 6. Formalmente, este evento pode ser escrito como:  $F = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$ . Dado que o resultado do primeiro dado é 2, as possíveis combinações para o par  $(2, b)$  são seis, correspondendo às diferentes faces do segundo dado. Cada uma dessas combinações  $(2, b)$  tem a mesma probabilidade condicional de ocorrer, que é:  $P((2,b) | F) = \frac{1}{6}$ .

Agora, queremos determinar a probabilidade de que a soma dos dois dados seja igual a 6, dado que o primeiro dado resultou em 2. Este evento pode ser representado pelo conjunto:  $E = \{(2,4)\}$ . A soma será igual a 6 se o segundo dado mostrar 4, já que  $2+4 = 6$ . Portanto, há apenas uma combinação  $(2, 4)$  que satisfaz esta condição. A probabilidade condicional de que a soma dos dois dados seja igual a 6, dado que o primeiro dado é 2, é a probabilidade do evento  $F$  dentro do evento  $E$ :  $P(E|F) = \frac{1}{6}$ . Portanto, a probabilidade de que a soma dos dois dados seja igual a 6, dado que o primeiro dado resultou em 2, é:  $P(E|F) = \frac{1}{6}$ .

Se os eventos  $E$  e  $F$  representarem, respectivamente, o evento em que a soma dos dados é igual a 6 e o evento em que o primeiro dado é 2, então a probabilidade que acabamos de calcular é chamada de **probabilidade condicional** de que  $E$  ocorra dado que  $F$  ocorreu e é representada por  $P(E|F)$ .



Uma fórmula geral para a probabilidade condicional de dois eventos A e B ou seja,  $P(A|B)$  que seja válida para todos os eventos A e B é deduzida da mesma maneira: se o evento B ocorrer, então, para que A ocorra, precisamos que a ocorrência real seja um ponto que esteja tanto em A quanto em B, ou seja, ela deve estar na intersecção  $A \cap B$ . Como sabemos que o evento B ocorreu, então temos que B é o nosso novo espaço amostral; dessa forma, a probabilidade de que o evento  $A \cap B$  ocorra será igual à probabilidade de  $A \cap B$  relativa à probabilidade de B. Com isso, temos a seguinte definição.

**Definição 2.5.1:** Dado  $B \subset E$  um evento no espaço amostral E de modo que  $P(B) > 0$ , definimos a probabilidade condicional de A acontecer, dado que B aconteceu por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Exemplo 2.5.1:** Considere o lançamento de um dado honesto de 6 faces e os eventos A: sair um número par e B: sair um número primo. Qual a probabilidade de acontecer o evento B, sabendo que o evento A já ocorreu?

Sabendo que o espaço amostral S do evento A é  $S = \{2,4,6\}$  e que o espaço amostral F do evento B é  $F = \{2,3,5\}$ , temos que  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  e  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de sair um número que seja par e primo. Como  $A \cap B = \{2\}$ , temos:  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . Portanto, pela definição de probabilidade condicional temos

$$P(B|A) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

## 2.6 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que designa um número real para cada resultado de um experimento aleatório. Dois tipos de variáveis aleatórias são variável aleatória discreta e variável aleatória contínua.

Por exemplo, ao realizar o lançamento de um dado a variável aleatória X pode representar o número que aparece na face do dado que ficou voltada para cima após o lançamento, onde X pode assumir um valor de 1 a 6, nesse caso X é uma variável aleatória discreta.

Outro exemplo seria ao realizar um experimento que consiste em medir a altura de uma pessoa, nesse caso a variável aleatória  $Y$  representa a altura de uma pessoa medida em metros e pode assumir qualquer valor real dentro de um intervalo como 1,40m e 2,00m, neste exemplo  $Y$  é uma variável aleatória contínua.

**Definição 2.6.1:** Seja  $(S, A, P)$  um espaço de probabilidade. Dizemos que uma função  $X : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória se, para todo intervalo  $I \in \mathbb{R}$ , vale  $\{\omega \in S : X(\omega) \in I\} \in A$ .

**Definição 2.6.2:** (a) Uma variável aleatória  $X$  é dita discreta se existe um conjunto enumerável  $B = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $P(X \in B) = 1$ .

(b) Uma variável aleatória  $X$  é dita absolutamente contínua se existe uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

digamos, contínua por partes, tal que  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ , para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### 2.6.1 Valor Esperado, Esperança ou Média

**Exemplo 2.6.1.1** Quando estamos assistindo uma aula e perguntamos a um colega quanto tempo falta para a aula acabar, ele vai nos fornecer um valor esperado, ou seja, o tempo restante que falta para a aula acabar.

No exemplo acima, o colega resumiu a informação de um modelo em um único número, o valor esperado. A esperança de uma variável aleatória representa o valor médio esperado decorrente dessa variável, que pode não corresponder necessariamente a uma quantidade observável, conforme descrito na definição a seguir.

**Definição 2.6.1.1:** Seja  $X$  uma variável aleatória.

(a) Se  $X$  é discreta assumindo os valores  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , então definimos a esperança de  $X$  (caso

exista) como  $EX = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$ .

(b) Se  $X$  é absolutamente contínua com densidade  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , então definimos a esperança de

$$X \text{ (caso exista) como } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

## 2.7 Lei forte dos grandes números

A Lei forte dos grandes números afirma que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição converge para a média da distribuição, com probabilidade 1. Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas de forma uniforme, cada uma com a média finita  $E[X_i]$ . Portanto, com probabilidade 1,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como resultado da aplicação da lei de grandes números, suponha que seja feita uma sequência de tentativas independentes de um experimento. Suponha que  $E$  seja um evento fixo do experimento e que  $P(E)$  seja a probabilidade de que  $E$  ocorra em cada tentativa. Fazendo

- $X_i = 1$  se  $E$  ocorrer na  $i$ -ésima tentativa
- $X_i = 0$  se  $E$  não ocorrer na  $i$ -ésima tentativa

pela lei dos grandes números temos que, com probabilidade 1

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow E[X] = P(E).$$

Note que como  $X_1 + \dots + X_n$  representa o número de vezes em que o evento  $E$  ocorre nas primeiras  $n$  tentativas, a equação acima pode ser interpretada como sendo o número de vezes que o evento aconteceu sobre o número total de tentativas ocorridas, e isso converge justamente para a probabilidade do evento  $P(E)$  ocorrer.

Essa demonstração pode ser encontrada no livro probabilidade Um curso moderno com aplicações de Sheldon Ross [3].

## 2.8 Definição de Probabilidade Geométrica

A ideia de atribuir à probabilidade de um evento ocorrer a uma razão entre a cardinalidade entre dois conjuntos finitos, os casos favoráveis e os casos possíveis, é o que sustenta a definição clássica de probabilidades. A probabilidade também pode ser interpretada como a razão entre duas medidas de conjuntos. A Probabilidade Geométrica é sustentada por essa noção.

Com isso, nesta seção iremos considerar  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ , sendo respectivamente reta ou plano e a partir disso iremos unir a geometria com a probabilidade. Para isso trabalharemos com subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2$  que são **mensuráveis**. No nosso caso, o termo mensuráveis que tem uma definição precisa na teoria de medidas, se refere a conjuntos em que é possível calcular seu comprimento e área nos casos da reta e do plano respectivamente.

Inicialmente vamos considerar em  $\mathbb{R}$  uma coleção de subconjuntos que são intervalos ou a união desses intervalos, e nesse caso definimos a medida ( $\mu$ ) como o comprimento destes intervalos de acordo com as seguintes propriedades

- Para um intervalo qualquer  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  da reta:  $\mu([a, b]) = b - a$ ;
- $\mu(E \cup G) = \mu(E) + \mu(G)$  quando  $E \cap G = \emptyset$ .

Observe que a segunda propriedade é a propriedade aditiva de probabilidade que é indispensável para calcular a união desses intervalos. Sabendo que os conjuntos considerados aqui são intervalos, sejam eles abertos ou fechados, como nosso objetivo é calcular o comprimento deles, certamente não queremos calcular um mesmo comprimento duas vezes e é nesse ponto que a propriedade aditiva de probabilidade aparece com a condição de que a intersecção desses conjuntos seja vazia, garantindo que ao calcular essa medida não estaremos considerando o mesmo comprimento duas vezes. Ademais, como estamos considerando intervalos abertos e fechados, note que se o intervalo considerado for fechado, existe a possibilidade que esse intervalo seja degenerado, ou seja, um intervalo com início e fim no mesmo ponto; nesse caso, o seu comprimento será igual a zero.

Agora consideramos em  $\mathbb{R}^2$  uma coleção de subconjuntos em que é possível calcular a área desses subconjuntos sendo  $M(A) = \text{área}(A)$  de acordo com as seguintes propriedades

- Para uma região plana mensurável  $A \subset \mathbb{R}^2$   $\mu(A) = \text{área}(A)$

- $\mu(E \cup G) = \mu(E) + \mu(G)$  quando  $E \cap G = \emptyset$ .

Dessa forma, se considerarmos por exemplo um conjunto em  $\mathbb{R}^2$  sendo ele delimitado por funções contínuas, conseguimos calcular a área desse conjunto utilizando a primeira propriedade e se for a união de dois conjuntos desse tipo utilizaremos a segunda propriedade que também é a propriedade aditiva de probabilidade e que assim como no caso anterior garante que um mesmo comprimento de área não seja calculado duas vezes.

Ao restringir os espaços amostrais aqueles em que podemos calcular o seu comprimento, área e volume respectivamente em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , podemos estabelecer a seguinte definição intuitiva de probabilidade geométrica:

**Definição 2.8.1:** Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto no qual é possível calcular seu comprimento e além disso o seu comprimento é finito e definido como  $\mu(S)$ . Então, seja  $E \subset S$  um conjunto mensurável, com medida  $\mu(E)$ , a probabilidade de  $E$  ocorrer é dada por

$$P(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(\Omega)}.$$

A definição anterior deve ser vista como a razão entre dois comprimentos, áreas ou volumes com o objetivo de calcular o tamanho do evento  $E$  em relação ao espaço amostral  $S$ . Assim, selecionando um ponto aleatório de  $S$ , a probabilidade de ele estar em  $E$  é dada por essa razão. Isso é exatamente o que fazemos na definição clássica de probabilidades.

**Exemplo (O Sumiço dos Racionais):** Ao selecionar aleatoriamente um ponto de um intervalo fechado  $[a, b]$  qualquer, com  $a \neq b$ , qual é a probabilidade de que sua abscissa, ou seja, o seu eixo  $x$  seja racional?

Podemos usar a Definição geométrica de probabilidade 2.2.3 no espaço amostral  $S = [a, b]$ , onde  $\mu$  é o comprimento de um intervalo (ou a soma de seus comprimentos). Portanto,  $\mu([c, d]) = d - c$  para qualquer intervalo  $[c, d] \subset [a, b]$ .

Além disso, observe que um conjunto unitário  $\{x\}$  pode ser considerado um intervalo degenerado  $[x, x]$  e, assim, cada conjunto unitário tem medida nula, pois  $\mu(\{x\}) = \mu([x, x]) = x - x = 0$ .

No entanto, sabemos que o conjunto dos números racionais é enumerável e, portanto, o evento de interesse  $E = S \cap \mathbb{Q}$  é enumerável. Dessa forma, o conjunto dos números racionais do intervalo  $[a, b]$  é representado como

$$E = \{r_1, r_2, r_3, \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\}.$$

Note que estamos lidando com conjuntos unitários  $\{r_1\}$ ,  $\{r_2\}$ ,  $\{r_3\}$ ... e como sabemos a intersecção de conjuntos unitários é vazia. Logo, segue do axioma da união da definição axiomática e da definição de probabilidade geométrica que

$$P(A) = P(\{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \{r_3\} \cup \dots) = P(\{r_1\}) + P(\{r_2\}) + P(\{r_3\}) + \dots =$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(\{r_i\})}{\mu([a, b])} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{b-a} = 0.$$

ou seja, ao considerar a probabilidade de um ponto de vista geométrico, a probabilidade de um número  $x$  escolhido nesse intervalo  $[a, b]$  ser um número racional, nesse caso, é igual a 0.

Ademais, se considerarmos  $A = Q \cap [a, b]$  e  $B = Q^c \cap [a, b]$ , note que  $A \cap B = \emptyset$ , agora considerando o axioma da união da definição axiomática temos que a probabilidade do nosso espaço amostral ocorrer, ou seja,  $A \cup B = [a, b]$  ocorrer será  $P([a, b]) = P(A \cup B)$ . Pela definição de probabilidade geométrica segue-se que

$$1 = \frac{\mu[a, b]}{\mu[a, b]} = P([a, b]) = P(A) + P(B).$$

Sabendo que  $P(A) = 0$ , então obtemos  $1 = P(B)$ , ou seja, a probabilidade de sortear um número irracional no intervalo  $[a, b]$ , nesse caso, seria 100% de chance de sortear um irracional.

### 3 O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

#### 3.1 Introdução ao problema das agulhas de Buffon

Georges-Louis Leclerc, mais tarde conhecido como Conde Buffon, nasceu na cidade de Montbard, no sul da França, em 1707. Georges-Louis Leclerc foi um famoso naturalista, matemático e estudioso francês amplamente reconhecido por seu trabalho na *Histoire Naturelle*, uma enciclopédia de ciências naturais. Embora Buffon seja mais conhecido por seus estudos em biologia e geologia, ele também se interessava por problemas matemáticos, especialmente aqueles relacionados à probabilidade.

O problema das agulhas de Buffon foi apresentado pela primeira vez em 1777 como uma curiosidade matemática durante suas reflexões sobre probabilidade geométrica. O cenário apresentado por Buffon para esse problema é simples mas de grande profundidade e diferentemente dos problemas tradicionais de probabilidade (como o lançamento de dados ou moedas), ele combina elementos de cálculo e de geometria o que oferece uma nova perspectiva para o estudo da aleatoriedade.

Para entender esse problema, imagine um plano regido por retas paralelas equidistantes entre si no qual será lançado aleatoriamente uma agulha cujo comprimento pode ser maior, menor ou igual a distância existente entre as retas do plano. Dessa forma, o que faremos nesse problema é calcular a probabilidade da agulha atingir uma das retas paralelas.

#### 3.2 Demonstração do problema da agulha de Buffon

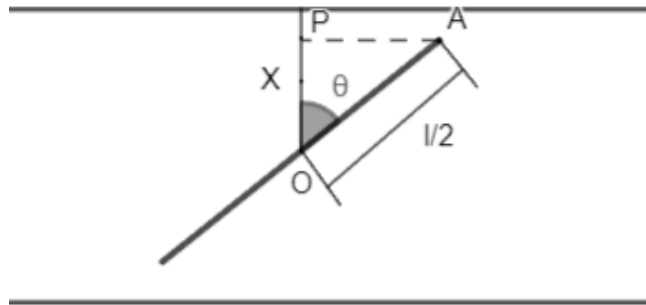
Considere um plano regido por retas paralelas equidistantes entre si. Seja  $d$  a distância entre uma reta e outra e  $l$  o comprimento da agulha, o nosso desejo é calcular a probabilidade da agulha cruzar uma das retas do plano. Sabendo que o comprimento da agulha pode ser menor, maior ou igual a distância existente entre as retas, dividiremos esse problema em três casos distintos respectivamente.

##### **Primeiro caso:** $l = d$

A partir das figuras 3.1 e 3.2, é possível notar que os eventos de interesse são aqueles em que  $X$  é menor que o cateto adjacente do triângulo OPA de argumento  $\theta$ , sendo  $X$  a distância entre o centro da agulha e a linha do plano mais próxima e  $O$  o ponto médio da

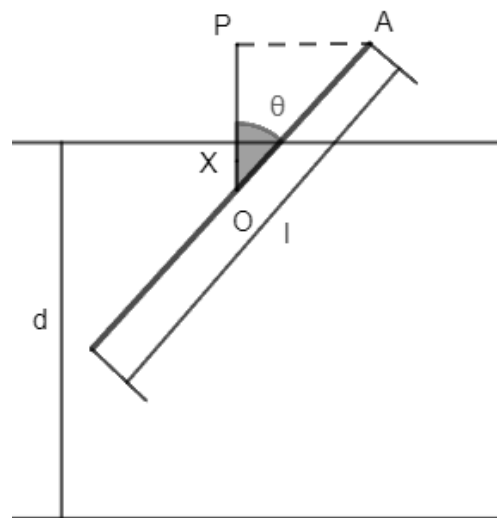
agulha. Pelas figuras sabemos que  $OA = \frac{l}{2}$  e, pela definição de cosseno, que  $\cos\theta = \frac{OP}{OA}$  isso implica  $OP = \frac{l}{2} \cdot \cos\theta$ .

Figura 3.1: A agulha não intersectou nenhuma das retas.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Figura 3.2: A agulha intersectou uma das retas.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

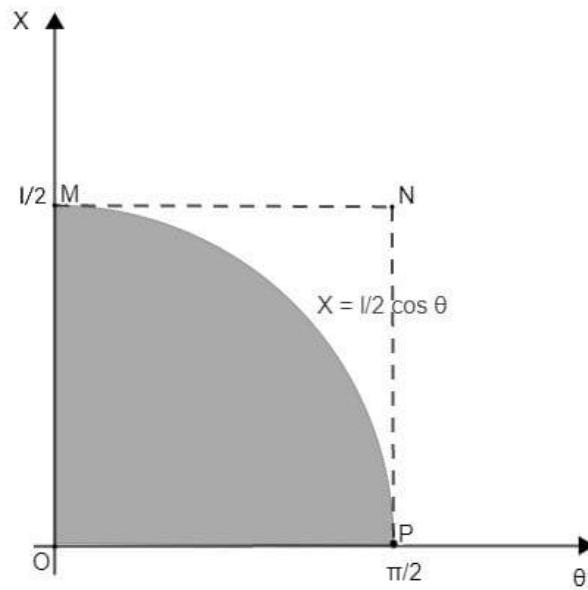
Dessa forma, existem duas possibilidades para o evento:

- Quando  $X < \frac{l}{2} \cos\theta$ , a agulha cruzará uma das retas
- Quando  $X \geq \frac{l}{2} \cos\theta$ , a agulha não cruzará uma das retas do plano.

Observe que  $X \in [0, \frac{l}{2}]$  e que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e que  $X$  e  $\theta$  são variáveis independentes.



Figura 3.3: Gráfico das possibilidades do evento



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Note que a área sombreada representa os casos favoráveis e que a área interna do quadrilátero OMNP representa o espaço amostral. Como a distribuição de  $X$  e  $\theta$  é uniforme, temos que a probabilidade da agulha cair cruzando uma das retas do plano é dada por

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

A área sombreada pode ser calculada pela integral de 0 e  $\frac{\pi}{2}$  de  $\frac{l}{2} \cos \theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \theta \, d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \frac{l}{2} \cdot \left( \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \text{sen} (0) \right) = \frac{l}{2}.$$

A área interna do quadrilátero é dada por  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi \cdot l}{4}$ , dessa forma, a probabilidade da agulha cair cruzando uma das retas do plano será:

$$P(A) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi \cdot l}{4}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\pi \cdot l} = \frac{4l}{2\pi l} = \frac{2}{\pi}.$$

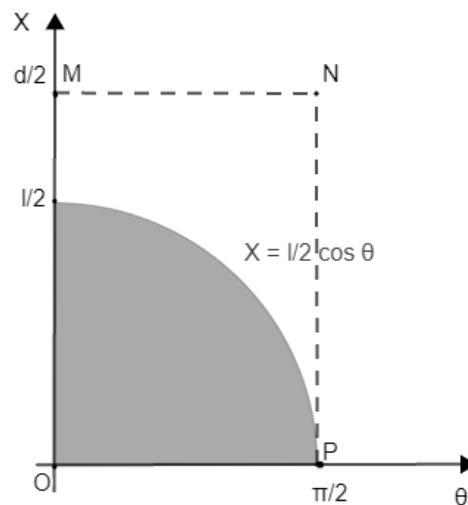
**Segundo caso:**  $l < d$

Analogamente ao caso anterior, temos que a parte sombreada representa os casos favoráveis, enquanto a área interna do quadrilátero OMNP, representa o espaço amostral.

Como a distribuição de  $X$  e  $\theta$  é uniforme, pois tanto  $\theta$  quanto  $X$  seguem uma distribuição uniforme nos seus respectivos intervalos, a probabilidade da agulha cair cruzando uma das retas é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}$$

Figura 3.4: Segundo caso.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

De maneira análoga, a área sombreada é dada por  $\frac{l}{2}$ , enquanto que a área interna do quadrilátero é dada por  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d}{4}$ . Portanto a probabilidade da agulha cair cruzando uma das retas do plano será  $P(A) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi \cdot d}{4}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d} = \frac{4l}{2\pi d} = \frac{2l}{\pi \cdot d}$ .

### Terceiro caso: $l > d$

Nesse caso, como o tamanho da agulha é maior que a distância entre as retas, então a chance de cruzamento aumenta, pois a agulha terá um maior alcance e também por existir a possibilidade da agulha cruzar duas retas simultaneamente.

Pelo que foi feito anteriormente temos que:

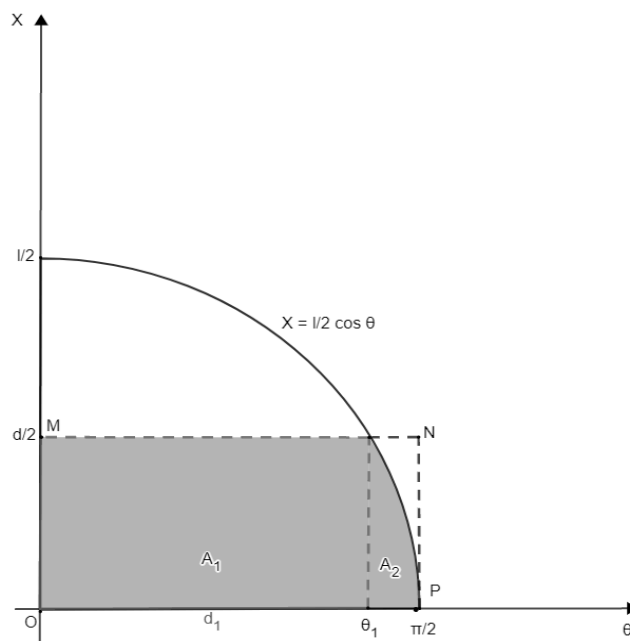
$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}$$

Para calcular a área sombreada a dividiremos em duas partes onde  $A_1$  representa a região onde a agulha cruza apenas uma reta e  $A_2$  representa a região onde a agulha cruza duas

retas simultaneamente. Inicialmente, para calcular  $A_1$  considere o ponto  $Q = (\theta_1, \frac{d}{2})$  (sendo que  $\theta_1$  é o ângulo limite em que a agulha cruza apenas uma linha e  $\frac{d}{2}$  é a metade da distância entre as retas) e a função  $X = \frac{l}{2} \cos\theta$  (que representa a projeção horizontal da metade do comprimento da agulha) com isso, temos que  $\frac{d}{2} = \frac{l}{2} \cdot \cos\theta_1$ , ou seja,  $\cos\theta_1 = \frac{d}{l}$ , donde  $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)$ . Dessa forma, a área  $A_1$  é dada por:

$$A_1 = \frac{d}{2} \cdot \theta_1 = \frac{d}{2} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right).$$

Figura 3.5: Terceiro caso.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Enquanto que a área de  $A_2$  é dada por:

$$A_2 = \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cdot \cos\theta \, d\theta = \frac{l}{2} \cdot \left( \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\theta_1 \right) \Rightarrow A_2 = \frac{l}{2} \cdot (1 - \operatorname{sen}\theta_1).$$

Por  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , podemos isolar o termo  $\sin\theta_1$  com isso obtemos

$$\sin^2\theta_1 = 1 - \cos^2\theta_1 \text{ assim, } \sin\theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_1}, \text{ como sabemos que } \cos\theta_1 = \frac{d}{l}$$

temos que  $\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}$ , substituindo isso na expressão para  $A_2$  obtemos

$$A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \sin\theta_1\right) \Rightarrow A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) \Rightarrow A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}\right) \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{l^2 - d^2}{l^2}}\right) \Rightarrow A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}\right) = \frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}.$$

Como a área do quadrilátero OMNP é  $\frac{\pi \cdot d}{4}$  temos que a probabilidade da agulha cruzar pelo menos uma das retas do plano será

$$P(A) = \frac{\frac{l - \sqrt{l^2 - d^2}}{2} + \frac{d \cdot \cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)}{2}}{\frac{\pi \cdot d}{4}} = \frac{\frac{l - \sqrt{l^2 - d^2} + d \cdot \cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)}{2}}{\frac{\pi \cdot d}{4}} = \frac{\left(l - \sqrt{l^2 - d^2} + d \cdot \left(\frac{d}{l}\right)\right) \cdot 2}{\pi \cdot d} =$$

$$\frac{2l - 2\sqrt{l^2 - d^2} + 2d \cdot \cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)}{\pi \cdot d}.$$

### 3.3 Estimando o valor de $\pi$

Podemos estimar empiricamente o valor de  $\pi$  realizando vários lançamentos das agulhas, ou seja, repetindo a experiência de Buffon repetidamente e contando cuidadosamente as agulhas que cruzaram retas paralelas. Esse método, chamado Método de Monte Carlo, é bastante popular na estatística quando se trata de simulações estocásticas, ou seja, quando as circunstâncias são baseadas em processos que não são de natureza determinística.

Como foi visto no capítulo 2, a Lei dos Grandes Números garante que, à medida que aumentamos o número de lançamentos de agulhas, a proporção empírica (o número total de cruzamentos dividido pelo total de lançamentos) se alinhará cada vez mais com a probabilidade teórica  $P$ . Consequentemente, ao conduzir o experimento um número grande o suficiente de vezes, podemos estimar com precisão o valor de  $P$  e, por extensão, até mesmo

aproximar o valor de  $\pi$ . Utilizando a Lei dos Grandes Números apresentada na seção 2.6 e tal como foi explicado nessa seção, vamos definir  $X_i$  da seguinte forma

- $X_i = 1$  se E ocorrer na  $i$ -ésima tentativa.
- $X_i = 0$  se E não ocorrer na  $i$ -ésima tentativa.

Considerando o caso inicial estudado, onde  $l = d$ , considere que  $P(A) = \frac{k(n)}{n}$  onde  $k(n)$  representa o número de vezes que a agulha cruza uma das retas paralelas e  $n$  representa o número de lançamentos de agulhas.

Relacionando isso com o problema das agulhas de Buffon temos que quando o número de repetições se torna absurdamente grande, se o experimento pudesse ser realizado um número infinito de vezes, teríamos que  $P(A) = \frac{k(n)}{n}$  mas vimos anteriormente que  $P(A) = \frac{2}{\pi}$ , ou seja, a medida que o número de lançamentos  $n$  aumenta, temos que  $\frac{k(n)}{n} \approx \frac{2}{\pi}$ , representando por limite temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \frac{2}{\pi}$$

e esse limite nos garante exatamente que  $n$  suficientemente grande a razão  $\frac{k(n)}{n}$  se aproxima de  $\frac{2}{\pi}$ . Ademais, isolando o  $\pi$  nesse limite temos

$$\pi \approx \frac{2n}{k(n)}$$

ou seja, conseguimos estimar o valor de  $\pi$  a partir da razão entre  $2n$  o número de cruzamentos  $k(n)$  obtidos no experimento.

Ao longo dos anos, alguns matemáticos estimaram empiricamente o valor de  $\pi$  usando o método descoberto por Buffon e posteriormente melhorado por Laplace. A Tabela 3.1 mostra os resultados de alguns desses experimentos.

Tabela 3.1: Resultado das experiências de alguns matemáticos

Matemático	Ano	Razão ( $l/d$ )	N. de Jo- gadas	N. de cruza- mentos	Valor estimado de $\pi$
Wolf	1850	0,8	5.000	2.532	3,1596
Smith	1855	0,6	3.204	1.218,5	3,1553
D. Morgan	1860	1,0	600	382,5	3,137
Fox	1864	0,75	1.030	489	3,1595
Lazzerini	1901	0,83	3.408	1.808	3,1415929
Reina	1925	0,5419	2.520	869	3,1795

Fonte 3.1: Gristead, C. M. 1997, Pág. 56

Note que existem valores não inteiros na coluna do número de cruzamentos de retas pelas agulhas, esses valores se dão pela incerteza da agulha ter cruzado ou não a reta.

Ao observar a tabela pode-se dizer que os matemáticos tiveram um relativo sucesso com seus experimentos, mas vale ressaltar que anos antes Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) já havia obtido uma aproximação melhor para  $\pi$  utilizando séries de potência, dessa forma, sabendo previamente o valor aproximado para  $\pi$  alguns deles podem ter terminado o experimento em um momento oportuno, ou seja, um momento em que o valor estava muito próximo de  $\pi$ . Contudo, mesmo que esses valores não fossem novidade, esses experimentos confirmaram a coerência entre a teoria desenvolvida por Buffon e a prática empírica.

O resultado do experimento de Lazzerini é realmente notável. Ele alcançou uma aproximação de  $\pi$  com uma precisão de seis casas decimais após apenas 3.408 lançamentos. Conforme observado por Roberto Rodríguez del Río em seu artigo O Número  $\pi$ : Da Geometria ao Cálculo Numérico, seriam necessários espantosos  $1,156675 \cdot 10^{14}$  lançamentos de agulha para atingir uma margem de erro de 0,0000002. Se alguém removesse uma agulha a cada cinco segundos — tempo gasto no lançamento, verificando sua posição de pouso e registrando o resultado — levaria cerca de 3.600.000 anos para atingir tal precisão. Esta observação apoia a ideia de, no mínimo, uma interrupção deliberada nos lançamentos. É comum pesquisadores suporem que Lazzerini já estava ciente da aproximação feita pelo matemático chinês Tsu Chung Chi por volta do século V, que era 355/113 para o valor de  $\pi$ . Coincidentemente, o valor de 3,1415929 alinha-se perfeitamente com o resultado intrigante que ele obteve em seus 3.408 lançamentos.

Tudo indica que a estratégia utilizada por Lazzerini foi conhecendo a fórmula  $P = 2l/d\pi$ . Ele realizou a experiência considerando a razão entre o comprimento da agulha e a distância

entre as retas paralelas igual a  $5/6 \approx 0,83$ . Daí, obteve que  $P(A) = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}d}{\pi d} = \frac{5}{3\pi}$ .

Como  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$ , temos  $\frac{5}{3\pi} = \frac{k(n)}{n}$ , onde  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3k(n)}$ . Conhecendo o resultado

de Tsu Chung Chi de  $355/113$  para o número  $\pi$ , ele teria resolvido a equação  $k(n) =$

$$\frac{5n \cdot 113}{3 \cdot 355} = \frac{565n}{1065} = \frac{113n}{213}.$$

Dado que  $k(n)$  e  $n$  são inteiros, é adequado afirmar que para cada 213 arremessos de agulha, 113 cairão, cortando um dos fios. Caso o resultado seja diferente, o experimento seria conduzido novamente. Percebendo que 3408 é igual a 213 multiplicado por 16, segue-se que Lazzerini deve ter executado a série de arremessos 16 vezes.

## 4 ESTIMANDO IRRACIONAIS

Neste capítulo faremos estimativas para números irracionais utilizando o mesmo raciocínio do problema das agulhas de Buffon. Ao substituir a agulha por um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular conseguimos estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e a proporção áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

### 4.1 Estimando números irracionais

Em 1937, Uspensky [6, 8] mostrou que substituindo a agulha por uma placa com qualquer curva convexa e com diâmetro generalizado menor que  $d$ , a probabilidade de que a placa cruzará uma linha é

$$p(P) = \frac{P}{\pi d}$$

onde  $P$  é o perímetro da curva. Portanto, para um polígono regular de  $n$  lados de comprimento  $L$ , tal probabilidade é

$$p(n) = \frac{nL}{\pi d} \quad (I).$$

Mostraremos que substituindo a agulha por um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular no experimento de Buffon dará uma estimativa de  $\sqrt{2}$ , a proporção Áurea  $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , respectivamente.

### 4.2 Cálculos de Probabilidade

Considere uma superfície plana governada por retas paralelas separadas por uma distância  $d$  e um polígono regular com  $n$  lados de comprimento  $L$ , as dimensões do polígono são pequenas o suficiente para não intersectar simultaneamente duas retas paralelas, ou seja, ao relacionar com o problema das agulhas de Buffon, aqui estamos considerando o segundo caso onde o comprimento da agulha mede menos que a distância entre as retas.



Depois de jogar aleatoriamente o polígono na superfície plana, temos duas possibilidades de eventos:

(i) Evento A: Uma linha intersecta o polígono.

(ii) Evento B: Uma linha intersecta dois lados consecutivos do polígono.

Sabemos que a probabilidade  $p(A)$  é dada por  $p(A) = \frac{nL}{\pi d}$  pelos resultados apresentados no capítulo 2, nesse caso estamos olhando o polígono de  $n$  lados como  $N$  agulhas sendo lançado no plano. Para  $p(B)$  note que temos  $n$  pares de lados consecutivos em seu polígono, com isso temos

$$p(B) = np_{ab} \text{ (II),}$$

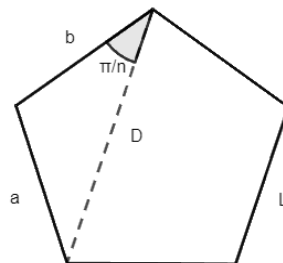
onde  $p_{ab}$  é a probabilidade de uma linha intersectar dois lados consecutivos dados  $a$  e  $b$  do polígono.

Pela figura, é possível perceber que os lados  $a$  e  $b$  junto com a diagonal  $D$  associada formam um triângulo. Assim, a probabilidade  $p_{ab}$  será dado pela probabilidade de uma linha cruzar esse triângulo menos a probabilidade de uma linha cruzar a diagonal  $D$ , ou seja,  $p_{ab} = \frac{2L+D}{\pi d} - \frac{2D}{\pi d} = \frac{2L-D}{\pi d}$  substituindo na equação (II), temos

$$p(B) = \frac{n(2L-D)}{\pi d} \text{ (III)}$$

o qual, da mesma forma da probabilidade (A), depende tanto da geometria do polígono quanto da distância entre as retas paralelas.

Figura 4.1: Um pentágono regular ( $n = 5$ ) mostrando dois lados consecutivos,  $a$  e  $b$ , e a diagonal associada  $D$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

A probabilidade condicional  $p(B|A)$  nos dá a probabilidade que o evento B ocorra mesmo que o evento A já tenha ocorrido, e é dado por  $p(B|A) \equiv \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  (IV) onde  $p(A \cap B)$  é a probabilidade do evento B e do evento A ocorrerem. Lembrando que o evento B diz que uma linha intersecta dois lados consecutivos do polígono e o evento A nos diz que uma linha intersecta o polígono, pode-se notar que se o evento B ocorrer, conseqüentemente o evento A também ocorrerá, ou seja, o evento B implica o evento A de modo que  $B \subset A$  e, então,  $p(A \cap B) = p(B)$ , pois todo B já está contido em A. Portanto, substituindo as equações (I) e (III) na equação (IV) temos

$$p(B|A) = \frac{p(B)}{p(A)} = 2 - \frac{D}{L} = 2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \equiv p_n \quad (\text{V}),$$

o qual depende apenas do número  $n$  de lados do polígono e onde a última igualdade é válida para  $n \geq 3$ . Em particular, para  $n = 3, 4, 5$  e  $6$ , a expressão (V), se torna, respectivamente,

$$p_3 = 2 \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = 1,$$

$$p_4 = 2 \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 2 \cdot \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 2 - \sqrt{2},$$

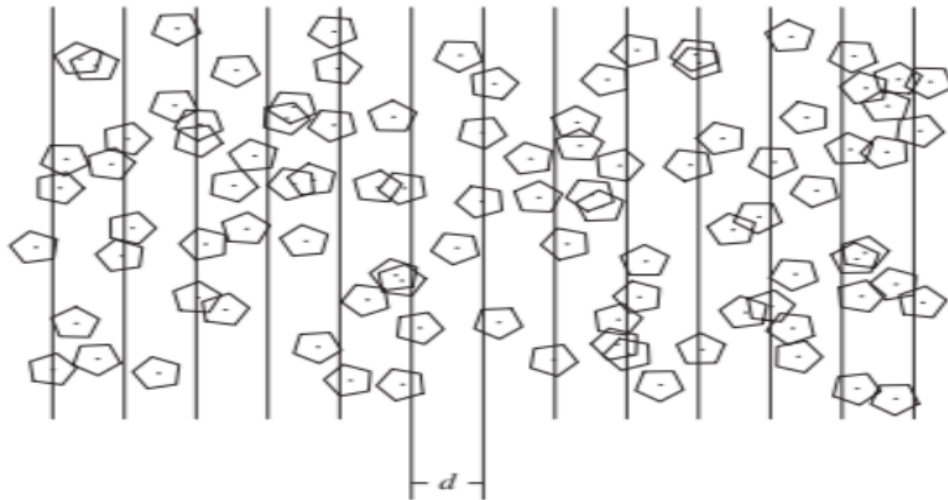
$$p_5 = 2 \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] = 2 \cdot \left[ 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right] = 2 - \phi,$$

$$p_6 = 2 \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = 2 \cdot \left[ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 2 - \sqrt{3},$$

em  $p_5$  temos que  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  com isso segue-se que  $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ , que a chamada proporção Áurea. Se  $n \rightarrow \infty$  o polígono se torna uma circunferência e  $p_\infty = 0$ .

Portanto, com a única mudança do formato da agulha e sem medir qualquer comprimento, podemos estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e a proporção áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Observe a simulação com 100 pentágonos feita no artigo *Statistical estimation of some irrational numbers using an extension of Buffon's needle experiment* de S. Velasco , F. L. Román , A. González & J. A. White.

Figura 4.2: Problema das agulhas de Buffon utilizando 100 pentágonos.



Fonte: S. Velasco , F. L. Román , A. González & J. A. White (2006) Statistical estimation of some irrational numbers using an extension of Buffon's needle experiment, Pág. 738

Considere  $N$  o número de vezes que um polígono regular de  $n$  lados é jogado nas retas,  $N_c$  o número de vezes que uma linha intersecta o polígono e  $N_{cc}$  o número de vezes que uma linha cruza dois lados consecutivos do polígono, temos que a razão  $\frac{N_c}{N}$  é uma estimativa experimental de  $p(A)$  que vem justamente da Lei Forte dos Grandes Números, pois  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_c}{N} = p(A)$ , da mesma forma que  $\frac{N_{cc}}{N}$  é uma estimativa experimental de  $p(B)$  e, também  $\frac{N_{cc}}{N_c}$  é uma estimativa para  $p_n$ , mas sabemos por (V) que  $p_n = \frac{p(B)}{p(A)}$ , ou seja, a razão  $\frac{N_{cc}}{N_c}$  é justamente  $\frac{p(B)}{p(A)}$ , com isso, da mesma maneira que estimamos  $p(A)$  e  $p(B)$ , ao fazer com que  $N$  tende ao infinito temos que a razão  $\frac{N_{cc}}{N_c}$  converge para  $p_n$ .

Com isso conseguimos estender o problema das agulhas de Buffon para estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e a proporção áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , simplesmente substituindo a agulha por um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular, respectivamente, e isso considerando apenas que um lado do polígono não intersecta simultaneamente duas retas paralelas.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho explorou um aspecto da probabilidade que, embora frequentemente negligenciado, possui grande relevância: a probabilidade geométrica. Este tema não apenas enriquece o campo da Matemática, mas também desempenha um papel essencial na solução de problemas práticos. As implicações deste estudo são amplas, abrangendo desde o aprimoramento de modelos teóricos até a otimização de processos industriais e tecnológicos.

Ao utilizar um dos principais problemas dessa área, demonstramos que a probabilidade pode se estender para além dos exemplos clássicos, como os de moedas, cartas e dados, comumente apresentados em sala de aula. Com base nos mesmos princípios probabilísticos usados cotidianamente, aliado a geometria, mostramos que é possível estimar os números irracionais  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e a proporção áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Mostramos também que a partir da probabilidade geométrica podemos obter o valor de  $\pi$  de uma forma inesperada como também conseguimos abranger habilidades específicas da BNCC relacionadas a probabilidade a partir desse problema, o que mostra a amplitude do tema e a necessidade de sua maior exploração no ensino e em diversas aplicações.

## REFERÊNCIAS

- [1] AMORIM, Vitor; MOZER, Grazielle. **Probabilidade além da combinatória: tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico**. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020.
- [2] VIANA, Cesar de Abreu Fernando. **Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos**. 2013. 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [3] ROSS, Sheldon. **Probabilidade [recurso eletrônico]: um curso moderno com aplicações**. Tradução de Alberto Resende De Conti. 8. ed. Dados eletrônicos. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- [4] SANTANA, Thaís Santos. **Uma abordagem da Lei dos Grandes Números**. 2022. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Valença, 2022.
- [5] SOARES, Elisson Dutra. **Probabilidade e estatística à luz da BNCC com olhar na matriz curricular do novo ensino médio da Paraíba**. 2022. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Patos, 2022.
- [6] SOLOMON, H., 1978, **Geometric Probability** (Philadelphia: SIAM), pp. 1–24.
- [7] S. Velasco , F. L. Román , A. González & J. A. White (2006) **Statistical estimation of some irrational numbers using an extension of Buffon's needle experiment**, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37:6, 735-740, DOI: 10.1080/00207390500432675
- [8] USPENSKY, J.V., 1937, **Introduction to mathematical probability** (New York: McGraw-Hill), pp. 255–257.