UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IGOR MARTINS ALVES SERAFIM

A ELETRODINÂMICA DOS MEIOS EM TRANSLAÇÃO CONSTANTE

PATOS - PB
2024

IGOR MARTINS ALVES SERAFIM

A ELETRODINÂMICA DOS MEIOS EM TRANSLAÇÃO CONSTANTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

PATOS - PB

2024

S482e Serafim, Igor Martins Alves.
A eletrodinâmica dos meios em translação constante [manuscrito] / Igor Martins Alves Serafim. - 2024.
48 f.: il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira, Coordenação do Curso de Física - CCEA".

1. Relatividade restrita. 2. Ondas eletromagnéticas. 3. Teorema de Poynting em meios inerciais. 4. Transformações de Lorentz. I. Título

21. ed. CDD 537.6

Elaborada por Kaliane Eveny Martins de Oliveira - CRB - 15/986 BSC7

IGOR MARTINS ALVES SERAFIM

A ELETRODINÂMICA DOS MEIOS EM TRANSLAÇÃO CONSTANTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física

Aprovada em: 19/06/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Messias de Brito Cruz** (***.759.884-**), em **26/11/2024 11:11:03** com chave **4589101aac0011ef928b2618257239a1**.
- **Ismael Sandro da Silva** (***.241.944-**), em **27/11/2024 14:50:26** com chave **15a0e196ace811efba901a1c3150b54b**.
- **Marcelo da Silva Vieira** (***.062.444-**), em **26/11/2024 10:56:10** com chave **30e2cae0abfe11efb4be06adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Termo de Aprovação de Projeto Final
Data da Emissão: 28/11/2024
Código de Autenticação: 870aef

A Deus, o criador deste imenso e complexo universo, no qual cada detalhe é minimamente estruturado para que hoje possamos tentar desvendar seus mistérios,
DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre estar comigo, me protegendo, me dando forças e sempre me guardando.

Aos meus pais, Danúzia Martins Alves de Lima e Isac Serafim de Lima Jr., por sempre estarem comigo, apoiando nas minhas escolhas e que sempre fizeram o que podiam por mim. À eles sou muito grato desde sempre, pois me ensinaram o que é um amor de pai e mãe.

As minhas avós e tias, que sempre me acolheram e me ajudaram nesta minha jornada longe de casa, em especial para minha tia Rubsmar Serafim Veras de Assis Portella, que é minha tia, madrinha e tenho como minha segunda mãe, que sempre me apoiou e me ajudou também com o que pode.

Aos meus primos, Hannah Veras de Andrade e Yohannah Veras de Andrade por sempre estarem comigo, sendo minhas fontes de diversão e lazer nas horas vagas; Gabriel Feliz alves por ter ser meu transporte para a universidade durante muito tempo.

A minha família, por sempre acreditarem no meu potencial, em especial para meu irmão mais novo, Iago Martins Alves Serafim, que, por ser o mais velho, tento sempre me colocar como um exemplo de conquista, superação e luta para que algum dia ele possa ter mais um a quem se espelhar.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo da Silva Vieira, por ter desempenhado tal função com dedicação, paciência e amizade.

Aos professores Dr. Ismael Sando da Silva e Dr. Messias de Brito Cruz, por participarem da banca.

Por fim, quero agradecer a todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste em apresentar, de forma matemática, a incompatibilidade das transformações de Galileu com a eletrodinâmica; as transformações de Lorentz como compatíveis e consequências da relatividade aplicada na eletrodinâmica, assim como a invariância da velocidade da luz; as aplicações das transformações de Lorentz nas equações que regem a eletrodinâmica para encontrar os termos de correções que existem entre meios inerciais com translação uniforme com objetivo de avaliá-las e compará-las com resultados já conhecidos.

Palavras-chave: Relatividade restrita. Meios com translação uniforme não relativísticas. Equações de Maxwell na matéria. Velocidade da onda eletromagnética. Forma matemática.

ABSTRACT

This work consists of presenting, in a mathematical way, the incompatibility of Galileo's transformations with electrodynamics; Lorentz transformations as compatible and consequences of relativity applied in electrodynamics, as well as the invariance of the speed of light; the applications of Lorentz transformations in the equations that govern electrodynamics to find the correction terms that exist between inertial media with uniform translation with the aim of evaluating them and comparing them with already known results.

Keywords: Special relativity. Means with non-relativistic uniform translation. Maxwell's equations in matter. Electromagnetic wave speed.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO

O estudo de ondas eletromagnéticas tem proporcionado avanços significativos para cinência e tecnologia, até mesmo para análises médicas. A maneira de interpretar estas ondas influencia na maneira de ver, pensar e testar os fenômenos diários. A luz é um exemplo de onda eletromagnética e ela está relacionada com fenômenos terrestres como: a cor do céu, as asas de uma borboleta, as comunicações via rádio, o wi-fi, circuitos elétricos entre outros fenômenos; nos fenômenos de escara macroscópica como: a distância entre as galáxias, o tamanho e temperatura das estrelas, a detecção da atmosfera de outros planetas; e também na escala microscópica, como: a interação entre as cargas, o movimento de cargas devido a um campo magnético, a ressonância magnética, os aceleradores de partículas e etc. Em resumo, a eletrodinâmica está presente em muitas áreas da física e a representação matemática dessas ondas, tanto no vácuo, como em meios materiais em repouso ou em movimento, são extremamente essenciais para o desenvolvimento das aplicações físicas.

As equações do eletromagnetismo mais conhecidas foram desenvolvidas tomando sistemas simples, como o vácuo e com referenciais em repouso, mas quando se muda um desses termos, a complexidade começa a aparecer. É pensando nas representações matemáticas que este TCC vai ser desenvolvido, desde a representações clássicas simples mais importantes, até suas formas mais complexas quando se calcula em meios diferentes do vácuo, ou com velocidades constantes. Existem as representações para meios acelerados, mas isto é trabalho para outra hora.

Iremos começar estudando as ondas eletromagnéticas no vácuo e em repouso, para depois calculá-las na matéria e em referenciais inerciais. Mostraremos as relações entre a eletrodinâmica e o princípio da relatividade, tanto a de Galileu, que, por uma pequena análise na matemática do problema, conseguiremos perceber que não é compatível com a eletrodinâmica, quanto as de Lorentz, que são compatíveis com esta área, que tem origem já relativística. Também vamos mostrar a invariância da velocidade da luz, o qual é o segundo postulado da relatividade de Einstein e a velocidade da luz em meios com translação uniforme, que é a velocidade encontrada por Fizeau em seus experimentos.

É uma longa jornada, reescrever parte da eletrodinâmica mesmo que só mude algo simples, como um referencial em movimento constante, mas que possúi aplicações enormes. Aplicaremos para ondas planas e monocromáticas e, por fim, destacaremos as principais descobertas do nosso trabalho e algumas possíveis aplicações e estudos futuros decorrentes dos nossos resultados.

2 ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

Atualmente sabe-se que existem quatro forças fundamentais da natureza e, segundo um artigo do intituto de física da universidade de são paulo, escrito por Da Costa Marques (3), as forças e seus bósons acossiados são: a força nuclear forte, que é a mais intensa e está associada aos fenômenos que acontecem no núcleo do átomo e é uma força de curto alcance e a partícula que media esta interação é um bóson chamado glúon; a força eletromagnética, que é a segunda interação natural mais forte, está associada às interações de partículas carregadas e campos magnéticos, assim como a interação entre os fótons que é o bóson mediador desta interação; a força nuclear fraca que explica os fenômenos de decaimento do átomo e tem como mediadores os bósons $W^{\pm}$ e Z; a força gravitacional, que é a mais fraca das interações fundamentais e explica os fenômenos de interação entre corpos em escalas astronômicas, utilizando a famosa equação de Gravitação Geral de Newton e a Relatividade Geral de Einstein e, pela teoria do modelo padrão de partículas, tem como mediador o graviton, que ainda é um problema em aberto.

Segundo Moysés ((10), pág. 11), das interações acima, as do eletromagnetismo são muito mais fáceis de identificar, pois ela tem uma escala, tanto microscópica, quanto macroscópica e de fácil visualização cotidiana. Além de estar presente na maioria dos fenômenos do dia-a-dia, como: o funcionamento de uma pilha, a comunicação entre um controle remoto e uma televisão; o céu azul e o entaredecer alaranjado, a corrente elétrica que está presente nas residências e nos postes de transmissão, a comunicação via rádio, a vibra ótica, wi-fi, a internet por satélites, etc. As aplicações do eletromagnetismo revolucionaram o mundo no século XX tanto na área de tecnologia quando no estilo de vida da população. É inegável que sem ela, seria impossível sobrevivermos no mundo de hoje em dia, pois somos quase que totalmente dependetes da tecnologia, mas foi por causa dela que hoje temos uma sociedade evoluída e conectada.

2.1 As equações de Maxwell

O físico e matemático James Clerk Maxwell formulou a teoria eletromagnética, representadas matematicamente pelo que se conhece como "As equações de Maxwell", a partir das teorias experimentais de Faraday, que usava a linguagem de linhas de campo e Maxwell procurou interpretações matemáticas para elas. Segundo o Moysés em seu livro "Curso de física básica"vol. 4, (8), Maxwell também notou que a lei de Ampere, que diz que uma densidade de corrente gera um campo magnético ao seu redor, precisava de uma correção, pois a lei de ampere em sua forma inicial não poderia se raplicada para campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo, pois violaria o princípio de conservação de cargas. As equações do eletromagnetismo sobreviveram até a mudança da física clássica para a física moderna, que foi onde a Relatividade de Einstein mudou a mecânica Newtoniana, porém as Equações de Maxwell permaneceram inalteradas, mostrando a veracidade e importância das equações do eletrodinâmica clássica.

Abaixo estão as equações de Maxwell no sistema SI e no sistema CGS-Gaussiano, os termos μ_0 e ϵ_0 são respectivamente as constantes permeabilidade magnética e permissividade elétrica do vácuo, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{E}$ são os campos magnético e elétrico e ρ e $\boldsymbol{j}$ são as densidade de carga e densidade de corrente gerados por fontes e o termo $(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$ é a correção feita por Maxwell na lei e Ampere, que passou a ser chamada de "Lei de Ampere-Maxwell".

Sistema SI

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{(lei de Gauss)} \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad \text{(Sem nome)} \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Ampere-Maxwell)}$$

Sistema CGS-Gaussiano

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=4\pi\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Temos também a força de Lorentz, que, no sistema SI e no CGS-Gaussiano, é dada por

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) \quad \text{(SI)}$$

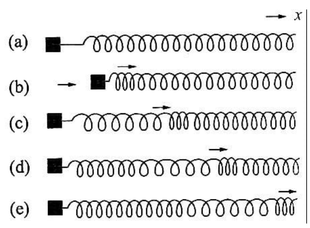
$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \quad \text{(CGS-gaussiano)}$$

As equações acima apresentam os divergentes e rotacionais dos campos elétrico $\boldsymbol{E}$ e magnético $\boldsymbol{B}$ e eles tem significados físicos como: o divergente do campo magnético é zero e isso mostra que não existem monopólos magnéticos, ou seja, não existe uma partícula magnética; o divergente do campo elétrico (Lei de Gauss) mostra a existência de uma partícula de carga mínima, sendo assim, uma quantização de carga e de que os campos elétricos são formados a partir de cargas ou densidade de cargas; o rotacional do campo elétrico (Lei de Faraday) nos mostra o campo elétrico induzido, que acontece ao variarmos um campo magnético no tempo

2.2 Equação de onda e propagação onludatória

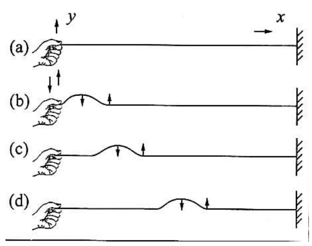
Uma onda pode ser descrita como uma perturbação que parte de um ponto a outro através de um meio sem transporte de matéria. Esse meio pode ser material ou o próprio vácuo. Quanto a natureza das ondas, existem ondas mecânicas, que podem ser a perturbação numa corda, ondas sonoras, ondas sísmicas, etc.; ondas eletromagnéticas, que são oscilações no campo eletromagnético que se propagam em meios materiais ou no próprio vácuo na velocidade da luz; ondas gravitacionais, que são perturbações na geometria do espaço-tempo, que se propaga no universo; e as ondas quânticas, que são perturbações na probabilidade de localização das partículas quânticas que se propagam no espaço. Quanto a direção de propagação, elas podem ser unidimensionais, que são as ondas em uma corda; bidimensionais, que podem ser ondas em uma superfície de água; e tridimensionais, que podem ser exemplificadas pelas ondas sonoras. As ondas transportam energia em forma de oscilações, estas, porém, são caracterizadas por ondas longitudinais e ondas transversais. Nas ondas longitudinais, as oscilações têm a mesma direção que a propagação da onda e formam áreas de baixa e alta pressão no meio de propagação, como mostrado na (Figura 1); nas ondas transversais a oscilação se dá em uma direção perpendicular a direção de propagação, como mostrado na (Figura 2).

Figura 1 – Onda longitunial



Fonte: (9)

Figura 2 – Onda transversal

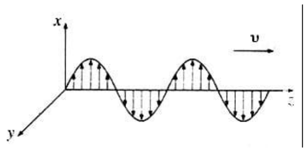


Fonte: (9)

Se a onda está se propagando em uma direção, é óbvio que existem duas outroas direções perpendiculares a ela, então a onda transversal tem duas direções possíveis para oscilar e chamamos a existência dessa possibilidade de Polarização da onda. Assim como na obra do Griffiths (6), pag. 260, se existe uma onda em uma corda se movimentando no eixo z, podemos ter uma onda oscilando no eixo x (polarização 'vertical' segundo a Figura 3), que representa quando se agita a corda para cima e para baixo; ou no eixo y (polarização 'horizonal' segundo a Figura 4), que é quando se agita a corda para esquerda e direita. No caso da onda eletromagnética, veremos que existem as duas drieções de oscilações ao mesmo tempo, uma formada pelo campo elétrico e outra formada pelo campo magnético como na Figura 5. No livro "Um curso universitário"de Alonso e Finn

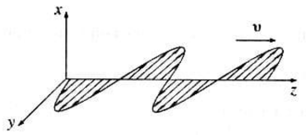
(1), a parte de polarização é melhor vista e ele fala sobre a polarização circular da onda eletromagnética, que consiste nos campos elétrico e magnético formando um plano entre si e oscilam girando em torno de um eixo visto na Figura 6

Figura 3 – Polarização vetical



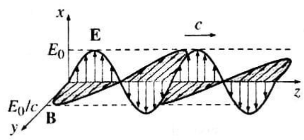
Fonte: (6)

Figura 4 – Polarização horizontal



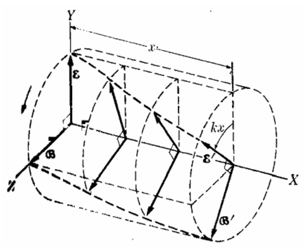
Fonte: (6)

Figura 5 – Onda eletromagnética



Fonte: (6)

Figura 6 – Polarização circular



Fonte: (1)

As ondas, assim como na mecânica clássica, podem ser representadas por uma função algébrica e a função de uma onda, em um sistema unidimensional, é dada por um $y(x,t) = f(x', t') = f(x{-}vt, 0)$ que é uma aplicação das transformações de Galileu, que será estudado mais a frente, mas as transformações de Galileu para este sistema é dada por:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$t' = 0$$

Essa função pode ser vetorial ou escalar e para definir o movimento desta onda, basta derivar ela em relação ao tempo, fazendo isto obteremos a seguinte equação:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}$$

Foi usada a regra da cadeia para obter este resultado e se derivarmos denovo podemos encontrar a equação horária de uma onda que está á uma velocidade constante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 \tag{2.1}$$

podemmos também fazer a derivada em relação a x. Calculando as derivadas, temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \tag{2.2}$$

substituindo agora 2.2 em 2.1, obteremos a euqação:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}$$

Sabemos que $\frac{dx'}{dt} = -v$ é a velocidade na cinemática, e para essa configuração é a velocidade da onda em relação ao referencial em repouso, então substituindo por u obtemos a equação geral da onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

e se extendermos para uma função vetorial de três dimensões, a equação geral da onda tem a forma

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{\Psi} \tag{2.3}$$

onde $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}(x, y, z)$ é uma função vetorial tridimensional.

Uma das soluções desta equação é a função complexa $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\Psi}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, onde a exponencial complexa é uma representação da forma polar de um número complexo $[z = |z|(cos\theta + isen\theta)]$, a referência para o assunto de variáveis complexas em que me baseio pode ser encontrada no livro do Churchill de variáveis complexas (2). Sendo $\boldsymbol{\Psi}_0$ a amplitude da onda, ele se torna constante para ondas não amortecidas, então quando toma-se as derivadas da função, temos

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = -i\boldsymbol{\Psi}_0 \omega e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = -i\boldsymbol{\Psi}_0 \cdot \boldsymbol{k} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\Psi}_0 \omega^2 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.6}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\Psi}_0 k^2 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.7}$$

Como o argumento da exponencial deve ser adimensional, as dimensões de $\boldsymbol{k}$ e ω são respectivamente, $(\frac{1}{m})$ e $(\frac{1}{s})$, no sistema SI e ao substituir 2.7 e 2.6 na equação de onda 2.3, encontra-se a relação entre k^2,ω^2 e u^2

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \tag{2.8}$$

que é a velocidade de propagação da onda em meios não disperssivos, pois para meios com disperssão da luz, que é um exemplo de onda eletromagnética, essa relação não é linear. Sabemos que k e ω são constantes de fase com as seguintes relações

$$\omega = 2\pi f$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

onde f é a frequência da onda e λ é o comprimento de onda. Assim percebemos que a solução de uma onda com velocidade $v = \frac{\omega}{k}$ é descrito pela função:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\Psi}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.9}$$

Sendo a solução da equação de onda, uma grandeza real, então podemos tomar como solução

$$\boldsymbol{\Psi} = RE\boldsymbol{\Psi}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

2.3 Ondas eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas são a propagação do campo eletromagnético em um meio, sendo o vácuo um meio de propagação dessas ondas, o que é uma das diferenças delas para as ondas mecânicas. Os campos elétricos e magnéticos oscilam no tempo e no espaço e, pelas equações de Maxwell, podemos perceber que eles dependem um do outro quando tomamos o rotacional.

Considerando os campos viajando no vácuo e longe da fonte, as Equações de Maxwell, para $\rho = 0$ e $\boldsymbol{j} = 0$ tomam a forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Aplicando o rotacional e utilizando a identidade vetorial A.3 na equação $(\nabla \times \boldsymbol{E})$ tem-se a seguinte solução.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

onde $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = \nabla \cdot (0) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

é possível utilizar a propriedade comutativa, pois tomar a derivada temporal antes ou depois de aplicar o rotacional não vai interferir no resultado final, aplicando esta condição

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

substituindo o rotacional do campo magnético $(\nabla \times \boldsymbol{B})$ é obtido a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{2.10}$$

Fazendo o mesmo processo para o campo magnético obtem-se:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{2.11}$$

As equações 2.10 e 2.11 são equações de onda, então percebe-se que os campos elétrico e magnético se propagam como ondas com velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ que por ser uma velocidade que dependa dos coeficientes magnético e elétrico do meio, em cada meio ela vai ser constante e coincidente com o valor da velocidade da luz no mesmo meio. Então os campos elétrico e magnético se propagam como ondas na velocidade da luz e isto significa que a luz pode ser uma onda eletromagnética, sendo assim, a luz também transporta energia, mesmo sendo uma partícula sem massa. Sabemos hoje que a luz é uma onda eletromagnética, mas foram esses estudos de Maxwell sobre a eletrodinâmica, que surgiu a teoria eletromagnética da luz e, segundo o livro do Griffiths (6) pag. 262, essa teoria não seria possível sem a correção de Maxwell na lei de Ampere. A partir desta descoberta, podemos agora estudar a luz não só como partícula, mas agora como o seu caráter ondulatório utilizando a equação de onda eletromagnética, que é o que faremos no decorrer deste trabalho.

Depois de encontrar uma equação para os campos e que essa equação é justamente uma equação de onda, é natural querer aplicar a solução da equação de onda vista na secção 2.2, que é a função 2.9 e, quando aplicada, os campos elétrico e magnético, ficam da seguinte forma:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{2.13}$$

aplicando a solução para os campos nos divergentes deles, encontra-se

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = 0$$

como $\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{B}_0$ são cosntantes

$$\boldsymbol{E}_0 \nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}\left(i e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right) = 0$$

$$\left(i\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right)\cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k} = 0$$

da mesma forma para o campo magnético

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k} = 0$$

Se o divergente de $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{E}$ com $\boldsymbol{k}$ são nulos e $\boldsymbol{B} \neq 0$, $\boldsymbol{E} \neq 0$ e $\boldsymbol{k} \neq 0$, significa que tanto $\boldsymbol{E}$ quanto $\boldsymbol{B}$ são perpendiculares a $\boldsymbol{k}$, então $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são transversais, logo o campo eletromagnético é uma onda do tipo transversal, que se move perpendicular à direção de propagação da onda. Se a onda eletromagnética é transversal, então ela é polarizada e, nas obras literárias, como no Moyses vol. 3 (10), a polarização é linearmente dependente e o campo elétrico sempre está no plano perpendicular á direção de propagação, sendo em $\boldsymbol{x}$, em $\boldsymbol{y}$ ou em combinações das duas direções, então, por coveniência, escolhemos o campo $\boldsymbol{E}$ para definir a polarização da onda eletromagnética, que segue a regra da mão direita e tem a configuração mostrada na figura (5).

Mas só as igualdades acima não provam que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são transversais entre si, o que mostra é que os campos estão no mesmo plano. Para provar que eles são perpendiculares entre si utilizatremos o rotacional dos campos elétrico e magnético. Aplicando denovo as funções 2.12 e 2.13, mas agora no rotacional do campo elétrico, temos

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)})$$

utilizando a propriedade anti-comutativa, pode-se reorganizar a equação da seguinte forma:

$$-\boldsymbol{E}_0 \times \nabla(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = -\boldsymbol{B}_0 \frac{\partial}{\partial t}(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)})$$

O sinal negativo na parte esquerda da equação serve para conservar o sentido do vetor resultante do produto vetorial. Essas derivadas já foram feitas na secção 2.2 apenas com uma mudança na amplitude da função de onda. Resolvendo as derivadas utilizando 2.4 e 2.5

$$-\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{k}(ie^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = \boldsymbol{B}_0 i\omega(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)})$$

e reorganizando para encontrar os campos

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{k} = -\omega \boldsymbol{B} \tag{2.14}$$

Percebe-se que $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{k}$ são perpendiculares entre si. Mas para prova maior, quando aplicar os mesmos passos no rotacional do campo magnético, obtem-se o seguinte resultado

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{k} = -\omega \mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2.15}$$

Então pode-se dizer que esses três vetores formam um conjunto ordenado $\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}\}$ dextrógiro, ou seja, eles seguem a regra da mão direita com o polegar apontado para $\boldsymbol{k}$. Sabendo disto, podemos agora calcular o produto vetorial das equações 2.14 e 2.15 que ficam

$$Ek = -\omega B \tag{2.16}$$

$$Bk = -\frac{\omega}{c^2}E \tag{2.17}$$

multiplicando 2.16 por k e substituindo 2.17 nela, teremos

$$Ek^2 = \frac{\omega^2}{c^2}E$$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

que é a mesma relação que encontramos na secção 2.2 então pode-se reescrever a velocidade na forma

$$c = \lambda f$$

Apresentamos algumas propriedades importantes dos campos elétrico e magnético, que podem ser chamados de campo eletromagnético a partir de agora. As conclusões são:

1. Os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ se propagam como onda eletromagnética, tanto no vácuo quanto em meios materiais, com velocidade de fase $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \lambda f$;

2. $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ estão em fase;

3. A onda eletromagnética é transversal e, portanto, pode ser polarizada;

4. $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}$ são perpendiculares e formam uma tríade dextrogira (seguem a regra da mão direita).

2.4 Campos na matéria

Foi estudado as equações de Maxwell no vácuo para descobri que os campos elétrico e magnético se propagam como onda no vácuo, mas eles também se propagam na matéria e como é de se esperar, as equações dos campos não serão iguais as do vácuo. A matéria tem algumas características que se rlacionam com as constantes ϵ e μ para produzir interações diferentes com um mesmo campo, essas interações baseadas nas características do meio são chamadas de relações constitutivas e são definidas pelas seguintes propriedades dos meios:

i. Meio Linear: ϵ e μ não dependem dos campos;

ii. Meio Homogênio: ϵ e μ são o mesmo em todos os pontos do meio;

ii. Meio isotrópico: ϵ e μ são escalares fazendo com que os campos $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$ tenham a seguinte relação, $\boldsymbol{D}//\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}//\boldsymbol{H}$. ($\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{H}$ será apresentado nesta secção).

iv. Meio não disperssivo: ϵ e μ não dependem das frequências.

Considerando um meio com essas características, as equações de Maxwell podem ser reescritas substituindo as seguintes relações

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$$

onde $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{H}$ são, respectivamente, os campos deslocamento elétrico e campo magnético auxiliar. Segundo Van Bladel, (11), pag. 109, para se resolver um problema prático, tanto da física, quanto da engenharia, as equações constitutivas (também podemos chamá-las assim), são de extrema importância e também de alta prioridade. Pois identificar as propriedades do meio, possibilita encontrar resultados mais precisos e reais, pois nenhum meio é igual e quase todos os meios não são ideais.

Manipulando as equações de Maxwell para encontrarmos $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{H}$ obten-se:

$$\begin{array}{ll} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{array}$$

No sistema Gaussiano as constantes ϵ e μ são de mesma unidade e tem valor $\frac{1}{4\pi}$ e a relação $\mu_0\epsilon_0=\frac{1}{c}$. As equações de Maxwell no sistema Gaussiano tem a seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \textbf{(i)}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho & \textbf{(iii)}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \textbf{(ii)}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & \textbf{(iv)}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{array} \tag{2.18}$$

Vale lembrar também que os campos elétrico e magnético no sistema gaussiano tem a mesma unidade de medida e que a lei da força de Lorentz expressa no sistema gaussiano tem a forma

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{v}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$$

A partir de agora será usada a forma gaussiana, pois sua simetria facilitará os calculos. As equações de Maxwell em termos do vetor de propagação da onda $\boldsymbol{k}$ são encontradas quando se aplica a solução de onda nas equações 2.18 com $\rho=0$ e $\boldsymbol{j}=0$ e tem a seguinte forma.

$$\begin{array}{ll} \textbf{(i)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0 & \textbf{(iii)}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H} \\ \textbf{(ii)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0 & \textbf{(iv)}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\frac{\omega}{c}\epsilon\boldsymbol{E} \end{array} \tag{2.19}$$

Extraindo o módulo dessas equações e seguindo a mesma lógica das equações 2.16 e 2.17 multiplicando uma pela outra, obtem-se a velocidade da onda para meios materiais e longe da fonte. Como $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ e $\mu\epsilon=n^2$ obten-se a equação

$$k^2EH=\frac{\omega^2}{c^2}n^2EH$$
$$c^2=\frac{\omega^2}{k^2}n^2$$
$$\frac{c}{n}=\frac{\omega}{k}$$

e $\frac{\omega}{k}=u_0$ é a velocidade de propagação da onda em meios materiais em repouso

$$u_0=\frac{c}{n} \tag{2.20}$$

onde n é o coeficiente de refração do meio.

2.5 Conservação da energia eletromagnética e o teorema de Poynting

O trabalho realizado para que uma força ($\boldsymbol{F}$) mova uma partícula em uma determinada distância ($\boldsymbol{r}$) é dado pela equação:

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ou, na forma diferencial

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

e a força eletromagnética é dada pela equação de força de Lorentz no sistema gaussiano é:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.21}$$

O trabalho realizado pela força de Lorentz em cima de uma carga dq é dado por

$$dW = dq(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

e para que a carga se movimente um determinado dr em um determinado dt, ela precisa adquirir uma velocidade v, então $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, obtendo a equação a seguir

$$\begin{aligned} dW &= dq(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}dt \\ dW &= dq\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}dt \end{aligned}$$

e isto é uma diferencial em relação ao tempo t e pode ser reescrita em termo da derivada $\frac{dW}{dt}$, ficando assim:

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{E} \cdot dq\boldsymbol{v}$$

onde o termo $dq = \rho d\tau$ pode ser reescrito em função da densidade volumétrica de carga

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{E} \cdot \rho\boldsymbol{v}d\tau$$

o termo $\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$ é a densidade de corrente encontrando então a equação:

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}d\tau \tag{2.22}$$

que é a potência da força eletromagnética, ou seja, é a energia por segundo do sistema. Utilizando agora as equações de Maxwell 2.18 para substituir a densidade de corrente $\boldsymbol{j}$

na equação 2.22 a equação fica

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d\tau = \left(\frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) d\tau$$

usando a identidade vetorial A.4 é fácil notar que $\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E})$ e aplicando na equação

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E})) - \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

e substituindo o rotacional do campo elétrico $(\nabla \times \boldsymbol{E})$ que pode ser econtrado nas equações de Maxwell se encontra a equação

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) - \frac{1}{4\pi} \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right)$$

o termo $(\frac{c}{4\pi} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E} = -\frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{S})$ é o vetor de Poynting no sistema gaussiano, que representa a densidade direcional do fluxo de energia e $(\frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{u}_{em})$ é a densidade de energia eletromagnética, com isto a equação final para a lei da conservação eletromagnética é:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = -\nabla \cdot \boldsymbol{S} - \frac{\partial \boldsymbol{u}_{em}}{\partial t} \tag{2.23}$$

2.6 Teoria clássica da relatividade

A Teoria da Relatividade Restrita viola as transformações de Galileu, que até então descrevia, com facilidade e precisão, os movimentos relativísticos clássicos, com velocidades mais usuais da época, como a de um navio, por exemplo. Porém, ao aplicá-la em velocidades muito altas, como a velocidade da luz, as transformações de Galileu indicavam que velocidades maiores que a da luz eram possíveis, enquanto a relatividade de Einstein mostra que é impossível que um referencial viaje na velocidade da luz e isto é uma consequência matemática que veremos mais a frente. Os fenômenos eletromagnéticos, desde o início, são testados experimentalmente, além de serem usados constantemente. Sendo assim, se existe um erro entre as equações do eletromagnetismo e as transformações de Galileu, claramente esse erro não seria no eletromagnetismo, e sim nas transformações. Note que refutar uma teoria que, na prática já era muito usada e que funciona nas aplicações da época, é algo preocupante, é como falar que, hoje em dia, a mecânica quântica está errada e que encontrei uma forma melhor de explicar essa área. Então, é claro que a teoria de Einstein colocou a comunidade científica "na defensiva", gerando até a publicação de um livro chamado "Hundert Autoren Gegen Einstein"(7) que traduzido do alemão se chama "Cem autores contra Einstein"e segundo Gobilard, Lozada, e Lucas Blitz (5) descreve como um marco da revolução científica ao traduzir a obra.

Mas como funcionam essas transformações e de onde elas saíram? Vamos construílas para entender o que acontece e então propor outro tipo de transformação em que as condições de Einstein sejam satisfeitas, mas para isto, precisaremos definir alguns conceitos como: referencial inercial e mudança de referencial.

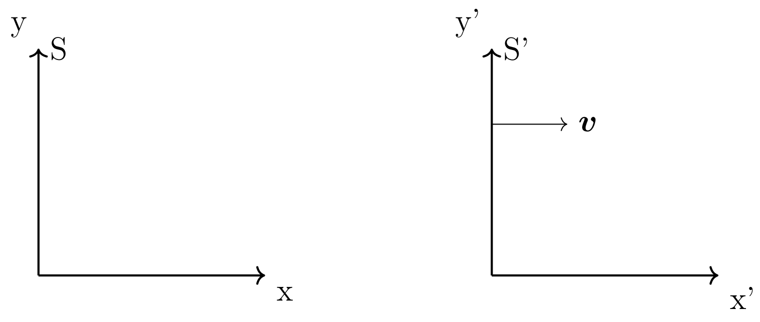
2.6.1 Referenciais Inerciais

Um referencial inercial consiste em um sistema de referência que obedece á lei da inércia de Newton. Significa que um corpo, em um estado de repouso ou movimento, permanece no seu estado até que uma força externa atue sobre ele. Basicamente, referenciais inerciais estão com velocidade constante, no qual, não conseguimos sentir o movimento.

Imagine que você está em uma sala onde não existe nenhum tipo de contato com o exterior dela, ou seja, você não pode ver nem ouvir nada que esteja fora desta sala, naturalmente você não tem como saber se você está em movimento ou em repouso, pois nós só sentimos as forças quando existe alteração da velocidade, ocasionando uma variação do momento, mas caso não se altere, podemos dizer que você está em um referencial inercial. Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos dizer que um sistema de referência em repouso é inercial, pois sua velocidade é constante e igual a zero. Podemos adicionar também que, se um sistema de referência é inercial comparado com o de velocidade zero, logo, esse outro sistema também é inercial.

O gráfico abaixo representa dois referenciais inerciais, onde um deles (S) está em repouso e o outro está em movimento com velocidade $\boldsymbol{v}$.

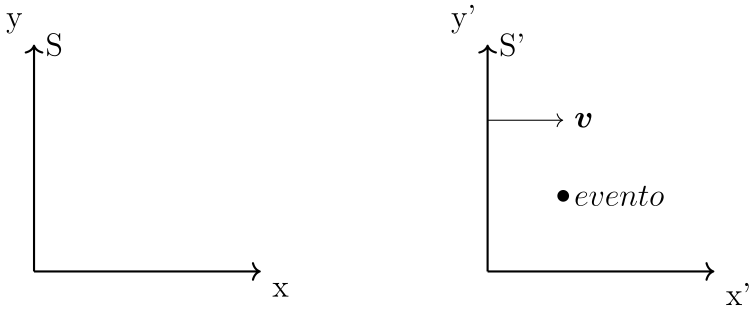
Figura 7 – referenciais inerciais



2.6.2 Mudança de referencial

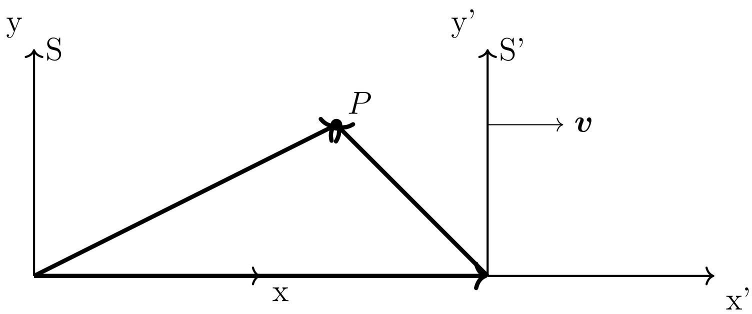
Seja S um referencial em repouso com eixos de coordenadas x, y, z, e S' outro referencial, agora com velocidade $\boldsymbol{v}$ no eixo x, considerando que os eixos estão alinhados. Um evento qualquer no ponto P pode ser visto de maneira diferente dependendo do referencial, e observarmos uma partícula em repouso no referencial S' e ao ser observado pelo referencial S, a mesma partícula estará em movimento com velocidade $\boldsymbol{v}$, como mostrado na figura abaixo.

Figura 8 – Evento no referencial S'



Vamos considerar um ponto P situado entre os referenciais S e S', como mostrado na figura abaixo.

Figura 9 – Vetor separação



Se fizermos o tempo ser abosoluto, ou seja, igual para os dois referenciais, a distância entre o referencial S e S' é dada por $\boldsymbol{v}.t$ onde $\boldsymbol{v} = (v_x, 0, 0)$. Se olharmos os vetores diretores $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$, podemos encontrar um vetor $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ com componentes $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = (v.t, 0)$, igualando as componentes, temos:

$$
\begin{aligned}
x - x' &= vt \\
y - y' &= 0 \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

e resolvendo as equações para x', y' e t' teremos então:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$t' = t$$

Agora temos uma relação entre os eixos do referencial S' e o S. Por indução, podemos fazer também as transformações para as demais componentes de um vetor $\boldsymbol{r}' = (x', y', z', t')$ e finalmente chegamos nas transformações de Galileu de S' para S e de S para S' também.

$$\begin{aligned} x' &= x - v.t & \qquad x &= x' + vt \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= t & t &= t' \end{aligned}$$

2.7 Incoerência entre o eletromagnetismo e as transformações de Galileu

Com as transformações de Galileu encontradas na secção anterior 2.6, vamos agora aplicá-las nas equações de Maxwell 2.18. Vamos introduzir agora o princípio da relatividade e os postulados de Einstein, na relatividade clássica, existe um princípio que deve ser seguido e baseando-se nesse princípio, Einstein formulou um postulado adicional na sua teoria. Os postulados da relatividade restrita de Einstein, que consistem em:

1 : As leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais.

2 : A velocidade de propagação da luz é constante e igual para quaisquer referenciais inerciais.

Veremos que o segundo postulado é uma consequência direta do primeiro postulado, enquanto o primeiro postulado é uma forte afirmação física, porém representa uma verdade universal, a de que, em todo universo, não existe nenhum referencial que seja privilegiado, ou seja, todos estamos sobre as mesmas leis e este postulado é o princípio da relatividade clássica.

As equações de Maxwell 2.18 estão de forma compactas, então podemos 'abrir' as equações para a forma mais fácil de trabalhar, fazendo isto, temos as equações de Maxwell abertas:

1.
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

2.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

3.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t},$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

4.

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t},$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}j_y + \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}j_z + \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

Usando as transformações de Galileu para descobri as componentes dos campos e suas derivadas. Supondo um vetor **r** qualquer, passando do referencial S para um outro referencial inercial S' que está com velocidade v, de componentes $\mathbf{r}(x', y', z', t')$ aplicado no referencial S' onde

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

e suas derivadas parciais em x, y e z, seguem a regra da cadeia

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x'} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y'} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z'} \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t'} - v\frac{\partial r}{\partial x'}$$

Tendo agora as derivadas para um vetor qualquer $\boldsymbol{r}$, podemos aplicar para os vetores $\boldsymbol{D}(x', y', z'), \boldsymbol{E}(x', y', z'), \boldsymbol{B}(x', y', z')$ e $\boldsymbol{H}(x', y', z')$ nas respectrivas derivadas das equações 1, 2, 3 e 4.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - v\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right), \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'} - v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right), \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'} - v\frac{\partial B_z}{\partial x'}\right). \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c}j_x + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_x}{\partial t'} - v\frac{\partial D_x}{\partial x'}\right), \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}j_y + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_y}{\partial t'} - v\frac{\partial D_y}{\partial x'}\right), \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}j_z + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_z}{\partial t'} - v\frac{\partial D_z}{\partial x'}\right). \tag{2.31}$$

Nas equações 2.27, 2.28, 2.30 e 2.31 dá para preservar a forma das derivadas apenas rearranjando-as, já nas 2.26 e 2.29 não dá para fazer isto diretamente, porém se manipular as 2.24 e 2.25 e substituir nelas a forma das equações é preservada, ficando assim

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z + \frac{v}{c}B_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right), \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z + \frac{v}{c}B_y\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}\right), \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'}\right). \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(H_z - \frac{v}{c}D_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(H_y + \frac{v}{c}D_z\right) = \frac{4\pi}{c}\left(j_x - v\rho\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_x}{\partial t'}\right), \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(H_z - \frac{v}{c}D_x\right) = \frac{4\pi}{c}j_y + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_y}{\partial t'}\right), \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H_y + \frac{v}{c}D_z\right) - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}j_z + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D_z}{\partial t'}\right). \tag{2.39}$$

Das equações 2.32 e 2.33 obtemos os campos $\boldsymbol{D'}$ e $\boldsymbol{B'}$ no referencial S' que são

$$D'_x = D_x, D'_y = D_y, D'_z = D_z$$

$$B'_x = B_x, B'_y = B_y, B'_z = B_z$$

já os campos $\boldsymbol{E'}$ e $\boldsymbol{H'}$ tem componentes um pouco diferentes. Das equações 2.34, 2.35 e 2.36 encontra-se

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = E_y - \frac{v}{c}B_z$$

$$E'_z = E_z + \frac{v}{c}B_y$$

e das equações 2.37, 2.38, 2.39

$$H'_x = H_x$$

$$H'_y = H_y + \frac{v}{c}D_z$$

$$H'_z + H_z - \frac{v}{c}D_z$$

Até agora está tudo certo, porém se voltar para as relações constitutivas 2.4 e aplicar os valores dos campos encontrados, as seguintes igualdades serão encontradas

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{D'} = \epsilon \boldsymbol{E'}$$

e aplicando os valores das componentes dos campos encontradas

$$D_x = \epsilon E_x$$
$$D_y = \epsilon E_y - \frac{v}{c} B_z$$
$$D_z = \epsilon E_z + \frac{v}{c} B_y$$

substituindo D po E em suas componentes

$$\epsilon E_x = \epsilon E_x \tag{2.40}$$
$$\epsilon E_y = \epsilon E_y - \frac{v}{c} B_z \tag{2.41}$$
$$\epsilon E_z = \epsilon E_z + \frac{v}{c} B_y \tag{2.42}$$

das equações 2.41 e 2.42, as igualdades

$$\frac{v}{c} B_z = 0$$

$$\frac{v}{c} B_y = 0$$

nos dá uma incoerência matemática. Pois desde o início, foi considerado um v diferente de zero no eixo x e se $\boldsymbol{B}_y = \boldsymbol{B}'_y$ e $\boldsymbol{B}_z = \boldsymbol{B}'_z$ estes campos não podem ser zero e diferente de zero ao mesmo tempo. Como $\boldsymbol{B}$ é não nulo apenas em x significa que existe um referencial privilegiado, onde o campo só existe no eixo de velocidade, o que se torna estranho quando se afirma que as leis físicas se comportam do mesmo jeito em todos os referenciais, infligindo o postulado da relatividade.

A incompatibildiade das equações de Maxwell com as transformações de Galileu põe em cheque a compreensão das leis estabelecidas. Se isto é verdade, então o que está errado? As leis da eletrodinâmica ou as transformações de Galileu? A eletrodinâmica é uma área muito bem testada, sendo praticamente formalizada por experimentos, o que lhe dá um peso enorme quando se fala em veracidade.

O que acontece é que as transformações de Galileu funcionam muito bem nas velocidades padrões do dia a dia, o que chamamos de baixas velocidades, mas quando aplicamos para altas velocidades, ela falha.

3 ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

3.1 O fator de Lorentz e a matriz transformação

As transformações de Galileu são aplicadas nas componentes de um vetor e é possível escrever na forma matricial com o tempo sendo uma quarta componente do vetor formando uma matrix 4x4. Sendo S a matriz coluna formada pelo vetor $\boldsymbol{r} = (t, x, y, z)$ e S' formada pelo vetor $\boldsymbol{r'} = (t', x', y', z')$ as transformações de galileu ficam na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

mas como foi visto que essas transformações são falhas para o eletromagnetismo, então o que se pode fazer é pensar em outra transformação que não cause incoerência matemática como aconteceu no capítulo anterior. Se olhar para a (**figura 8**) e agora supuser uma transformação arbitrária em x e t, a matriz de transformação arbitrária será

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & 0 & 0 \\ A_{01} & A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

e ao resolver a matriz, encontra-se as seguintes transformações.

$$\begin{aligned} t &= A_{00}t' + A_{10}x' \\ x &= A_{01}t' + A_{11}x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Se x, y, z e t são componentes de S e x', y', z' e t' são componentes de S' então $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ são as componentes de diferenciação de S e $\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}$ e $\frac{\partial}{\partial t'}$ são as componentes de diferenciação de S'. Logo a matriz de transformação do referencial S para o referencial S' vai gerar as componentes de transformação de qualquer vetor contido em S para S' também. Pegando um vetor qualquer $\boldsymbol{r} = (t, r_x, r_y, r_z)$, ele terá as seguintes derivadas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} &= A_{00}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'}\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} &= A_{01}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'}\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y'}\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z'}
\end{aligned}
$$

Com essas infromações, podemos agora escrever as equações de Maxwell transformando do referencial S para o S'.

$$
\nabla.\boldsymbol{D} = 4\pi\rho \Rightarrow A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho \tag{3.1}
$$

$$
\nabla.\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow A_{01}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \tag{3.2}
$$

$$
\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow
\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} &= -\frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial B_x}{\partial x'}), && (3.3)\\
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - (A_{01}\frac{\partial E_z}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial t'}) &= -\frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial B_y}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial B_y}{\partial x'}), && (3.4)\\
(A_{01}\frac{\partial E_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial t'}) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= -\frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial B_z}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial B_z}{\partial x'}). && (3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}.\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow
\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} &= \frac{4\pi}{c}j_x + \frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial D_x}{\partial x'}), && (3.6)\\
\frac{\partial H_x}{\partial z'} - (A_{01}\frac{\partial H_z}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial H_z}{\partial t'}) &= \frac{4\pi}{c}j_y + \frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial D_y}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial D_y}{\partial x'}), && (3.7)\\
(A_{01}\frac{\partial H_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial H_y}{\partial t'}) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} &= \frac{4\pi}{c}j_z + \frac{1}{c}(A_{00}\frac{\partial D_z}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial D_z}{\partial x'}). && (3.8)
\end{aligned}
$$

Ficamos então com estas expressões, que não fazem sentido na análise dimensional. Pois existem termos que não deveriam existir, mas com algumas manipulações, podemos reescrever-los de uma maneira que faça sentido fisicamente. O termo $\frac{\partial D_x}{\partial t'}$ da equação (3.1) aparece na equação (3.6), podemos isolar o termo em (3.6) substiruir-lo em (3.1). Podemos fazer o mesmo com (3.3) e (3.2), então obteremos as seguintes equações transformadas:

$$\nabla'.\boldsymbol{D}' = 4.\pi.\rho' \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}A_{00}-A_{01}A_{10})D_x+\frac{\partial}{\partial y'}(A_{01}cH_z+A_{00}D_y)+\frac{\partial}{\partial z'}(A_{00}D_z-A_{01}cH_y) = 4\pi(A_{00}\rho+A_{01}j_x)$$

$$\nabla'.\boldsymbol{B}' = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}A_{00}-A_{01}A_{10})B_x+\frac{\partial}{\partial y'}(A_{00}B_y-A_{01}cE_z)+\frac{\partial}{\partial z'}(A_{00}B_z+A_{01}cE_y) = 0$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{H}' = \frac{4\pi}{c'}\vec{j}' + \frac{1}{c'}\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y'}(A_{11}H_z+\frac{A_{10}}{c}D_y)-\frac{\partial}{\partial z'}(A_{11}H_y-\frac{A_{10}}{c}D_z) &= \frac{4\pi}{c}(A_{11}j_x+A_{10}\rho)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{11}A_{00}-A_{01}A_{10})D_x,\\
\frac{\partial H_x}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}H_z+\frac{A_{10}}{c}D_y) &= \frac{4\pi}{c}J_y+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}D_y+A_{01}cH_z),\\
\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}H_y-\frac{A_{10}}{c}D_z)-\frac{\partial H_z}{\partial y'} &= \frac{4\pi}{c}J_z+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}D_z-A_{01}cH_y).
\end{aligned}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c'}.\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y'}(A_{11}E_z-\frac{A_{10}}{c}B_y)-\frac{\partial}{\partial z'}(A_{11}E_y+\frac{A_{10}}{c}B_z) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{11}A_{00}-A_{01}A_{10})B_x,\\
\frac{\partial E_x}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}E_z-\frac{A_{10}}{c}B_y) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}B_y-A_{01}cE_z),\\
\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}E_y+\frac{A_{10}}{c}B_z)-\frac{\partial E_z}{\partial y'} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}B_z+A_{01}cE_y).
\end{aligned}$$

Se compararmos as equações transformadas com as esquações de Maxwell, teremos então os campos e as densidades de carga e corrente, transformados de S para S'. Ou seja, são os campos relativos.

Os campos elétrico, deslocamento elétrico e a densidade de carga tem as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
D'_x &= (A_{11}A_{00}-A_{01}A_{10})D_x & E'_x &= E_x\\
D'_y &= (A_{00}D_y+A_{01}cH_z) & E'_y &= (A_{11}E_y+\frac{A_{10}}{c}B_z)\\
D'_z &= (A_{00}D_z-A_{01}cH_y) & E'_z &= (A_{11}E_z-\frac{A_{10}}{c}B_y)\\
\rho' &= (A_{00}\rho+A_{01}j_x)
\end{aligned}$$

Os campos magnético e magnético induzido, e a densidade de corrente assumem as formas a seguir.

$$
\begin{array}{lll}
B'_x = (A_{11}A_{00} - A_{01}A_{10})B_x & H'_x = H_x & j'_x = (A_{11}j_x + A_{10}\rho) \\
B'_y = (A_{00}B_y - A_{01}cE_z) & H'_y = (A_{11}H_y - \dfrac{A_{10}}{c}D_z) & j'_y = j_y \\
B'_z = (A_{00}B_z + A_{01}cE_y) & H'_z = (A_{11}H_z + \dfrac{A_{10}}{c}D_y) & J'_z = j_z
\end{array}
$$

Falta agora encontrar as constantes que escolhemos arbitrariamente. Como inicilamente definimos um referencial inercial com velocidade $\vec{v} = v_x$ constante. Vale então usarmos esta informação para encontrar as constantes.

Se $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ e o referencial S' está se movendo na velocidade v então $\Delta x' = 0$ em S', sabendo que v é constante então para cada $\Delta x'$ que eu pegar, devo também variar um Δt de modo que v continue constante. Utilizando a matriz do referencial S' encontramos:

$$x' = A_{10}t + A_{11}x$$

então

$$\Delta x' = A_{10}\Delta t + A_{11}\Delta x$$

multiplicando tudo por $\frac{1}{\Delta t}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta x'}{\Delta t} &= A_{10}\frac{\Delta t}{\Delta t} + A_{11}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\
\frac{\Delta x'}{\Delta t} &= A_{10} + A_{11}v
\end{aligned}
$$

se $\Delta x' = 0$ então:

$$v = -\frac{A_{10}}{A_{11}}$$

Sabemos pelas equações da Maxwell que no vácuo $B = H$ e $D = E$ então, os campos transformados também são iguais entre si.

$$
\begin{aligned}
B'_x = H'_x \Rightarrow (A_{11}A_{00} - A_{01}A_{10})B_x = H_x \Rightarrow (A_{11}A_{00} - A_{01}A_{10}) = 1 \\
A_{00}B_y - A_{01}cE_z = A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c}D_z \Rightarrow A_{00} = A_{11} \ , \ A_{01}c = \frac{A_{10}}{c}
\end{aligned}
$$

Temos uma relação entre todas as constantes, agora podemos monstrar um sistema:

$$\begin{cases} (A_{11}A_{00} - A_{01}A_{10}) = 1 \\ A_{00} = A_{11} \\ A_{01}c = \frac{A_{10}}{c} \end{cases}$$

Para resolver o sistema, contaremos com a ajuda do valor de v encontrado logo acima. Resolvendo ele, encontraremos os seguintes valores para cada constante:

$$A_{11} = A_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$A_{10} = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$A_{01} = -\frac{v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Substituindo as constantes nas equações transformadas dos campos teremos então os devidos campos transformados, junto também com as densidades elétrica e de corrente.

Densidade de carga e campos elétrico e deslocamento elétrico, transformados:

$$D'_x = D_x \qquad E'_x = E_x$$

$$D'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(D_y - \frac{v}{c}H_z) \qquad E'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(E_y - \frac{v}{c}B_z)$$

$$D'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(D_z + \frac{v}{c}H_y) \qquad E'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(E_z - \frac{v}{c}B_y)$$

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(\rho - \frac{v}{c}j_x)$$

Densidade de corrente e campos magnético e magnético induzido, transformados:

$$B'_x = B_x \qquad H'_x = H_x \qquad j'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(j_x - v\rho)$$

$$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(B_y - \frac{v}{c}E_z) \qquad H'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(H_y - \frac{v}{c}D_z) \qquad j'_y = J - y$$

$$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(B_z + \frac{v}{c}E_y) \qquad H'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(H_z - \frac{v}{c}B_y) \qquad j'_z = j_z$$

Também podemos definir o sistema de coordenadas transformadas, que chamamos de transformações de Lorentz. Para isso, usaremos a matriz de tranformação das componentes de $S' = S.A$, onde A é a matriz de transformação de lorentz.

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Resolvendo a matriz e aplicando os valores das constantes encontradas, temos então as transformações de Lorentz.

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t - \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x \\ x' &= -\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Chamando $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$ as transformações de Lorentz ganham a seguinte forma

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2} x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

e a matriz de transformação (Λ_μ^v) ganha também uma nova apresentação

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$ e a parte temporal da matriz vetorial S ganha um termo de equilíbrio de sistema de unidade na parte temporal, que é o ct e, por curiosidade, o vetor $\chi^\mu = (ct, x, y, z)$ é chamado de quadrivetor e eles tem a propriedade de obedecer a seguinte transformação

$$\Lambda_\mu^v \chi^\mu = \chi'^v$$

mas não será utilizada esta notação.

3.2 Campos para meios em translação uniforme

As baixas velocidades tratadas aqui são aquelas muito menores que a velocidade da luz (c), onde a constante $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ se torna 0 e o fator de Lorentz γ se torna 1.

Usando as relações constitutivas vistas na secção 2.4, nestas condições os campos no vácuo tem as relações.

$$\boldsymbol{D}' = \epsilon \boldsymbol{E}' \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{B}' = \mu \boldsymbol{H}' \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} D'_x &= \epsilon E'_x \qquad & B'_x &= \mu H'_x \\ D'_y &= \epsilon E'_y \qquad & B'_y &= \mu H'_y \\ D'_z &= \epsilon E'_z \qquad & B'_z &= \mu H'_z \end{aligned}$$

Substituindo as componentes dos campos encontrados na secção 3.1 consegue as seguintes relações:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon E_x \qquad & B_x &= \mu H_x \\ \left(D_y - \frac{v}{c} H_z\right) &= \epsilon \left(E_y - \frac{v}{c} B_z\right) \qquad & \left(B_y + \frac{v}{c} E_z\right) &= \mu \left(H_y + \frac{v}{c} D_z\right) \\ \left(D_z + \frac{v}{c} H_y\right) &= \epsilon \left(E_z + \frac{v}{c} B_y\right) \qquad & \left(B_z - \frac{v}{c} E_y\right) &= \mu \left(H_z - \frac{v}{c} D_y\right) \end{aligned}$$

Percebe-se que o vetor resultante destas componentes é uma soma de dois vetores tanto de um lado quanto do outro lado da igualdade e, ao somar os lados das igualdades para obter os vetores dos campos, resulta em duas equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} + \frac{v}{c}(-H_z + H_y) &= \epsilon \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{v}{c}(-B_z + B_y) \\ \boldsymbol{B} + \frac{v}{c}(E_z - E_y) &= \mu \boldsymbol{H} + \mu \frac{v}{c}(D_z - D_y) \end{aligned}$$

Onde as componentes $v(-H_z + H_y)$ é o resultado de um produto vetorial entre o vetor unidimensional $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i}$ e o vetor de campo $\boldsymbol{H}$. Sendo assim, pode-se reescrever as expressões $v(-H_z + H_y) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$, $v(-B_z + B_y) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ e, analogamente as expressões $v(E_z - E_y) = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$ e $v(D_z - D_y) = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}$ encontrando então as seguintes equações de campo:

$$\boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = \epsilon \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \tag{3.15}$$
$$\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} = \mu \boldsymbol{H} - \mu \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{D} \tag{3.16}$$

Se analisarmos para $v = 0$ obtemos as relações constitutivas de repouso e se analisarmos para $v << c$ nas equações do jeito que estão agora, também encontraremos as relações de repouso, ao ponto, também, em que se tomarmos velocidades muito grandes, o fator $\frac{v}{c}$ não pode ser despresível e a única fração que contem a variável que utilizaremos, não pode ir para zero, então é preciso refinar um pouco mais a nossa equação. Para que haja sentido avaliar $v << c$ é necessário multiplicar todos os termos por $\frac{\boldsymbol{v}}{c}$ assim teremos um fator em comum e aparecerá o termo $\frac{v^2}{c^2}$ em que este sim pode ser desconsiderado na presença de $\frac{\boldsymbol{v}}{c}$. Como $\boldsymbol{v}$ é um vetor, vamos utilizar o produto vetorial, para cálculos futuros. Fazendo isto, é encontrada as expressões:

$$\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) = \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right)$$
$$\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} \right) = \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} + \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{D} \right)$$

Pela propriedade associativa e sabendo o resultado do produto vetorial de um vetor unidimensional por um vetor tridimensional, algumas expressões da equações se anulam, ficando com os termos

$$\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{D} = \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} \tag{3.17}$$
$$\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} = \epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \tag{3.18}$$

se manipular as relações 3.15 e 3.16 encontra-se

$$\mu \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{D} = -\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \tag{3.19}$$
$$\epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} = +\boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} - \epsilon \boldsymbol{E} \tag{3.20}$$

que podemos utilizar, pois a fração $\frac{v}{c}$ não é nula e ainda sim são relativísticas, tornando as igualdades válidas. Multiplicando especificamente a 3.17 por μ e a 3.18 por ϵ e substituindo as 3.19 e 3.20 encontra as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} &= \mu\epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} - \epsilon \boldsymbol{E} &= \mu\epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}
\end{aligned}
$$

Isolando $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ nas duas equações

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} - \mu\epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{D} &= -\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} + \mu\epsilon \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} + \epsilon \boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

Como no sistema gaussiano as constantes μ e ϵ tem o mesmo valor, então o produto $\mu.\epsilon = n^2$ e á este termo, damos o nome de indice de refração do meio. Substituindo essa igualdade e colocando alguns termos em evidência obteremos as equações:

$$
\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} - \frac{(n^2 - 1)}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \tag{3.21}
$$

$$
\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} + \frac{(n^2 - 1)}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \tag{3.22}
$$

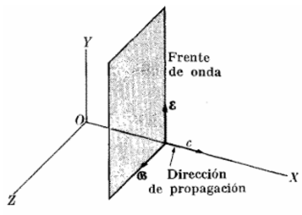
que são as relações constitutivas para referenciais em movimento. Vemos que no vácuo o $n = 1$ e as relações recaem nas 3.13 e 3.14, acontece o mesmo para referenciais em repouso $\boldsymbol{v} = 0$.

Embora estas equações estejam tratando de velocidades baixas em relação à luz, vale lembrar que até a velocidade do som é muito menor que a da luz, então mesmo que os campos sejam de baixas velocidades, elas ainda abrangem uma área enorme de aplicações.

3.3 Equações de Maxwell para meios em translação uniforme

No capítulo 2.2 vimos o que são ondas e suas polarizações, porém para continuarmos a partir daqui, devemos estabelecer o conceito de ondas planas e monocromáticas. Uma onda eletromagnética é composta por um campo elétrico e um campo magnético perpendiculares entre si e que se propagam em uma direção perpendicular aos dois ao mesmo tempo, ou seja, perpendicular ao plano formado por $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, uma onda é dita plana, quando, na função de onda 2.9 a amplitude $\boldsymbol{\Psi}_0$ é constante. Na onda eletromagnética, a amplitude do campo elétrico e magnético são constantes tembém e dão há polarização de rotação; quando dizemos que a onda é monocromática, estamos pegando uma só frequência de onda, lembrando que no espectro visível de luz as frequências estão associadas a cor da luz emitida, então uma luz monocromática está emitindo uma frequência angular ω constante, os lasers são exemplos de ondas monocromáticas. Uma onda eletromagnética plana e monocromática pode ser representada pela figura 1

Figura 1 – Onda plana e monocromática



Fonte: (1)

Usando as equações de Maxwell 2.18 com $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ e aplicando os campos encontrados 3.21 e 3.22 é possível encontrar as equações do eletromagnetismo para essas velocidades. Para isso, é bom relembrar da função de solução para equação de onda 2.9, que aplicado para ondas planas e monocromáticas terá as formas para o campo elétrico

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{3.23}$$

e para o campo magnético

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{3.24}$$

Juntando as equações de Maxwell com as relações 3.13 e 3.14, encontram-se as equações

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= 0 & \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} &= \frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 & \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} &= -\frac{\omega}{c}\epsilon\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

e substituindo as relações 3.22 e 3.21 nestas relações é possível agora calcular os gradientes e rotacionais como estão aqui embaixo:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\left(\epsilon\boldsymbol{E} + \frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) &= 0 & \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} &= \frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{H} - \frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right) &= 0 & \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} &= -\frac{\omega}{c}\epsilon\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

Calculando os divergentes e e rotacionais usando as soluções de equação de onda 3.23 e 3.24, para o divergente de $\boldsymbol{D}$ que foi encontrado:

$$\epsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E} + \frac{n^2-1}{c}\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = 0$$

Usando a identidade vetorial $\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$ (A.4) e sabendo que o vetor $\boldsymbol{v}$ é constante, então seu rotacional é zero, a equação fica na forma

$$\epsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\frac{n^2-1}{c}\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=0$$

podemos agora substituir o rotacional do campo $\boldsymbol{H}$ nesta equação

$$\epsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot(\epsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E})=0$$

o divergente do campo $\boldsymbol{E}$ usando a solução da equação de onda, é dado por

$$\epsilon\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot(\epsilon\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})=0$$

resultando na equação:

$$\left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{E}=0$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o divergente de $\boldsymbol{B}$ e para os rotacionais, as seguintes equações são encontradas:

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{E}=0 &\qquad& \left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\times\boldsymbol{E}=\frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H}\\
&\left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{B}=0 &\qquad& \left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\times\boldsymbol{H}=-\frac{\omega}{c}\epsilon\boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

O termo $\left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)$ é comum em todas as equações e composto por constantes que vem do movimento do meio e da direção de propagação da onda, é possível transformar todo este termo em um só vetor, então fazendo $\left(\boldsymbol{k}+\omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{\Gamma}$ e este é vetor de onda para referenciais inerciais e quando se aplica para referenciais em repouso, resulta nas equações 2.19. Assim, a eletrodinâmica para referenciais inerciais não relativísticos (com velocidades muito mais baixas que a da luz) fica na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{E}=0 &\qquad& \boldsymbol{\Gamma}\times\boldsymbol{E}=\frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H}\\
&\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{H}=0 &\qquad& \boldsymbol{\Gamma}\times\boldsymbol{H}=-\frac{\omega}{c}\epsilon\boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

3.4 Velocidade da onda para referenciais em translação uniforme

No final da secção 2.4 foi calculado a velocidade da onda na matéria em repouso, agora vamos calcular a velocidade da onda na matéria para referenciais em translação uniforme. Vamos fazer o mesmo processo agora usando as equações encontradas agora onde o vetor de onda não é só $\boldsymbol{k}$ mas sim $\boldsymbol{\Gamma}$ e o módulo dele também é diferente. Calculando os módulos dos divergentes e dos rotacionais

$$\left|\boldsymbol{k} + \omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right| E = \frac{\omega}{c}\mu H$$
$$\left|\boldsymbol{k} + \omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right| H = \frac{\omega}{c}\epsilon E$$

e agora multiplicando um pelo outro

$$\left|\boldsymbol{k} + \omega\frac{n^2-1}{c^2}\boldsymbol{v}\right|^2 EH = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu EH$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + 2\omega\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} + \omega^2\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)^2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu$$

multiplicando tudo por $\frac{1}{k^2}$ o produto escalar entre $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = vk$ pois o ângulo entre eles é 0, $\epsilon\mu = n^2$ e $\frac{\omega}{k} = u'$ é a velocidade da onda para referenciais com velocidade v

$$\frac{k^2}{k^2} + 2\frac{\omega}{k^2}\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)vk + \frac{\omega^2}{k^2}\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)^2 v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{n^2}{c^2}$$

$$1 + 2u'\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v + u'^2\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)^2 v^2 = u'^2\frac{n^2}{c^2}$$

$$1 + 2u'\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v + u'^2\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)^2 v^2 - \frac{n^2}{c^2}\right] = 0$$

resolvendo a equação do segundo grau para u

$$u' = \frac{-\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v \pm \frac{n}{c}}{\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)^2 v^2 - \frac{n^2}{c^2}} \tag{3.25}$$

$$u' = \frac{-\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v \pm \frac{n}{c}\right]}{\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v - \frac{n}{c}\right]\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v + \frac{n}{c}\right]}$$

$$u'_1 = \frac{-1}{\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v - \frac{n}{c}\right]}$$
$$u'_2 = \frac{-1}{\left[\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v + \frac{n}{c}\right]}$$

os dois valores para u' é referente a propagação da onda estar no mesmo sentido do meio v ou no sentido oposto ao meio $-v$ e o $\frac{n}{c} = \frac{1}{u_0}$. Um caso particular é para quando $v = 0$, e o resultado é $u' = \frac{c}{n} = u_0$ que é a velocidade da onda para meios em repouso.

Pegando a equação 3.25 é possível perceber que aparece a razão $\frac{v^2}{c^2}$, que, na presença de $\frac{v}{c}$, vai para zero, obtendo a velocidade de propagação da onda em meios com baixa velocidade.

$$u' = \frac{-\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v \pm \frac{n}{c}}{\left(n^2-1\right)^2\frac{v^2}{c^4} - \frac{n^2}{c^2}}$$

$$u' = \frac{-\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)v \pm \frac{n}{c}}{-\frac{n^2}{c^2}}$$

$$u' = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)v \mp \frac{c}{n}$$

Esta equação serve para ondas que se movem no mesmo sentido do meio, pois $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = vk$, mas se o sentindo for oposto, então $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = -vk$, então a equação final tem a seguinte forma:

$$u' = \pm\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)v \mp \frac{c}{n} \tag{3.26}$$

Note que existe um fator de correção para que a velocidade da onda não seja maior do que a da luz. A expressão 3.26 é a velocidade da luz para meios com trnslação uniforme e é justamente a expressão obtida por Fizeau em seu trabalho para tentar detectar o arrasto do Ether (4).

3.5 Teorema de Poynting para meios inerciais

Na secção 2.5 foi visto o teorema de Poynting que mostra a lei de conservação de energia e foi apresentado o vetor de Poynting que mostra o fluxo de energia direionado. Utilizando a lei de conservação de energia eletromagnética 2.23 e ao invez de usar as relações constitutivas convencionais, usar as relações constitutivas para referenciais em movimento 3.22 3.21, será obtido a lei de conservação eletromagnética para referenciais inerciais.

Pegando a equação 2.23 na forma aberta e substituindo os campos $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ das 3.22 e 3.21, encontra-se:

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}) - \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\left(\epsilon\boldsymbol{E} + \frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\left(\mu\boldsymbol{H} - \frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right)}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}) - \frac{1}{4\pi}\left(\epsilon\frac{\partial E^2}{\partial t} + \mu\frac{\partial H^2}{\partial t}\right) - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n^2-1)}{c}\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})\right)\right]$$

Utilizando a identidade vetoria A.5 e fazendo $\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})$ encontra-se o vetor de Poynting

$$-\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \frac{4\pi}{c}(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})$$

e

$$-\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}) = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})$$

então a lei de conservação eletromagnética para referenciais inerciais não relativísticos é:

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} - \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + 2\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t} \tag{3.27}$$

e para $\boldsymbol{v} = 0$ a equação cai na forma para referenciais fixos 2.23. Vemos que a equação 3.27 aparece um termo adicional referente à velocidade do meio e que depende da vairação temporal do Vetor de Poynting, que, ao analisarmos as componentes que aparecem a derivada temporal, percebemos que a energia eletromagnética é disperssada na direção a qual o Vetor de Poynting varia com o tempo. Então fazendo $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - 2\left(\frac{n^2-1}{c^2}\right)\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}u'_{em}$ então assim podemos perceber a disperssão da energia e a equação 3.27 fica na forma:

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} - \frac{\partial}{\partial t}u'_{em} \tag{3.28}$$

4 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, exploramos as equações fundamentais da eletrodinâmica, assim como as equações de onda, que, como vimos, é como a luz também se manifesta. Vimos a importância do estudo de ondas eletromagnéticas e sua unificação com o estudo de óptica e demonstramos alguns fundamentos físicos, como calcular a velocidade de uma onda no vácuo a partir de referenciais em repouso, como também a conservação de energia das ondas eletromagnéticas, juntamente com o Teorema de Poynting, que foi um dos focos do nosso trabalho.

Ao analisarmos parte da eletrodinâmica clássica, incluímos alguns conceitos, como alguns meios diferentes do vácuo, estabelecendo as equações constitutivas e estudando a eletrodinâmica em referenciais inerciais. Neste pontos provamos que as transformações de Galileu para referenciais inerciais, por mais que possam ser aplicadas em alguns casos, não são compatíveis com as leis que regem o eletromagnetísmo e ao aplicar outras transformações, descobrimos que as Trasnformações de Lorentz, podem ser obtidas naturalmente apenas aplicando o princípio da relatividade e descobrimos que a invariância da velocidade da luz, o segundo princípio da relatividade proposto por Einstein, é um efeito natural do primeiro princípio da relatividade.

Após isto, pudemos reescrever os fundamentos estudados, agora para referenciais com baixas velocidades, mostrando que as baixas velocidades são aquelas muito menores que a da luz, tendo uma ampla aplicação. Mostramos que a velocidade da luz em meios com translação uniforme se assemelha á que Fizeaul encontrou em um de seus trabalhos. Mostramos também que, em meios com estes movimentos, a equação de conservação de energia sofre uma mudança devido ao movimento.

Seria possível também estudar os efeitos da relatividade na conservação do momento, assunto que não abordamos neste documento, mas que pode ser tema para trabalhos futuros. Em resumo, este trabalho oferece uma interpretação de algumas das teorias e conceitos fundamentais do eletromagnetismo, tanto na física clássica, como na moderna, além de oferecer algumas ferramentas e processos úteis para aplicações e estudos futuros desta área da física.

A IDENTIDADES VETORIAIS BÁSICAS

O nabla (∇) é um operador diferencial que age em campos escalares e vetoriais, ele se comporta como um vetor cuja suas componentes são as derivadas parciais em relação a x, y e z e ele tem a seguinte forma.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Quando se aplica o operador nabla em uma função escalar, seu resultado é um vetor e o chamamos de gradiente.

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por se comportar como um vetor, o nabla também segue as regras de produto de vetores e ao ser aplicado em um vetor, obtemos o divergente ($\nabla \cdot \boldsymbol{u}$) e o rotacional ($\nabla \times \boldsymbol{u}$). Onde o divergente dos dá um escalar e o rotacional nos dá um vetor.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = det. \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

Agora me pergunto se você, por curiosidade, nunca pensou como seria o resultado destas expressões ($\nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u})$) e ($\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u})$). Pois bem, vamos agora descobrir quem são elas.

Pegando o Divergente de $\boldsymbol{u}$ e colocando dentro do parêntese, teremos.

$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{A.1}$$

O resultado nos dá um vetor, pois estamos aplicando o nabla no resultado do divergente de $\boldsymbol{u}$ que é um escalar. Este resultado não parece grande coisa, mas vamos utilizar ele para provar a segunda expressão. Como estamos calculando o rotacional de um rotacional, o resultado esperado é um vetor, agora vamos calcular o determinante da matriz do rotacional para poder aplicar dentro do parêntese da segunda expressão.

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = det.\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Agora temos um vetor com essas componentes, o que devemos fazer agora é calcular o determinante de uma matriz igual, mas agora com as componentes desse novo vetor.

$$det.\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}) & (\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}) & (\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}) \end{bmatrix}$$

Resolvendo a matriz, teremos.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \begin{matrix} [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x})]\hat{\boldsymbol{i}} + \\ [\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y})]\hat{\boldsymbol{j}} + \\ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z})]\hat{\boldsymbol{k}} \end{matrix}$$

Sabemos que as derivadas podem seguir a propriedade associativa então, aplicando essa propriedade nos termos encontrados, ficamos com.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \begin{matrix} [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_y}{\partial x}) - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_z}{\partial x})]\hat{\boldsymbol{i}} + \\ [\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_z}{\partial y}) - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial y})]\hat{\boldsymbol{j}} + \\ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial z}) - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_y}{\partial z})]\hat{\boldsymbol{k}} \end{matrix}$$

existe um truque matemático bem ousado e muito usado, que consiste em adicionar e subtraír pelo mesmo termo, não estaremos alterando a equação, pois isto é uma forma de somar com 0. Fazendo este truque obteremos a seguinte forma

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \begin{matrix} [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_y}{\partial x}) - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_z}{\partial x})]\hat{\boldsymbol{i}} + [\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}]\hat{\boldsymbol{i}} + \\ [\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u_z}{\partial y}) - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial y})]\hat{\boldsymbol{j}} + [\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}]\hat{\boldsymbol{j}} + \\ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial z}) - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_y}{\partial z})]\hat{\boldsymbol{k}} + [\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}]\hat{\boldsymbol{k}} \end{matrix} \tag{A.2}$$

O laplaciano é obtido fazendo o produto escalar de nabla com ele mesmo e pode ser aplicado em funções escalares, entretando a equação acima vai nos dar uma aplicação vetorial para o laplaciano. Podemos perceber que se compararmos a equação (A.1) com a (A.2), teremos a seguinte identidade vetorial.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{A.3}$$

onde $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ é o laplaciano do vetor $\boldsymbol{u}$.

Porém se aplicar o divergente do produto vetorial de dois vetores $[\nabla \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{u})]$, por ∇ ser uma operação diferencial, podemos utilizar a regra do produto, obtendo

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial x}(g_y u_z) - \frac{\partial}{\partial x}(g_z u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(g_z u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(g_x u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(g_x u_y) - \frac{\partial}{\partial x}(g_y u_x) \\
\nabla \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{f}) &= (\frac{\partial g_y}{\partial x})u_z + (\frac{\partial u_z}{\partial x})g_y - (\frac{\partial g_z}{\partial x})u_y - (\frac{\partial u_y}{\partial x})g_z + (\frac{\partial g_z}{\partial y})u_x + (\frac{\partial u_x}{\partial y})g_z - (\frac{\partial g_x}{\partial y})u_z \\
&\quad - (\frac{\partial u_z}{\partial y})g_x + (\frac{\partial g_x}{\partial z})u_y + (\frac{\partial u_y}{\partial z})g_x - (\frac{\partial g_y}{\partial z})u_x - (\frac{\partial u_x}{\partial z})g_y
\end{aligned}$$

colocando alguns termos em evidência,segue-se que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{u}) = -f_x \left(\frac{\partial g_y}{\hat{\partial z}} - \frac{\partial g_z}{\hat{\partial y}} \right) - u_y \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) - u_z \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x} \right) + \\
g_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + g_y \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + g_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Percebe-se então que existem dois produtos escalares, um com o vetor $(-\boldsymbol{f})$ e outro com o vetor $\boldsymbol{g}$ e o padrão dentro dos parênteses são de um rotacional de um vetor. Sabendo disto, pode-se reescrever a expressão acima na sua forma compacta e assim encontra-se outra identidade vetorial.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g}) \tag{A.4}$$

Dados os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$, a relação $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h})$ é dada como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) &= (u_x \hat{\boldsymbol{i}} + u_y \hat{\boldsymbol{j}} + u_z \hat{\boldsymbol{k}})[(g_y h_z - g_z h_y)\hat{\boldsymbol{i}} + (g_z h_x - g_x h_z)\hat{\boldsymbol{j}} + (g_x h_y - g_y h_x)\hat{\boldsymbol{k}}] \\
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) &= u_x g_y h_z - u_x g_z h_y + u_y g_z h_x - u_y g_x h_z + u_z g_x h_y - u_z g_y h_x
\end{aligned}$$

rearanjando os termos para colocar o vetor $\boldsymbol{h}$ em evidência

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) = (u_y g_z h_x - u_x g_z h_x) + (u_z g_x h_y - u_y g_z h_y) + (u_x g_y h_z - u_z g_x h_z)$$

encontrando então a identidade vetorial a seguir

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{g}) \tag{A.5}$$

REFERÊNCIAS

[1] Alonso, Marcelo e Finn, E. J. *Física: um curso universitário, volume II-Campos e ondas.* Edgard Blucher, 1972.

[2] Churchill, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações.* McGraw-Hill do Brasil, 1980.

[3] da Costa Marques, G. Partículas elementares: A procura das partículas we z. *Universidade de Sao Paulo-Instituto de Fısica. Sao Paulo* (1992).

[4] Fizeau, M. Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui parait démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur. *SPIE milestone series 28* (1991), 445–449.

[5] Gobilard, L., and Blitz, L. Cien autores contra einstein: una traduccion crítica parcial. *Revista Boliviana de Física 34*, 34 (2019), 33–46.

[6] Griffiths, D. J. Eletrodinâmica, 3ª edição, 2011.

[7] Israel, H., and Ruckhaber, E. Rudolf weinmann, eds. 1931. *Hundert Autoren gegen Einstein.*

[8] Nussenzveig, H. M. Curso de física básica, vol. 4. *São Paulo: Edgard Blücher* (2002).

[9] Nussenzveig, H. M. Curso de física básica, volume 2, 4ª edição. *São Paulo, Editora Blucher* (2002).

[10] NUSSENZVEIG, M., and de Física Básica, H. C. Vol. 3: Eletromagnetismo. 2ª edição. *São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda* (2015).

[11] van Bladel, J. *Relativity and Engineering.* Springer Series in Electronics and Photonics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.