UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS SIQUEIRA PAIVA

PROBLEMA DE DOIS CORPOS: UMA ANÁLISE NUMÉRICA UTILIZANDO A MODELAGEM EM VPYTHON

MONTEIRO
2025

VINÍCIUS SIQUEIRA PAIVA

PROBLEMA DE DOIS CORPOS: UMA ANÁLISE NUMÉRICA UTILIZANDO A MODELAGEM EM VPYTHON

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO
2025

P149p Paiva, Vinícius Siqueira.
Problema de dois corpos [manuscrito] : uma análise numérica utilizando a modelagem em VPython / Vinícius Siqueira Paiva. - 2024.
94 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2024.

"Orientação : Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE".

1. Mecânica celeste. 2. Simulação computacional. 3. Método de Euler-Cromer. 4. VPython. 5. Modelo matemático. I. Título

21. ed. CDD 521

Elaborada por Talita Ramos Bezerra - CRB - 15/970 BSC6

VINICIUS SIQUEIRA PAIVA

PROBLEMA DE DOIS CORPOS: UMA ANÁLISE NUMÉRICA UTILIZANDO A MODELAGEM EM VPYTHON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 26/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Luciano dos Santos Ferreira** (***.565.264-**), em **04/03/2025 12:33:16** com chave **fe510f80f90d11efa8ed06adb0a3afce**.
- **Natan de Assis Lima** (***.029.874-**), em **04/03/2025 12:43:48** com chave **76e22b2cf90f11ef830f06adb0a3afce**.
- **Roger Ruben Huaman Huanca** (***.567.928-**), em **04/03/2025 13:39:47** com chave **492df51ef91711efa75606adb0a3afce**.

Dedico este trabalho à minha mãe, Sônia Rocha, cujo apoio incondicional e confiança em meu potencial foram fundamentais para que eu alcançasse este momento em minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Expressar minha gratidão parece insuficiente diante de tudo o que minha mãe, Sônia Rocha, fez por mim. Ela é uma mulher batalhadora, que enfrentou inúmeras dificuldades para criar a mim e ao meu irmão Ivan Pinheiro, e, mesmo assim, nunca deixou de nos incentivar a estudar. Em momento algum nos faltou o apoio ou o estímulo necessário para seguirmos adiante. Como ela costuma dizer: *"Estudem, pois o conhecimento é o único tesouro que ninguém pode nos roubar, e a educação é a chave que abre caminhos para oportunidades e transforma vidas"*.

Recordo-me de quando, no primeiro período da graduação, o professor José Luiz Cavalcanti nos disse: *"Procurem se ajudar, pois todos estão no mesmo barco"*. Ao longo dessa viagem pelo vasto oceano da matemática, tive o privilégio de conhecer pessoas únicas, tanto da minha turma original quanto de outros períodos, que me apoiaram, incentivaram e dividiram comigo suas experiências. Agradeço especialmente aos meus amigos mais próximos, em ordem alfabética: Anielly Nunes, Douglas Henrique, Jeferson Leite, Joalisson Soares, José Augusto, José Diego, José Marcelo, Maiara Morato e Pedro Henrique. Vocês foram fundamentais durante essa jornada acadêmica, tornando-a mais leve, divertida e significativa. Não poderia deixar de mencionar também os demais colegas que tive a oportunidade de conhecer e com quem compartilhei momentos importantes ao longo do curso. Cada interação contribuiu, de alguma forma, para o meu crescimento pessoal.

Agradeço aos professores que tive, não só na graduação, como nas escolas durante os estágios e na Residência Pedagógica. As dificuldades enfrentadas ao longo das disciplinas mais desafiadoras, que muitas vezes exigiram mais do que apenas dedicação, mas também resiliência e força de vontade, contribuíram para moldar não apenas o estudante que sou, mas também a pessoa que me tornei. Cada um de vocês desempenhou um papel fundamental, não somente em refinar meu conhecimento matemático, mas também no desenvolvimento pessoal e profissional.

Dentre estes professores, gostaria de agradecer especialmente ao meu orientador Luciano dos Santos Ferreira, que acolheu meu trabalho e se disponibilizou a assumir a responsabilidade de aprimorar seu conteúdo.

Agradeço à banca examinadora composta pelo prof. Dr. Natan de Assis Lima e prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca pela disponibilidade na avaliação deste trabalho, que certamente levaram a versão final otimizada.

Não poderia deixar de agradecer aos responsáveis por me levar à universidade todos os dias: Cícero Marcos e Valmir Prata, que foram mais do que motoristas, e sim verdadeiros companheiros de jornada, acompanhando-me ao longo de todos esses anos com dedicação e profissionalismo.

Durante uma época significativa da minha graduação, em que passava o dia inteiro na universidade, eu e os colegas residentes e pibidianos costumávamos brincar, dizendo: *"Nós moramos na UEPB e fazemos uma breve visita à nossa casa"*. Essa convivência diária na instituição permitiu-me perceber e valorizar profundamente o trabalho de toda a estrutura administrativa, a quem venho aqui agradecer: aos coordenadores, secretários, vigilantes, às meninas da limpeza e aos bibliotecários, por todo o suporte e pelos seus gestos cotidianos, como um simples *"bom dia"* ou *"boa noite"*, que contribuíram para que a universidade fosse um ambiente acolhedor.

Por último, e não menos importante, agradeço muito a um amigo em especial, que sempre me esperou no portão à noite durante todos estes anos: meu "cãopanheiro" Tobi, que, apesar de eu estar exausto ao chegar, sempre me fez (e faz) ficar alegre.

“O Amor, que move o Sol e as outras estrelas.”
(Dante Alighieri, A Divina Comédia – Paraíso, Canto XXXIII, v. 145)

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de dois corpos, um dos clássicos desafios da mecânica celeste, cujo objetivo é descrever o movimento de dois objetos que se atraem mutuamente devido à força gravitacional. O principal objetivo deste estudo é desenvolver um modelo matemático capaz de representar esse movimento, implementar numericamente o modelo em uma simulação tridimensional e analisar tanto a órbita descrita quanto os dados numéricos obtidos com valores reais. Para alcançar esse objetivo, utilizou-se a plataforma online do Trinket, que possibilita o uso da biblioteca VPython, permitindo a criação e animação de objetos em 3D. Além disso, foram empregados os métodos numéricos de Euler e Euler-Cromer para a integração das equações de movimento. No desenvolvimento do estudo, dois sistemas binários foram analisados: um modelo simples, representando o sistema Sol-Terra, e um modelo mais complexo, correspondente ao sistema Plutão-Caronte. Os parâmetros investigados incluíram a órbita descrita pelo movimento, a velocidade orbital, o período orbital e a excentricidade. Ao comparar os resultados obtidos com dados fornecidos pela *NASA Space Science Data Coordinated Archive* e pelo portal *Views of the Solar System*, constatou-se uma boa concordância nos valores, evidenciando a eficácia do modelo proposto em descrever e prever o movimento orbital em sistemas gravitacionais binários. Entretanto, a excentricidade apresentou discrepâncias significativas, atribuídas à utilização de uma fórmula padronizada que considera órbitas essencialmente circulares. As simulações desenvolvidas demonstraram alinhamento com a abordagem interdisciplinar STEAM e com os pilares do Pensamento Computacional. Essas características destacam o potencial didático do uso da programação como ferramenta educacional, permitindo a exploração de fenômenos físicos e a realização de experimentos virtuais. Essa metodologia integra conteúdos de física e matemática, promovendo interdisciplinaridade, aprendizagem significativa e aplicação prática dos conceitos. Além disso, está em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular, que incentivam o uso de tecnologias digitais e metodologias ativas no ensino.

Palavras-chave: Problema de dois corpos. Simulação computacional. Método de Euler-Cromer. VPython.

ABSTRACT

This work addresses the two-body problem, one of the classic challenges in celestial mechanics, which aims to describe the motion of two objects that mutually attract each other due to gravitational force. The main objective of this research is to develop a mathematical model capable of representing this motion, numerically implement the model in a three-dimensional simulation, and analyze both the described orbit and the numerical data obtained with real values. To achieve this goal, the Trinket online platform was used, enabling the use of the VPython library to create and animate 3D objects. Additionally, the numerical methods of Euler and Euler-Cromer were employed for the integration of the equations of motion. During the development of this study, two binary systems were analyzed: a simple model representing the Sun-Earth system and a more complex model corresponding to the Pluto-Charon system. The parameters investigated included the orbit described by the motion, orbital velocity, orbital period, and eccentricity. By comparing the results obtained with data provided by the NASA Space Science Data Coordinated Archive and the Views of the Solar System portal, a good agreement was observed, demonstrating the effectiveness of the proposed model in describing and predicting orbital motion in binary gravitational systems. However, the eccentricity showed significant discrepancies, attributed to the use of a standardized formula that considers essentially circular orbits. The developed simulations demonstrated alignment with the interdisciplinary STEAM approach and the pillars of Computational Thinking. These features highlight the didactic potential of programming as an educational tool, enabling the exploration of physical phenomena and the conduction of virtual experiments. This methodology integrates physics and mathematics content, promoting interdisciplinarity, meaningful learning, and the practical application of concepts. Furthermore, it aligns with the guidelines of the National Common Curricular Base, which encourages the use of digital technologies and active methodologies in education.

Key-words: Two-body problem. Computer simulation. Euler-Cromer method. VPython.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BIPM	Ofício Internacional de Pesos e Medidas
ca.	Cerca de ou aproximadamente (do latim *circa*)
CCHE	Centro de Ciências Humanas e Exatas
CGPM	Primeira Conferência Geral de Pesos e Medidas
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
IDLE	Ambiente Integrado de Desenvolvimento e Aprendizagem
LOGO	Logic Oriented Graphic Organizer
MIT	Massachusetts Institute of Technology
NSSDCA	*NASA Space Science Data Coordinated Archive*
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PVI	Problema de Valor Inicial
SI	Sistema Internacional de Unidades
STEAM	*Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics* (Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática)
TDICs	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
UA	Unidade Astronômica
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{a}$	Vetor aceleração (m/s^2)
$\vec{a}_{cp}$	Aceleração centrípeta (m/s^2)
e	Excentricidade
$\vec{F}$	Vetor força (N)
$\vec{F}_{cp}$	Força centrípeta (N)
$\vec{F}_{res}$	Força resultante (N)
F_G	Força gravitacional (N)
g	Aceleração da gravidade (m/s^2)
G	Constante gravitacional $(6.6743 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2})$
h	Passo incrementado
$\vec{\ell}$	Vetor momento angular $(kg \cdot m^2/s)$
m	Massa (kg)
M	Massa total (kg)
M_S	Massa do Sol (kg)
M_T	Massa da Terra (kg)
$\vec{p}$	Vetor momento linear $(kg \cdot m/s)$
$p_\perp$	Componente perpendicular do momento linear $(kg \cdot m/s)$
p_r	Componente radial do momento linear $(kg \cdot m/s)$
P_{Total}	Momento total $(kg \cdot m/s)$
P	Período orbital (s)
r	Raio (m)
$\vec{r}$	Vetor posição (m)
$\hat{r}$	Vetor unitário na direção radial
R	Posição do centro de massa (m)

s	Comprimento de arco (m)
t	Tempo (s)
V_{cm}	Velocidade do centro de massa (m/s)
$v_{\perp}$	Velocidade perpendicular (m/s)
$\vec{v}$	Vetor velocidade (m/s)
W	Peso (N)
ω	Velocidade angular instantânea (rad/s)
$\omega_{méd}$	Velocidade angular média (rad/s)
θ	Posição angular (°)
$\propto$	Proporcional a
Δ	Variação de
$\approx$	Aproximadamente
$\gg$	Muito maior que

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A integração do conteúdo acadêmico à vida cotidiana dos estudantes tem sido um desafio recorrente na educação, especialmente na disciplina de Matemática. Esse distanciamento é frequentemente agravado pela metodologia tradicional, que, embora amplamente utilizada, nem sempre atende de maneira eficaz às demandas de um ensino mais crítico e contextualizado. A crescente exigência por habilidades práticas no mercado de trabalho e a necessidade de uma educação que promova a autonomia e a criatividade dos alunos reforçam a urgência de reformulações no ensino.

No contexto atual, o avanço tecnológico do século XXI trouxe um impacto significativo à sociedade, ampliando o acesso às Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs). Dispositivos como smartphones, computadores pessoais, tablets e até tecnologias emergentes, como dispositivos de realidade virtual, tornaram-se ferramentas centrais não só para o entretenimento e comunicação, mas também para o aprendizado. Assim, a incorporação dessas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem surge como uma tendência metodológica promissora que, quando utilizadas adequadamente, as TDICs possibilitam a construção do conhecimento pelos alunos, redefinindo a dinâmica em sala de aula.

Quando empregadas de maneira eficaz, as TDICs promovem a construção ativa do conhecimento, alinhando-se às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os alunos brasileiros devem desenvolver ao longo da educação básica, que compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio (Brasil, 2018). No contexto aqui exposto, enfatizamos as seguintes habilidades e competências: Resolução de problemas matemáticos e aplicação de conceitos matemáticos em situações reais; Compreensão e aplicação dos princípios científicos e tecnológicos; Desenvolvimento da consciência crítica e da capacidade de argumentação; Uso adequado de tecnologias digitais de informação e comunicação.

A integração de tecnologias digitais nas escolas tem se intensificado, impulsionada, sobretudo, pela sua incorporação na BNCC, contudo, desde a década de 1960, as vantagens do uso de computadores na educação têm sido amplamente discutidas, especialmente com o advento do tecnicismo como uma abordagem pedagógica dominante (CONTE; MARTINI, 2015, p. 1194). Esse período se estendeu até a década de 1980, e foi marcado por um forte movimento de modernização e desenvolvimento econômico no país, que teve como uma de suas principais características a valorização da ciência, da tecnologia e da formação técnica, embora, segundo Aula Nota Dez (2024), tenha surgido várias críticas a respeito da visão reducionista da educação, que prioriza apenas a formação de habilidades técnicas em detrimento do desenvolvimento integral dos alunos, tornando-se uma abordagem que pode levar à formação de profissionais especializados, mas com pouca capacidade de reflexão e de adaptação às mudanças.

Paralelamente, ainda na década de 1960, foi desenvolvido pelos cientistas da computação Seymour Papert e Cynthia Solomon, juntamente com outros pesquisadores, na *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), nos Estados Unidos, a linguagem *Logic Oriented Graphic Organizer* (LOGO), com o objetivo de ser utilizada como uma ferramenta educacional para o ensino de matemática e raciocínio lógico para crianças. Desta forma, como discutido por Papert (2008, apud Massa et al., 2022), as pessoas constroem conhecimento de forma mais eficaz quando participam ativamente da construção de coisas no mundo.

Há um claro contraste entre a abordagem tecnicista, que buscavam mecanizar o processo de aprendizagem e preparar os alunos para o mercado de trabalho, e a proposta de Papert, que privilegia a experimentação e a construção ativa do conhecimento. Enquanto o tecnicismo pôde atender às demandas educacionais daquela época, o modelo tradicional de ensino tem se mostrado limitado frente às necessidades atuais. A simples transmissão de conteúdos já não é suficiente para promover um aprendizado significativo. Nesse contexto, ganha relevância a adoção de metodologias que transformem o aluno em um sujeito ativo no processo de aprendizagem, alinhando-se aos princípios do construcionismo de Papert.

Em vista disso, as competências, habilidades e aprendizagens definidas pela BNCC alinham-se à necessidade de inovar o ensino utilizando recursos como o uso da linguagem de programação. Nesse sentido, a competência EM13MAT405 da BNCC estabelece a importância de "utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática" (Brasil, 2018, p. 539). Além disso, segundo Gomes (2015), essa abordagem pode promover e potencializar o desenvolvimento do aprendizado, contribuindo com o raciocínio lógico, ensinando fortes noções de causalidade (causa e efeito), a capacidade de concentração, exigindo foco, disciplina, capacidade de análise da situação e desenvolvimento de soluções, criatividade e capacidade de antever as consequências lógicas das instruções que estão sendo dadas ao computador.

Segundo um levantamento realizado no segundo semestre de 2021 pela plataforma TutorMundi (2021), as duas disciplinas no qual a maioria dos estudantes brasileiros do ensino fundamental II e médio apresentam mais dificuldades são matemática e física. Ademais, os dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) de 2018 indicam que o desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática e Ciências ficou abaixo da média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e também em último lugar comparado com os países da América do Sul (OCDE, 2019).

Diante desse cenário, podemos presumir que o ensino exclusivamente técnico e abstrato executado nas escolas pode contribuir para a dificuldade dos estudantes em determinados conteúdos. Para tanto, a BNCC busca garantir uma metodologia mais contextualizada no cotidiano do aluno, recorrendo, sempre que possível, às TDICs, cuja "utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes." (Brasil, 2018, p. 487).

A astronomia, uma das ciências mais antigas conforme veremos no Capítulo 2, sempre despertou grande curiosidade na humanidade, impulsionando o desenvolvimento de técnicas para explorar o universo. Esse fascínio natural oferece uma oportunidade única de aproximar os estudantes de conceitos científicos e matemáticos, muitas vezes percebidos como abstratos ou desconectados de sua realidade. Utilizar fenômenos astronômicos como contexto para o ensino, especialmente por meio de simulações interativas, pode transformar a curiosidade em aprendizado significativo, tornando o conteúdo mais concreto e envolvente.

Além disso, séries de TV oferecem um recurso valioso para a educação, pois combinam entretenimento e aprendizado, promovendo o interesse por áreas como física, biologia, astronomia, história da ciência e tecnologia. Por exemplo, o objeto central de estudo deste trabalho pode ser visto na série O Problema dos 3 Corpos, de Benioff, Weiss e Woo (2024), no qual aborda um problema clássico da mecânica celeste que estuda o movimento de três corpos que interagem entre si pela gravidade. Este problema, diferente do problema de dois corpos, que tem uma solução exata, é um problema desafiador da atualidade pois apresenta uma dinâmica caótica e não possui solução geral analítica.

O encanto pela astronomia e pelo interesse em compreender as leis naturais que governam os fenômenos e movimentos em nosso universo motivou uma pesquisa na plataforma DSpace[1], repositório institucional da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), buscando monografias elaboradas especificamente no Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) de Monteiro-PB, onde foi notada uma quantidade relativamente baixa de trabalhos relacionados à matemática aplicada na física. Entre eles, estudos sobre modelagem 3D e métodos numéricos que envolviam programação, esses aspectos promoveram interesse ao longo da graduação, pois a visualização e manipulação de modelos em 3D, bem como dados experimentais de simulações físicas como medidas de força, velocidade, aceleração e temperatura, proporcionaram uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e físicos que anteriormente eram abstratos ou técnicos.

A abordagem interdisciplinar que combina física e matemática destaca a profunda conexão entre as duas áreas. Essa integração permite a formalização de teorias, a análise detalhada de comportamentos no universo natural e a compreensão de como conceitos físicos, expressos pela linguagem matemática, podem ser observados em contextos do dia a dia. Essa relação possibilita que os alunos conectem o conteúdo aprendido em sala de aula com situações cotidianas, promovendo uma compreensão mais significativa e estruturada,

[1] Site da plataforma: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/>

além de favorecer o desenvolvimento de habilidades críticas e analíticas no estudo das ciências.

Segundo Biembengut e Hein (2014, p. 7), a modelagem matemática constitui um ramo próprio da Matemática que tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular. Assim, é desempenhado um papel fundamental na interdisciplinaridade entre física e matemática, servindo como uma ponte entre a abstração dos conceitos matemáticos e a interpretação dos fenômenos físicos, possibilitando a criação de representações que facilitam o entendimento e a análise desses fenômenos.

Já a simulação computacional, conforme Oliveira (2024), é a implementação do modelo elaborado em um ambiente computacional para fazer previsões e análises. No contexto deste trabalho, a partir do modelo matemático que descreve a interação gravitacional entre os dois corpos bem como suas trajetórias no espaço, a simulação pode ser usada para visualizar o movimento dos corpos celestes em um ambiente tridimensional, e prever a órbita dos corpos em diferentes condições iniciais, como a posição e velocidade inicial, tal qual analisar como pequenas mudanças podem afetar a evolução do sistema. A elaboração de simulações computacionais frequentemente necessita do uso de uma linguagem de programação para implementar o modelo matemático em um ambiente computacional.

De acordo com dados da TIOBE (2024), existem atualmente mais de 250 linguagens de programação em uso em todo o mundo, dentre elas, podemos citar as 10 mais populares em novembro de 2024[2]: Python, C++, Java, C, C#, JavaScript, GO, Fortran, Visual Basic, SQL. Cada uma dessas linguagens possui sua própria sintaxe, semântica e estrutura, mas todas elas compartilham o objetivo comum de permitir que os desenvolvedores escrevam códigos para executar tarefas específicas em um computador ou outro dispositivo.

Além disso, este trabalho adequa-se à metodologia de ensino STEAM (do inglês: *Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics*) no qual objetiva uma abordagem educacional que combina as disciplinas de Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática em um currículo integrado e interdisciplinar, promovendo assim o pensamento crítico, resolução de problemas, a criatividade e a inovação, preparando os alunos para o cenário contemporâneo (Jona *et al.*, 2014). Vinculado a essa metodologia, o Pensamento Computacional (do inglês: *Computational Thinking*) consiste em resolver problemas, projetar sistemas e compreender o comportamento humano, baseando-se nos conceitos fundamentais da ciência da computação (Wing, 2006). Esse processo de resolução de problemas sustenta-se em quatro pilares fundamentais que, de acordo com Brackmann (2017), consiste em dividir um problema complexo em partes menores (decomposição),

[2] É importante destacar que a lista apresentada não é fixa e pode ser alterada ao longo do tempo. Essas alterações estão diretamente relacionadas à popularidade das linguagens de programação, que pode variar em função das demandas do mercado e das constantes evoluções no cenário tecnológico.

identificar padrões (Reconhecimento de padrões), ignorar detalhes irrelevantes (abstração) e criar passos simples para solucioná-los (algoritmos).

Visto isso, as abordagens matemáticas e físicas aplicadas no contexto das simulações visuais, são fundamentais para a proposta da metodologia STEAM, tal como o Pensamento Computacional possui, pois como afirma Martin 2018, é o "tecido conjuntivo" entre o mundo da ciência da computação/especialização em programação e o mundo do conhecimento disciplinar.

O problema de dois corpos é fundamentado na mecânica clássica, ramo da física que analisa os movimentos dos corpos sob a ação de forças. Esse problema trata da dinâmica de dois corpos celestes e tem como finalidade prever os movimentos desses objetos massivos. Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo matemático capaz de descrever tal movimento, implementar numericamente em uma simulação 3D e, ao final, analisar tanto a órbita realizada como os dados numéricos obtidos com valores reais. Dessa forma, a pesquisa busca responder a duas questões centrais: *"como obter uma equação, ou seja, um modelo matemático, capaz de descrever o movimento de dois corpos interagindo gravitacionalmente?"* e *"como construir uma simulação para visualizar e comparar os dados deste modelo com base em um método numérico adequado?"*

O corpo deste trabalho está estruturado em cinco capítulos: no Capítulo 2, é realizada uma abordagem histórica sobre a evolução da astronomia, desde o período da civilização babilônica até sua modernização com os avanços introduzidos por Isaac Newton. O Capítulo 3 apresenta os fundamentos teóricos necessários para que se tenha uma noção básica do problema de dois corpos. Em seguida, no Capítulo 4, é caracterizado o tipo de pesquisa conduzida neste trabalho, com detalhamento dos procedimentos empregados nas simulações, destacando os algoritmos empregados e suas implementações no VPython. No Capítulo 5, são analisados e discutidos os resultados das simulações realizadas, comparando os dados obtidos com valores reais, a fim de validar a precisão e a eficácia das modelagens empregadas. Por fim, no Capítulo 6 são apresentados os principais resultados obtidas a partir das simulações realizadas ao longo deste trabalho, e discutimos as limitações encontradas, possíveis aprimoramentos para o modelo utilizado e o potencial para investigações futuras dentro da temática abordada.

2 HISTÓRIA DA ASTRONOMIA

A busca por padrões é uma característica fundamental do ser humano e está profundamente enraizada em nossa psicologia. Desde os primórdios e durante milênios, mesmo vivendo sob o ciclo dia-noite, o homem talvez, apesar de já andar ereto, pôde nem sequer perceber a existência do céu (Caniato, 1994). Após ter alcançado um certo nível de autoconsciência, os povos pré-históricos começaram a notar regularidades nos movimentos dos corpos celestes, como o Sol, a Lua, as estrelas e os planetas que, embora consistisse unicamente em observações, foi a centelha que acendeu a chama dando origem a ciência da astronomia.

Esta ciência, que de acordo com Martins, Buffon e Neves (2019) e Corrêa (2009) é considerada a mais antiga da humanidade, constitui um tema fascinante e permeia a evolução da humanidade. Entretanto, devido à sua vastidão, torna-se impossível detalhar toda a história no presente trabalho, portanto, este capítulo tem como foco principal explorar a concepção da estrutura do nosso universo, bem como o movimento dos astros.

2.1 Astronomia x Astrologia

Os primeiros registros astronômicos datam de aproximadamente 3000 a.C. relacionados aos povos chineses, caldeus, babilônios, egípcios e gregos. Sua finalidade não era somente observar, mas também estudar os astros com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo (fazer calendários) para prever a melhor época para o plantio e a colheita (Filho; Saraiva, 2014).

De modo geral, mesmo que tais padrões astrais fossem de conhecimento destes povos antigos, ainda não se tinha posse do conhecimento das leis da natureza (física), e sua elucidação tinha uma forte ligação com o mito, atribuindo os fenômenos causados pela vontade dos deuses do céu, no qual tinham o poder da colheita, da chuva e até mesmo da vida (Filho; Saraiva, 2014). Tais conhecimentos estavam de posse dos sacerdotes, no qual tinham um papel central na sociedade e realizava observações diárias do firmamento com a intenção de interpretar, de acordo com as posições e movimentos dos corpos celestes as suas vontades, tendências e ânimo. Com isso, os babilônicos, ao observarem o caminho aparente do sol no céu durante o ano, chamado de eclíptica, foram os primeiros a dividir esta faixa em doze segmentos, atribuindo a cada uma deles, figuras embasadas nas configurações das estrelas. Dessa maneira originou-se o chamado zodíaco (Caniato, 1994); (Filho; Saraiva, 2014). Nasceu assim a astrologia, que tinha como objetivo interpretar os padrões celestes como sinais de influências divinas sobre a vida humana. Os astrólogos utilizavam as observações astronômicas para fazer previsões sobre o destino das pessoas e das nações, baseando-se na crença de que os movimentos dos astros podiam influenciar eventos terrestres. A astrologia, segundo Caniato (1994), pode ser considerada como "folclore da astronomia" e, apesar de sua popularidade, é considerada uma pseudociência, carecendo de evidências científicas que sustentem suas alegações sobre personalidades e previsões.

> O fato é que essas crenças ou crendices são alimentadas e disseminadas pelos grandes interesses envolvidos nisso. A Astrologia ocupa hoje uma parte considerável dos meios de comunicação de massa, do tempo e do dinheiro das pessoas. O número de coisas que são vendidas em função dessas crendices é imenso. Há, no entanto, algo mais sério envolvido nisso. Esse "algo mais" vendido pela Astrologia é a alienação das pessoas e de suas consciências em relação a aspectos importantes de sua vida. Na medida em que as pessoas acreditam que seu destino e sua vida são regulados pelos astros, elas se tornam mais fatalistas e mais conformadas com os fatos que as cercam ou cerceiam. Talvez se pudesse dizer que a Astrologia, tal como é vendida, é um entorpecente da iniciativa das pessoas em assumirem seus próprios destinos (Caniato, 1994, p. 13-14).

Tanto a astronomia quanto a astrologia têm como foco o estudo dos movimentos celestes, embora adotem abordagens e propósitos bastante diferentes. Enquanto a astronomia adota uma perspectiva científica e empírica, buscando compreender os fenômenos celestes por meio de observações rigorosas e análises quantitativas, a astrologia se baseia em interpretações simbólicas para prever eventos terrestres e entender padrões celestes. Portanto, ao passo que os astrônomos estudam a física dos corpos celestes e as leis que regem seus movimentos, os astrólogos se concentram mais na influência percebida dos astros sobre a vida e a personalidade das pessoas. Embora historicamente interligadas, essas disciplinas se desenvolveram de maneira independente, com a astronomia evoluindo como uma ciência empírica e a astrologia mantendo-se como uma prática cultural e espiritual, ainda que continue a ter alguma popularidade em diferentes partes do mundo.

2.2 Os gregos e os primeiros modelos

Os gregos, herdeiros da vasta base de dados observacionais dos babilônios, esforçaram-se em conhecer a natureza do cosmos e combinaram tais observações com os métodos geométricos trazidos do Egito por Tales de Mileto (ca. 624 – ca. 546 a.C.), por volta de 585 a.C., para estabelecer uma astronomia sólida. Diga-se de curiosidade que mesmo os babilônicos já registrando, ainda que sem terem alguma explicação física para o fenômeno, o movimento anômalo de certos orbes luminosos visíveis a olho nu no céu, foram os gregos que os chamaram de "estrelas errantes" ou simplesmente "errantes" (do grego: $\pi\lambda\alpha\nu\acute{\eta}\tau\eta\varsigma$, planētai) (Liddell; Scott, 1940). Daí derivou-se a palavra atual "planeta", devido ao movimento "para trás" (retrógrado) em relação às outras estrelas em certos momentos. Os planetas eram: Marte, Júpiter, Vênus, Saturno e Mercúrio.

Tales de Mileto, influenciado pelos conhecimentos egípcios, introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia, propondo o primeiro conceito do modelo da esfera celeste baseados nos movimentos dos corpos celestes. Juntamente com seu discípulo Anaximandro, foi um dos primeiros a desenvolver tais modelos, afastando-se mais da visão mitológica (Matos; Mendes, 2021).

A concepção desse modelo pensado por Tales, assim como muito antes descrito nos poemas de Homero (século IX ou VIII a.C.) e Hesíodo (século VIII a.C.) (Lopes, 2001), baseava-se na ideia de que a Terra era um disco flutuando em uma vasta extensão de água, como uma ilha, e o céu era uma cúpula sólida que se erguia sobre ela. Essa visão refletia a compreensão limitada do cosmos na época e era influenciada pela observação direta do horizonte, que parecia indicar um limite plano.

A partir daí, vários pensadores gregos propuseram várias concepções e teorias sobre o cosmo e o sistema solar, falaremos resumidamente o que cada um teorizava:

Anaximandro (610 – 546 a.C.) afirmava que a Terra teria forma cilíndrica e a sua profundidade seria de um terço de sua largura, os corpos celestes estariam associados a esferas e anéis que giram em torno da Terra;

Anaxímenes (ca. 588 – ca. 524 a.C.) dizia que o universo era formado a partir do ar, e estaria preenchido por ele. Ainda afirmava que a Terra era achatada e fina, que não caia porque seria sustentada pelo ar. Mesmo que tenhamos conhecimento de que estes modelos não estão mais em vigor, não se deve desconsiderar sua importância histórica. Contudo, mesmo com as inúmeras observações realizadas por meio de tecnologia avançada, ainda há uma grande quantidade de indivíduos atualmente que defendem a teoria ultrapassada de que a Terra é plana, rejeitando as evidências científicas que comprovam a esfericidade do nosso planeta. Embora seja fundamental respeitar a liberdade de pensamento e expressão, é importante reconhecer que a ciência e a tecnologia modernas oferecem uma compreensão mais precisa e detalhada do nosso mundo. A defesa de tais teorias sem fundamentos pode limitar o progresso do conhecimento e impedir a compreensão plena do universo em que vivemos;

Pitágoras de Samos (ca. 570 – ca. 500 a.C.) teve a primeira e mais influente visão da cosmologia grega pré-socrática onde propôs que a Terra, a Lua e outros corpos celestes eram esferas perfeitas. O motivo talvez tenha sido sugerido por motivos filosóficos, no qual sua escola atribuía à esfera a forma geométrica da perfeição. Os pitagóricos (seguidores de Pitágoras) foram os primeiros a chamar o universo de "cosmo";

Aristóteles de Estagira (384 – 322 a.C.) explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo sol está voltada para a Terra.

Relatou que um eclipse do sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o sol e um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Argumentou a favor da esfericidade da Terra mas, diferente de Pitágoras, chegou a tal conclusão após observar que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada;

Heráclides de Ponto (ca. 390 – ca. 310 a.C.) propôs que a Terra girava em torno de seu próprio eixo, em aproximadamente 24h, de oeste para leste.

Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.) foi o primeiro a propor um modelo heliocêntrico (até então todas as observações dos gregos sobre o céu eram geocêntricas). Foi tão revolucionário que sua ideia foi rejeitada e acusada de heresia por tirar do centro Universo a Terra e como consequência o homem, entrando em conflito não apenas com as crenças filosóficas e cosmológicas predominantes, mas também com interpretações religiosas e metafísicas que colocavam a Terra e a humanidade no centro do Universo, como um elemento fundamental da criação divina. Aristarco também desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua. Este trabalho foi escrito no estilo axiomático que mostra, claramente, que os astrônomos seguiam a mesma metodologia encontrada na geometria, como aquela encontrada no livro *Os Elementos* de Euclides (Lopes, 2001);

Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.) foi o primeiro a medir a circunferência da Terra, tendo chegado segundo Vinagre (s.d.) a um valor de 250.000 estágios ou 39.250 quilômetros obtendo uma diferença de aproximadamente 1,875% do valor correto (40.000 km) calculado pouco mais de dois mil anos posteriormente;

Hiparco de Nicéia (190 – 120 a.C.) construiu um observatório na ilha de Rodes, onde compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. Deduziu corretamente a direção dos polos celestes, e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo e rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26.000 anos para completar um ciclo (Filho; Saraiva, 2014);

Cláudio Ptolomeu (ca. 100 d.C. - ca. 170 d.C.) compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o *Almagesto*, a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia (Filho; Saraiva, 2014). Com seu conhecimento enciclopédico, a começar pela matemática, geometria e cartografia, Ptolomeu realizou uma representação geométrica do sistema solar, com círculos e epiciclos, a qual compreendia a Terra imóvel no centro, envolvida por muitas esferas transparentes. Cada uma dessas esferas era responsável pelo movimento de cada um dos astros a partir do centro, nessa ordem: esfera da Lua, de Mercúrio, de Vênus, do Sol, de

Marte, de Júpiter e de Saturno. Depois da esfera de Saturno vinha a esfera das estrelas fixas (Filho; Saraiva, 2014); (Caniato, 1994).

O modelo geocêntrico ptolomaico perdurou por aproximadamente 1.400 anos e nenhum outro nome reinou tanto por tanto tempo quanto Ptolomeu, nos domínios do conhecimento da Astronomia (Caniato, 1994). Seu modelo influenciou até mesmo a estrutura de círculos concêntricos utilizado por Dante Alighieri em sua obra *"A Divina Comédia"* na primeira metade do século XIV.

2.3 A Idade Média e seu longo período de "trevas"

Embora tenha durado 977 anos, não há muito o que falar acerca de drásticas mudanças do ponto de vista astronômico neste período, pois a aceitação do modelo ptolomaico pela Igreja Católica pode ter contribuído para sua longa duração, já que a atividade científica, incluindo a astronomia, estava estagnada, impedindo questionamentos deste modelo geocêntrico. Essa queda na produção cultural e científica, muitas vezes expressa por "idade das trevas", é evidenciada por Corrêa (2009):

> Durante o período de [476] d.C. até 1453 (Idade Média) a aquisição de conhecimentos declinou por causa das hostilidades que existiam entre os pagãos e os cristãos. Como as grandes escolas gregas e o Museu Alexandrino eram pagãos, os conhecimentos acumulados por esses estabelecimentos foram ignorados pelos Cristãos (ocidente). Os cristãos destruíram muitas das instituições pagãs, como por exemplo, a grande Biblioteca de Serapis e queimaram muitos livros que continham conhecimentos e cultura grega, por serem heréticos (Corrêa, 2009, p. 17-18).

2.4 O Renascimento e o confronto entre o modelo copernicano e a igreja

Na Itália, durante o período do Renascimento, houve uma abertura para novas ideias, com a tradução de textos árabes e gregos para o latim, especialmente os de origem grega. Nesse contexto, ressurgiram conceitos da astronomia antiga, incluindo o modelo heliocêntrico proposto por Aristarco. Este modelo serviu como inspiração para a elaboração da obra intitulada *"Sobre a Revolução dos Corpos Celestes"* escrito pelo jovem astrônomo e matemático Nicolau Copérnico, dando um estopim para a Revolução Científica. Tal período de renovação intelectual marcou um avanço significativo na compreensão do Cosmos e no desenvolvimento da astronomia, contudo, ainda se tinha um forte domínio da Igreja. A obra de Copérnico teve início em 1515 mas, como tais novas propostas contrariavam boa parte das ideias difundidas pela Igreja Católica, diversas vezes ele teve de interromper e suspender sua escrita. Somente em torno do ano de 1530 a sua obra foi finalizada, contudo, não foi publicada por receio de punição. Em 1539, Copérnico conhece o matemático Rheticus, com quem trabalhou por alguns anos. O jovem incentiva o astrônomo polonês a seguir com os estudos sobre a teoria Heliocêntrica. Em 1541 Rheticus envia as obras de Copérnico para a publicação, que acontece somente em 1543, mesmo ano de seu falecimento (Cruz, s.d.). Obviamente as ideias de Copérnico logo foram consideradas heréticas pela igreja e incluída no Índex, a lista dos livros proibidos por heresia. Somente no ano de 1835 por ordens do Papa Gregório XVI, sua obra foi retirada da lista dos livros censurados pela Santa Sé e admitiu o erro dos antecessores (Gouveia, s.d.).

Em suas ideias, Copérnico propôs: o Sol estaria no centro do universo; a Lua deixaria de ser um planeta e agora passaria a ser um satélite orbitando a Terra que, por sua vez, passaria a orbitar o Sol em um período de um ano (translação) e também rotacionaria em torno de seu próprio eixo diariamente (rotação); todos os corpos descreveriam órbitas circulares em volta do Sol e quanto mais próximo dele, maior sua velocidade orbital uniforme. Com isso pôde explicar melhor o movimento retrógrado dos planetas, onde no que parecia estar "indo para trás" em determinada época do ano, na verdade seria uma ilusão devido a diferença de velocidade entre a Terra e os planetas em órbita ao redor do Sol. Além disso, constatou que a distância da Terra ao Sol é muito pequena em relação ao tamanho da "esfera das estrelas fixas" (Caniato, 1994); (Corrêa, 2009). Com base em observações e cálculos, ordenou os planetas em função da distância do Sol e apresentou seus períodos (tempo para dar uma volta ao redor do Sol): Mercúrio com três meses, Vênus em nove meses, a Terra em um ano, Marte com período de dois anos, Júpiter com doze anos e Saturno com trinta anos. A Lua, agora um satélite, orbitaria a Terra em um período de 27,3 dias (Lopes, 2001). Tais valores se aproximam muito dos registrados atualmente.

2.5 Tycho Brahe e suas observações precisas da esfera celeste

Ainda em meio as novas ideias de modelos florescendo, não se tinha ainda uma prova observável de alguns fenômenos, como por exemplo se pensava que os cometas eram um fenômeno meteorológico. Em 1546, três anos depois da morte de Copérnico nasce o dinamarquês Tycho Brahe no qual, ao longo de sua vida, fez inúmeras observações valiosas de planetas e estrelas com precisão surpreendente que ninguém antes tinha feito. Seu trabalho foi notado pelo rei da Dinamarca Frederic II, que lhe deu patrocínio na sua corte e concedeu uma propriedade na ilha de Hven, em Öresund, entre a Dinamarca e a Suécia, a qual serviu como base para a construção de um dos melhores observatórios do mundo (Caniato, 1994); (Corrêa, 2009).

Cabe aqui enfatizar que, embora Brahe tivesse de posse recursos mais sofisticados disponibilizados pelo rei, naquela época ainda não existia lunetas ou telescópios, portanto seus principais instrumentos utilizados nas medições eram o quadrante, o sextante e o relógio astronômico. Com isso ele explicou que os cometas na verdade estavam grandes distâncias da Terra e pôde catalogar a posição de diversas estrelas e planetas, sobretudo Marte (Caniato, 1994).

Embora Tycho não tenha proposto seu modelo do sistema solar, ele acreditava fortemente em um sistema híbrido, conciliando os modelos geocêntrico de Ptolomeu e Heliocêntrico de Copérnico. O modelo Tychonico basicamente tinha a Lua e o Sol girando ao redor da Terra enquanto Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno girando ao redor do Sol e em torno de tudo há uma esfera de estrelas fixas (Caniato, 1994); (Corrêa, 2009).

Após mudar-se para Praga, capital da República Tcheca, Brahe contratou para ajudá-lo na análise dos dados sobre os planetas, colhidos durante 20 anos, um jovem e hábil matemático alemão chamado Johannes Kepler (Filho; Saraiva, 2014). Após a morte de Brahe em 1601, Kepler se tornou o herdeiro de seu grande acervo de dados.

2.6 Johannes Kepler e sua descrição das órbitas dos planetas ao redor do Sol

Entre os registros deixados por Brahe, havia maior quantidade de dados do planeta Marte, a partir dos quais Kepler conseguiu determinar as diferentes posições da Terra após cada período sideral seu e, assim, conseguiu traçar a órbita da Terra. Verificou que essa órbita era muito bem ajustada por um círculo excêntrico, isto é, com o Sol um pouco afastado do centro (Filho; Saraiva, 2014).

Kepler, entusiasta das ideias propostas pelo heliocentrismo de Copérnico, através dos registros deixados por Brahe, tentou determinar a órbita de Marte. Inicialmente tentou ajustá-la com um círculo, pois como já foi dito, o sistema copernicano admitia que os corpos se moviam em trajetórias circulares, contudo não obteve sucesso. Após várias tentativas de ajustar os dados observados experimentalmente com a geometria, Kepler tentou então uma órbita oval, descobrindo que uma elipse se encaixaria bem. O Sol coincidia com um dos focos da elipse, explicando a trajetória quase circular da Terra com o Sol afastado do centro (Filho; Saraiva, 2014).

Com isso, no ano de 1609 foram desenvolvidas duas leis fundamentais por Johannes Kepler, que levam seu nome: a Lei das órbitas elípticas e a Lei das áreas. Assim, somente com essas duas leis, Kepler confrontou diretamente com as propostas do modelo copernicano sobre os planetas descreverem órbitas perfeitamente circulares e com movimentos uniformes ao longo de toda a translação ao redor do Sol. Nove anos depois, em 1618, Kepler cria sua terceira lei chamada Lei harmônica ou dos períodos. Especialmente esta última seria a "chave" a partir da qual, 69 anos depois, em 1687, Newton iria resolver a Lei da Gravitação Universal (Caniato, 1994). Essas leis, que serão analisadas com maior rigor matemático na Seção 3.2, marcaram o início da Mecânica Celeste.

2.7 Galileu Galilei e o afronte aos dogmas através de seu "instrumento do demônio"

Enquanto a ciência e a astronomia floresciam em um esplendor de ideias, a Terra infértil da ortodoxia sufocava e extinguia essas sementes de conhecimento, impedindo-as de prosperar sob plena luz. Em meio às violentas punições das pessoas acusadas de heresia pela inquisição, um jovem italiano que era entusiasta das ideias do modelo heliocêntrico, que abalou o prestigioso sistema ptolomaico, não se daria conta que iria mais longe que isso, abalando as próprias bases de toda a ciência e filosofia fundadas em Aristóteles, o nome desse jovem era Galileu Galilei.

Até então tinha como verdade indiscutível que os corpos mais pesados devem cair mais depressa. Galileu, no topo da Torre de Pisa, refutou tal teoria aristotélica em vigor por pouco mais de dois mil anos argumentando e mostrando em sua obra *"Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo"*, publicada em 1632, que na verdade corpos diferentes, independentemente de seu peso, caíam juntos com a mesma aceleração constante na ausência de resistência do ar. Na obra, Galileu abordou a teoria heliocêntrica de Copérnico e a teoria geocêntrica predominante de Ptolomeu, apresentando argumentos a favor do modelo heliocêntrico. Sem mais surpresas, ela foi colocada no índice de livros proibidos.

Antes da publicação dessa obra, em 1609, Galileu ouvira falar de um objeto criado por um fabricante de lentes holandês chamado Hans Lippershey, com o qual observou que os objetos parecem maiores e mais próximos quando olhados através de uma lente convexa e outra côncava. Mesmo não tendo visto a invenção do holandês, criou ele mesmo seu próprio instrumento capaz de aproximar objetos muito distantes. Foi aí então criada a "arma" mais revolucionária de todos os tempos, capaz de enxergar a verdade incontestável pelos dogmas ortodoxos e então mudar a história do desenvolvimento científico: a luneta telescópica.

Sabe-se que até antes de Galileu, todas as observações realizadas dos corpos celestes eram feitas a olho nu. O italiano, com seu ilusório "instrumento do demônio" como mencionavam os altos dignatários da Igreja, aprimorou-o para tornar um objeto 30 vezes mais próximo do que visto sem nada (Filho; Saraiva, 2014); (Caniato, 1994). Pioneiro no uso de um telescópio para finalidades astronômicas, Galileu Galilei realizou uma série de descobertas revolucionárias que abalaram as estruturas do pensamento antigo acerca da compreensão do Universo. Ele revelou que uma tal mancha observada no céu noturno na verdade era a Via Láctea, e seria composta por inúmeras estrelas, desmistificando sua natureza difusa e mostrando a vastidão do Cosmos. Além disso, observou as quatro luas em órbita de Júpiter: Io, Europa, Ganimedes e Calisto, conhecidas como "galileanas", o que sugeriu a possibilidade de centros de movimento além da Terra. Sua observação das fases de Vênus evidenciou a dinâmica orbital do planeta, assim como ocorre com a

Lua. Ao examinar a Lua e o Sol, Galileu notou irregularidades em suas superfícies, a Lua por exemplo possuía buracos, brechas, planície, vales e montanhas, demonstrando que os corpos celestes não eram esferas perfeitas como pensavam os gregos, mas sim têm características semelhantes à Terra. Além disso, através das movimentações das manchas solares ao longo dos dias, constatou que o Sol girava (Filho; Saraiva, 2014); (Caniato, 1994). Tais provas irrefutáveis a favor do heliocentrismo não fez com que os braços da inquisição o deixassem impune. Pra escapar da tortura ou até mesmo da fogueira, o homem que fez descobertas riquíssimas para a ciência e a humanidade teve que, de joelho, pedir perdão por suas "heresias" e prometer que nunca mais afirmaria tais ideias e que denunciaria quem o fizesse. Ainda assim, em 1633, aos sessenta e nove anos de idade ele foi condenado à prisão domiciliar perpétua, onde passou a escrever algumas obras antes de seu falecimento no início de 1642 (Machamer; Miller, 2021). Com isso, como menciona Caniato (1994), o legado de Galileu Galilei teve um impacto duradouro na ciência:

> Assim triunfaram o preconceito e a prepotência sobre a inteligência. Entretanto, a prepotência e a força não puderam impedir que as ideias se propagassem e transformassem a maneira de o homem olhar para a Natureza e para o Universo. Galileu é um patrimônio da humanidade (Caniato, 1994, p. 42-43).

2.8 Isaac Newton

> "Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes" (Newton, 1676 apud Rogers, 2016).

Ao contrário do que se dita na narrativa popular, o conceito de gravidade e o porquê dos corpos caírem não se deu através de uma maçã que desencadeou um *insight* genial na mente de um jovem de 23 anos após cair em sua cabeça. Essa lenda menospreza todo o trabalho árduo, anos de estudo, observação e cálculos meticulosos realizados.

Em Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra no mesmo ano em que morreu Galileu Galilei, nasce Isaac Newton. Órfão de pai aos três anos, foi criado por sua mãe e viveu com sua avó. Demonstrou grande habilidade acadêmica na escola primária, e sua mãe queria que ele assumisse a gestão das propriedades familiares. No entanto, seu interesse em aprender o levou a estudar na Universidade de Cambridge, onde se destacou academicamente. Quando a Universidade de Cambridge fechou devido à peste bubônica em 1665, Newton se retirou para sua propriedade rural, onde passou a estudar intensamente e fez várias descobertas fundamentais em matemática e física, incluindo a descoberta do teorema binomial (ou binômio de Newton como hoje conhecemos) aos seus 24 anos de idade (Marques, s.d.).

Infelizmente é impossível detalhar as façanhas revolucionárias de Newton no campo da astronomia, matemática e física neste trabalho, para tanto, discutiremos apenas aos conceitos desenvolvidos por ele, os quais utilizaremos nas próximas seções.

Em meio a descrença no modelo geocêntrico, pelo menos entre as autoridades científicas, surgia uma dúvida em relação ao funcionamento do mecanismo do universo: que tipo de ação fazia com que os planetas continuassem girando ao redor do Sol? Kepler já sugeria que tal ação poderia ser magnética, já que era a única que agia à distância (Caniato, 1994).

Debruçado sobre tal questão, Newton acreditava que esse fenômeno de atração entre os corpos celestes era o mesmo que fazia os objetos caírem na superfície da Terra devido ao seu peso, palavra que no latim significa “gravitas”, daí então derivou o termo usado por Newton para nomear tal força de atração: a gravidade. Baseando-se no argumento de Galileu Galilei de que um objeto em movimento permanecerá em movimento em linha reta e uniforme, a menos que uma força externa atue sobre ele, Newton deduziu que a gravidade também atuava sobre a Lua, agindo como uma força centrípeta e fazendo com que seu movimento deixasse de “escapar” em linha reta da órbita terrestre, mantendo-a em órbita. Isso também valia para o Sol e os planetas que orbitavam em sua volta. O inverso também ocorria: os planetas também exerciam a mesma força sobre o Sol assim como a Lua com a Terra, mas devido a grande diferença de suas massas, a perturbação exercida pelos corpos era insignificante.

Como todos os corpos se atraem devido a suas massas, Newton por meio de estudos observou que essa força de atração depende diretamente do produto das massas. Por exemplo no sistema Terra-Lua, se a massa da Lua fosse dobrada, a força de atração entre ambos os corpos será duas vezes maior, e se também dobrarmos a massa da Terra faremos com que a força de atração seja quatro vezes maior. Outro caso particular em relação a força de atração se deve a distância entre os corpos, se dobramos a distância entre a Terra e a Lua, a força de atração entre os corpos passará a ser a quarta parte do que era antes. Se triplicarmos a distância, a força será um nono do que era, ou seja, a força diminui com o inverso do quadrado da distância (Caniato, 1994).

A partir disso, Newton formulou a famosa Lei da Gravitação Universal, em sua obra “*Philosophiae naturalis principia mathematica*”, no ano de 1687. Nesta obra monumental composta por três volumes, além de demonstrar as três leis para o movimento dos corpos que levam seu nome, bem como veremos com mais detalhes na seção seguinte, Newton com sua Gravitação Universal resolve um grande número de fenômenos que até então não possuíam uma explicação matemática precisa: a razão pelo qual as órbitas são elípticas, o motivo da forma esferoidal dos corpos celestes, a órbitas dos cometas, os novos satélites descobertos, a órbita da Lua, o cálculo das massas dos planetas, o fenômeno das marés e, por fim, foi a chave para descrever e prever o movimento realizado no problema de dois corpos.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 As Leis de Newton

3.1.1 Intuições sobre força e tendência de movimento

Quando falamos sobre força, podemos pensar intuitivamente sobre experiências de nosso cotidiano em que exercemos tal ação. Seja ao tentar levantar um objeto muito pesado e concluir que tem força suficiente para realizar tal tarefa, ao sentarmos em uma cadeira e agradecermos pela sua resistência que nos mantém em repouso, ou quando, similarmente a uma luta de sumô, empurramos um móvel pelo chão e, por fim, no momento em que nos sentimos numa partida de cabo de guerra ao passear segurando fortemente a corda para que o cachorro não escape.

Os tipos de forças em geral podem ser classificadas entre as que envolvem contato direto entre dois corpos (forças de contato) e também forças que atuam mesmo quando os corpos estão muito afastados (forças de longo alcance ou forças de campo). Nos exemplos mencionados acima, temos quatro tipos de forças atuando e são, respectivamente: força peso, força normal, força de atrito e força de tração. Observe que todas elas possuem em comum o fato de que há uma interação entre dois corpos ou entre um corpo e seu ambiente.

Além disso, essa interação não depende somente de uma "quantidade" de força empregada, mas também temos que saber em qual direção esta força está sendo aplicada, ou seja, não é suficiente dizer apenas o quão forte se está empurrando um determinado objeto, mas também em que direção está sendo aplicada a força, seja para frente, para trás, para cima, para baixo, etc. Assim, dizemos que a força é uma grandeza vetorial. Portanto, para descrever um vetor força $\vec{F}$, é necessário descrever a direção e o sentido em que ele age, bem como seu módulo, que especifica a "quantidade" ou "intensidade" com que a força puxa ou empurra (Young; Freedman, 2016).

Considerando que a força é a interação que pode causar ou resistir à mudança no movimento de um objeto, surge a seguinte pergunta: *"o que acontece quando essa força é ausente?"* e *"como podemos explicar o comportamento dos objetos quando não estão sujeitos a nenhuma força externa?*

Galileu Galilei, em sua obra *Diálogos Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo* (1632), conforme citado por Nussenzveig (2013), aborda o diálogo no estilo socrático[1] entre

[1] O estilo socrático é uma forma de ensino e diálogo desenvolvida por Sócrates, na qual o professor faz perguntas para que os alunos descubram por si mesmo as respostas ou a entender melhor as questões discutidas, em vez de simplesmente fornecer respostas.

Simplício e Salviati, e uma das discussões refere-se a situação de uma bola perfeitamente redonda sendo solta inicialmente em um plano inclinado, altamente polido e livre da resistência provocada pelo ar. Simplício presume que a bola rolaria espontaneamente para baixo de modo indefinido e com um movimento acelerado.

Na segunda situação Salviati pergunta o que aconteceria se quiséssemos que a bola se movesse para cima no mesmo plano. Simplício então responde que não seria um movimento espontâneo e para realizar tal ação, seria necessário que fosse puxada ou lançada para cima, que então é questionado sobre o que aconteceria se a bola fosse lançada com um certo impulso para cima, respondendo que o movimento seria constantemente retardado e após certo tempo, que seria proporcional à quantidade de impulso exercido, a bola naturalmente iria voltar a descer como no primeiro caso, onde o declive e aclive da superfície determinaria a velocidade da bola.

Salviati por fim questiona o que aconteceria se a bola fosse colocada em um plano infinito e sem inclinação. Simplício, inicialmente, considera que a bola permaneceria em repouso, pois não haveria nenhuma inclinação para induzir o movimento.

No entanto, Salviati leva a reflexão adiante, sugerindo que, se numa bola que reside em repouso fosse aplicado um impulso em uma certa direção, e na ausência de forças externas para retardar ou parar o movimento, a bola possuiria aceleração nula e continuaria em movimento indefinidamente em uma superfície perfeitamente plana.

Assim, Galileu desempenhou um importante papel na formulação inicial do conceito de movimento e coube a Sir Isaac Newton formalizar e generalizar essa ideia em sua obra Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, onde encontramos seu primeiro "Axioma ou Lei do Movimento".

3.1.2 1ª Lei: Inércia

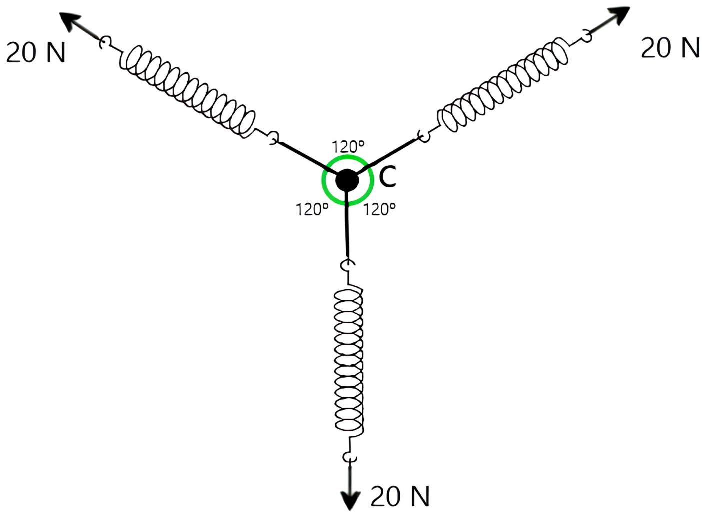
> Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele (Newton, 2016, p. 53).

A tendência de um corpo de permanecer em repouso ou continuar em movimento uniforme é uma consequência da propriedade chamada inércia. Quando dizemos que um corpo está em movimento uniforme, estamos descrevendo um cenário onde ele percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais, indicando que não está sofrendo aceleração, ou seja, não há mudança na sua velocidade. Isso ocorre quando nenhuma força resultante $\vec{F}_{res}$ está agindo sobre o corpo. Em outras palavras:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0. \tag{3.1}$$

É importante ressaltar que aqui nos referimos à força resultante, que é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo. Mesmo quando está em repouso, é possível que haja forças atuando sobre ele como podemos ver na Figura 1, onde a partícula C permanece em repouso no centro mesmo após ser exercida forças de 20 Newton sobre ela. Isso ocorre pois a força resultante vetorial do sistema das três mola é nula. Esse conceito nos ensina que, mesmo que um corpo esteja sujeito a várias forças, se a soma vetorial delas for zero, o corpo não sofrerá aceleração (Halliday; Resnick; Walker, 2016a). Dizemos então que o corpo está em equilíbrio, seja pela ausência de forças atuando sobre ele ou pela resultante das forças vetoriais aplicadas ser zero.

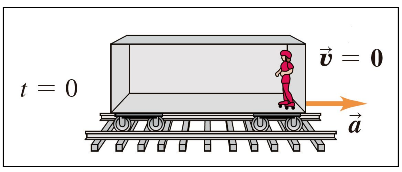
Figura 1 – Equilíbrio de forças em uma partícula sujeita a três molas.



Fonte: Autoria própria.

No entanto, para entender completamente esse conceito, devemos considerar o contexto mais amplo dos referenciais inerciais. Um referencial inercial é essencialmente um sistema de coordenadas no qual a primeira lei do movimento de Newton é válida. Quando nos referimos à ausência de aceleração de um corpo devido à força resultante zero, estamos implicitamente assumindo que estamos observando esse corpo a partir de um referencial inercial. Tomamos o exemplo de um passageiro que está de patins, de modo que eliminasse os efeitos do atrito, no interior de um veículo e este estivesse parado no instante $t = 0$ como mostra a Figura 2.

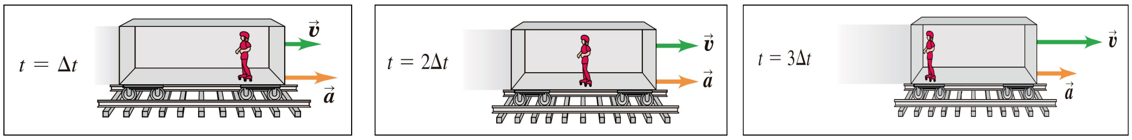
Figura 2 – Passageiro em repouso no interior de um veículo no instante $t = 0$, com velocidade $\vec{v}$ e aceleração a iguais a zero.



Fonte: Young e Freedman (2016).

O passageiro não sente nenhuma força atuando sobre si e portanto permanece em repouso em relação ao sistema de referência inercial da Terra. Após uma variação de tempo $t = \Delta t$, o veículo acelera para frente, fazendo com que o passageiro se mova para trás em relação ao veículo como podemos ver na Figura 3.

Figura 3 – Movimento relativo do passageiro em um veículo acelerado para frente nos instantes $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$ e $t = 3\Delta t$.



(a) $t = \Delta t$ (b) $t = 2\Delta t$ (c) $t = 3\Delta t$

Fonte: Young e Freedman (2016).

Se adotarmos o veículo como sistema de referência, podemos concluir que há uma força resultante atuando sobre o passageiro, fazendo-o mover do lado direito até o lado esquerdo do veículo. Essa conclusão está errada, pois não há nenhuma força resultante atuando sobre o passageiro. O erro cometido está no fato de adotar como referencial o veículo que inicialmente está em repouso e em seguida sofre uma variação de velocidade, fazendo com que desobedeça a lei da inércia (referencial não inercial), logo, o passageiro sente uma força fictícia ao mover-se para esquerda quando na verdade ele está em repouso em relação a superfície terrestre e o veículo que está em movimento acelerado.

O conceito de adotarmos um sistema de referencial inercial adequado é um ponto-chave para tornamos a solução do problema de dois copos mais simples, como veremos posteriormente.

3.1.3 2ª Lei: Força

> A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida (Newton, 2016, p. 54).

Vimos que um corpo em repouso permanece nessa condição, e um corpo em movimento continua se movendo em linha reta com velocidade constante, a menos que uma força externa atue sobre ele. Essa força provoca uma variação na velocidade do corpo, causando uma aceleração proporcional à intensidade da força aplicada. Ora, se pudéssemos causar o mínimo de movimento com o mínimo de força imprimida poderíamos mover um trem (inicialmente em repouso) com um simples empurrão, certo?

Isso não ocorre em nosso universo pois existe uma propriedade fundamental que determina o quanto um objeto resiste a mudanças em seu estado de movimento quando uma força é aplicada: a massa. Esse conceito está diretamente relacionada à inércia, portanto, objetos com mais massa requerem mais força para mudar sua velocidade ou direção. Agora suponha que você segure um melão em uma das mãos e uma melancia na outra. Supondo que as massas sejam, respectivamente, m e $2m$, ao aplicar a mesma força $\vec{F}_{res}$ projetada para cima nas duas frutas, você observa que o melão deverá ter o dobro da aceleração da melancia. Assim, concluímos que a aceleração é proporcional a força e inversamente proporcional a massa de um objeto:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m}. \tag{3.2}$$

Isolando a força F, obtemos o princípio fundamental da dinâmica ou 2ª lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{3.3}$$

Veja novamente a Figura 1 e note que quantificamos a força aplicada na mola como 20 N. O newton (N) é a unidade de medida de força no Sistema Internacional de Unidades (SI) e é definido como a quantidade de força necessária para acelerar um objeto com massa de 1 kg a uma taxa de 1 m/s^2 . A unidade de massa no SI é o quilograma (kg), e foi padronizado em 1889 durante a Primeira Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) em Sèvres, na França com base em um protótipo, um artefato feito de uma liga de platina-irídio, que está depositado no Ofício Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) em Paris (Nussenzveig, 2013).

Entretanto, por questões de acessibilidade ao artefato para referencia-lo, além deste estar sujeito a variações ao longo do tempo e principalmente pelas medições extremamente precisas baseadas em fenômenos quânticos graças ao avanço da tecnologia, em 2019 a definição do quilograma foi redefinida com base na constante de Planck, representada pela letra h, cujo valor é $6,62607015 \times 10^{-34} m^2 kg/s$ (Damaceno *et al.*, 2019).

Apesar de haver uma definição precisa do que é a massa, é comum em nosso cotidiano confundirmos massa e peso. Contudo, quando tomamos o rigor da física, estes dois conceitos são distintos: enquanto a massa é a expressão de inércia ou ainda a quantidade de matéria que compõe um corpo, o peso (W) é a força gravitacional que atua sobre um objeto devido à atração gravitacional de outro corpo massivo (Young; Freedman, 2016). A unidade padrão do peso de um corpo também é o Newton. O peso é definido por:

$$W = mg. \tag{3.4}$$

Ou, na forma vetorial:

$$\vec{W} = m\vec{g}. \tag{3.5}$$

Nestas duas últimas equações, g representa a aceleração da gravidade sob ação da qual o corpo está submetido.

Para compreender melhor a diferença entre massa e peso, podemos lembrar da lenda da maçã que supostamente caiu na cabeça de Isaac Newton. Uma maçã de 150 gramas teria uma força peso de 1,4715 N na Terra. Em uma situação fictícia, se Newton e a macieira estivessem na superfície lunar, a maçã o acertaria com uma aceleração provocada por uma força de apenas 0,243 N, embora sua massa ainda permanecesse a mesma independentemente do local[2].

Um ponto importante a destacar é que se considerarmos unicamente $F = ma$ como uma definição pura de força, ela seria desprovida de conteúdo físico, e não poderíamos questionar sua validade (Nussenzveig, 2013). No exemplo citado anteriormente, por que a maçã cai com uma aceleração de 9,81 m/s^2, se, conforme a lei da inércia, um corpo só adquire aceleração quando uma força resultante atua sobre ele? Se considerássemos a segunda lei de Newton apenas como na Equação 3.3, estaríamos ignorando o fato de que outras forças também estão em jogo. Neste caso, a aceleração da maçã é causada pela força gravitacional. Portanto, as forças que atuam sobre uma partícula resultam de sua interação com outras partículas, e veremos que são dadas por leis de forças, que definem $\vec{F}$ em termos da situação em que a partícula se encontra (Nussenzveig, 2013).

No contexto do problema de dois corpos, é essencial considerar as interações físicas subjacentes, como a força gravitacional, força magnética ou força eletroestática. Sem levar em conta essas forças específicas, $F = ma$ seria apenas uma fórmula vazia e não poderíamos resolver o problema.

3.1.4 3ª Lei: Ação e reação

> A toda ação há sempre oposta uma reação igual ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas (Newton, 2016, p. 54).

Como vimos na Seção 2.8, Newton observou que a mesma força que atraía a maçã para o centro da Terra também atuava na Lua. Até o momento, nossa discussão não considerou as reações dos corpos às forças que eles sofrem. A ação das forças exige a interação entre dois ou mais corpos, caracterizada por módulo, direção e sentido.

Para entender melhor essa interação, consideremos um corpo de massa m deslocando-se a uma velocidade $\vec{v}$, que possui um movimento definido como momento linear ($\vec{p}$), definido pela equação:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{3.6}$$

Se m não varia com o tempo, excluindo sistemas de massa variável, ao derivar em

[2] Cálculos realizados a partir da Equação 3.4 onde a gravidade(g) na Terra e Lua respectivamente valem $9,81 m/s^2$ e $1,62 m/s^2$ aproximadamente.

relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \tag{3.7}$$

Comparando esta equação com a Equação 3.3, temos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{3.8}$$

Portanto, a variação do momento é proporcional à força aplicada, e tem a mesma direção da mesma (Nussenzveig, 2013).

Observamos experimentalmente que, quando sistemas nos quais a soma das forças externas é zero (sistemas isolados), o momento total de um sistema isolado se conserva, e isso se deve ao chamado Princípio de Conservação do Momento (Nussenzveig, 2013). Sendo $\vec{P}_{Total}$ e $\vec{P'}_{Total}$ o momento total de um sistema antes e após uma colisão entre dois corpos que possuem momentos lineares $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ antes da colisão, e $\vec{p'}_1$ e $\vec{p'}_2$ depois, temos:

$$\vec{P}_{Total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2 = \vec{P'}_{Total}. \tag{3.9}$$

Vale destacar que isso só é válido desde que as únicas forças que atuem sobre o sistema sejam as interações entre as duas partículas durante a colisão, ou seja, desde que possamos desprezar os efeitos de forças externas ao sistema (Nussenzveig, 2013).

Rearranjando a Equação 3.9, temos:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 + \vec{p}_1 = -(\vec{p'}_2 - \vec{p}_2) = -\Delta\vec{p}_2, \tag{3.10}$$

onde $\Delta\vec{p}_1$ e $\Delta\vec{p}_2$ são as variações de momento das partículas 1 e 2, respectivamente, em consequência da colisão. Quando estas colisões se realizam em um tempo Δt extremamente curto, decorre que:

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}. \tag{3.11}$$

Como Δt é extremamente pequeno, podemos inferir que:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}. \tag{3.12}$$

Agora, aplicando a Equação 3.8 na Equação 3.12, obtemos a terceira lei de Newton em forma de equação:

$$\vec{F}_{1\text{ em }2} = -\vec{F}_{2\text{ em }1}. \tag{3.13}$$

Esta lei estabelece que para cada força aplicada (ação) em um corpo, há uma força igual em módulo e direção, mas de sentido oposto (reação).

Portanto, ao atrair a maçã para seu centro, a Terra também é atraída pela maçã, obviamente a perturbação do movimento da Terra é quase nula devido a sua imensa massa em relação a maçã. Essa lei atua tanto em forças de contato como de longo alcance, e podemos chamar as forças entre dois corpos que interagem de par de forças da terceira lei. Sempre que dois corpos interagem, um par de forças da terceira lei está presente (Halliday; Resnick; Walker, 2016a).

Essa lei tornou possível, dentre outros incontáveis fenômenos presentes em nosso universo, o voo espacial e outras aplicações tecnológicas baseadas em propulsão por reação, tendo em vista que em um lançamento de foguete, após acionados, seus motores queimam combustível e expelem gases a alta velocidade para baixo, criando uma força de ação que empurra os gases para fora do motor. De acordo com a terceira lei de Newton, essa expulsão de gases gera uma força de reação igual e oposta que age sobre o foguete, empurrando-o para cima. Esse empuxo, se maior do que o peso do foguete (força da gravidade), resulta na ascensão do foguete. Assim, o movimento ascendente do foguete é diretamente causado pela força de reação gerada pela expulsão dos gases, demonstrando a aplicação prática da terceira lei de Newton em sistemas de propulsão. Na Figura 4 podemos ver o megafoguete Starship, atualmente o maior e mais potente foguete do mundo. Ele foi desenvolvido pela SpaceX e tem uma altura de 121 metros, além de uma massa de 5000 toneladas e produz uma força de empuxo de 74,3 meganewtons (equivalente a 74.300.000 Newtons!).

Figura 4 – Voo de teste do foguete Starship da SpaceX.

Fonte: O Dia (2023).

Essa lei garante a conservação do momento linear do sistema, permitindo que se descreva a interação entre os corpos como um sistema fechado, onde as forças internas são completamente simétricas. Isso facilita na resolução do problema de dois corpos, simplificando significativamente a análise das órbitas e dos movimentos resultantes sob a influência da gravidade.

3.2 As leis de Kepler

Como discutido na Seção 2.6, Kepler desenvolveu suas leis do movimento planetário com base nas observações astronômicas, principalmente nos dados coletados por Tycho Brahe. Embora suas contribuições tenham sido fundamentais ao descrever o movimento preciso dos planetas utilizando geometria e álgebra, Kepler estava mais focado em explicar "como" os planetas se movem, em vez de entender as razões físicas por trás desses movimentos. Para fornecer uma compreensão um pouco mais aprofundada do "por que" isso ocorre, nesta seção abordaremos conceitos adicionais como velocidade angular, momento linear, momento angular e cálculo diferencial, que foram desenvolvidos após a morte de Kepler, principalmente por Isaac Newton e outros cientistas durante os séculos XVII e XVIII. A seguir, apresentamos mais detalhes sobre as leis de Kepler.

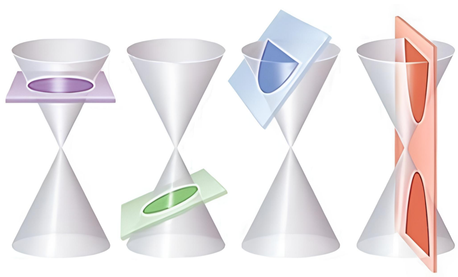
3.2.1 1ª Lei: Órbitas

> Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos (Halliday; Resnick; Walker, 2016b, p. 112).

Como vimos na Seção 2.6, Kepler tentava ajustar os dados observados experimentalmente com a geometria, onde os planetas sempre apresentavam trajetórias curvilíneas ao redor do Sol. Quando Kepler publicou sua descoberta de que a órbita de Marte se ajustava perfeitamente a uma elipse, conjecturou que o mesmo poderia ocorrer com todos os planetas, inclusive com outros tipos de cônicas.

As seções cônicas são as curvas obtidas ao se cortar um cone duplo com um plano. Dependendo da inclinação e da posição do plano em relação ao eixo do cone, diferentes tipos de curvas cônicas podem ser gerados. Na Figura 5 podemos ver que quando o plano é perpendicular ao eixo do cone, forma-se uma circunferência. Se o plano é inclinado, mas não suficientemente para ser paralelo à geratriz do cone (reta que gera a superfície lateral do cone quando gira em torno do eixo do cone), o corte resulta em uma elipse. Uma inclinação paralela à geratriz do cone gera uma parábola, enquanto que um plano cortando ambos os cones em uma inclinação maior que a da geratriz produz uma hipérbole.

Figura 5 – Seções cônicas geradas pela intersecção de um plano com um cone duplo.



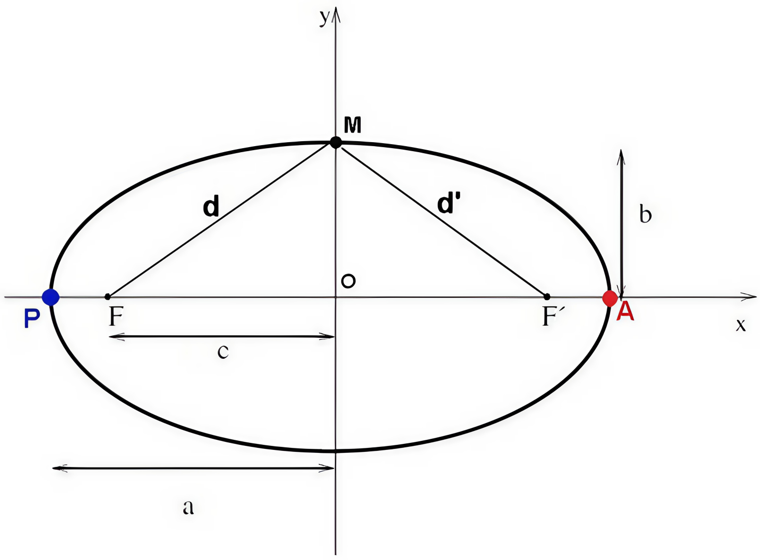
Fonte: Adaptado de Marciano (2020).

Na elipse destacamos quatro elementos fundamentais, que podem ser observados na Figura 6: os focos F e F', centro o, semieixo maior a, semieixo menor b, e por fim c a distância do centro ao foco. Em qualquer ponto M sobre a elipse, a soma das distâncias d e d' desse ponto aos dois focos é constante. Assim temos a seguinte propriedade:

$$FM + F'M = d + d' = constante, \tag{3.14}$$

portanto, uma elipse é por definição o conjunto de todos os pontos em um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é constante (Filho; Saraiva, 2014).

Figura 6 – Elementos fundamentais de uma elipse.



Fonte: Adaptado de Filho e Saraiva (2014).

Embora Kepler tenha chegado à conclusão de que o formato de elipse se adéque bem a trajetória dos planetas que ele observou, há em nosso universo todos os quatro tipos de cônicas presentes na trajetória de corpos celestes como planetas, cometas, asteroides, meteoros e até mesmo satélites artificiais. Uma característica fundamental que ajuda a descrever a forma das seções cônicas é chamada excentricidade e, e é definida pela seguinte relação:

$$e = \frac{c}{a}. \tag{3.15}$$

A equação acima define a excentricidade de uma elipse, onde c é a distância do centro da elipse a um dos focos e a é o semieixo maior. Essa medida é essencial para determinar o tipo de trajetória que um corpo seguirá ao redor de um corpo central.

No estudo das órbitas celestes, a excentricidade pode ser analisada com base em dois pontos notáveis destacados na Figura 6. Considerando o centro de massa do corpo central como o ponto de referência (foco F), o apoastro corresponde ao ponto da trajetória orbital em que o corpo celeste encontra-se na maior distância em relação ao foco, sendo representado pelo ponto A na figura. Por outro lado, o periastro é o ponto da órbita onde o corpo celeste está mais próximo do foco, identificado como o ponto P.

Ainda na Figura 6, observa-se que a distância do periastro ao foco F é dada por $a - c$, enquanto a distância do apoastro ao foco é expressa por $a + c$. Essas relações podem ser descritas algebricamente como:

$$Periastro = a - c = a - ae, \tag{3.16}$$

$$Apoastro = a + c = a + ae. \tag{3.17}$$

Aqui, o termo ae é derivado da substituição de c na Equação 3.15. A seguir, podemos calcular a diferença entre o apoastro e o periastro, que fornece uma medida do alongamento da órbita elíptica:

$$Apoastro - Periastro = \cancel{a} + ae - \cancel{a} + ae = 2ae. \tag{3.18}$$

Observa-se que, se $e = 0$, a diferença entre o apoastro e o periastro é nula, resultando em uma órbita perfeitamente circular. Por outro lado, quando $e > 0$, essa diferença aumenta, alongando a órbita. Manipulando a equação acima, podemos isolar a excentricidade, obtendo:

$$e = \frac{Apoastro - Periastro}{2a}. \tag{3.19}$$

Para tornar esta fórmula mais prática em simulações, é possível substituir o semieixo maior a em função das distâncias do apoastro e do periastro. Como mostrado na Figura 6, o semieixo maior a pode ser calculado somando as distâncias do apoastro e do periastro e dividindo o resultado por dois:

$$a = \frac{Apoastro + Periastro}{2}. \tag{3.20}$$

Substituindo a Equação 3.20 na Equação 3.19, obtemos a seguinte expressão final para a excentricidade em função somente das medidas do apoastro e do periastro:

$$e = \frac{Apoastro - Periastro}{Apoastro + Periastro}. \tag{3.21}$$

Essa última equação é particularmente útil em simulações numéricas, pois permite calcular a excentricidade a partir das posições de menor e maior distância de um corpo em órbita, sem a necessidade de determinar o semieixo maior explicitamente. Na Tabela 1, podemos observar o valor da excentricidade da orbita dos planetas conhecidos na época de Kepler.

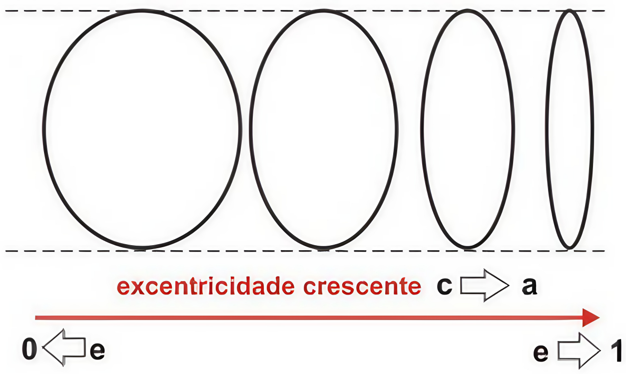
Tabela 1 – Excentricidade dos planetas conhecidos na época de Kepler.

Planeta	**Excentricidade** (e)
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056

Fonte: Nussenzveig (2013).

Elipses têm valores de excentricidade variando de zero até 1, sendo mais alongadas ou achatadas à medida que e se aproxima de 1, como mostra a Figura 7. Mesmo aparentando orbitar em círculos, todos os planetas do nosso sistema solar, satélites naturais e cometas periódicos, como o Halley, seguem órbitas elípticas com o Sol localizado em um dos focos. Quando os focos estão muito próximos do centro, a distância c tende a zero, fazendo com que a excentricidade também se aproxime de zero. Nesse caso, quando os dois focos coincidem no centro, forma-se um círculo perfeito.

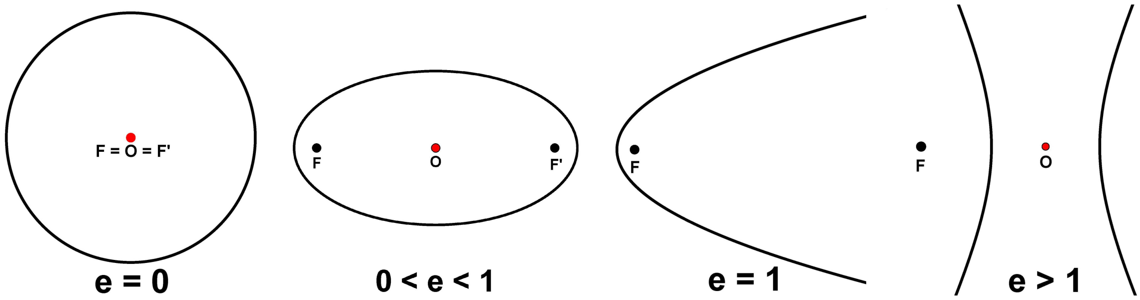
Figura 7 – Relação entre a variação da excentricidade e o alongamento de uma elipse.



Fonte: Custódio (2017).

Além do círculo e da elipse, conforme ilustrado respectivamente nas Figuras 8a e 8b, outros valores de excentricidade resultam em outros tipos de cônicas. Quando $e = 1$, a figura geométrica resultante é uma parábola como na Figura 8c, considerada um caso limite de uma elipse onde o semieixo maior tende ao infinito. Alguns cometas não periódicos seguem trajetórias parabólicas tão abertas que passam pelo sistema solar apenas uma vez antes de serem lançados de volta ao espaço profundo, nunca mais retornando. Finalmente, para valores de $e > 1$, temos hipérboles caracterizadas por dois ramos separados, sendo que cada ramo se torna mais aberto quanto maior for a excentricidade como observa-se na Figura 8d.

Figura 8 – Influência da excentricidade na geração da cônica.

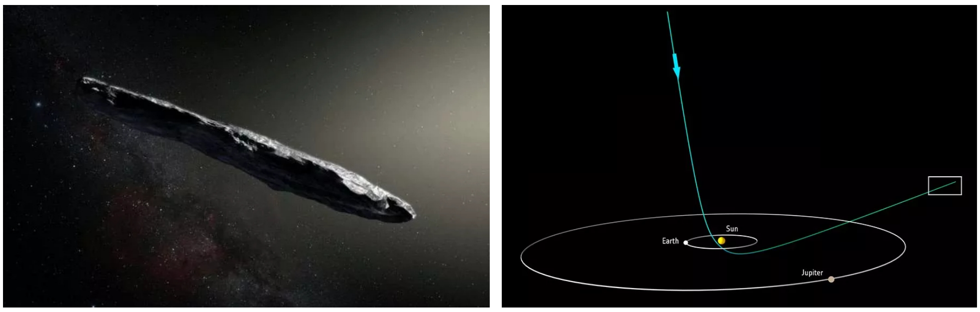


(a) Círculo (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbole

Fonte: Autoria própria.

Corpos celestes como o Oumuamua presente na Figura 9a são exemplos de objetos interestelares. Ele seguiu um órbita hiperbólica ao passar pelo nosso sistema solar como mostra a Figura 9b, indicando sua origem externa, com uma excentricidade de aproximadamente 1.20 (Solar System Dynamics, 2017). Esses objetos possuem energia e velocidade superiores às daqueles em trajetórias parabólicas, movendo-se mais rápido do que a velocidade de escape do sistema que visitam.

Figura 9 – Trajetória do objeto interestelar Oumuamua no Sistema Solar.



(a) 1I/'Oumuamua. (b) Trajetória hiperbólica do Oumuamua no Sistema Solar.

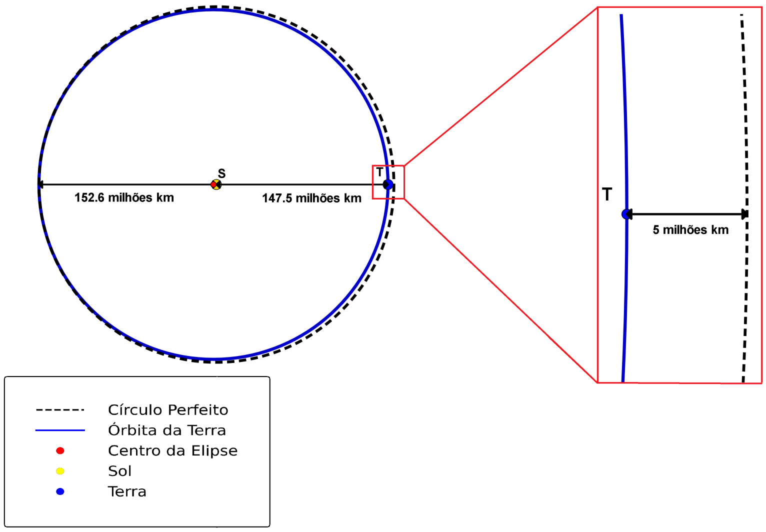
Fonte: Marasciulo (2018).

Para fins de ilustração, a elipse mostrada na Figura 8b tem uma excentricidade de 0.84, enquanto a órbita da Terra em torno do Sol possui uma excentricidade bem menor, de apenas 0,0167. Embora se assemelhe muito a um círculo, quando comparamos essa órbita em escala astronômica, como no sistema Terra-Sol, percebemos que, apesar da baixa excentricidade, há uma diferença notável, especialmente quando consideramos as grandes distâncias envolvidas. Na Figura 10, comparamos a órbita da Terra, representada em azul, tendo o Sol como um dos focos, com um círculo perfeito representado pela linha preta tracejada, no qual definimos o Sol como seu centro e com um raio de aproximadamente 152,6 milhões de km no afélio[3]. Com isso, podemos observar que o grau de elipticidade

[3] Quando consideramos o Sol como um dos focos, o afélio é o ponto da órbita de um corpo celeste em que ele está mais distante.

da órbita terrestre resulta em uma variação de cerca de 5 milhões de quilômetros entre o afélio e o periélio[4].

Figura 10 – Comparação de entre a órbita elíptica da Terra e um círculo.



Fonte: Autoria própria.

O mesmo acontece no sistema Terra-Lua. A excentricidade da órbita lunar provoca uma variação na distância entre a Lua e a Terra. No perigeu, a Lua atinge seu ponto mais próximo, a aproximadamente 362 mil km da Terra, enquanto no apogeu, ela se encontra em sua distância máxima, a 405 mil km. Essa variação de distância é responsável pelo fenômeno conhecido como superlua, que ocorre quando a Lua cheia coincide com sua proximidade ao perigeu, fazendo com que ela pareça ligeiramente maior e mais brilhante no céu.

A primeira lei de Kepler está relacionada ao problema de dois corpos, pois ambos descrevem órbitas elípticas, o que mostra a importância dessa lei para a compreensão da dinâmica orbital.

3.2.2 2ª Lei: Áreas

> A reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos de tempo iguais, ou seja, a taxa de variação dA/dt da área A com o tempo é constante (Halliday; Resnick; Walker, 2016b, p. 113).

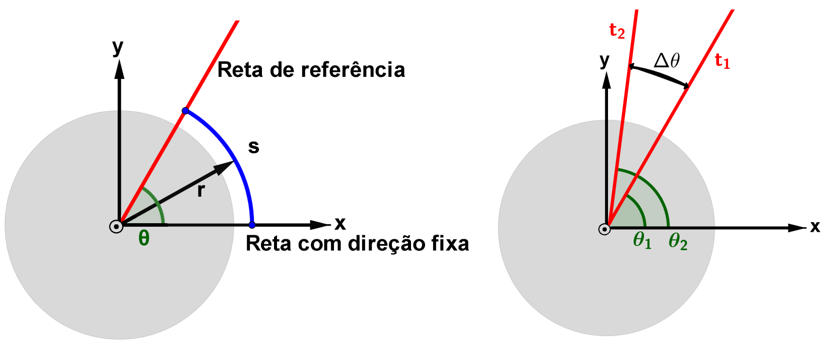
Quando um planeta orbita o Sol em uma trajetória elíptica, o Sol ocupa um dos focos dessa elipse. Ao longo dessa órbita, existe um vetor imaginário que conecta os dois corpos. Esse vetor varre áreas iguais em tempos iguais, independentemente da posição do planeta em sua órbita. Esse princípio é chamado de velocidade areal constante e implica,

[4] O periélio é o ponto em que o corpo celeste está mais próximo do Sol.

na prática, em um movimento mais lento quando está no afélio e mais rápido quando está no periélio. Atualmente, sabemos que a lei das áreas é uma consequência do princípio de conservação do momento angular, que será detalhado a seguir.

Conforme apresentado por Halliday, Resnick e Walker (2016a), um corpo que gira em torno de um eixo fixo possui uma posição angular θ medida a partir do ângulo entre uma reta com direção fixa e uma reta de referência fixa ao corpo e perpendicular ao eixo de rotação, como ilustra a Figura 11a. O comprimento de arco s é a medida que vai da reta com direção fixa (posição angular zero) até a reta de referência e o raio r é o raio da circunferência. Na mesma figura temos um corpo em cinza que rotaciona em torno de um eixo (representada na figura como um "$\odot$") que aponta para fora do plano, ou seja, perpendicular ao semieixo x, que por sua vez é a reta com direção fixa e forma um comprimento de arco s com a reta de referência em vermelho, possuindo raio r.

Figura 11 – Representação do movimento angular de um corpo em torno de um eixo fixo.



(a) Corpo de raio r se desloca em torno do eixo fixo "$\odot$".

(b) Deslocamento angular $\Delta\theta$ entre os intervalos de tempo t_1 e t_2.

Fonte: Autoria própria.

A partir destes elementos podemos deduzir uma relação geométrica em uma circunferência na qual o comprimento do arco s, correspondente a um ângulo θ, é proporcional ao raio r. Matematicamente, podemos expressar isso como:

$$s = \theta \cdot r. \tag{3.22}$$

Observe que o comprimento do arco s (ou deslocamento linear ao longo da circunferência) é uma grandeza linear, medida em unidades de comprimento, como metros. Por outro lado, o ângulo θ é uma grandeza angular, expressa em radianos. Podemos, então, rearranjar a equação em termos de θ para obter:

$$\theta = \frac{s}{r}, \tag{3.23}$$

onde θ representa a posição angular medida em radianos.

O corpo, ao realizar uma rotação, apresentará uma variação em sua posição angular, representada na Figura 11b. Portanto, sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ dado por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{3.24}$$

Quando um corpo se desloca no sentido anti-horário, a variação do ângulo $\Delta\theta$ é considerada positiva. Por outro lado, se o deslocamento ocorrer no sentido horário, $\Delta\theta$ assume um valor negativo.

Ao sofrer um deslocamento do ponto θ_1 no instante t_1 ao ponto θ_2 no instante t_2 podemos quantificar a rapidez com que o ângulo de um corpo rotativo muda ao longo do tempo através da razão entre a variação do ângulo $\Delta\theta$ e o intervalo de tempo Δt, chamamos esta medida de velocidade angular média $\omega_{\text{méd}}$, logo:

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{3.25}$$

Quando analisamos a Equação 3.25 em termos de variação em um instante infinitesimalmente pequeno, estamos definindo a velocidade angular instantânea ω através da derivada da posição angular θ em relação ao tempo t, dada por:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{3.26}$$

A equação diz exatamente o quão rápido o ângulo de posição de um corpo está mudando naquele exato momento, expressa em radianos por unidade de tempo (rad/s), sendo especialmente útil em casos onde a velocidade angular não é constante, como na variação da velocidade angular de um planeta em sua órbita elíptica, ao passar pelo afélio e periélio.

Derivando a Equação 3.22 em relação ao tempo, considerando r constante, obtemos:

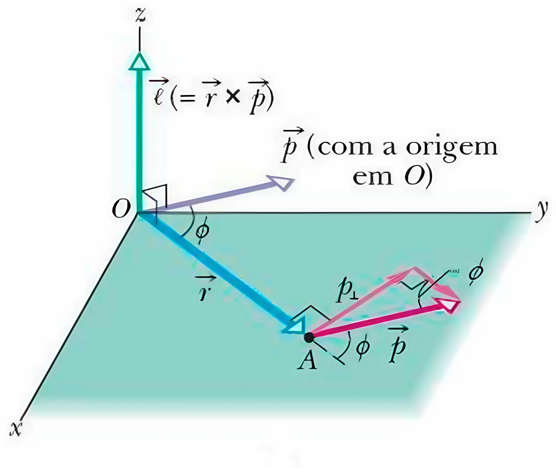
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}r. \tag{3.27}$$

Como estamos derivando uma grandeza linear que representa a taxa de variação do comprimento do arco com o tempo, obtemos a velocidade linear escalar v ($\frac{ds}{dt} = v$), ou seja, a rapidez com que o corpo está se movendo, sem levar em conta a direção e sentido. Além disso, vimos na Equação 3.26 que a velocidade angular ω representa a taxa de variação instantânea da posição angular de um corpo em rotação, ao substituir obtemos:

$$v = \omega r. \tag{3.28}$$

A Figura 12 mostra uma partícula de massa m e momento linear $\vec{p}$ que está passando pelo ponto A de um plano xy.

Figura 12 – Uma partícula passando pelo ponto A tendo momento linear $\vec{p}$ e vetor no plano xy, possuindo momento angular $\vec{\ell}$ em relação à origem O.



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016a).

Ainda de acordo com Halliday, Resnick e Walker (2016a), o momento angular $\vec{\ell}$ da partícula em relação à origem O é uma grandeza vetorial definida por meio de:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \tag{3.29}$$

O símbolo $\times$ representa o produto vetorial entre dois vetores. Esse produto resulta em um novo vetor (no caso $\vec{\ell}$) que é perpendicular ao plano formado pelo vetor posição $\vec{r}$ da partícula em relação a O e o vetor momento linear $\vec{p}$. Quando a partícula se move em relação a O na direção do momento linear $\vec{p}$, o vetor posição $\vec{r}$ gira em torno de O. A unidade de momento angular do SI é o quilograma-metro quadrado por segundo $(kg \cdot m^2/s)$, que equivale ao joule-segundo $(J \cdot s)$ (Halliday; Resnick; Walker, 2016a).

Para determinar o módulo de $\vec{\ell}$, multiplicamos o módulo de $\vec{r}$ pelo módulo de $\vec{p}$ e pelo seno do ângulo entre eles:

$$\vec{\ell} = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot sen\phi, \tag{3.30}$$

onde $sen\phi$ influencia a orientação relativa entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Quando $\vec{r}$ e $\vec{p}$ são perpendiculares ($\phi = 90°$), o produto vetorial atinge seu máximo, pois $sen(90°) = 1$. Quando $\vec{r}$ e $\vec{p}$ são paralelos ($\phi = 0°$ ou $180°$), o produto vetorial é zero, pois $sen(0°) = 0$. Com isso, o módulo do vetor momento angular $\vec{\ell}$ é uma medida de quão forte e em que sentido a partícula (com momento linear $\vec{p}$) está "girando" em torno do ponto de origem, levando em consideração a posição da partícula ($\vec{r}$) e a orientação entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

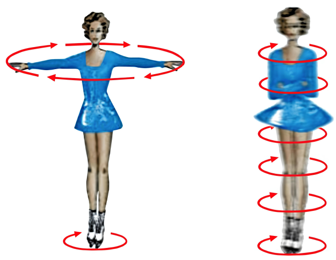
Voltando à Figura 12, podemos ver a componente de $\vec{p}$ perpendicular a $\vec{r}$, que é $p_\perp = |\vec{p}| \cdot sen\phi$. Assim, o módulo de $\vec{\ell}$ pode ser expresso como:

$$|\vec{\ell}| = |\vec{r}| \cdot p_\perp = |\vec{r}| \cdot mv_\perp, \tag{3.31}$$

onde $|\vec{\ell}|$ representa a "quantidade de movimento rotacional" de um corpo em torno de um ponto ou eixo e é análogo ao momento linear $|\vec{p}|$ em movimento linear, mas aplicado ao movimento em torno de um ponto (rotação).

Podemos observar que quanto maior for a distância $|\vec{r}|$ do corpo ao eixo de rotação e maior for a velocidade perpendicular $v_{\perp}$, maior será $|\vec{\ell}|$, isso significa que em sistemas isolados o momento angular total é conservado. Por exemplo, na Figura 13 temos o caso de uma patinadora que recolhe os braços durante uma pirueta. Como o momento angular é conservado, devido a distância entre os braços $|\vec{r}|$ diminuir, a velocidade $v_{\perp}$ aumenta para manter $|\vec{\ell}|$ constante, resultando em uma rotação mais rápida.

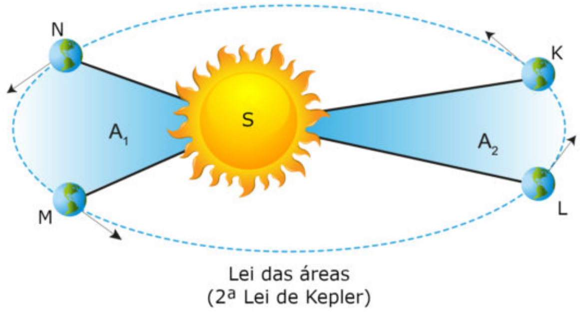
Figura 13 – Conservação do momento angular no movimento de uma patinadora no gelo.



Fonte: StudyPug (2024).

No contexto das Leis de Kepler, quando o planeta está mais próximo do Sol (menor $|\vec{r}|$), a velocidade $v_{\perp}$ aumenta para que o momento angular $|\vec{\ell}|$ se mantenha constante. Isso resulta em uma órbita mais rápida no periélio. Quando o planeta está mais distante do Sol (maior $|\vec{r}|$), a velocidade $v_{\perp}$ diminui, mantendo $|\vec{\ell}|$ constante, e o planeta se move mais lentamente no afélio. Na Figura 14 podemos ver o planeta que, ao se deslocar do ponto N ao M, varre uma determinada área A_1 em um tempo Δt_1 enquanto, em outro momento, ele se move do ponto L para o K perfazendo uma área A_2 com um intervalo de tempo Δt_2. A segunda lei de Kepler nos diz que tendo as áreas A_1 e A_2 como os intervalo de tempo Δt_1 e Δt_2 são iguais, como consequência, a velocidade orbital em ambos os trechos não é uniforme.

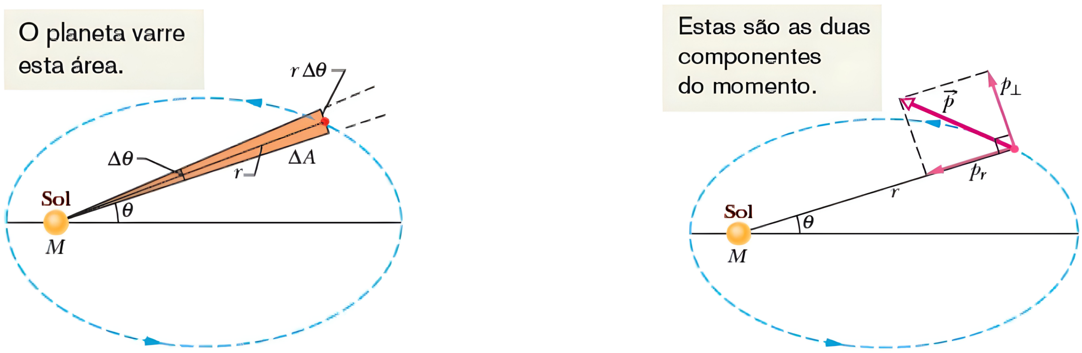
Figura 14 – Áreas correspondentes em diferentes trechos do plano orbital de um planeta.



Fonte: InfoEscola.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2016b), para quantificar a área varrida pelo corpo, tomamos um intervalo de tempo Δt varrendo com um segmento de reta de comprimento r, conforme ilustra a Figura 15a.

Figura 15 – Planeta varre uma área no intervalo de tempo Δt com comprimento r, conservando o seu momento angular.



(a) No instante Δt o segmento r se desloca em um determinado ângulo $\Delta\theta$, varrendo uma área ΔA.

(b) O momento linear $\vec{p}$ do planeta e suas componentes p_r e $p_\perp$.

Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016b).

Podemos ver que a área ΔA formada é aproximadamente igual a área de um triângulo de base $r\Delta\theta$ e altura r. Como a área de um triângulo pode ser calculada pelo produto da metade da base pela altura, temos que:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta. \tag{3.32}$$

Essa expressão para ΔA se torna mais exata quando Δt (e, portanto, $\Delta\theta$) tende a zero. A taxa de variação instantânea poderá então ser dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega, \tag{3.33}$$

onde ω é a velocidade angular do segmento de reta que liga o Sol ao planeta.

A Figura 15b mostra o momento linear $\vec{p}$ do planeta, juntamente com as componentes radial p_r e perpendicular $p_\perp$. Tomando a Equação 3.31 e substituindo $v_\perp$ por ωr, temos:

$$\vec{\ell} = r p_\perp = (r)(m v_\perp) = (r)(m \omega r) = m r^2 \omega. \tag{3.34}$$

Combinando as Equações 3.33 com 3.34, obtemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2m}. \tag{3.35}$$

De acordo com essa equação, a afirmação de Kepler de que $\frac{dA}{dt}$ é constante equivale a dizer que ℓ é constante, ou seja, que o momento angular é conservado. A segunda lei de Kepler é, portanto, equivalente à lei de conservação do momento angular.

3.2.3 3ª Lei: Períodos

> O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita (Halliday; Resnick; Walker, 2016b, p. 114).

O período orbital P de um corpo é o tempo que ele leva para completar uma volta completa ao redor de outro corpo em uma órbita fechada. A terceira lei de Kepler, que relaciona o período orbital de um planeta ao seu semieixo maior a de sua trajetória orbital elíptica, pode ser expressa em termos matemáticos como:

$$P^2 = Ka^3, \tag{3.36}$$

onde K é uma constante de proporcionalidade, sendo o período medido em anos e a distância em Unidade Astronômica (UA)[5]. Segundo Filho e Saraiva (2014), Newton deduziu a constante K a partir de sua Lei da Gravitação Universal, utilizando como base a terceira lei de Kepler. Essa constante é expressa pela seguinte fórmula:

$$K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}, \tag{3.37}$$

onde G representa a constante da gravitação universal, m_1 e m_2 são as massas dos corpos 1 e 2 respectivamente. Na Tabela 2 nota-se que essa relação se mantém praticamente constante para todas as órbitas em torno de um mesmo corpo de grande massa, independentemente da excentricidade e da órbita (Halliday; Resnick; Walker, 2016b);(Young; Freedman, 2016).

Tabela 2 – Aplicação da terceira lei de Kepler aos planetas do Sistema Solar.

Planeta	**Semieixo Maior a (UA)**	**Período P (anos)**	**P^2/a^3**
Mercúrio	0,387	0,241	1,000
Vênus	0,721	0,615	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,88	0,998
Júpiter	5,200	11,9	1,000
Saturno	9,558	29,5	0,996
Urano	19,184	84,000	0,999
Netuno	30,080	165,000	1,000
Plutão	39,439	248,000	1,002

Fonte: Adaptado de Halliday, Resnick e Walker (2016b).

Quando comparamos o cometa Halley, que foi visível a olho nu em 1986 e retornará às proximidades da Terra apenas em 2061, com o planeta Urano, notamos diferenças significativas em suas órbitas. O cometa Halley possui uma órbita altamente elíptica, com

[5] A unidade astronômica (UA) é uma unidade de medida que corresponde à distância média entre a Terra e o Sol, sendo aproximadamente igual a 149.597.870,7 quilômetros (Union, 2012).

excentricidade de 0,967 e um semieixo maior de 17,94 UA, o que resulta em um período orbital em torno de 76,1 anos (NSSDCA, 2024a). Por outro lado, Urano tem uma órbita muito menos excêntrica, com excentricidade de 0,0469 e um semieixo maior de 19,2 UA, resultando em um período orbital de 84 anos (NSSDCA, 2024d). Embora ambos os corpos tenham períodos orbitais relativamente próximos, suas órbitas diferem consideravelmente em termos de excentricidade. A principal diferença está nas velocidades variáveis do cometa em diferentes pontos de sua órbita elíptica, enquanto Urano tem uma velocidade orbital relativamente constante e menor devido à sua órbita mais circular e maior distância do Sol.

Essa lei implica que planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente ao redor do Sol, já que a força gravitacional entre o Sol e o planeta diminui com o aumento da distância (Filho; Saraiva, 2014). O conceito deste tipo fundamental de força será discutido com mais detalhes na próxima seção.

3.3 Lei da Gravitação Universal

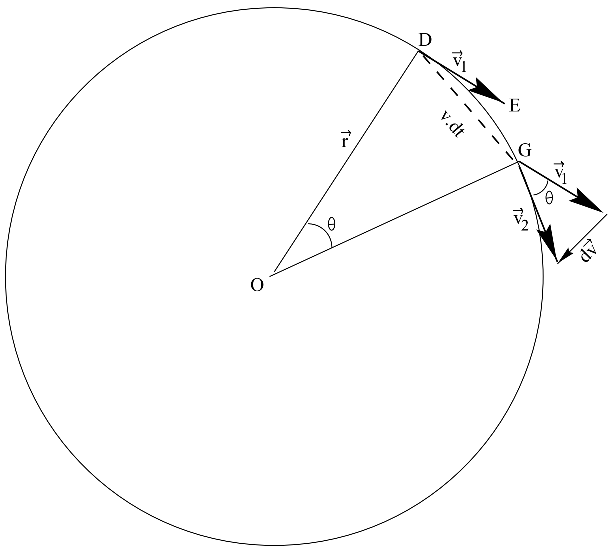
Na natureza, existem quatro tipos de forças fundamentais, responsáveis por todas as interações físicas conhecidas. A primeira é a força eletromagnética, que atua entre partículas com carga elétrica, sendo responsável por fenômenos como eletricidade, magnetismo e a propagação da luz. A segunda é a força nuclear forte, a mais intensa de todas, que mantém prótons e nêutrons unidos no núcleo atômico. No entanto, ela age apenas em distâncias muito pequenas, dentro do núcleo dos átomos. A terceira é a força nuclear fraca, associada à radioatividade e ao decaimento de partículas subatômicas, como o decaimento beta. Apesar de agir em distâncias ainda menores que a força nuclear forte, sua intensidade é significativamente menor. Por fim, a quarta força é a força gravitacional, a mais fraca entre as quatro, mas que atua a grandes distâncias, sendo responsável pela atração entre corpos com massa. As forças que encontramos no cotidiano, discutidas na Subseção 3.1.1, são uma espécie de consequência ou manifestação dessas quatro forças fundamentais.

Se a força gravitacional atua em qualquer corpo com massa, por que não presenciamos objetos serem atraídos um ao outro em nosso dia a dia? Ora, para que a atração gravitacional entre dois objetos seja perceptível, as massas envolvidas precisam ser muito grandes. A Terra, com sua massa enorme, exerce uma força gravitacional suficiente para nos manter “presos” ao chão. No entanto, entre objetos pequenos, como uma caneta e um copo, a força gravitacional é tão insignificante que acaba sendo superada por outras forças, como a força de atrito ou a resistência do ar. Portanto, por ser a mais fraca das forças fundamentais, ela só é perceptível na escala astronômica, isso explica o fato de que a evolução da teoria da gravitação sempre esteve diretamente ligada à história da astronomia (Nussenzveig, 2013).

Como vimos na Seção 2.8, Newton, ao se basear nos argumentos de Galileu, que mais tarde levariam à formulação de sua primeira lei, e também nas leis de Kepler, concebeu a ideia de uma força que impediria a Lua de seguir em linha reta em sua trajetória ao redor da Terra. Essa força, mais tarde identificada como gravidade, provoca uma aceleração com direção voltada para o corpo central, neste caso, a Terra. Isso não apenas altera a posição da Lua, mas também muda continuamente a direção de sua velocidade, mantendo-a em órbita.

Até o final desta seção, todas as equações apresentadas são baseadas conforme Filho e Saraiva (2014), seguindo os métodos e procedimentos descritos pelos autores. Comecemos observando a Figura 16, onde consideramos uma partícula que se move em um círculo. No instante t a partícula está em D, com velocidade $\vec{v_1}$ na direção DE. Pela 1ª lei de Newton, se não existe uma força agindo sobre o corpo, ele continuará em movimento na direção DE. Após um intervalo de tempo Δt, a partícula se encontra em G, tendo percorrido a distância $v \times \Delta t$, e está com velocidade $\vec{v_2}$, de mesmo módulo v, mas em outra direção.

Figura 16 – Partícula que realiza um movimento circular com vetor posição $\vec{r}$, velocidades tangenciais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e o ângulo θ, indicando a aceleração centrípeta em direção ao centro O.



Fonte: Filho e Saraiva (2014).

Seja θ o ângulo entre o ponto D e o ponto G na trajetória circular, que também corresponde ao ângulo entre os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, como mostrado na Figura 16. Usando semelhanças de triângulos, é possível obter a seguinte relação:

$$\theta = \frac{\vec{v}\Delta t}{\vec{r}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\vec{v}}. \tag{3.38}$$

A aceleração é definida como:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \tag{3.39}$$

Como $\Delta\vec{v} = \theta\vec{v}$ devido à Equação 3.38 e substituindo na Equação 3.39, obtemos:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\theta\vec{v}}{\Delta t}, \tag{3.40}$$

onde $\vec{a}_{cp}$ é a aceleração centrípeta, que relaciona grandezas lineares com grandezas angulares, pois a aceleração passa a depender do deslocamento angular θ.

Substituindo o valor de θ da Equação 3.38 na Equação 3.40:

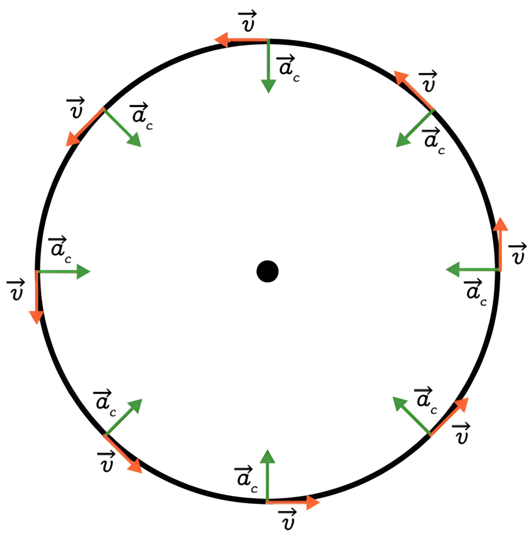
$$\vec{a}_{cp} = \frac{(\frac{\vec{v}\Delta t}{\vec{r}})\vec{v}}{\Delta t}. \tag{3.41}$$

Simplificando Δt no numerador e denominador, temos que a aceleração em um movimento circular é dada por:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}^2}{\vec{r}}. \tag{3.42}$$

A aceleração centrípeta, sempre aponta em direção ao centro da trajetória circular, ou seja, segue a direção radial. Como ilustrado na Figura 17, essa aceleração é perpendicular à velocidade tangencial, o que significa que ela não altera o módulo da velocidade, mas sim a sua direção.

Figura 17 – Movimento circular uniforme, com vetores de velocidade $\vec{v}$ tangenciais e vetores de aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ apontando para o centro da trajetória.



Fonte: Alloprof (2024).

Quando a partícula possui massa m, podemos aplicar a segunda lei de Newton para determinar a força centrípeta $\vec{F}_{cp}$, que é responsável por produzir essa aceleração. A relação matemática para a força centrípeta é dada por:

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp} = m\frac{\vec{v}^2}{\vec{r}}, \tag{3.43}$$

onde $\vec{v}$ representa a velocidade tangencial, e $\vec{r}$ o raio da trajetória circular.

Essa força é essencial para manter o corpo em movimento circular, pois, ao "puxá-lo" continuamente em direção ao centro, impede que ele se desvie da trajetória. Claramente, a dedução é válida se $\Delta\vec{v}$ e Δt são extremamente pequenos, e é um exemplo da aplicação do cálculo diferencial, que foi desenvolvido pela primeira vez por Newton (Filho; Saraiva, 2014).

Ao perfazer a trajetória em movimento circular uniforme, o período P é o tempo que ele leva para completar uma volta completa ao longo da circunferência. Podemos representar matematicamente como a relação entre o comprimento de uma circunferência $2\pi r$ e a velocidade constante $\vec{v}$:

$$P = \frac{2\pi r}{\vec{v}} \implies \vec{v} = \frac{2\pi r}{P}. \tag{3.44}$$

Pela 3ª Lei de Kepler[6], $P^2 = Kr^3$, temos então que:

$$\vec{v}^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{Kr} \implies \vec{v}^2 \propto \frac{1}{r}. \tag{3.45}$$

Seja m a massa do planeta e M a massa do Sol. A expressão da força centrípeta exercida pelo Sol no planeta pode, então, ser escrita como:

$$\vec{F} \propto \frac{m}{r^2}. \tag{3.46}$$

De acordo com a 3ª lei de Newton, o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol. A força centrípeta exercida pelo planeta sobre o Sol, de massa M, similarmente seria dada por:

$$\vec{F} \propto \frac{M}{r^2}. \tag{3.47}$$

Newton deduziu, então, que:

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \tag{3.48}$$

A constante gravitacional universal G foi formulada por Isaac Newton e, posteriormente, medida com precisão pelo físico britânico Henry Cavendish entre os anos de 1797 e 1798. O valor de G é aproximadamente 6.6743 $\times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, e determina a intensidade da força de atração entre dois corpos com massa, conforme descrito pela Lei da Gravitação Universal de Newton. A Equação 3.48 trata apenas da magnitude (intensidade) da força, se quisermos representa-la em sua forma vetorial temos:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}. \tag{3.49}$$

[6] Nesta seção, analisaremos a trajetória de um corpo em movimento circular. Como resultado, o semieixo maior a, mencionado nas leis de Kepler, corresponde ao raio da órbita circular. Por isso, utilizaremos a notação r.

O sinal negativo indica que a força é de atração, ou seja, orientada na direção do corpo de maior massa M e oposta ao vetor unitário $\hat{r}$.

Um vetor unitário $\hat{r}$ é um vetor com magnitude igual a 1. No contexto da Equação 3.49, $\hat{r}$ é utilizado para indicar a direção da força gravitacional. Ele é obtido normalizando o vetor $\vec{r}$, que representa a direção entre os centros dos dois corpos. A normalização é realizada dividindo $\vec{r}$ pela sua magnitude para que o vetor resultante tenha magnitude igual a 1:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{3.50}$$

Portanto, substituindo $\hat{r}$ na Equação 3.49 obtemos outra forma de escrevê-la:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}. \tag{3.51}$$

Tanto o Sol quanto o planeta que se move em torno dele experimentam a mesma força, mas o Sol permanece aproximadamente no centro do Sistema Solar porque a massa do Sol é aproximadamente mil vezes maior que a massa de todos os planetas somados (Filho; Saraiva, 2014).

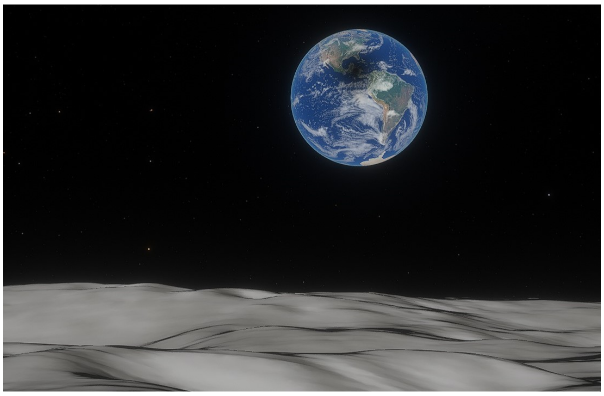
3.4 Simulação computacional como meio de explorar o inacessível

Imagine a vastidão do universo com toda a sua beleza e mistério. Desde os tempos pré-históricos, como vimos no Capítulo 2, a contemplação do céu sempre despertou uma profunda curiosidade nos seres humanos. Agora, pense em viver sua vida observando o Sol e os demais astros surgirem no leste e se porem no oeste diariamente, sem nunca poder explorar essas maravilhas de perto.

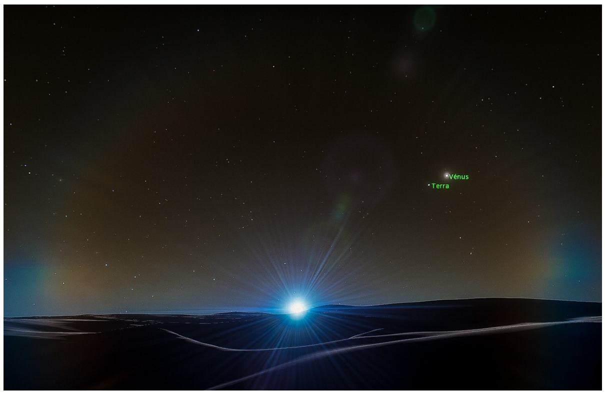
De acordo com a UFSM (2022), apenas 24 seres humanos viajaram da Terra até a Lua, e, entre eles, apenas 12 tiveram a oportunidade de caminhar em sua superfície, durante as missões Apollo, entre 1969 e 1972. Isso significa que possivelmente a maioria de nós jamais terá a chance de experimentar diretamente a visão que esses astronautas tiveram. Porém, com o avanço da tecnologia, nos tornamos capazes de observar fenômenos astronômicos de forma indireta, por meio de sondas espaciais e telescópios especializados.

Além dessas observações, também podemos simular esses eventos utilizando recursos computacionais. As simulações consistem no processo de representar no ambiente computacional uma situação ou cenário de um ambiente real (Sabbadini, 2020). Isso nos permite estudar, analisar e prever o comportamento de sistemas complexos, sem a necessidade de experimentos diretos, que muitas vezes são caros, arriscados ou até inviáveis. Desse modo, mesmo não podendo presenciar diretamente, por exemplo, um eclipse solar visto da Lua, o azulado pôr do Sol em Marte, os belos anéis de saturno e suas 145 luas ou até mesmo um buraco negro, podemos visualizar estes exemplos respectivamente nas simulações 18a,18b,18c,18d da Figura 18.

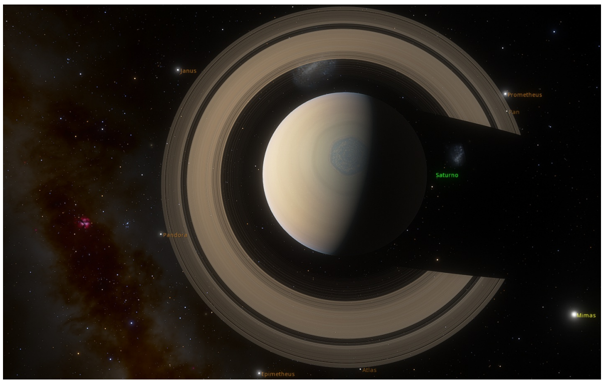
Figura 18 – Conjunto de imagens simuladas no software SpaceEngine.



(a) Eclipse na Terra visto da Lua.



(b) Pôr do Sol visto de Marte.



(c) Saturno.

(d) Buraco negro.

Fonte: SpaceEngine (2024).

Ainda assim, o software SpaceEngine, responsável por simular um universo virtual realista no qual usamos para captura da Figura 18, é um software pago e que exige um alto nível de processamento gráfico, o que demandaria de um computador razoavelmente potente e tornando seu acesso inviável para muitos usuários. Felizmente, há uma ferramenta poderosa, totalmente gratuita e acessível para computadores comuns que possibilita o desenvolvimento de simulações em 3D, inclusive com animações: a biblioteca VPython.

3.4.1 VPython

O VPython, ou Visual Python, é uma ferramenta gratuita e multiplataforma que possibilita a fácil criação de gráficos 3D interativos, permitindo que até mesmo alunos iniciantes em física sem experiência prévia em programação escrevam programas com visualizações 3D em tempo real (Scherer; Dubois; Sherwood, 2000). Todo programa necessita de uma linguagem específica para que o programador comunique suas instruções ao computador, especificamente o Visual Python é uma biblioteca ou módulo da linguagem de programação chamada Python, com isso, podemos ir além da geração de elementos textuais no terminal ou console para visualizar animações tridimensionais interativas ao importar esta biblioteca.

Por ser uma linguagem poderosa e simples de usar, o Python é comumente usado nos cursos como componente introdutória à programação, abordando conceitos básicos como variáveis, funções, estruturas condicionais, estruturas de repetição e listas. O poder de interdisciplinaridade do Python como por exemplo ser utilizado em aulas de matemática ou física, pode colaborar significamente no auxílio do processo de ensino e aprendizado, pois, conforme Valente (1993) para "ensinar" o computador a realizar uma determinada tarefa, o aluno deve utilizar conteúdos e estratégias como por exemplo, para programar o computador usando uma linguagem de programação, o aluno realiza uma série de atividades que são de extrema importância na aquisição de novos conhecimentos.

A biblioteca VPython também segue estes preceitos, permitindo a criação e animação de objetos 3D como paralelepípedos, cones, cilindros, esferas, entre outros sem a necessidade de ter um conhecimento avançado em programação. Podemos utiliza-lo offline ou online, no primeiro caso para usar sem a necessidade de conexão com a internet, precisamos antes instalar diretamente o pacote VPython no computador. Após a instalação, podemos usar qualquer ambiente de desenvolvimento Python, como o Ambiente Integrado de Desenvolvimento e Aprendizagem - IDLE, PyCharm, Visual Studio Code ou Jupyter Notebook, para escrever e executar os programas com o Visual Python (GeekHunter Blog, 2020).

Sua principal vantagem é justamente, após instalado, podemos programar sem depender de uma conexão com a internet além de resultar em melhor desempenho, já que o código é executado localmente, também podemos instalar qualquer biblioteca adicional e personalizar o ambiente de desenvolvimento. As desvantagens são, mesmo que seu uso em si seja fácil, sua instalação local e configuração do ambiente de desenvolvimento pode ser um pouco confuso e difícil para usuários leigos, além disso o código e os arquivos ficam armazenados no dispositivo onde foram desenvolvidos, onde para compartilha-los precisamos usar plataformas de compartilhamento como o GitHub.

O segundo modo de utilizar é online, e suas vantagens contam com o acesso direto pelo navegador, sem a necessidade de configurar ou instalar pacotes Python, possibilitando o acesso de projetos a partir de qualquer dispositivo conectado à internet, assim como a facilidade em compartilha-los através de links diretos. Em suas desvantagens, além da impossibilidade de seu uso caso não tenha uma conexão com internet, há uma certa limitação de funcionalidades em comparação com o uso local como por exemplo não conseguimos instalar outras bibliotecas. Destacamos duas plataformas online interessantes: Glowcript[7] e Trinket[8].

Em ambas as plataformas podemos visualizar exemplos de programas já prontos,

[7] https://www.glowscript.org/
[8] https://trinket.io/

útil no caso de focarmos somente na animação gerada. Se necessitarmos criar ou salvar um programa, precisamos fazer login na plataforma. O Glowscript é focado somente na linguagem Python, permitindo o uso do módulo visual, já o Trinket existe diversas linguagens como Python, R, HTML, Java e inclusive em blocos. Nas duas plataformas pode-se criar e executar o mesmo código sem diferença de desempenho ou de outra vantagem que mencionamos acima, porém, decidimos utilizar a plataforma Trinket por duas sutis diferenças em relação ao Glowscript.

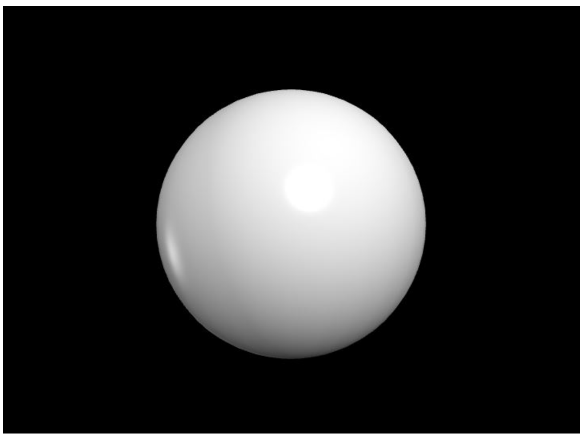
Primeiramente, a interface de programação e o cenário são exibidos lado a lado, o que facilita a visualização do código e da animação. Em contraste, no Glowscript, ao executar o código, o ambiente muda para a cena da animação, e é necessário fechar essa cena para acessar o código novamente. Além disso, o Trinket oferece automatização no encapsulamento e fechamento de pares. Encapsulamento refere-se à funcionalidade que, ao selecionar um trecho de código ou texto, permite envolvê-lo automaticamente com delimitadores como parênteses, colchetes, chaves ou aspas. Já o fechamento de pares se refere à inserção automática do caractere de fechamento assim que o de abertura é digitado. Isso ajuda a evitar erros de sintaxe (quando o código escrito não segue as regras gramaticais da linguagem de programação) e economiza tempo ao programar. A figura 20 mostra o cenário (também chamado de canvas) de uma esfera utilizando a plataforma Trinket, criada pelo código da Figura 19.

Figura 19 – Linha de código para criar uma esfera.

```
1 bola = sphere()
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Cena contendo uma esfera padrão.



Fonte: Autoria própria.

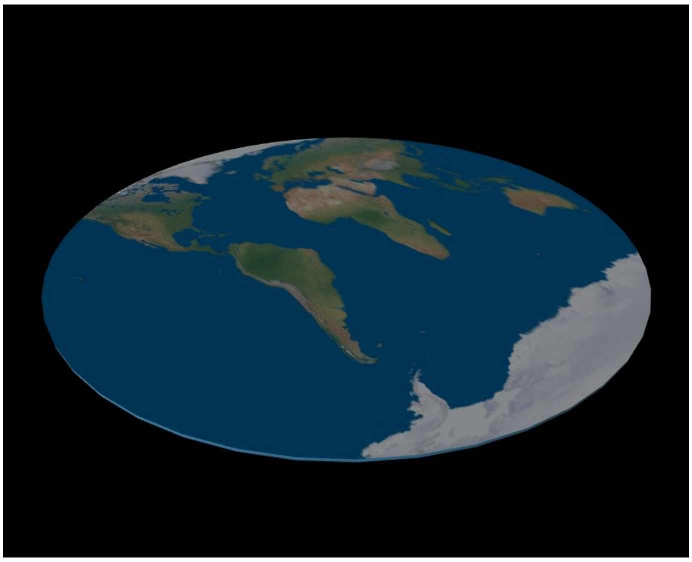
Destacamos dois aspectos a partir desta figura. O primeiro é, como mencionamos anteriormente, a facilidade de criar um objeto. O segundo é que o comando para inserir esse objeto "*sphere*", assim como todos os outros comandos, está em inglês. Por outro lado, os nomes das variáveis podem ser atribuídos conforme desejado. No exemplo da figura, criamos uma variável chamada `bola`, que armazena o objeto estático esférico gerado pela função `sphere`. Note os parênteses no qual não há nada escrito dentro após criarmos a função, o que inserimos dentro dos parênteses são chamados de parâmetros do nosso objeto, como cor, posição, raio, comprimento, textura e etc. No caso deste exemplo, como não há nenhum parâmetro definido por nós, o VPython atribui os parâmetros padrões de posição, raio e cor para o objeto. Na figura 21 criamos uma variável chamada `terra_plana` que armazena o objeto cilindro.

Figura 21 – Código de criação da variável `terra_plana`.

```
terra_plana = cylinder(axis=vector(0, 0.01, 0), texture = textures.earth)
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 22 – Cenário simulado de uma Terra plana.



Fonte: Autoria própria.

Como podemos visualizar na Figura 22, elaboramos uma representação da Terra plana!, conforme concebido por Tales de Mileto, tal como discutido na Seção 2.2. Em sua construção, utilizamos a função `cylinder`, que gera um cilindro.

O comando é configurado com alguns parâmetros essenciais. O primeiro parâmetro que podemos ver na Figura 21, `axis`, que em português significa "eixo", é utilizado para determinar a direção e o comprimento de um vetor que representa a orientação do objeto. Neste caso, definimos as coordenadas x e z como zero, garantindo que permaneçam inalteradas. A coordenada y, por sua vez, é atribuída a um valor de 0.01, que representa o comprimento do cilindro. O segundo parâmetro, `texture`, é utilizado para selecionar uma textura do banco de dados da biblioteca, permitindo que possamos cobrir nosso objeto com a aparência desejada. Neste caso, escolhemos `textures.earth`, que atribui a textura da Terra ao cilindro que estamos criando. O site Glowscript VPython Documentation[9] oferece a documentação oficial de recursos do VPython para usuários que utilizam o GlowScript, e naturalmente o Trinket.

Algo fundamental que precisamos lidar no VPython são vetores, pois estamos criando objetos tridimensionais que pertencem a um espaço com três coordenadas (x, y, z) portanto sempre quando trabalhamos com posição e direcionamento, devemos orientar através destes três eixos. Além disso, quando falamos em grandezas vetoriais, assim como discutimos na Subseção 3.1.1, temos que indicar seu módulo, sentido e direção, no qual é feita através destas três coordenadas.

3.5 Métodos numéricos aplicados à simulação do movimento de corpos

Na seção anterior, foi demonstrado que, ao criar qualquer objeto no VPython, este permanece inerte ou estático, a menos que sejam adicionadas forças ou movimentos que o alterem. O estudo do movimento dos corpos está intimamente relacionado à análise de como a posição de um corpo varia ao longo do tempo. Matematicamente, essa variação é representada por uma função $x(t)$, que descreve a posição do corpo em relação a um ponto de referência em diferentes instantes de tempo. Por exemplo, ao considerar um objeto que se move ao longo de uma linha reta, sua posição em cada instante pode ser representada pela função $x(t)$, a qual fornece informações precisas sobre sua localização.

Para determinar a rapidez com que esse objeto está se movendo, é necessário analisar a taxa de variação de sua posição ao longo do tempo. Esse conceito é expresso pela derivada da função posição em relação ao tempo. De acordo com Young e Freedman (2016), a derivada é obtida ao considerar o deslocamento Δx em um intervalo de tempo Δt que se torna infinitesimalmente pequeno, ou seja, tende a zero. Esse processo define a derivada da posição em relação ao tempo, expressa por $\frac{dx}{dt}$. A derivada, portanto, mede como uma quantidade varia em relação a outra, sendo que, neste caso, indica como a posição muda ao longo do tempo.

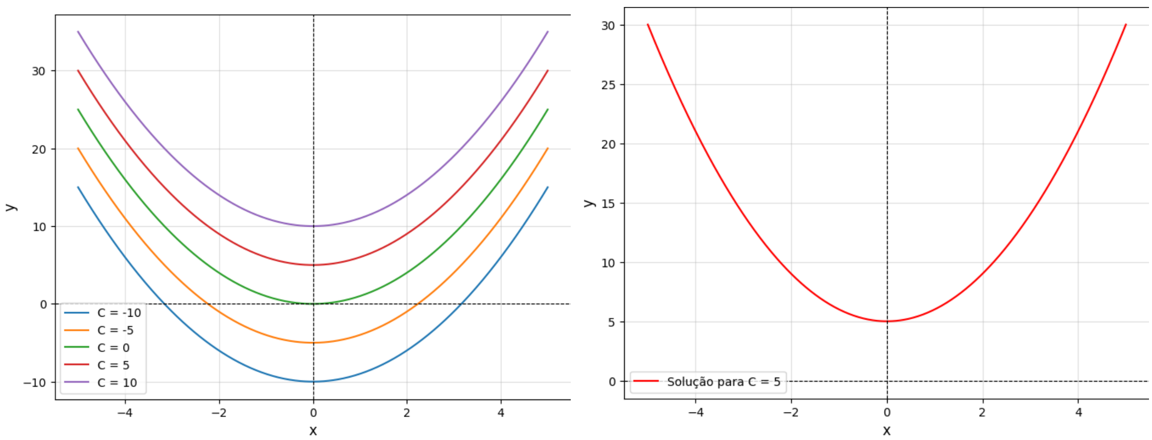
Segundo Gilat e Subramaniam (2008), uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida. Em outras palavras, trata-se de uma relação matemática onde não se conhece explicitamente a função que satisfaz a equação.

[9] https://www.glowscript.org/docs/VPythonDocs/index.html

Quando a equação possui apenas uma variável independente, ela é denominada Equação Diferencial Ordinária (EDO). Caso dependa de duas ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP). O autor também destaca que as equações diferenciais são classificadas de acordo com sua ordem, que corresponde ao maior número de vezes que a função ou suas variáveis dependentes são derivadas em relação à variável independente.

As soluções das equações diferenciais são funções que satisfazem a relação estabelecida pela equação e, frequentemente, apresentam infinitas soluções devido à presença de constantes arbitrárias. Essas constantes representam a liberdade de escolha dentro de uma família de soluções. Na Figura 23a, ilustra-se essa ideia. Ainda conforme Gilat e Subramaniam (2008), para obter uma solução específica, é necessário estabelecer condições iniciais que definam o valor da variável dependente em um ponto específico da variável independente. Esse tipo de problema, que frequentemente envolve o tempo como variável independente, é denominado Problema de Valor Inicial (PVI). Na Figura 23b, apresenta-se o gráfico da solução específica de uma equação diferencial com constante $C = 5$.

Figura 23 – Família de soluções da EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$ e sua solução particular.



(a) Família de soluções para a EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$. (b) Solução específica para $\frac{dy}{dx} = 2x$ com $C = 5$.

Fonte: Autoria própria.

A solução exata da equação diferencial representada na Figura 23 é dada pela expressão $y = x^2 + C$, sendo denominada solução analítica. Conforme Gilat e Subramaniam (2008), a solução analítica é uma expressão matemática que descreve a função $y(x)$ de forma explícita e satisfaz a equação diferencial. Ao aplicar a condição inicial $y(x_1) = y_1$, essa solução torna-se particular, permitindo calcular o valor de $y(x)$ para qualquer ponto x no domínio considerado.

A obtenção de soluções exatas por meio de métodos analíticos requer a aplicação de técnicas matemáticas capazes de encontrar uma fórmula explícita para a função desconhecida. Contudo, em muitos casos, devido à complexidade das equações ou à ausência de uma descrição analítica do comportamento das variáveis, a determinação de uma solução analítica torna-se inviável. Nesses contextos, os métodos numéricos são indispensáveis, pois permitem a obtenção de aproximações suficientemente precisas para aplicações práticas.

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), a solução numérica consiste em um procedimento que calcula uma estimativa da solução em pontos discretos. Esse processo é incremental, ou seja, as soluções são determinadas passo a passo. Embora não forneça uma fórmula exata, a solução numérica permite avançar progressivamente, iniciando de um valor inicial fornecido. Assim, com base na solução obtida no primeiro ponto, calcula-se a solução para um segundo ponto próximo, e o procedimento é repetido sucessivamente.

Por ser um método baseado em aproximações, a solução numérica está sujeita a dois tipos principais de erro: erros de arredondamento, causados pelo procedimento usado por computadores para realizar os cálculos, e erros de truncamento, decorrentes da natureza aproximada do método empregado na solução numérica.

O impacto acumulativo dos erros de truncamento é especialmente relevante em simulações iterativas, onde os erros de cada passo podem se somar ao longo das iterações. Esse acúmulo pode provocar desvios significativos em relação à solução real, tornando essencial a escolha de um método numérico apropriado, a definição do tamanho adequado do passo de integração e a análise da precisão necessária para o problema em estudo.

Entre os métodos numéricos, um dos mais simples e amplamente utilizados para resolver equações diferenciais de primeira ordem é o método de Euler, também conhecido como método de Euler clássico, para diferenciá-lo de suas variantes. Esse método baseia-se na aproximação da solução em passos discretos, onde o valor da variável dependente no próximo ponto é estimado a partir do valor no ponto anterior e da derivada avaliada nesse mesmo ponto.

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), o método de Euler pode ser descrito como uma aproximação da derivada presente na equação diferencial, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i), \tag{3.52}$$

onde $\frac{dy}{dx}$ representa a derivada de y em relação a x, e $f(x_i, y_i)$ é uma função que descreve a taxa de variação de y em função das variáveis x e y. Por ser uma aproximação explícita, considera-se a variação de y entre os pontos x_i e x_{i+1}, com $x_{i+1} = x_i + h$, onde h é o tamanho do passo de integração. Utilizando uma aproximação por diferenças finitas para a derivada, temos:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \tag{3.53}$$

Substituindo $\frac{dy}{dx}$ pela função $f(x_i, y_i)$ na equação acima, obtém-se:

$$f(x_i, y_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \tag{3.54}$$

Isolando y_{i+1}, chegamos à fórmula final do método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h. \tag{3.55}$$

Essa fórmula permite calcular iterativamente os valores de y nos pontos subsequentes. Aplicando-a ao contexto físico, como na representação da posição x de um corpo que varia no tempo, o método pode ser utilizado para estimar a posição e a velocidade de um corpo a partir das seguintes equações:

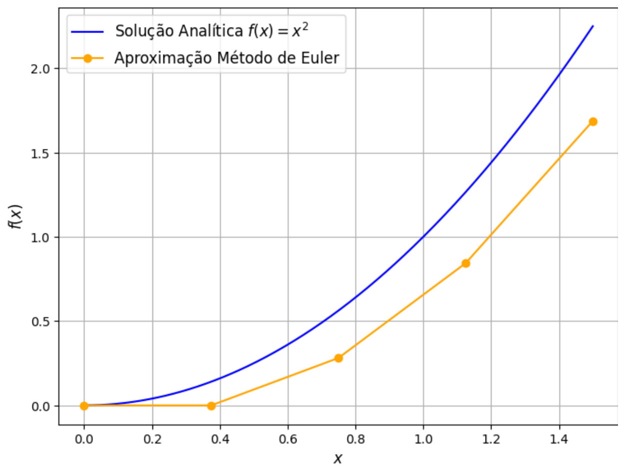
$$v_{i+1} = v_i + a_i h, \tag{3.56}$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i h, \tag{3.57}$$

onde v_i é a velocidade no instante i, a_i é a taxa de variação da velocidade no instante i (aceleração, $a_i = f(x_i, v_i)$), x_i é a posição no instante i, e h é o tamanho do passo.

Na Figura 24, compara-se a solução analítica $f(x) = x^2$ com a solução aproximada gerada pelo método de Euler utilizando um passo de integração $h = 0.375$. Os pontos laranja representam os valores aproximados calculados iterativamente, enquanto a curva azul representa a solução analítica exata. Nota-se que, à medida que nos afastamos do ponto inicial, a diferença entre as duas soluções aumenta, evidenciando o acúmulo do erro de truncamento, que é diretamente proporcional ao tamanho do passo h utilizado.

Figura 24 – Solução analítica da função $f(x) = x^2$ e uma aproximação com o método de Euler.



Fonte: Autoria própria.

A escolha de um tamanho de passo h adequado desempenha um fator importante na precisão das soluções numéricas. Um passo maior pode amplificar os erros de truncamento, enquanto um passo muito pequeno aumenta significativamente o custo computacional, devido ao maior número de iterações necessárias para alcançar a solução. Ainda assim, o método de Euler é conhecido por sua suscetibilidade ao acúmulo de erros de truncamento, especialmente em sistemas dinâmicos complexos. Este aspecto será evidenciado no caso da simulação do problema de dois corpos.

Conforme descrito por Giordano e Nakanishi (2006), o método de Euler-Cromer representa uma modificação simples, mas significativa, do método de Euler. Ele oferece uma vantagem notável em problemas que envolvem movimento oscilatório, ao conservar a energia ao longo de muitos períodos de oscilação, o que garante maior estabilidade em simulações de longo prazo. Enquanto o método de Euler clássico falha em preservar a energia em sistemas desse tipo, o método de Euler-Cromer resolve essa limitação, resultando em soluções numéricas mais consistentes.

No método de Euler clássico, os valores anteriores das variáveis de estado, como posição e velocidade, ou outras grandezas dependentes, são utilizados diretamente no cálculo dos novos valores dessas mesmas variáveis. Em contrapartida, no método de Euler-Cromer, os valores anteriores são empregados para determinar inicialmente a nova taxa de variação (por exemplo, a velocidade ou o momento atualizado), e este novo valor é então utilizado para calcular a variável dependente, como a posição. O algoritmo é descrito pelas seguintes equações:

$$v_{i+1} = v_i + a_i h, \tag{3.58}$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1} h. \tag{3.59}$$

Embora a diferença entre os dois métodos pareça sutil, ela é fundamental em problemas físicos que exigem a conservação de propriedades. A interação gravitacional entre dois corpos é um exemplo relevante, pois, ao descrever uma órbita elíptica em um sistema isolado, a energia total (composta pela soma da energia cinética e da energia potencial gravitacional) deve permanecer constante ao longo do tempo. No entanto, a energia cinética e a energia potencial variam conforme os corpos se aproximam ou se afastam. Dependendo do método numérico adotado, essas variações podem comprometer a conservação da energia total do sistema.

Por esse motivo, o método de Euler-Cromer foi escolhido para a implementação da simulação apresentada neste trabalho, garantindo maior precisão e estabilidade nas análises, conforme será detalhado no próximo capítulo.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com base na categorização de uma pesquisa científica apresentada por Gerhardt e Silveira (2009), a natureza desta pesquisa é classificada como aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos, bem como possui uma abordagem quantitativa, visto que busca analisar numericamente dados obtidos por meio de simulações computacionais. Uma vez que este trabalho procura compreender e detalhar o fenômeno da atração gravitacional no problema de dois corpos, o objetivo do trabalho é classificado como explicativo, devido a preocupação central de identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos (Gil, 2002).

Os procedimentos utilizados incluem a fundamentação teórica, desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos, desta forma, Gil (2002) define este tipo de pesquisa como bibliográfica, baseada no escopo teórico das Leis de Newton, Leis de Kepler e na Lei da Gravitação Universal. Simultaneamente, a pesquisa também é classificada como experimental, pois executa simulações experimentais com o uso da biblioteca visual VPython, utilizando parâmetros fornecidos pelo banco de dados da *NASA Space Science Data Coordinated Archive* (NSSDCA). Os procedimentos da análise são tratados com base nos dados gerados nas simulações, como excentricidade, período orbital e velocidade média, sendo comparados com valores reais para validar o modelo aplicado.

De acordo com Gil (2002), em uma pesquisa acadêmica, o problema deve conter delimitações de modo a evitar abordagens amplas ou genéricas demais, em vista disso, este trabalho está delimitado ao estudo de sistemas gravitacionais simplificados, como Sol-Terra e Plutão-Caronte, com foco na descrição de uma órbita completa, assumindo o modelo clássico de dois corpos e desconsiderando influências de forças externas, efeitos relativísticos, forças de maré, movimento no eixo z, deformações e movimento de rotação dos corpos.

4.1 Obtendo as equações de movimento para o problema de dois corpos

Inicialmente, vamos criar um sistema onde a massa do corpo central é significativamente maior que a do outro corpo. Isso simplifica a análise ao focarmos apenas no movimento do corpo de massa menor. Baseando-nos no exemplo de Giordano e Nakanishi (2006), consideramos o corpo de maior massa como o Sol e o de menor massa como o planeta Terra, onde a única força atuante neste sistema isolado é a força gravitacional.

Assim, pela Equação 3.51, temos:

$$\vec{F_G} = -\frac{GM_S M_T}{r^3}\vec{r}. \tag{4.1}$$

Aqui, F_G representa a força gravitacional, M_S é a massa do Sol e M_T é a massa da Terra. Considerando que $M_S \gg M_T$, podemos desprezar o movimento do Sol, concentrando a análise apenas no movimento da Terra.

Para a análise proposta, podemos escolher entre duas opções de unidades de medida para massa, distância e tempo. A primeira opção consiste nas unidades do SI, que utiliza quilogramas, metros e segundos. Embora amplamente aplicadas, essas unidades resultam em valores numéricos elevados quando aplicadas a corpos celestes devido às grandes dimensões e distâncias envolvidas. Como alternativa, podemos adotar unidades mais adequadas para escalas astronômicas: anos para o tempo, UA para a distância e uma unidade derivada para a massa.

Seguindo a sugestão de Giordano e Nakanishi (2006), definimos uma unidade de massa específica igualando as expressões para a força centrípeta e a força gravitacional dada pelas Equações 3.43 e 3.48:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_G = \frac{M_T \vec{v}^2}{\vec{r}} = \frac{GM_S M_T}{r^2}, \tag{4.2}$$

onde v é a velocidade orbital da Terra e r representa a distância entre o centro da Terra e o centro do Sol. Para este caso em específico, como estamos interessados apenas na magnitude da separação entre os corpos, podemos considerar que o módulo do vetor $\vec{r}$ é igual a essa distância r, em outras palavras, $|\vec{r}| = r$.

Podemos, então, mover r para o lado esquerdo da equação, tratando-o como uma quantidade escalar e mantendo a simplicidade das magnitudes. Assim, cancelando M_T em ambos os lados, obtemos:

$$v^2 r = GM_S. \tag{4.3}$$

Assumindo que a órbita da Terra ao redor do Sol é aproximadamente circular e utilizando a Equação 3.44, onde $r = 1$ UA e o período $P = 1$ ano, simplificamos $\vec{v}$ para 2π:

$$\vec{v} = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi \cdot 1}{1} = 2\pi. \tag{4.4}$$

Substituindo em $v^2 r = GM_S$, obtemos:

$$4\pi^2 = GM_S. \tag{4.5}$$

Como G e M_S aparecem apenas como produto na Equação 4.1, podemos substituí-los por este valor, resultando em:

$$\vec{F_G} = -\frac{4\pi^2 M_T}{r^3}\vec{r}. \tag{4.6}$$

Agora, substituímos F_G na Equação 3.2 da segunda lei de Newton em termos da aceleração. Aqui, a força resultante é gravitacional e a massa m é a massa da Terra:

$$\vec{a} = \frac{-\frac{4\pi^2 M_T}{r^3}\vec{r}}{M_T}. \tag{4.7}$$

Cancelando M_T, obtemos uma expressão independente da massa da Terra:

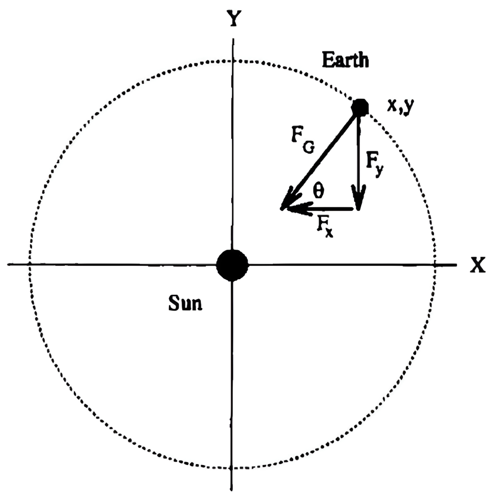
$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2}{r^3}\vec{r}. \tag{4.8}$$

Assim, obtemos a aceleração simplificada da Terra ao redor do Sol, considerando uma órbita aproximadamente circular e usando unidades astronômicas. A partir dessa aceleração, é possível determinar a equação do movimento em função da posição através de sua equação diferencial de segunda ordem, uma vez que a aceleração é a taxa de variação da velocidade e, por sua vez, a taxa de variação da posição:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{r^3}\vec{r}. \tag{4.9}$$

Por fim, observe que o vetor posição da Terra $\vec{r}$ em relação ao Sol possui componentes x, y e z. Contudo, podemos simplificar a análise do movimento utilizando apenas duas coordenadas e restringindo os corpos ao plano xy, como ilustrado na Figura 25.

Figura 25 – Movimento da Terra em torno do Sol no plano xy.



Fonte: Giordano e Nakanishi (2006).

Considerando que o corpo se move restrito ao plano (direções x e y), identificamos dois graus de liberdade associados a esse movimento bidimensional. Cada grau de liberdade representa uma coordenada independente, permitindo que o sistema varie nas direções x e y. A força gravitacional F_G é, então, decomposta em suas componentes x e y, gerando as forças $F_{G,x}$ e F_{G_y}. Consequentemente, a equação diferencial

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{r^3}\vec{r} \tag{4.10}$$

pode ser dividida em duas equações diferenciais correspondentes às componentes do movimento em x e y:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 x}{r^3}, \tag{4.11}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 y}{r^3}. \tag{4.12}$$

Essas equações diferenciais de segunda ordem podem ser reescritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, facilitando a implementação numérica:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{4\pi^2 x}{r^3}, \tag{4.13}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{4\pi^2 y}{r^3}, \tag{4.14}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \tag{4.15}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y. \tag{4.16}$$

Neste sistema, temos dois graus de liberdade para a posição (x e y) e dois para a velocidade (v_x e v_y). A aceleração, por outro lado, não possui um grau de liberdade independente, pois é uma consequência direta das variáveis posição e velocidade, conforme descrito pela equação de movimento.

A partir dessas equações, podemos então aplicar um método numérico para resolver o movimento computacionalmente, permitindo a simulação precisa da trajetória do corpo no plano.

4.2 Implementação numérica do sistema Sol-Terra com o método de Euler-Cromer

As técnicas desenvolvidas na Seção 3.5 permitem a implementação das quatro equações de movimento em um programa adequado. Para isso, adotamos o pseudocódigo descrito por Giordano e Nakanishi (2006) em sua sub-rotina que realiza a evolução temporal da posição e velocidade da Terra. A cada passo de tempo i, são calculadas as posições (x, y) e as velocidades (v_x, v_y) para o próximo passo $i+1$ utilizando o método numérico de Euler-Cromer:

- ▷ Calcule a distância r_i do Sol: $r_i = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$.
- ▷ Calcule $v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2 x_i}{r_i^3}\Delta t$ e $v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2 y_i}{r_i^3}\Delta t$.
- ▷ O passo de Euler-Cromer: calcule x_{i+1} e y_{i+1} usando $v_{x,i+1}$ e $v_{y,i+1}$:
  $x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1}\Delta t,\ y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1}\Delta t$.

▷ Registre a nova posição ou a plote.

▷ Repita pelo número desejado de passos de tempo.

Inicialmente, é necessário criar variáveis para armazenar os valores iniciais da posição e velocidade da Terra, de acordo com os dados utilizados na dedução das equações. Como o movimento ocorre apenas nas direções x e y, o sistema possui quatro graus de liberdade, deixando o eixo z fixo em zero. Ao trabalharmos no plano xy, modelamos a situação em um sistema cartesiano onde o Sol permanece fixo na origem e a Terra está a uma distância inicial com a coordenada $x = 1$, representando 1 UA, enquanto $y = 0$. Quanto à velocidade, a componente v_x (velocidade da Terra em x) é inicialmente zero, enquanto v_y (velocidade em y) é 2π, conforme definido pela Equação 4.4. Esse trecho do código está representado na Figura 26.

Figura 26 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: definição de variáveis.

```
1 Web VPython 3.2
2
3 x = 1
4 y = 0
5 v_x = 0
6 v_y = 2*pi
```

Fonte: Autoria própria.

A linha 1 indica o uso do ambiente online Trinket para rodar simulações 3D em Python, sem afetar a lógica do programa. Nas linhas 3 e 4, definimos as variáveis que armazenam as posições x e y, enquanto nas linhas 5 e 6, as variáveis para as componentes de velocidade v_x e v_y. Com a posição inicial definida, podemos criar um modelo 3D que represente o Sol e a Terra. No VPython, o objeto mais adequado para esse fim é uma esfera, que pode ser criada com o comando `sphere()`. Na Figura 27, são definidas duas variáveis, `terra` e `sol`, configuradas com quatro parâmetros principais.

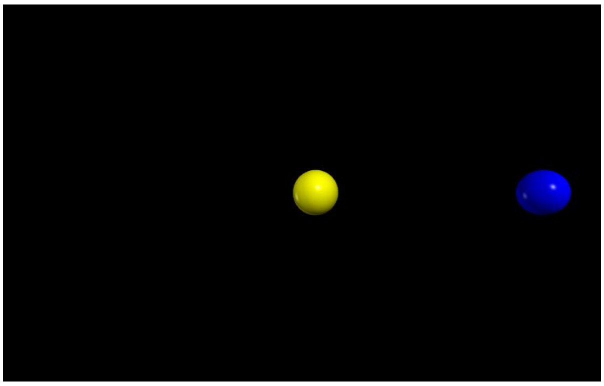
Figura 27 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: criação dos corpos.

```
terra = sphere(pos=vector(x, y, 0), radius=0.1, make_trail=True, color=color.blue)
sol = sphere(pos=vector(0, 0, 0), radius=0.1, make_trail=True, color=color.yellow)
```

Fonte: Autoria própria.

Para definir a posição dos objetos no plano tridimensional, utilizamos o parâmetro `pos=vector`. No caso da Terra, as coordenadas previamente estabelecidas para os eixos x, y e z são aplicadas, enquanto para o Sol, definimos valores nulos para os três eixos, mantendo-o fixo na origem. O parâmetro `radius` especifica o raio da esfera, aqui assumido como 0,1. Além disso, `make_trail=True` ativa o rastro deixado pelo movimento dos objetos, sendo que, para o Sol, esse rastro não será visível, uma vez que ele permanece imóvel. Por fim, os parâmetros `color=color.blue` e `color=color.yellow` atribuem às esferas as cores azul e amarela, representando, respectivamente, a Terra e o Sol. Na Figura 28, apresentamos a cena inicial, onde ambos os objetos ainda estão estáticos.

Figura 28 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: cena inicial dos corpos.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 29, definimos as variáveis t (linha 12), para representar o tempo em anos, e dt (linha 13), como o passo temporal Δt, com valor de 0,002 anos (aproximadamente 17,5 horas), conforme sugerido por Giordano e Nakanishi (2006).

Figura 29 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: criação das variáveis de tempo e passo.

```
12 t = 0
13 dt = 0.002
```

Fonte: Autoria própria.

Com as variáveis devidamente configuradas, podemos implementar o pseudocódigo proposto por Giordano e Nakanishi (2006). Utilizamos a estrutura de repetição `while`, essencial para criar animações contínuas no VPython, até que a condição de parada seja atingida. Neste caso, a simulação é interrompida quando t atingir o valor de 1, correspondente a um ano. Dessa forma, enquanto $t \leq 1$, o programa realizará cálculos sucessivos das variáveis.

É importante observar que, devido ao alto poder de processamento do Python, sem uma limitação adequada, a simulação poderia ocorrer de forma muito rápida, parecendo "congelada". Esse fenômeno ocorre porque o Python é capaz de realizar milhões de cálculos por segundo, impedindo o VPython de atualizar a visualização de maneira fluida. Para contornar isso, aplicamos a função `rate(n)`, que limita a execução do loop a n iterações por segundo, garantindo uma animação visualmente estável. A partir dessa configuração, implementamos o pseudocódigo mostrado na Figura 30 para atualizar as variáveis e simular o movimento orbital da Terra ao redor do Sol.

Figura 30 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: implementação do pseudocódigo no loop.

```
15 while t <= 1:
16     rate(100)
17     r = (terra.pos.x**2 + terra.pos.y**2)**0.5
18 
19     a_x = - (4*pi**2*terra.pos.x)/r**3
20     a_y = - (4*pi**2*terra.pos.y)/r**3
21 
22     v_x = v_x + a_x*dt
23     v_y = v_y + a_y*dt
24 
25     terra.pos.x = terra.pos.x + v_x*dt
26     terra.pos.y = terra.pos.y + v_y*dt
27 
28     t = t + dt
```

Fonte: Autoria própria.

Na linha 15, iniciamos o loop `while`, configurado para interromper a execução quando $t = 1$. Na linha 16, definimos o parâmetro `rate`, limitando o loop a no máximo 100 iterações por segundo. Na linha 17, aplicamos o Teorema de Pitágoras para calcular a distância r entre a Terra e o Sol, com base na posição atual da Terra nos eixos x e y (`terra.pos.x` e `terra.pos.y`, respectivamente).

Nas linhas 19 e 20, escrevemos a equação que representa a aceleração da Terra em função da posição e da constante gravitacional simplificada, onde o vetor $\vec{r}$ foi decomposto em termos de suas componentes x e y. Para calcular a aceleração nestas componentes, utilizamos as coordenadas atuais da Terra (`terra.pos.x` e `terra.pos.y`).

As linhas 22 e 23 atualizam as componentes x e y da velocidade da Terra, de acordo com o segundo passo do pseudocódigo, enquanto as linhas 25 e 26 realizam o terceiro passo, onde as posições da Terra são atualizadas com base na velocidade atual utilizando o método de Euler-Cromer. Após esse passo, o objeto Terra é movido na tela, e o tempo t é atualizado somando o valor de dt. Esse processo de atualização se repete durante toda a animação até que a condição de parada seja satisfeita.

A quantidade total de passos na simulação pode ser determinada dividindo o tempo total t pelo passo dt:

$$\text{Número de passos} = \frac{\text{tempo total}}{\text{tamanho do passo em cada iteração}} = \frac{t}{dt}. \tag{4.17}$$

Portanto, neste código, temos um total de 500 passos

$$\frac{t}{dt} = \frac{1}{0.002} = 500. \tag{4.18}$$

4.2.1 Utilizando dados reais

Para garantir a precisão e generalidade na simulação dos sistemas, utilizamos os valores das variáveis envolvidos na Equação 4.1 em conformidade com o SI. Com este propósito, os dados de massa e distância entre o Sol e a Terra foram obtidos conforme NSSDCA (2024c) e representados na Figura 31a.

Figura 31 – Código com dados reais usando Euler-Cromer: definição das variáveis.

```
1  Web VPython 3.2
2
3  G = 6.674e-11
4  M_T = 5.9722e24
5  M_S = 1.988400e30
6  r = 1.496e11
```

(a) Variáveis para a constante gravitacional, massas e distância.

```
 8  x = r
 9  y = 0
10  v_x = 0
11  v_y = sqrt((G*M_S)/r)
```

(b) Variáveis da posição e velocidade inicial da Terra.

Fonte: Autoria própria.

Na linha 3, a constante gravitacional é representada por `G`; já nas linhas 4 e 5, `M_T` e `M_S` indicam, respectivamente, as massas da Terra e do Sol; e, na linha 6, `r` denota a distância entre eles, em metros. Na Figura 31b, os valores permanecem os mesmos, exceto pela alteração na componente y da velocidade. Ao igualarmos as forças centrípeta ($\vec{F}_{cp}$) e gravitacional ($\vec{F}_G$) na Equação 4.2, isolamos o vetor velocidade ($\vec{v}$) e obtivemos a expressão para a velocidade orbital circular, inserida na linha 11:

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{GM_S}{r^2}}\vec{r}, \tag{4.19}$$

onde $\vec{v}$ representa a velocidade orbital de um corpo ao redor de um objeto central massivo (neste caso, o Sol), assumindo uma órbita circular. Observa-se que a velocidade orbital é diretamente proporcional à massa do Sol e inversamente proporcional à distância entre os corpos: quanto maior a distância do objeto central, menor será a velocidade orbital.

Após essa definição, foram criados os objetos Sol e Terra, conforme ilustrado na Figura 27. Devido à grande escala de distância, ajustamos o parâmetro `radius` para 6.371×10^9 e 6.957×10^9 para a Terra e o Sol, respectivamente, para garantir uma visualização adequada.

Na Figura 32, definimos o tempo inicial da animação (t) na linha 16, e adotamos um passo de tempo (dt) de 3600 segundos (equivalente a 1 hora) na linha 17. Em seguida, definimos o período correspondente ao tempo de uma órbita completa da Terra ao redor do Sol, em segundos, o que permite que nossa animação pare exatamente quando t atinge 3.1536×10^7.

Figura 32 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: criação das variáveis de tempo, passo e período.

```
t = 0
dt = 3600
periodo = 365*24*3600
```

Fonte: Autoria própria.

Finalmente, implementamos o método numérico de Euler-Cromer no loop `while`, conforme ilustrado na Figura 33. Devido ao elevado número de passos necessários no cálculo, que totalizam exatamente 31 537, conforme determinado pela Equação 4.17, foi necessário ajustar o parâmetro `rate` para 3000. Esse ajuste garante que a animação seja executada em um tempo razoável, proporcionando uma visualização mais eficiente do fenômeno simulado. Adicionalmente, nas linhas 23 e 24, inserimos o módulo da força gravitacional nas componentes x e y, conforme determinado na Equação 4.1. Essas forças são recalculadas a cada loop para atualizar, nas linhas 26 e 27, as componentes x e y da aceleração, de acordo com a Equação 3.2. As demais linhas são idênticas às da Figura 30.

Figura 33 – Código com dados simples usando Euler-Cromer: implementação do pseudocódigo no loop.

```
20 while t <= periodo:
21   rate(3000)
22   r = (terra.pos.x**2 + terra.pos.y**2)**0.5
23   F_x = - (G * M_T * M_S * terra.pos.x)/r**3
24   F_y = - (G * M_T * M_S * terra.pos.y)/r**3
25
26   a_x = F_x/M_T
27   a_y = F_y/M_T
28
29   v_x = v_x + a_x*dt
30   v_y = v_y + a_y*dt
31
32   terra.pos.x = terra.pos.x + v_x*dt
33   terra.pos.y = terra.pos.y + v_y*dt
34
35   t = t + dt
```

Fonte: Autoria própria.

4.3 Implementação numérica com o método de Euler

O método de Euler-Cromer, conforme sugerido por Giordano e Nakanishi (2006), é adequado para a simulação de órbitas estáveis. Podemos fazer um simples rearranjo na sequência de atualização da posição e velocidade para que o loop seja calculado pelo método de Euler clássico. Esse ajuste é necessário porque, no método de Euler clássico, pequenos erros de aproximação nos cálculos tendem a causar um aumento ou uma diminuição gradual na energia total do sistema. Esse fenômeno é particularmente relevante em simulações de movimentos sujeitos a forças conservativas, como a gravitação ou oscilações harmônicas, onde os erros acumulados em cada iteração afetam a precisão a longo prazo.

No pseudocódigo do método de Euler clássico, a posição é atualizada com base na velocidade inicial, ao invés da velocidade atual, resultando na seguinte ordem de passos:

▷ Calcule a distância r_i do Sol: $r_i = \left(x_i^2 + y_i^2\right)^{1/2}$.

▷ O passo de Euler clássico: calcule x_{i+1} e y_{i+1} usando $v_{x,i}$ e $v_{y,i}$:
$x_{i+1} = x_i + v_{x,i}\Delta t,\ y_{i+1} = y_i + v_{y,i}\Delta t.$

▷ Calcule $v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2 x_i}{r_i^3}\Delta t$ e $v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2 y_i}{r_i^3}\Delta t.$

▷ Registre a nova posição ou a plote.

▷ Repita pelo número desejado de passos de tempo.

Esse procedimento pode ser aplicado tanto para um modelo simplificado quanto para um modelo com dados reais, bastando ajustar as variáveis conforme o pseudocódigo do método de Euler clássico. No modelo simplificado, torna-se mais evidente a evolução não uniforme do movimento da Terra. Para essa visualização, alteramos o critério de parada do loop para 5 e ajustamos o parâmetro `rate` para 500, com o intuito de acelerar a animação. A Figura 34 apresenta as modificações realizadas no código; as linhas anteriores permanecem conforme descrito na Seção 4.2.

Note que, ao invertermos a ordem de atualização da posição e velocidade, a primeira atualização da posição utiliza a velocidade inicial, definida como `v_x = 0` e `v_y = 2*pi`, antes que a velocidade seja atualizada dentro do loop. Esse procedimento segue o princípio do método de Euler clássico.

4.4 Órbita mútua em sistemas de corpos com massas próximas

Consideremos agora um sistema de dois corpos, com massas m_1 e m_2, relativamente próximos, de forma que o corpo secundário exerce uma força gravitacional suficiente para gerar uma perturbação no movimento do corpo primário. Determinar o movimento do

Figura 34 – Código com dados reais usando Euler clássico: implementação do pseudocódigo no loop.

```
while t <= 5:
  rate(500)
  r = (terra.pos.x**2 + terra.pos.y**2)**0.5

  a_x = - (4*pi**2*terra.pos.x)/r**3
  a_y = - (4*pi**2*terra.pos.y)/r**3

  terra.pos.x = terra.pos.x + v_x*dt
  terra.pos.y = terra.pos.y + v_y*dt

  v_x = v_x + a_x*dt
  v_y = v_y + a_y*dt

  t = t + dt
```

Fonte: Autoria própria.

corpo secundário com base no movimento do corpo primário, diretamente, pode resultar em cálculos complexos. Para simplificar o problema, adotaremos o centro de massa como referencial do sistema.

4.4.1 Posição relativa ao centro de massa

De acordo com Taylor (2005), o centro de massa $\vec{R}$ do sistema localiza-se mais próximo do corpo de maior massa, neste caso, o corpo primário, se $m_1 \gg m_2$, ou o corpo secundário, caso contrário. Para um sistema de N corpos, onde $\alpha = 1, \ldots, N$, com massas m_α e posições $\vec{r}_\alpha$ medidas a partir de uma origem O, a posição do centro de massa do sistema é definida em relação a essa mesma origem por:

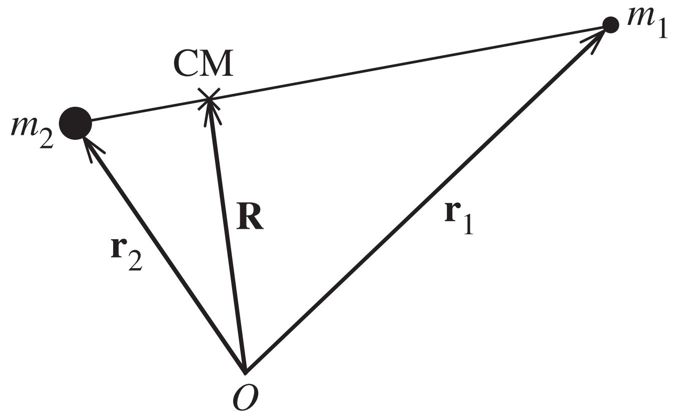
$$\vec{\mathrm{R}} = \frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a\vec{r}_a = \frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{M}, \tag{4.20}$$

onde M representa a massa total dos corpos no sistema, $M = \sum m_\alpha$. No caso específico de um sistema de dois corpos ($N = 2$), a Equação 4.20 simplifica-se para:

$$\vec{\mathrm{R}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}, \tag{4.21}$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são as posições dos corpos 1 e 2, respectivamente. Assim, o vetor $\vec{R}$ tem três componentes (x, y, z), representando a posição do centro de massa no espaço. Na Figura 35, vemos que, quando o corpo 2, de massa m_2, é três vezes mais massivo que o corpo 1, o centro de massa CM aproxima-se do corpo 2 em relação à origem O.

Figura 35 – Posição $\vec{R}$ do centro de massa CM entre os corpos de massa m_1 e m_2.



Fonte: Taylor (2005).

Considerando que o sistema é fechado e as interações gravitacionais são exclusivamente internas, não há forças externas atuando sobre ele. De acordo o Princípio de Conservação do Momento, sendo $\vec{\mathrm{P}}_{Total}$ o momento linear total do sistema, a Equação 3.8 ficará

$$\frac{d\vec{\mathrm{P}}_{Total}}{dt} = \vec{F}_{ext} = 0. \tag{4.22}$$

O momento linear total é dado pela soma dos produtos das massas e velocidades dos corpos:

$$\vec{\mathrm{P}}_{Total} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}. \tag{4.23}$$

Na ausência de forças externas, o momento linear total do sistema permanece constante, ou seja:

$$\vec{\mathrm{P}}_{Total} = \text{constante}. \tag{4.24}$$

Derivando a posição do centro de massa $\vec{R}$ em relação ao tempo, temos a velocidade do centro de massa $\vec{V}_{cm}$:

$$\frac{d\vec{\mathrm{R}}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = \vec{\mathrm{V}}_{cm}. \tag{4.25}$$

Substituindo o numerador da Equação 4.25 pelo momento total $\vec{P}$ da Equação 4.23, obtemos:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{\mathrm{P}}}{m_1 + m_2}. \tag{4.26}$$

Como $\vec{R}$ é conservado em um sistema sem forças externas, a velocidade do centro de massa $\vec{V}_{cm}$ também é constante. Se escolhermos um referencial onde o centro de massa está inicialmente em repouso ($\vec{V}_{cm} = 0$), então ele permanecerá em repouso ao longo do tempo. Nesse referencial, temos:

$$\vec{\mathrm{R}}_{cm}(t) = \vec{\mathrm{R}}_{cm}(0) = \text{constante}. \tag{4.27}$$

Assim, o referencial do centro de massa é um referencial inercial, uma vez que o mesmo permanece em repouso. Os corpos no sistema movem-se sob a ação das forças gravitacionais internas, obedecendo às três leis de Newton. Resta-nos determinar a posição dos corpos em relação ao centro de massa. Sabemos que a distância entre os corpos, representada por $\vec{r}$, pode ser expressa por $|\vec{r_2} - \vec{r_1}|$. Podemos então isolar a posição $\vec{r_2}$ e substituir na Equação 4.21, obtendo:

$$\vec{\mathrm{R}} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2(\vec{r} + \vec{r_1})}{M} = \frac{m_1\vec{r_1}}{M} + \frac{m_2\vec{r}}{M} + \frac{m_2\vec{r_1}}{M} = \vec{r_1}\left(\frac{\cancel{m_1 + m_2}}{\cancel{M}}\right) + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \vec{r_1} + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \tag{4.28}$$

isolando $\vec{r_1}$ encontramos:

$$\vec{r_1} = \vec{\mathrm{R}} - \frac{m_2}{M}\vec{r}. \tag{4.29}$$

Analogamente, usando $\vec{r_1} = \vec{r_2} - \vec{r}$, obtemos:

$$\vec{r_2} = \vec{\mathrm{R}} + \frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{4.30}$$

As Equações 4.29 e 4.30 podem ser simplificadas ao assumirmos que o centro de massa $\vec{R}$ permanece fixo no centro do sistema, com coordenadas $(0, 0, 0)$. Além disso, podemos definir que a distância inicial entre os corpos está ao longo do eixo x. Assim, as equações simplificadas são:

$$x_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r}, \tag{4.31}$$

$$x_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}, \tag{4.32}$$

onde x_1 e x_2 representam, respectivamente, as posições dos corpos 1 e 2 ao longo do eixo x.

4.4.2 Modelagem do sistema Plutão-Caronte e implementação numérica com o método de Euler-Cromer

Para modelar o sistema binário de corpos de massas relativamente próximas, escolhemos o planeta anão Plutão e sua lua Caronte. Além de pertencerem ao Sistema Solar, esses corpos apresentam massas comparáveis, tornando-se um exemplo prático e relevante para a análise do problema de dois corpos, devido à perturbação gravitacional mútua entre eles. Segundo dados da NSSDCA (2024b), Plutão possui cinco satélites naturais: Caronte, Hidra, Nix, Kerberos e Styx, ordenados de acordo com o diâmetro. Entretanto, para os objetivos deste estudo, podemos restringir a análise de movimento exclusivamente a Plutão e Caronte, pois as demais luas apresentam massas significativamente menores e, consequentemente, exercem influência desprezível sobre o movimento do corpo central.

A distância média entre Plutão e Caronte é de 19.596 km, com massas respectivas de 1.303×10^{22} kg e 1.586×10^{21} kg, conforme especificado pela NSSDCA (2024b). Esses valores são suficientes para a criação de um modelo computacional no VPython. Na

Figura 36, as variáveis `m_plutao` e `m_caronte` representam as massas de Plutão e Caronte, em quilogramas, enquanto `M` corresponde à massa total do sistema e `r` denota a distância entre os corpos, em metros. A constante gravitacional `G` também está definida para os cálculos necessários.

Figura 36 – Código do sistema Plutão-Caronte: definição das variáveis iniciais.

```
Web VPython 3.2

G = 6.674e-11
m_plutao = 1.303e22
m_caronte = 1.586e21
M = m_plutao + m_caronte
r = 1.9596e7
```

Fonte: Autoria própria.

Nas linhas 9 e 10 da Figura 37, aplicamos as equações 4.31 e 4.32 para calcular as posições iniciais dos corpos, adotando Caronte como corpo 1 e Plutão como corpo 2. Essa configuração dispensa a necessidade de definir posições iniciais absolutas, pois cada corpo terá sua posição ajustada em relação ao centro de massa, que permanece no centro do sistema. Na linha 12, definimos a variável `v_caronte_y`, representando o módulo da velocidade inicial de Caronte, conforme a Equação 4.19. Em seguida, na linha 13, criamos um vetor de velocidade, inserindo o módulo da velocidade na componente y para Caronte.

Figura 37 – Código do sistema Plutão-Caronte: definição das posições e velocidade inicial de Caronte.

```
 9 x_caronte = -(m_plutao/M)*r
10 x_plutao = (m_caronte/M)*r
11
12 v_caronte_y = sqrt((G*m_plutao*abs(x_caronte))/r**2)
13 v_caronte = vector(0, v_caronte_y, 0)
```

Fonte: Autoria própria.

Na linha 15 da Figura 38, definimos a variável `caronte`, associada a um objeto visual de cor verde, posicionada inicialmente em `x_caronte` no eixo x, com coordenadas y e z igual a zero e raio de 603×10^3 metros. De forma análoga, na linha 16, criamos a variável `plutao`, em cor vermelha, posicionada em `x_plutao` no eixo x, com coordenadas y e z igual a zero e raio de 1188×10^3 metros. Posteriormente, na linha 18, definimos a variável `R`, representando a posição do centro de massa do sistema, conforme a Equação 4.21. Na linha 19, criamos a variável `centro_massa`, associada a um objeto visual de cor branca, cuja posição no eixo x é determinada pelo valor calculado para `R`, e as coordenadas y e z são iguais a zero.

Figura 38 – Código do sistema Plutão-Caronte: criação dos objetos Plutão, Caronte e centro de massa.

```
caronte = sphere(pos=vector(x_caronte, 0, 0), radius=603e3, make_trail=True, color=color.green)
plutao = sphere(pos=vector(x_plutao, 0, 0), radius=1188e3, make_trail=True, color=color.red)

R = (m_caronte*x_caronte + m_plutao*x_plutao)/M
centro_massa = sphere(pos=vector(R, 0, 0), radius=4e5, make_trail=True)
```

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 39, definimos o momento linear de Caronte, $\vec{p}_1$, utilizando a Equação 3.6. Considerando que o centro de massa do sistema está em repouso e que não existem forças externas atuando, o princípio de conservação do momento linear exige que o momento linear total, $\vec{P}_{total}$, permaneça nulo ao longo do movimento dos corpos. Assim, o momento linear de Plutão deve ser oposto ao de Caronte, conforme indicado na Equação 4.23. Como as massas de ambos os corpos são constantes, podemos expressar a velocidade de Plutão $\vec{v}_2$ como:

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_2} = -\frac{\vec{p}_1}{m_2}. \tag{4.33}$$

Essa equação é implementada na linha 22, assegurando que a velocidade inicial de Plutão satisfaça o Princípio de Conservação do Momento Linear, mantendo o sistema em equilíbrio.

Figura 39 – Código do sistema Plutão-Caronte: definição do momento de Caronte e velocidade de Plutão.

```
21 p_caronte = m_caronte*v_caronte
22 v_plutao = -p_caronte/m_plutao
```

Fonte: Autoria própria.

A Figura 40 ilustra a definição do período orbital do sistema. Para tal, criamos a variável K na linha 24, conforme a Equação 3.37, e em seguida, a variável P, representando o período orbital, é definida na linha 25 ao isolarmos o período na Equação 3.36, com o semieixo maior representado pela variável r. Por fim, definimos o passo de tempo dt com valor igual a 100, e a variável t como o tempo inicial, assumindo valor zero.

Figura 40 – Código do sistema Plutão-Caronte: definição do período orbital do sistema.

```
24 K = (4*pi**2)/(G*(m_plutao+m_caronte))
25 P = sqrt(K*r**3)
26 dt = 100
27 t = 0
```

Fonte: Autoria própria.

Em seguida, estabelecemos o loop com uma condição de parada, configurada para interromper o processo assim que Caronte completar uma revolução ao redor de Plutão. O processo segue o pseudocódigo adaptado de Giordano e Nakanishi (2006), com alterações específicas para incluir o movimento de ambos os corpos:

- ▷ Calcule o vetor posição $\vec{r}$ através da diferença entre a posição de Plutão e a posição de Caronte.
- ▷ Calcule a força gravitacional $\vec{F}$ entre os corpos usando: $-\frac{G \cdot m_{caronte} \cdot m_{plutao} \cdot r}{|r|^3}$.
- ▷ Calcular as acelerações para Caronte $-\frac{F}{m_{caronte}}$ e Plutão $\frac{F}{m_{plutao}}$.
- ▷ Use o método de Euler-Cromer para atualizar as velocidades de Caronte: $v_{caronte} = v_{caronte} + a_{caronte}\Delta t$ e Plutão: $v_{plutao} = v_{plutao} + a_{plutao}\Delta t$.
- ▷ Novamente use o método de Euler-Cromer para atualizar as posições de Caronte: $caronte.pos = caronte.pos + v_{caronte}\Delta t$ e Plutão: $plutao.pos = plutao.pos + v_{plutao}\Delta t$.
- ▷ Registre a nova posição ou a plote.
- ▷ Atualize o tempo t adicionando o intervalo de tempo dt.
- ▷ Repita o loop até que o tempo t atinja o valor P.

A Figura 41 mostra a implementação do pseudocódigo no ambiente VPython.

Figura 41 – Código do sistema Plutão-Caronte: implementação do pseudocódigo no loop.

```
while t<=P:
    rate(1000)
    r = plutao.pos - caronte.pos
    F = -(G*m_caronte*m_plutao*r)/mag(r)**3

    a_caronte = -F/m_caronte
    a_plutao = F/m_plutao

    v_caronte = v_caronte + a_caronte*dt
    v_plutao = v_plutao + a_plutao*dt

    caronte.pos = caronte.pos + v_caronte*dt
    plutao.pos = plutao.pos + v_plutao*dt

    t = t + dt
```

Fonte: Autoria própria.

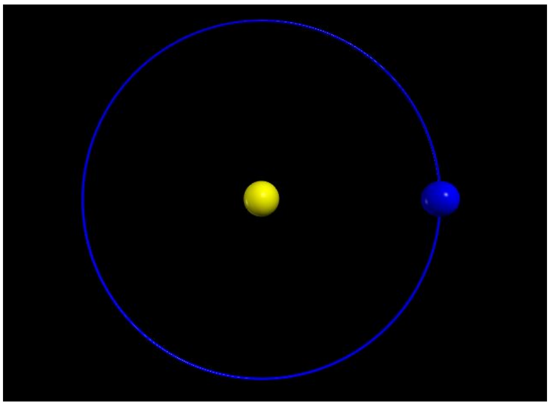
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como objetivo analisar a precisão dos resultados numéricos obtidos nas simulações dos sistemas de dois corpos, Sol-Terra e Plutão-Caronte. Para isso, realiza-se uma comparação entre os dados fornecidos pela NSSDCA e os resultados gerados pelas simulações. Os parâmetros avaliados incluem a visualização da órbita descrita pelo movimento dos corpos, a velocidade média, o período orbital e a excentricidade.

5.1 Movimento orbital simples: Sistema Sol-Terra

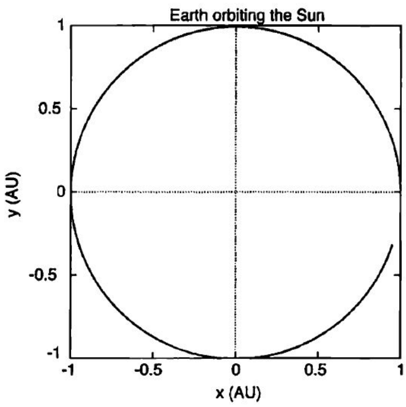
No caso do sistema Sol-Terra utilizando dados simplificados, foi realizada uma simulação no ambiente VPython, que resultou em uma órbita aparentemente circular da Terra ao redor do Sol. Esse trajeto, representado na Figura 42a, apresenta semelhança visual evidente com a simulação descrita por Giordano e Nakanishi (2006), ilustrada na Figura 42b.

Figura 42 – Simulações utilizando um modelo simplificado para o sistema Sol-Terra.



(a) Simulação no Trinket do trajeto da Terra ao redor do Sol.

Fonte: Autoria própria.



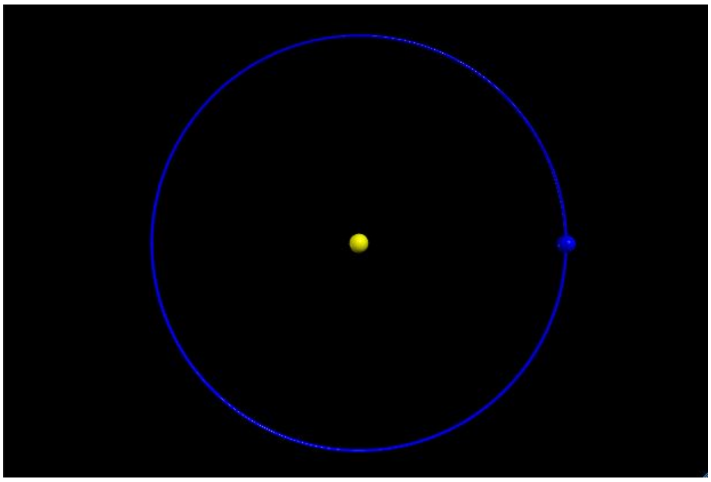
(b) Simulação da órbita terrestre realizada pelos autores.

Fonte: Giordano e Nakanishi (2006).

Calculamos a excentricidade usando a Equação 3.21 e obtivemos, para o primeiro modelo do sistema Sol-Terra com dados simplificados, um valor de excentricidade igual a 0.006 282 7, o que reflete o comportamento aproximado de uma órbita terrestre idealizada, praticamente circular e adequada para simulações simplificadas. Essa excentricidade está diretamente associada à velocidade orbital circular, que manteve uma média de 6.28306 UA/ano, conforme o sistema de medidas adotado pelos autores, equivalente a 29801.705 m/s. O período orbital calculado foi de 1 ano, evidenciando que a Terra completou uma volta ao redor do Sol, como ilustrado na Figura 42a.

Para o segundo modelo, utilizando dados reais do sistema Sol-Terra, o movimento terrestre simulado pode ser observado na Figura 43. Esse movimento apresenta uma semelhança notável com o resultado obtido por Giordano e Nakanishi (2006). Por se tratar de uma simulação com dados de alta precisão, pequenas perturbações não impactaram significativamente a órbita da Terra. Nesse contexto, foi calculada uma excentricidade de 0.000 358 36, uma velocidade média de 29 783.7 m/s e um período orbital de 31 539 600 segundos (ou aproximadamente 365.041 dias).

Figura 43 – Simulação do sistema Sol-Terra utilizando dados reais.



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 3, são apresentados os resultados obtidos e comparados com os dados fornecidos pela NSSDCA. Nas simulações realizadas, observamos que para ambos os modelos, a velocidade inicial é um fator fundamental para determinação da excentricidade, e que o valor do passo temporal *dt* determina a precisão da desta. Ou seja, quanto menor o passo adotado, mais próximo de zero tende a ser o erro na determinação da excentricidade. Por outro lado, para valores elevados de *dt*, a precisão na identificação de apoastro e periastro é reduzida, o que pode resultar em uma órbita menos elíptica ou até mais circular, devido à omissão dos pontos exatos de máxima e mínima distância.

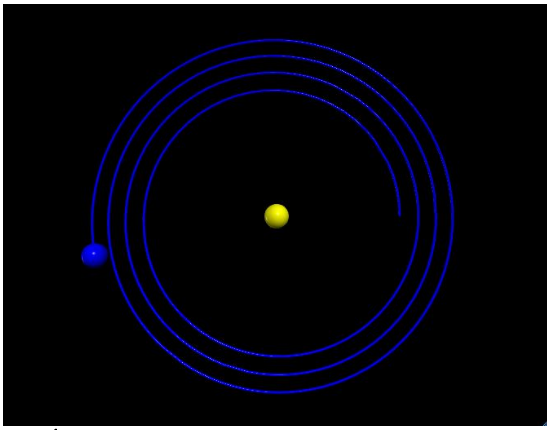
Tabela 3 – Comparação de parâmetros orbitais do sistema Sol-Terra entre dados simplificados, reais e da NSSDCA.

Parâmetro	**Simplificado**	**Dados Reais**	**NSSDCA**
Velocidade orbital (m/s)	29 801.705	29 783.7	29 780
Diferença (%)	+0.07%	+0.01%	-
Período orbital (dias)	365.000	365.041	365.256
Diferença (%)	−0.07%	−0.06%	-
Excentricidade	0.0062827	0.00035836	0.0167
Diferença (%)	−62.37%	−97.85%	-

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados simulados e da NSSDCA.

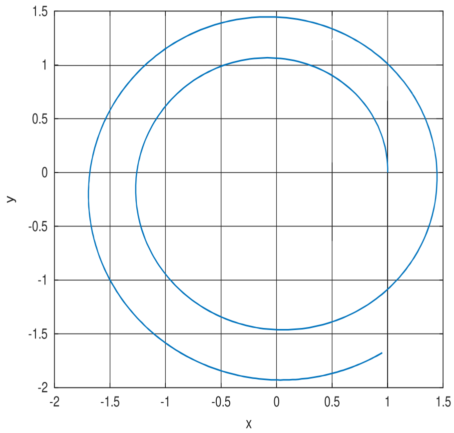
Na simulação do sistema Sol-Terra utilizando o método de Euler clássico, observou-se uma órbita peculiar, como mostrado na Figura 44a.

Figura 44 – Simulação do sistema Sol-Terra utilizando o método de Euler clássico.



(a) Órbita em formato espiral realizada pela Terra.

Fonte: Autoria própria.



(b) Instabilidade na simulação da órbita terrestre.

Fonte: Adaptado de Valle (2024).

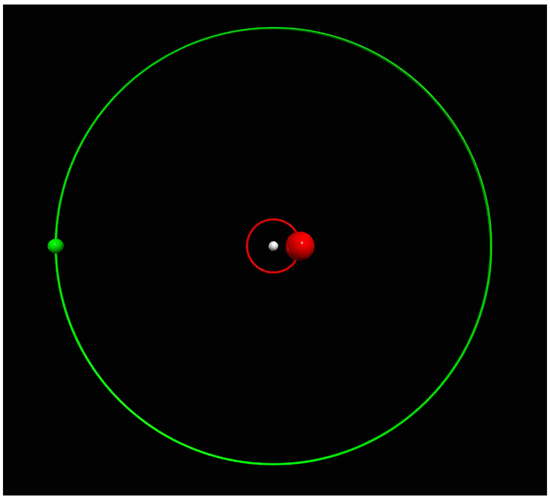
Como observado, a trajetória orbital apresenta uma forma espiral, indicando instabilidade e afastamento progressivo da Terra em relação ao Sol. Em sistemas fechados, como o analisado, o momento linear total e a energia total devem permanecer constantes ao longo do tempo. Contudo, o método de Euler clássico não preserva essas quantidades devido à acumulação de pequenos erros a cada passo de integração. Essa limitação é especialmente significativa em simulações de longo prazo, como as de órbitas, e resulta no crescimento contínuo da energia do sistema.

Assim, bem como afirmam Giordano e Nakanishi (2006), o método de Euler clássico não é uma boa escolha para problemas oscilatórios tais como no problema de dois corpos, pois a energia do corpo em órbita irá crescer com o tempo. A simulação apresentada é comparável àquela descrita por Valle (2024), mostrada na Figura 44b, em que um corpo orbitando outro de maior massa também exibe instabilidade crescente quando o método de Euler clássico é utilizado. Portanto, métodos precisos como Euler-Cromer são ideais para sistemas conservativos, pois mantêm a estabilidade orbital a longo prazo.

5.2 Movimento orbital mútuo: Sistema Plutão-Caronte

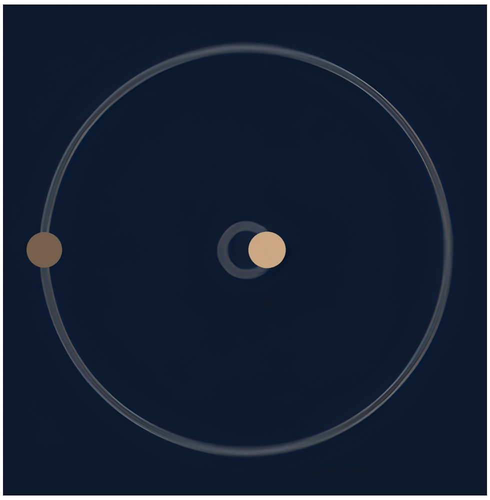
Para o sistema Plutão-Caronte, implementado com o método de Euler-Cromer, obtivemos a órbita representada na Figura 45a. Nesta simulação, devido às massas semelhantes de Plutão e Caronte, observa-se que ambos os corpos exercem uma atração gravitacional significativa um sobre o outro. Como consequência, o planeta anão Plutão (representado em vermelho) encontra-se fora do centro de massa do sistema, que está indicado como um ponto branco no centro da figura.

Figura 45 – Simulação das órbitas de Plutão e Caronte.



(a) Simulação orbital de Plutão em vermelho e Caronte em verde.

Fonte: Autoria própria.



(b) Órbita real do sistema Plutão-Caronte.

Fonte: Adaptado de Space Facts (2024).

A comparação com os dados reais, apresentados na Figura 45b e disponibilizados por Space Facts (2024), revela uma trajetória semelhante à simulada, caracterizando uma órbita praticamente circular. Este resultado confirma a eficácia do método de Euler-Cromer para simulações de sistemas orbitais em que as massas dos corpos são próximas e os efeitos gravitacionais mútuos são significativos.

Ademais, a excentricidade calculada foi de 0.000 569 28, indicando que a órbita é praticamente circular, conforme corroborado pelos dados fornecidos pela NSSDCA, que informam uma excentricidade próxima de zero para o sistema Plutão-Caronte. A análise das velocidades médias revelou valores de 198.902 m/s para Caronte e 24.2102 m/s para Plutão, sendo esta última a velocidade referente à órbita em torno do baricentro do sistema. Como já mencionado, constatamos que o valor da velocidade inicial determina a excentricidade da órbita dos corpos. Como os valores para a velocidade foram obtidos por meio de uma fórmula específica para órbitas circulares, qualquer variação para cima ou para baixo resulta em órbitas progressivamente mais alongadas. O período orbital calculado para Caronte foi de 551 900 segundos, o que equivale a aproximadamente 6.38773 dias. Este resultado está em excelente concordância com o valor real de 6.3872 dias fornecidos pela NSSDCA.

Com o objetivo de sintetizar os dados obtidos e facilitar a análise, elaboramos a Tabela 4, a qual apresenta a comparação entre os valores calculados e os dados reais, destacando a diferença percentual. Para a validação da velocidade orbital de Caronte, utilizamos os dados fornecidos por Hamilton (2015), uma vez que essa informação em específico não estavam disponível no site da NSSDCA.

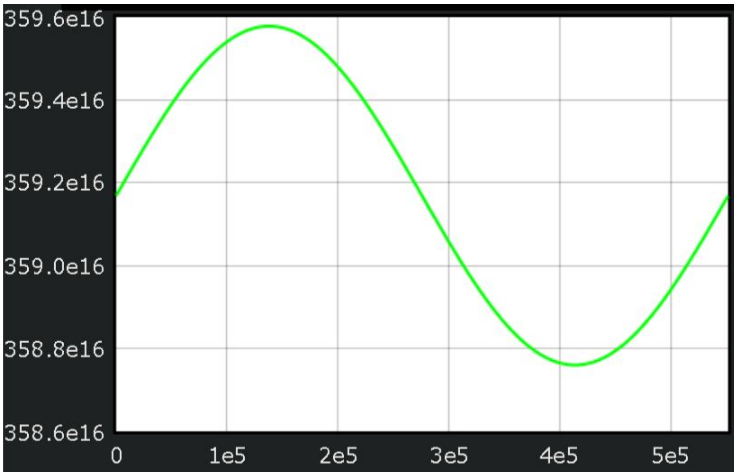
Tabela 4 – Comparação de parâmetros orbitais de Caronte entre dados simulados, NSSDCA e Views of the Solar System.

Parâmetro	**Simulação**	**NSSDCA/Views of the Solar System**	**Diferença (%)**
Excentricidade	0.000 569 28	0.0	-
Velocidade orbital (m/s)	198.902	230	−13.50%
Período orbital (dias)	6.387 73	6.3872	+0.008%

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados simulados, NSSDCA (2024b) e Hamilton (2015).

Para investigar a força gravitacional entre os dois corpos, utilizamos a equação da força gravitacional, presente na linha 33 do código apresentado na Figura 41. A força foi plotada em um gráfico com o auxílio do comando `gcurve`, que gera pontos contínuos em tempo real. O gráfico, exibido na Figura 46, apresenta a força gravitacional, medida em Newtons, no eixo y, e o tempo, em segundos, no eixo x.

Figura 46 – Gráfico relacionando a força gravitacional em função do tempo do sistema Plutão-Caronte.



Fonte: Autoria própria.

Além disso, os valores calculados foram armazenados em uma lista para determinar os extremos da força gravitacional ao longo da simulação. Os valores máximo e mínimo obtidos foram 3.59578 e 3.5876 bilhões de Giganewtons (3.59578×10^{18} e 3.5876×10^{18} Newtons respectivamente). Essa variação na intensidade da força gravitacional reflete a natureza elíptica da trajetória orbital, uma vez que a força gravitacional entre os corpos é inversamente proporcional à distância entre eles.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, analisamos a interação gravitacional entre dois corpos massivos. Para tanto, foi desenvolvido um modelo matemático capaz de descrever o movimento orbital desses corpos, o qual serviu como base para a implementação de uma simulação em 3D. Essa simulação permitiu não apenas a visualização tridimensional das órbitas, mas também a obtenção de dados numéricos, que foram comparados com valores reais disponibilizados pela NSSDCA e *Views of the Solar System*. Os resultados demonstraram uma boa concordância, evidenciando que o modelo é eficaz para descrever e prever o movimento orbital em sistemas gravitacionais simples.

O modelo matemático desenvolvido baseou-se em EDOs de segunda ordem, sendo essencial a aplicação de métodos numéricos adequados para minimizar o acúmulo de erros ao longo das iterações. Utilizaram-se os métodos de Euler clássico e Euler-Cromer, que permitiram uma análise comparativa do comportamento do sistema binário com diferentes abordagens numéricas. A simulação foi construída na linguagem Python, utilizando a biblioteca VPython no ambiente de desenvolvimento da plataforma gratuita Trinket. Essa abordagem possibilitou a criação de uma simulação tridimensional interativa, além da obtenção de dados numéricos detalhados.

As simulações foram realizadas para dois modelos de sistemas celestes presentes em nosso Sistema Solar. O primeiro modelo envolveu o sistema Sol-Terra, que representou uma configuração simples, na qual o Sol, devido à sua massa muito superior, permaneceu praticamente estático no centro, enquanto a Terra descreveu sua órbita ao redor dele. O segundo modelo consistiu no sistema Plutão-Caronte, um exemplo mais complexo, dado o movimento mútuo dos corpos ao redor de seu centro de massa comum.

No sistema Sol-Terra, ao utilizar o método de Euler clássico, observou-se uma órbita instável da Terra, que descreveu uma trajetória em espiral para fora do domínio gravitacional do Sol devido ao acúmulo significativo de erros numéricos. Por outro lado, ao aplicar o método de Euler-Cromer, foi possível obter uma órbita estável. Para o sistema Plutão-Caronte, utilizou-se exclusivamente o método de Euler-Cromer, que também resultou em uma órbita estável, sem erros numéricos exacerbados.

Os dados numéricos obtidos para o sistema Sol-Terra demonstraram boa concordância com os valores reais para os parâmetros de velocidade média e período orbital, apresentando uma discrepância máxima de 0,07%. No entanto, a excentricidade apresentou divergências maiores, com diferenças de 62,37% em relação aos dados simplificados e 97,85% em relação aos dados reais, devido à tendência da órbita simulada ser mais próxima de uma forma circular. Para o sistema Plutão-Caronte, os resultados numéricos foram bastante precisos, com diferenças de 0,008% para o período orbital, 13,50% para a velocidade orbital e um desvio absoluto de 0.000 569 28 na excentricidade. As causas dessas discrepâncias foram discutidas ao longo do trabalho.

Apesar de termos nos concentrado nos parâmetros de velocidade média, período orbital e excentricidade, a simulação permite explorar diversas outras variáveis relacionadas ao problema de dois corpos. Além disso, os conteúdos apresentados nas simulações computacionais alinham-se à abordagem interdisciplinar STEAM pois, como vimos, a fundamentação científica baseia-se nas leis da física e na gravitação universal, enquanto a tecnologia é aplicada por meio da programação em VPython para simulações interativas. A engenharia se manifesta na aplicação de métodos numéricos para resolver as equações diferenciais que descrevem o movimento dos corpos, e a arte está presente na visualização gráfica das órbitas em 3D. Por fim, a matemática é essencial na formulação das EDOs, vetores e também no uso dos métodos numéricos.

O trabalho também reflete os pilares do Pensamento Computacional. O pilar da decomposição está presente na separação do problema em etapas, como a formulação das equações do movimento e a implementação computacional. O reconhecimento de padrões ocorre na análise das trajetórias e na comparação dos dados simulados com órbitas reais. A abstração foi essencial para simplificar o problema, delineando apenas as interações gravitacionais relevantes. Por fim, a construção e otimização de algoritmos são fundamentais na implementação do modelo numérico.

Assim, evidencia-se o potencial das simulações e da linguagem de programação como ferramentas didáticas para o estudo de fenômenos físicos em sala de aula. Ao ajustar parâmetros e observar como as mudanças afetam o sistema, os estudantes podem realizar experimentos virtuais, aplicando procedimentos científicos como observar, medir, controlar variáveis, buscar relações e tirar conclusões fundamentadas (Moreira; Ostermann, 1993).

O detalhamento minucioso apresentado em cada seção deste trabalho foi cuidadosamente desenvolvido com o objetivo de servir como material introdutório de consulta para alunos e professores interessados no problema de dois corpos. Este tema, apesar de sua relevância, ainda possui uma quantidade limitada de materiais disponíveis na literatura acadêmica brasileira. Portanto, para trabalhos futuros, sugere-se a utilização dos códigos-fonte disponibilizados para analisar outras variáveis, como o momento angular, ou testar a implementação de métodos numéricos mais avançados, visando maior precisão nos resultados. Além disso, podem ser empregadas fórmulas alternativas para a velocidade orbital, uma vez que, neste trabalho, utilizou-se uma fórmula padronizada para órbitas circulares, o que contribuiu para as discrepâncias nos valores de excentricidade. Por fim, recomenda-se a extensão do estudo para o famoso problema caótico de três corpos ou, ainda, para sistemas mais complexos envolvendo n corpos.

REFERÊNCIAS

Alloprof. **Les forces centripète et centrifuge**. 2024. Acesso em: 05 set. 2024. Disponível em: <https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/physique/les-forces-centripete-et-centrifuge-p1020>. Citado na página 55.

Aula Nota Dez. **O que é Pedagogia Tecnicista?** 2024. Disponível em: <https://aulanotadez.com.br/glossario/o-que-e-pedagogia-tecnicista/>. Citado na página 18.

BENIOFF, D.; WEISS, D. B.; WOO, A. **O Problema dos 3 Corpos**. [S.l.]: Netflix, 2024. Série de TV. Direção de David Benioff, D.B. Weiss e Alexander Woo. Citado na página 20.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4ª reimpressão. ed. São Paulo: Contexto, 2014. Citado na página 21.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR-RS, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/172208>. Citado na página 21.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Citado nas páginas 18, 19 e 20.

CANIATO, R. **O que é Astronomia**. 8. ed. São Paulo: Brasiliense, 1994. Citado nas páginas 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

CONTE, E.; MARTINI, R. M. F. **As tecnologias na Educação: uma questão somente técnica?.** Educação & Realidade, v. 40, p. 1191–1207, 2015. Citado na página 18.

CORRÊA, I. C. S. **História da Astronomia**. 2009. <https://igeo.ufrgs.br/museudetopografia/images/acervo/artigos/Histria_da_Astronomia.pdf>. Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffe, Departamento de Geodésia, UFRGS. Citado nas páginas 23, 27, 28 e 29.

CRUZ, N. **Nicolau Copérnico (astrônomo): quem foi, teoria e ideias**. s.d. Quero Bolsa. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/materias/nicolau-copernico-astronomo-quem-foi-teoria-e-ideias>. Citado na página 28.

CUSTóDIO, A. R. **1ºano 3ºbimestre - aula 1 - Física - gravitação**. 2017. Acessado em: 27 de agosto de 2024. Disponível em: <https://www.slideshare.net/slideshow/1ano-3bimestre-aula-1-fsica-gravitao/78550965#24>. Citado na página 44.

DAMACENO, L. P. *et al.* **A nova definição do quilograma em termos da constante de Planck**. Revista Brasileira de Ensino de Física, SciELO Brasil, v. 41, n. 3, p. e20180248, 2019. Citado na página 37.

FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Rio Grande do Sul: Livraria da Física, 2014. Departamento de Astronomia - Instituto de Física. Citado nas páginas 23, 26, 27, 29, 30, 31, 42, 52, 53, 54, 56 e 57.

GeekHunter Blog. **10 Melhores IDEs e Editores de Código em Python para 2021**. 2020. Acessado em: 29 de setembro de 2024. Disponível em: <https://blog.geekhunter.com.br/ides-e-editores-de-codigo-em-python-para-2021/>. Citado na página 59.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre, RS: Editora da UFRGS, 2009. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e pelo curso de graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Citado na página 67.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 67.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. São Paulo: Bookman, 2008. Citado nas páginas 62, 63 e 64.

GIORDANO, N. J.; NAKANISHI, H. **Computational Physics**. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2006. 544 p. Citado nas páginas 66, 67, 68, 69, 70, 72, 76, 82, 83, 84 e 85.

GOMES, M. C. P. **Os benefícios do ensino de linguagem de programação no currículo regular**. 2015. Disponível em: <http://www.administradores.com.br/artigos/carreira/os-beneficios-do-ensino-de-linguagem-de-programacao-no-curriculo-regular/89064/>. Acessado em: 03 de abril de 2023. Citado na página 19.

GOUVEIA, R. **Nicolau Copérnico**. s.d. Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/nicolau-copernico/>. Citado na página 28.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física, volume 1: mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, 2016. Citado nas páginas 35, 40, 47 e 49.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, 2016. Citado nas páginas 41, 46, 51 e 52.

HAMILTON, R. L. **Charon**. 2015. Views of the Solar System. Disponível em: <https://solarviews.com/eng/charon.htm>. Acesso em: 08 dez. 2024. Citado nas páginas 86 e 87.

INFOESCOLA. **Segunda Lei de Kepler**. Acesso em: 23 ago. 2024. Disponível em: <https://www.infoescola.com/fisica/segunda-lei-de-kepler/>. Citado na página 50.

JONA, K. *et al.* **Embedding computational thinking in science, technology, engineering, and math (CT-STEM)**. In: Future Directions in Computer Science Education Summit Meeting. Orlando, FL: [s.n.], 2014. Citado na página 21.

LIDDELL, H. G.; SCOTT, R. **Greek-English Lexicon**. 1940. Citado na página 24.

LOPES, M. H. O. **A retrogradação dos Planetas e suas explicações: Os Orbes dos Planetas e seus movimentos, da Antiguidade a Copérnico**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Citado nas páginas 25, 26 e 28.

MACHAMER, P.; MILLER, D. M. **Galileo Galilei**. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer 2021. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021. Citado na página 31.

MARASCIULO, M. **Oumuamua: afinal, o que se sabe sobre o objeto celeste misterioso?** 2018. Acessado em: 26 de agosto de 2024. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Espaco/noticia/2018/11/oumuamua-afinal-o-que-se-sabe-sobre-o-objeto-celeste-misterioso.html>. Citado na página 45.

MARCIANO, E. **Cônicas: Definição, tipos e exemplos**. 2020. Acesso em: 27 ago. 2024. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/conicas/>. Citado na página 41.

MARQUES, G. d. C. **Isaac Newton (1642 - 1724)**. s.d. Evolução das Ciências I. Citado na página 31.

MARTIN, F. **Rethinking computational thinking**. The Advocate, ACM, 2018. Disponível em: <http://advocate.csteachers.org/2018/02/17/rethinking-computational-thinking/>. Citado na página 22.

MARTINS, M. R.; BUFFON, A. D.; NEVES, M. C. D. **A Astronomia na Antiguidade: Um Olhar sobre as Contribuições Chinesas, Mesopotâmicas, Egípcias e Gregas**. Revista Valore, v. 4, n. 1, p. 810–823, 2019. Citado na página 23.

MASSA, N. P.; OLIVEIRA, G. S. d.; SANTOS, J. A. d. **O Construcionismo de Seymour Papert e os computadores na educação**. Cadernos da FUCAMP, v. 21, n. 52, 2022. Citado na página 19.

MATOS, R. H. S. d.; MENDES, M. A. **A influência da astronomia nas culturas antigas**. 2021. Citado na página 25.

MOREIRA, M. A.; OSTERMANN, F. **Sobre o ensino do método científico**. Instituto de Física - UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993. Acesso em: 08 dez. 2024. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/85011>. Citado na página 89.

NEWTON, I. **Carta para Robert Hooke**. 1676. Citado na página 31.

NEWTON, I. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural - Livro I**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2016. 3. reimpressão. Citado nas páginas 34, 36 e 38.

NSSDCA. **Comet Fact Sheet**. 2024. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/cometfact.html>. NASA Space Science Data Coordinated Archive. NASA. Acessado em: 01 set. 2024. Citado na página 53.

NSSDCA. **Pluto Fact Sheet**. 2024. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/plutofact.html>. NASA Space Science Data Coordinated Archive. NASA. Acessado em: 29 out. 2024. Citado nas páginas 79 e 87.

NSSDCA. **Sun Fact Sheet**. 2024. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>. NASA Space Science Data Coordinated Archive. NASA. Acessado em: 08 out. 2024. Citado na página 74.

NSSDCA. **Uranus Fact Sheet**. 2024. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/uranusfact.html>. NASA Space Science Data Coordinated Archive. NASA. Acessado em: 01 set. 2024. Citado na página 53.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica, 1: mecânica**. 5. ed. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 2013. Citado nas páginas 33, 37, 38, 39, 44 e 53.

O Dia. **Apesar de explosão de foguete, SpaceX avança no objetivo de chegar à Lua**. 2023. <https://odia.ig.com.br/mundo-e-ciencia/2023/11/6744120-apesar-de-explosao-de-foguete-spacex-avanca-no-objetivo-de-chegar-a-lua.html>. Acesso em: 12 ago. 2024. Citado na página 40.

OCDE. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**. [s.n.], 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>. Acesso em: 10 de abril de 2023. Citado na página 19.

OLIVEIRA, J. V. S. d. **Simulação Computacional**. 2024. Revelo Community. Disponível em: <https://community.revelo.com.br/simulacao-computacional/>. Acesso em: 23 nov. 2024. Disponível em: <https://community.revelo.com.br/simulacao-computacional/>. Citado na página 21.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. [S.l.]: Artes Médicas, 2008. Citado na página 19.

ROGERS, d. P. **Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes**. 2016. Disponível em: <https://medium.com/@rogersdepelle/sobre-ombros-de-gigantes-bb11a85e36bd>. Acesso em: 4 dez. 2024. Citado na página 31.

SABBADINI, F. S. **Simulação**. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2020. Disponível em: <https://canal.cecierj.edu.br/102020/84fea58100a3802757a40aee651b5b6d.pdf>. Citado na página 57.

SCHERER, D.; DUBOIS, P.; SHERWOOD, B. **VPython: 3D interactive scientific graphics for students**. Computing in Science & Engineering, v. 2, n. 5, p. 56–62, 2000. Citado na página 58.

Solar System Dynamics. **Small-Body Database Lookup: ’Oumuamua**. 2017. Jet Propulsion Laboratory. Acessado em: 26 de agosto de 2024. Disponível em: <https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=C%2F2017%20U1>. Citado na página 45.

Space Facts. **Charon Moon Facts**. 2024. Acesso em: 15 nov. 2024. Disponível em: <https://space-facts.com/moons/charon/>. Citado na página 86.

SPACEENGINE. **SpaceEngine (version 0.990)**. 2024. <https://spaceengine.org/>. Proprietary software. All rights reserved. Licensed under SpaceEngine. Citado na página 58.

STUDYPUG. **Rotational Kinetic Energy & Angular Momentum Explained**. 2024. Disponível em: <https://www.studypug.com/physics-help/rotational-kinetic-energy-and-angular-momentum>. Acesso em: 10 dez. 2024. Citado na página 50.

TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. [S.l.]: University Science Books, 2005. ISBN 1-891389-22-X. Citado nas páginas 77 e 78.

TIOBE. **TIOBE Index for November 2024**. 2024. Acesso em: 23 de novembro de 2024. Disponível em: <https://www.tiobe.com/tiobe-index/>. Citado na página 21.

TUTORMUNDI. **Ranking das maiores dúvidas por matéria no TutorMundi em 2021**. 2021. Acesso em: 10 de abril de 2023. Disponível em: <https://tutormundi.com/ranking-duvidas/>. Citado na página 19.

UFSM, U. F. de S. M. **Por que o homem não voltou à lua?** 2022. Disponível em: <https://ufsm.br/r-601-9409>. Citado na página 57.

UNION, I. A. **Resolução B2: redefinição da unidade astronômica de comprimento**. In: INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION. Proceedings of the XXVIII General Assembly of International Astronomical Union. Beijing, 2012. Acesso em: 31 ago. 2024. Disponível em: <https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2012_English.pdf>. Citado na página 52.

VALENTE, J. A. **Por Quê o Computador na Educação**. In: VALENTE, J. A. (Ed.). Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1993. p. 24–44. Citado na página 59.

VALLE, M. E. **MS211 - Cálculo Numérico: Aula 16 − Métodos Numéricos para Sistemas de Equações Diferenciais**. 2024. Material disponível online em <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula16.pdf>. Acessado em: 12 nov. 2024. Citado na página 85.

VINAGRE, A. L. M. **Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra**. s.d. Site Profissional do Professor José J. Lunazzi. Disponível em: <http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895F809/>. Citado na página 26.

WING, J. M. **Computational thinking**. Communications of the ACM, v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>. Acesso em: 11 de Junho de 2023. Citado na página 21.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I: Mecânica**. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. Citado nas páginas 33, 35, 36, 37, 52 e 62.