

# UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA CAMPUS I - CAMPINA GRANDE CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE FÍSICA CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

ANA BEATRIZ AZEVEDO DO NASCIMENTO

RAIOS CÓSMICOS: UM CASO DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ

 $\begin{array}{c} \text{CAMPINA GRANDE} \\ 2024 \end{array}$ 

# ANA BEATRIZ AZEVEDO DO NASCIMENTO

# RAIOS CÓSMICOS: UM CASO DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Everton Cavalcante.

 $\begin{array}{c} \text{CAMPINA GRANDE} \\ 2024 \end{array}$ 

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N244r Nascimento, Ana Beatriz Azevedo do.

Raios cósmicos [manuscrito] : um caso da quebra de simetria de Lorentz / Ana Beatriz Azevedo do Nascimento. - 2024.

35 f.: il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Everton Cavalcante, Departamento de Física - CCT".

1. Simetria Lorentz - quebra. 2. Corte GZK. 3. Radiação cósmica. I. Título

21. ed. CDD 539.72

#### ANA BEATRIZ AZEVEDO DO NASCIMENTO

# RAIOS CÓSMICOS: UM CASO DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ

Monografia apresentado Coordenação do Curso de Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física

Aprovada em: 07/11/2024.

# **BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado eletronicamente por:

- Alex da Silva (\*\*\*.295.004-\*\*), em 22/11/2024 12:43:20 com chave 7fb76806a8e811efaf6a1a7cc27eb1f9.
- Bugley de Farias Ramos Junior (\*\*\*.295.564-\*\*), em 22/11/2024 22:17:58 com chave c6690c00a93811ef82c306adb0a3afce.
- Everton Cavalcante (\*\*\*.699.765-\*\*), em 22/11/2024 09:24:44 com chave c139a63ea8cc11ef8d111a7cc27eb1f9.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/ autenticar\_documento/ e informe os dados a seguir. **Tipo de Documento:** Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 31/03/2025 Código de Autenticação: 27d1dd



Dedico este trabalho aos meus avós paternos, Avani Lima do Nascimento (in memorian) e Genival Gerônimo do Nascimento (in memorian).

#### **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria das Graças e Genivaldo Nascimento, por todo apoio, amor e conversas que me tornaram o que sou hoje. Agradeco a todos os familiares e amigos, em especial Avani Lima (Minha avó), Maria Narciso e Mônica Azevedo por me inspirarem e sonharem comigo. Agradeço aos meus amigos e colegas do curso de física, principalmente aqueles que integram o meu conceito de família. Quero agradecer aos amigos de café que encontrei pelo caminho, entre eles Cris e seu marido Igor, Taís, Erica Lino, Erica Soares, Kaique Pereira, Viviane Chagas, Rita de Cássia, Hemilly Luanna, Welton Douglas, Tailane Diniz, José Augusto, Lindalva, Allandemberg, André, Raama, Isabelly, Zelho, Júlia França e Junior, qualquer lugar com vocês se torna especial, nunca esquecerei das risadas, conversas, choros e cafés. Agradeço especialmente aos amigos que sempre levarei comigo, aos que tiveram comigo em todas minhas fases, e amaram todas minhas versões, entre eles Lígia Ferreira, Pedro Evangelista, Diego Souto, Genival Neto (Meu irmão) e Antonio Narciso (Meu primo). Agradeço também a todos os professores do Departamento de Física, em especial ao professor Everton Cavalcante, que me orientou nesse trabalho e me ajudou a evoluir como pesquisadora, e às professoras Ruth Melo e Raíssa Pimentel, pelos conselhos e por me inspirarem a continuar.

#### **RESUMO**

O presente trabalho busca analisar de forma introdutória a quebra da invariância de lorentz direcionada ao caso particular dos raios cósmicos. Os raios cósmicos são partículas altamente carregadas, que chegam a terra e podem ter sua origem na nossa galáxia ou fora dela. Ao atingirem a atmosfera esses raios interagem com as moléculas, causando uma chuva em cascata originando outras partículas e antipartículas. Estudando essa chuva extensa percebe-se uma supressão no fluxo de raios quando o espectro de energia tende a  $\sim 4 \times 10^{19} {\rm eV}$ , essa previsão foi chamada de corte GZK em homenagem aos físicos Greisen, Zatsepin e Kuzmin, que foram os primeiros a estudar a variação do espectro de energia. A quebra de simetria de Lorentz refere-se a violação de um dos pilares da Relatividade Espacial de Einstein, onde as leis físicas devem ser as mesmas para todos os observadores inerciais. Um exemplo dessa quebra vem da análise dos raios cósmicos além do corte GZK ( $E_{GZK} \cong 4 \times 10^{19} {\rm eV}$ ), onde surgem dúvidas acerca do tempo de vida dessas partículas, assim uma possível explicação seria que esses raios desenvolvem uma velocidade superior à da luz. Desta forma, analisamos se seria possível observar essa violação a partir do caso dos raios de altas energias.

Palavras-chave: partículas; relatividade; radiação; Lorentz.

#### ABSTRACT

The present work seeks to analyze in an introductory way the breaking of Lorentz invariance directed to the particular case of cosmic rays. Cosmic rays are highly charged particles that reach Earth and can originate in our galaxy or outside it. When these rays reach the atmosphere, they interact with the molecules, causing a cascade of rain, originating other particles and antiparticles. Studying this extensive rain, a suppression in the flow of rays is noticed when the energy spectrum tends to  $\sim 4 \times 10^{19} {\rm eV}$ , this prediction was called GZK cutoff in honor of the physicists Greisen, Zatsepin and Kuzmin, who were the first to study the variation of the energy spectrum. Lorentz symmetry breaking refers to the violation of one of the pillars of Einstein's Spatial Relativity, where physical laws must be the same for all inertial observers. An example of this break comes from the analysis of cosmic rays beyond the GZK cut ( $E_{GZK} \cong 4 \times 10^{19} {\rm eV}$ ), where doubts arise about the lifetime of these particles, thus a possible explanation It would be that these rays develop a speed greater than that of light. In this way, we analyzed whether it would be possible to observe this violation in the case of high-energy rays.

Palavras-chave: particles; relativity; radiation; Lorentz.

# SUMÁRIO

	Pá	igina
1	INTRODUÇÃO	9
2	RAIOS CÓSMICOS	11
3	EFEITO GREISEN ZATSEPIN KUZ'MIN (GZK)	14
4	TRANSFORMAÇÕES RELATIVÍSTICAS	16
4.1	Energia e Momento Relativísticos	21
4.2	Equação de Klein-Gordon	22
4.3	Equação de Dirac	25
5	RAIOS CÓSMICOS A QUEBRA DE INVARIÂNCIA	29
6	CONCLUSÃO	31
REFE	ERÊNCIAS	33

# 1 INTRODUÇÃO

Os raios cósmicos são partículas de grande energia que atingem a terra e vem de diversas regiões fora da atmosfera terrestre, podendo ter sua origem dentro de nossa galáxia ou externa a ela (Castro, 2012). É notório que o estudo da radiação cósmica abriu portas para o avanço do estudo de partículas. Embora tenha sido medida pela primeira vez no início do século vinte por Hess (1912), entretanto só foi nomeada como raios cósmicos em 1920 por Robert Andrews Millikan. A descoberta dessa radiação marca o início de uma área da Física denominada Física de Partículas, cujo o desenvolvimento possibilitou a descoberta de novas partículas, como positron por Anderson (1932), e o píon em 1947, tendo esta nessa última a participação do físico brasileiro César Lattes (1947).

Algum tempo depois os cientistas Greisen (1972), Zatsepin e Kuz'min (1966) teriam previsto uma supressão no fluxo dos raios cósmicos de alta energia que ficou conhecido como efeito GZK. Esse corte existiria devido a interação dos raios de ultra-altas energias com os fótons da radiação cósmica de fundo (CMBR). Ainda que a energia desses fótons seja pequena, cerca de 10<sup>-3</sup> eV, a energia concentrada no centro de massa dessas interações é suficiente para a produção de píons e causar perdas energéticas nas (UHCRs). Como consequência, esses raios têm a diminuição de seu fluxo para energias acima de 4 × 10<sup>19</sup> eV (Aab et al, 2016).

Portanto conseguimos observar que no século XX existiu uma revolução na física, onde seus fundamentos tiveram dois grandes alicerces: A teoria quântica e a teoria da relatividade. Logo na Teoria da Relatividade Restrita nos é introduzido que haveria uma mudança no conceito clássico de espaço-tempo, e na concepção de que as leis da física são invariantes diante das transformações de Lorentz, tal conceito é chamado de invariância de Lorentz (Das, 2016).

Observando os raios cósmicos temos um exemplo que nos dá indícios da existência dessa quebra de simetria. Quando consideramos os Raios Cósmicos além do corte GZK temos algumas dúvidas levantadas em torno das leis que comandam o tempo de vida dessas partículas. O esperado era que as partículas decairiam antes de ultrapassar a atmosfera e atingir a terra, porém isso não ocorre e uma possível explicação teórica seria de que esses raios desenvolvem uma velocidade acima da velocidade da luz, conseguindo então atingir o sistema solar.

O que iremos analisar aqui é a quebra dessa simetria de Lorentz, ou mais precisamente a alteração dessa velocidade limite de propagação que temos como sendo a velocidade da luz, contrariando assim um dos principais pilares da física, a relatividade

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Cosmic Microwave Background

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ultra-high-Energy Cosmic Ray

restrita e tendo como plano de fundo o exemplo dos Raios Cósmicos.

Deste modo realizamos uma discussão introdutória sobre a quebra da invariância de Lorentz, direcionada ao caso particular dos raios cósmicos (Bietenholz, 2011). Introduzimos os conceitos de raios cósmicos e suas características principais através de uma breve análise da linha do tempo desde seu descobrimento até os estudos atuais. Mostramos a previsão mais aceita dentro da teoria de raios ultra alta energia, o corte GZK que supõe um aumento no espectro de energia quando tivermos fontes desses raios distribuídas uniformemente na região do espaço (Castro, 2012). Demonstramos as correções feitas nas transformações de Galileu para chegarmos nas transformações de Lorentz, o que nos permitiu entender melhor os postulados de Einstein para a Relatividade.

Em seguida mostramos a equação de Klein-Gordon a fim de analisar a primeira tentativa de unir a Mecânica quântica com a relatividade, e observamos as incompatibilidades que ela gerou ao nos entregar dois possíveis resultados para a energia, positivo ou negativo. Posteriormente descrevemos a equação de Dirac, que conseguiu a união das duas teorias físicas, formando uma nova área a Teoria Quântica de Campos, que nos ajudou a entender melhor a física de partículas elementares (Das, 2016). Explicamos de forma simples como se daria essa contradição da covariância prevista por Lorentz nos casos das partículas de ultra alta energia e debatemos os possíveis resultados que esse estudo pode trazer para a física.

# 2 RAIOS CÓSMICOS

Apesar de sua descoberta estar datada como tendo acontecido a mais de 100 anos, podemos dizer que os estudos acerca dos efeitos causados pelos raios cósmicos começaram muito antes de sua nomeação. Consideremos os estudos feitos por Coulomb (1785), quando ao se deparar com o aparelho eletroscópio, notou que no seu funcionamento ao carregá-lo as folhas iriam se afastar demonstrando que estariam com cargas iguais, entretanto com o passar do tempo elas voltavam a se encontrar. Na tentativa de explicar o que acontecia, ele identificou que não se tratava de um problema na estrutura de isolamento do experimento, mas sim "do ar" que estaria envolvendo o eletroscópio. Assim supôs que deveriam existir moléculas que estariam interagindo com qualquer outro corpo que tivesse carga.

Faraday (1835), juntamente com Crookes (1879), concluíram que a velocidade em que o eletroscópio descarregava, estaria ligada à pressão do ar. Crookes percebeu esse fenômeno ao mostrar que, em ambientes com menor pressão, o eletroscópio conseguia manter sua carga por mais tempo. Isso ocorre pois quando reduzimos a pressão do ar diminuímos a quantidade de moléculas que poderiam interagir com o experimento, a velocidade de dissipação de cargas diminui. Em meados de 1900 ainda era crível que essas partículas estariam em grandes quantidades pois era defendido, quase como um consenso pelos teóricos da época, que sua origem seria a partir da já conhecida radiação encontrada em solo terrestre. Wilson (1901) e Elster e Geitel (1900) com seus estudos melhoraram a técnica de isolamento do eletroscópio a fim de aperfeiçoar a sensibilidade do aparelho, assim tiveram como resultado uma maior precisão na taxa de descarga que ocorria. Logo, deduziram que essa descarga era devido a algum intermediário externo ao recipiente. A suposição mais simples dizia que essa radiação estava relacionada a objetos radioativos, que por sua vez tinham sua origem terrestre. Porém, uma comprovação experimental de tal hipótese pareceu algo distante.

Entretanto, em 1912 viria a se destacar o físico austríaco Viktor Franz Hess que, a bordo de um balão, conseguiu atingir a altitude de 5.350 m. Desse modo, guarnecido de um eletroscópio associado a um dispositivo que poderia detectar a ionização, ele conseguiu verificar o aumento evidente dos efeitos ionizantes (Hess, 1912). Consequentemente, ficou esclarecido que essa radiação não seria proveniente do solo terrestre e nem da atmosfera. Essa radiação deveria vir de um lugar fora da atmosfera e penetrá-la, fazendo com que em lugares com maior altitude pudessem registrar um aumento no índice de ionização. Ficou estabelecido que essa radiação consistia em partículas carregadas, provenientes de uma fonte ainda desconhecida. Sendo amplamente conhecida na literatura científica como radiação cósmica, ou ainda, raios cósmicos. Algumas dessas partículas, como o pósitron, o múon e os píons carregados, foram descobertas no início da década de

1950, marcando os primeiros passos no estudo das "partículas elementares" (Anderson, 1932; Lattes, 1947). No entanto, a origem desses raios permaneceu uma incógnita, o que motivou os pesquisadores a buscar possíveis fontes desse fluxo de radiação que alcança a Terra.

Hoje sabemos que a medição do espectro de energia da radiação cósmica pode se estender de 10 Mev até valores superiores a  $10^{20}$  eV . Esse fluxo de raios cósmicos como sendo uma função de energia, e segue uma lei de potências onde  $\alpha$  é o índice espectral, dN é o numero de estados e dE a energia como afirma Roulet (2004), que pode variar conforme a região:

$$\frac{dN}{dE} \sim E - \alpha. \tag{2.1}$$

Na literatura científica em astrofísica, é comum encontrar graficos semelhantes a figura (1). Nela temos uma mostra do espectro de energia caindo cerca de 25 ordens de grandeza ao longo de 11 décadas de energia.

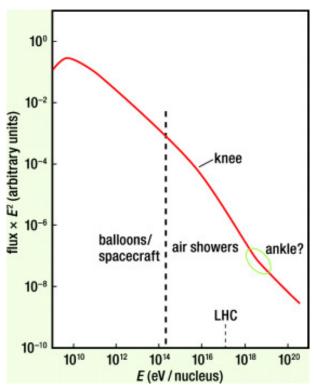


Figura 1 – Esquema do espectro de energia.

Fonte: Extraída de Catching the highest energy cosmic rays (Watson, 2009).

Dentro da literatura experimental verificou-se uma variação na inclinação da curva de fluxo de raios cosmicos que chamamos de Knee (joelho). Tal variação é da ordem de aproximadamente (3-5)  $\times$  10<sup>15</sup> eV em torno da curva linearizada.

 $<sup>^{-1}</sup>$ Uma década de energia é igual a um aumento de 10 vezes na energia. 11 décadas representa um aumento de  $10^{11}$  vezes na energia.

Aqui vale destacar que esse fluxo de partículas é de algo em torno de uma por metro quadrado por ano (Watson, 2009). Logo temos uma variação no índice espectral de ~ 2.7 para ~3.0. Essa "quebra do alfa" neste ponto advém de uma mudança na composição química das partículas primárias, que com o aumento da energia transitam de prótons para outros núcleos considerados mais pesados (Castro, 2012).

Uma das explicações plausíveis para esse knee no fluxo seria o "vazamento" de raios cósmicos nas próximidades de uma galáxia. O que sinalizaria a dependencia da capacidade de uma partícula carregada penetrar em um dado campo magnético. A essa "resistência galática" nominamos rigidez. Que pode ser escrita como a razão  $\left(\frac{E}{Z}\right)$  entre a energia da partícula (E) e seu número atômico (Z) (Cronin, 1999). Por essa descrição os prótons conseguiriam, com maior facilidade, escapar do enclausuramento dos campos magnéticos galácticos. Sendo assim, os núcleos mais pesados iriam dominar todo o espectro. Entretanto, essas suposições não foram comprovadas de maneira convincente. Logo tem-se outras possibilidades de explicar essa característica no espectro, como a probabilidade de diferentes mecanismos de aceleração que seriam dominantes nessas regiões (Antoni et~al, 2005).

A área mais plana quando o espectro se aproxima de  $4\times10^{18}$  eV é o chamado ankle (tornozelo), e para energias que estão entre 10<sup>18</sup> e 10<sup>19</sup> temos uma variação do índice de ~3.3 para ~2.6 (Castro, 2012). Para esse fenômeno temos duas possíveis explicações. Sendo a primeira hipótese que: o começo da transição entre os raios cósmicos galácticos para os extragalácticos, conhecido como Mixed Composition Model, se daria na calda do espectro. Local com maiores energias. Nessa região se daria uma composição química mista. E o ankle seria o local onde aconteria essa transição. (Allard et al, 2007). A segunda hipótese é a perda de energia de prótons extragalácticos causados pela produção de pares na radiação de fundo de microondas, o Dip Model. Esse modelo assume que os raios cósmicos de ultra energia são comandados por prótons extragalácticos. E que a transição dessa radiação cósmica galáctica para a extragaláctica deve acontecer a energias menores que aproximadamente 10<sup>17</sup> eV (Berezinsky, 2006). Contudo, as energias acima de 4×10<sup>19</sup> eV contém um acrescimo substancial na incerteza associada ao espectro por conta da grande redução do fluxo ao atingir essa marca. Alguns dos dados coletados por observatórios, que tem como intuito estudar e mapear a trajetória das intensas chuvas de ar produzidos pelos raios que interagem com a atmosfera, mostraram uma supressão no fluxo que chega perto do que foi previsto pelo mecanismo GZK. Que será retratado na seção seguinte. Entretanto, os estudos sobre os cenários que possibilitam tal aumento energético dos raios, segue sendo feito em vários observatórios ao redor do mundo.

## 3 EFEITO GREISEN ZATSEPIN KUZ'MIN (GZK)

Como vimos anteriormente, é considerada como a previsão mais consistente nessa área de estudos a de que o espectro de energia terá de aumentar cerca de  $4\times10^{19}$  eV quando tivermos as fontes desses raios distribuídas uniformemente em alguma região do espaço (Watson, 2009).

Algum tempo após a descoberta da radiação cósmica de fundo (CMBR), Greisen (1966), e, isoladamente, Zatsepin e Kuz'min (1966), previram uma grande supressão no fluxo dos raios cósmicos de ultra-alta energia (UHECR) quando esses interagissem com fótons provenientes da radiação de fundo. Esse efeito é conhecido como o efeito (ou corte) GZK.

Apesar da energia dos fótons da CMBR ser em torno de  $10^{-3}$  eV. Ou seja, muito inferior a ordem de grandeza do espectro de radiação da CMBR. A energia que vem do centro de massa dessas interações são fortes o suficiente para produzirem partículas conhecidas como píons. E acabar causando perdas de energia significativas para a UHE-CRs. Ocasionando assim a diminuição do fluxo em energias acima do corte GZK  $\sim 4 \times 10^{19}$  (Castro, 2012).

Vale ainda ressaltar que esse corte seria uma manifestação do efeito Doppler relativístico. Referindo-se ao fato de que a previsão do efeito GZK é consequência de efeitos relativísticos relacionados ao movimento de partículas de alta energia através da radiação cósmica de fundo. Assim como o efeito doppler não- relativístico constatado, onde temos a mudança de frequência das ondas devido o movimento entre a fonte e o observador, o efeito doppler no contexto do GZK influencia a energia percebida pelos raios cósmicos, levando a um aumento notável em seu espectro (Watson, 2014).

O efeito GZK coloca um certo limite de distância para que um núcleo possa perder energia ou ser absorvido pela atmosfera. Assim, 90% dos prótons de radiação cósmica, que tem a energia aproximadamente equivalente a  $10^{20}$  eV, devem percorrer distâncias menores que 130 Mpc. E, para energias de até  $10^{19}$ , viajam em distâncias menores de 200 mpc (Harari, 2006). A figura (2) mostra a sobrevivência de raios cósmicos com energias superiores a 6 x  $10^{19}$  eV, em função da distância da terra a partir de fontes que estão a uma distância maior que 50 Mpc (Watson, 2014).

Como dito anteriormente, o corte GZK é uma demonstração do efeito doppler relativístico. Logo, um próton ou algum outro núcleo com fator de Lorentz atribuído, movendo-se através de um campo radioativo com energia média, percebe a energia de um fóton em seu referencial da seguinte forma (Watson, 2014):

$$E = \epsilon \cdot \tau (1 + \cos \theta) \tag{3.1}$$

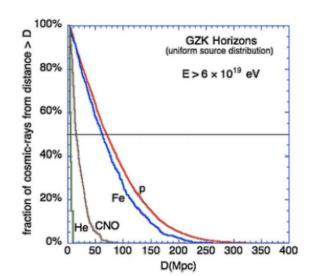


Figura 2 – Ilustração da sobrevivência de núcleos > 6 ×10<sup>19</sup> eV em função da distância.

Fonte: Extraído de High-energy cosmic rays and the greisen-zatsepin-kuz'min effect (Watson, 2014).

Temos a energia E determinada pelo produto da energia média  $\epsilon$ , o fator de lorentz  $\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ) e um termo  $(1 + \cos \theta)$ , onde o ângulo vai ser o de deslocamento entre o fóton, e o núcleo que estivermos estudando. Caso a energia aumentada do fóton esteja acima de um certo limite de energia  $E_{th}$ , então temos um processo de interação bem específico que pode acontecer (Watson, 2014). A exemplo do CMBR com temperatura T de 2,725 K, e energia média de fótons  $\epsilon$  de 6,4 × 10<sup>-4</sup> eV, temos a interação mostrada na equação (3.2), onde a energia E vai ser 150 Mev:

$$\gamma_{2.725k} + p \to \Delta^+ \to +\pi \ ou \ n + \pi^-,$$
 (3.2)

No caso citado acima, temos um processo que é chamado de fotoprodução de píons. A equação mostra que um fóton  $\gamma$  com energia 2,525K vai colidir com um próton p, produzindo  $\Delta^+$  um termo de ressonância, que vai decair rapidamente e resultando em um próton p mais um píon positivo  $\pi^+$ , ou em um neutron p mais um píon negativo  $\pi^-$ . Assim em cada interação o próton perderá por volta de 1/6 da sua energia (Aab et~al, 2016). Por outro lado com núcleos mais pesados os processos acontecem de outra forma, os UHECRs, diferente do que vimos antes, sofre uma fotodesintegração quando interage com a radiação cósmica, e a radiação infravermelha de fundo, acaba perdendo em média 3 a 4 núcleos por Mpc quando sua energia inicialmente está acima de  $2 \times 10^{19}$  eV a  $2 \times 10^{20}$  eV (Letessier, 2000).

# 4 TRANSFORMAÇÕES RELATIVÍSTICAS

Os processos físicos acontecem quando um ou mais eventos físicos são observados. Um evento seria algo que acontece em algum lugar específico (x, y, z), em um tempo finito (t). Um exemplo é uma pedra que cai em algum lugar do espaço. Talvez a novidade mais impactante do advento da teoria relativística seja a incorporação do tempo, que até então era apenas um parâmetro nas equações do movimento. Passando agora a ter status de coordenada.

Sabendo disso, suponhamos então que conheçamos as coordenadas (x, y, z, t) de um evento em particular E em um sistema inercial S, e que gostaríamos de saber as coordenadas desse mesmo evento em outro Referencial  $\bar{S}$ , que seriam  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ . O que iremos precisar é tentar mudar nossa perspectiva para conseguir observar o mesmo evento em outro referencial, e tentar traduzir o que acontece em S, para o  $\bar{S}$  (Llewellyn; Tipler, 2014).

É razoável que a representação do evento, em relação aos respectivos referenciais, seja o mais próximo do que temos na figura (3), de modo que o  $\bar{S}$  deslize ao longo do eixo x à velocidade v. Se marcamos o tempo (t = 0) a partir do momento que as origens se coincidem, então o tempo t, a origem  $\bar{O}$  estará a uma distância vt de O. Logo teremos,

$$x = d + vt, (4.1)$$

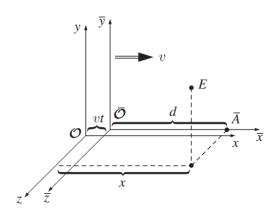
onde d é a distância entre a origem  $\bar{O}$  e o ponto no eixo  $\bar{x}$  que está paralelo ao evento E quando ele ocorre. Antes da intervenção de Einstein, Galileu criou, o que em sua época, se configurou como a melhor linguagem para entender o que estava acontecendo, afirmando que

$$d = \bar{x},\tag{4.2}$$

e assim se construiu um "dicionário"

$$\begin{cases}
(i) \ \bar{x} = x - vt, \\
(ii) \ \bar{y} = y, \\
(iii) \ \bar{z} = z, \\
(iv) \ \bar{t} = t.
\end{cases}$$
(4.3)

Figura 3 – Esquema dos referênciais



Fonte: Extraído de (Griffiths, 2011).

Essas transformações são conhecidas hoje como transformações de Galileu. Percebemos que o tempo aqui é absoluto. Mas no contexto da relatividade especial, temos algumas alterações a se fazer. Como na (iv), onde devemos incorporar alguma regra que incorpore a relatividade da simultaneidade, a dilatação do tempo e outros efeitos que acontecem na RE. De forma similar devemos alterar a (i) para que expliquemos a contração de Lorentz, e quanto a (ii) e (iii), não sofrem alterações pois o comprimento não se modifica perpendiculares ao movimento (Llewellyn; Tipler, 2014).

A primeira falha que a dedução clássica comete é em (i), pois d é a distância entre o eixo  $\bar{O}$  e  $\bar{A}$  medido em S, que está em repouso, porém  $\bar{x}$  vai ser a distância entre  $\bar{O}$  e  $\bar{A}$  medidos no referencial  $\bar{S}$ . Entretanto, como  $\bar{O}$  e  $\bar{A}$  estão em repouso, quando observados em  $\bar{S}$ ,  $\bar{x}$  seria a "vareta em movimento" que é contraída para S. Portanto, podemos reescrever d como sendo:

$$d = \frac{1}{\gamma}\bar{x}.\tag{4.4}$$

Assim inserindo na equação (4.1), obtemos a versão relativística de (i):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt). \tag{4.5}$$

Para que a equação (4.5) reverta-se a sua forma clássica basta que  $\gamma \to 1$ , quando v/c for 0. A transformação inversa é semelhante, mudando apenas o sinal da velocidade, pois agora estamos observando por outro ponto de vista:

$$x = \gamma(\bar{x} + \bar{v}\bar{t}). \tag{4.6}$$

Todavia se introduzirmos o multiplicador  $\gamma$  de valor ainda desconhecido, temos uma modificação na equação (iv), onde  $\bar{t}$ = t (Llewellyn; Tipler, 2014). Para confirmar basta substituir  $\bar{x}$ , dado pela equação (4.5), na equação (4.6) e evidenciar o  $\bar{t}$ . Obtemos

então:

$$\bar{t} = \gamma \left[ t + \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma^2} \frac{x}{v} \right]. \tag{4.7}$$

Vamos supor que uma lâmpada seja acesa na origem S em t=0. Como estamos considerando que as origens se coincidem, temos  $t=\bar{t}=0$ , a lâmpada também será acesa em  $\bar{S}$ em  $\bar{t}=0$  (Llewellyn; Tipler, 2014). A luz se expandirá a partir de duas origens e formará uma onda esférica, podemos escrever a equação da onda como sendo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. (4.8)$$

Do ponto de vista do observador  $\bar{S}$  temos:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = c^2 \bar{t}^2. \tag{4.9}$$

Agora substituindo as equações (4.5) e (4.7) na equação (4.9) e levando em conta que não houve modificação no y e z,  $\log_0 y = \bar{y}$  e  $z = \bar{z}$  temos:

$$\gamma^{2}(x-vt)^{2}+y^{2}+z^{2}=c^{2}\gamma^{2}\left[t+\frac{1-\gamma^{2}}{\gamma^{2}}\frac{x}{v}\right]^{2}.$$
(4.10)

Sabemos que as equações (4.8) e (4.9) estão de acordo com o segundo postulado de Einstein, onde a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial e não muda, entretanto para que estejam concordando também com o primeiro postulado, essas equações devem ser iguais. Para isso precisamos que o coeficiente do termo  $x^2$  na equação (4.10) seja igual a 1, que o termo  $t^2$  seja igual a  $c^2$ e que xt seja nulo. Qualquer uma dessas condições pode ser utilizada para determinar o valor de gamma, logo utilizando, por exemplo, o coeficiente  $x^2$  na equação (13), obtemos:

$$\gamma^2 - c^2 \gamma^2 \frac{(1 - \gamma^2)^2}{\gamma^4 v^2} = 1. \tag{4.11}$$

Podemos ainda reescreve-la assim:

$$-c^2 \frac{(1-\gamma^2)^2}{\gamma^2 v^2} = (1-\gamma^2). \tag{4.12}$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $1-\gamma^2$  , e colocando  $\gamma$  em evidência:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. (4.13)$$

Temos portanto as transformações de Lorentz agora completas:

$$\begin{cases}
\bar{x} = \gamma(x - vt), \\
\bar{y} = y, \\
\bar{z} = z, \\
\bar{t} = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right).
\end{cases}$$
(4.14)

Podemos escrever as transformações de Lorentz de uma forma mais simples se expressarmos elas em função das quantidades

$$x^0 \equiv ct, \quad e \quad \beta \equiv \frac{v}{c}.$$
 (4.15)

Usaremos  $x^0$  em vez do t, e  $\beta$  em vez de v/c. O que significa que trocaremos a unidade de tempo de segundo para metro, ou seja 1 metro de  $x^0$  corresponde ao tempo que a luz levará para percorrer 1 metro no vácuo (Llewellyn; Tipler, 2014). Também numeramos as coordenadas de forma que

$$x^1 = x, \ x^2 = y, \ x^3 = z,$$
 (4.16)

Desse modo as trasnformações de Lorentz ficarão

$$\begin{cases} \bar{x^0} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ \bar{x^1} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \\ \bar{x^2} = x^2, \\ \bar{x^3} = x^3. \end{cases}$$
(4.17)

Ou ainda, na forma matricial

$$\begin{pmatrix}
\bar{x^0} \\
\bar{x^1} \\
\bar{x^2} \\
\bar{x^3}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\
-\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
x^0 \\
x^1 \\
x^2 \\
x^3
\end{pmatrix}.$$
(4.18)

Podemos resumir o sistema e a matriz em uma única equação de somatório, estando os índices gregos operando de 0 a 3:

$$\bar{x}^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$
 (4.19)

sendo  $\Lambda$  a matriz de transformação de Lorentz, onde o sobrescrito  $\mu$  indicará a linha e o subscrito  $\nu$  a coluna. Escrevendo desta maneira abstrata poderemos manipular quaisquer transformações no mesmo formato, pois a estrutura da equação (4.19) deve permanecer inalterada.

Definimos quadrivetores como sendo qualquer conjunto de quatro componentes que se transformam da mesma maneira que  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  sob as transformações de Lorentz:

$$\bar{a}^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{\mu}_{\nu}) a^{\nu}. \tag{4.20}$$

Análogo a um produto escalar  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$  onde temos a soma dos produtos dos componentes, temos o **produto escalar quadrimensional** que difere em os componentes de índice 0 terem sinal negativo:

$$-\bar{a}^0 \bar{b^0} + \bar{a^1} \bar{b^1} + \bar{a^2} \bar{a^2} + \bar{a^3} \bar{b^3} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 a^2 + a^3 b^3. \tag{4.21}$$

Essa combinação é invariante seguindo a regra da invariância presente nas transformações de Lorentz. Adicionando o vetor covariante  $a_{\mu}$  e o contravariante  $a^{\mu}$ , que se diferem somente no sinal dos termos com índice zero:

$$a_{\mu} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3).$$
 (4.22)

O produto em forma de somatório:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_{\mu} b^{\mu}, \tag{4.23}$$

ou de forma mais compacta,

$$a_{\mu}b^{\mu}$$
, sendo  $\mu = 0, 1, 2, 3.$  (4.24)

A somatória fica implícita quando temos a repetição do índice grego em um produto (uma vez que o produto for entre dois vetores, em que um tenha índice covariante e o outro contravariante). Chamamos de notação de Einstein em homenagem ao mesmo que criou essa forma de expressarmos de forma mais simples essa somatória. Portanto, podemos escrever sua forma mais usual como sendo:

$$a_{\mu}b^{\mu} = a^{\mu}b_{\mu} = -a^{0}b^{0} + a^{1}b^{1} + a^{2}a^{2} + a^{3}b^{3}. \tag{4.25}$$

# 4.1 Energia e Momento Relativísticos

Na física clássica temos que o momento é o quanto uma massa se desloca em determinada velocidade. Entretanto na relatividade surge a questão de qual velocidade usar, a ordinária  $\eta$  ou a própria u, sendo que devido a lei de conservação de energia deve-se utilizar a velocidade própria, para que tenhamos coerência com o princípio da relatividade (Griffiths, 2011). Logo,

$$p \equiv m\eta = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\tag{4.26}$$

esse é o momento relativístico.

O momento é uma parcela de um quadrivetor, sendo esse sua parte espacial,

$$p^{\mu} \equiv m\eta^{\mu} \quad \text{com} \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$
 (4.27)

porém é natural nos questionarmos o que sua parte temporal,

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\tag{4.28}$$

Einstein teria então chamado

$$m_{rel} \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\tag{4.29}$$

de massa relativísitica, onde  $p^0 = m_{rel}c$  e  $\mathbf{p} = m_{rel}$  u. Logo m foi denominado como massa de repouso, porém o título acabou esquecido após evidenciação da energia relativística

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. (4.30)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>é a velocidade em que um observador externo enxerga o objeto se movendo.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>velocidade de um objeto em relação ao referencial, considerando o tempo que ele leva para percorrer a distância.

Podemos observar então que a energia relativística é não nula, mesmo o objeto estando em estado estacionário, podendo então ser escrita como

$$E_{rep} \equiv mc^2. \tag{4.31}$$

Mais conhecida como energia de repouso.

Se em um sistema não tivermos forças externas atuantes a energia e o momento relativísticos totais serão conservados, assim como vemos no caso clássico. Logo é preciso fazer uma distinção entre grandezas invariantes, que são aquelas que não mudam seu valor em todos os sistemas inerciais, e grandezas conservadas, que mantém seu valor constante antes e depois de algum processo, a exemplo sabemos que a massa será invariante, mas não conservada e a energia é conservada, porém não invariante. Para além das notações a física explorada por elas está no fato de E e  $\mathbf{p}$ , definidos pelas equações (4.26) e (4.30) serem conservados (Griffiths, 2011).

O produto escalar entre  $p^{\mu}$  com ele mesmo é

$$p^{\mu}p_{\mu} = -(p^{0})^{2} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = -m^{2}c^{2}. \tag{4.32}$$

Logo, em termos da energia relativística temos:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. (4.33)$$

Dando seguimento ao nosso texto, vamos agora abordar a versão relativistica da equação de Schroedinger. Conhecida como equação de Klein-Gordon.

## 4.2 Equação de Klein-Gordon

Começamos considerando o sistema relativístico mais simples de uma partícula livre de massa m, utilizando a equação (4.33) e considerando c = 1 temos:

$$E^2 - p^2 = m^2,$$
 ou 
$$E^2 - p^2 = p^{\mu}p_{\mu} = m^2.$$
 (4.34)

Podemos então representar os operadores momento e energia como,

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\vec{P} \to -i\hbar \vec{\nabla},$$
(4.35)

e então combiná-los e reescrevê los em termos de quadrivetores, sendo:

$$\begin{cases} p^{\mu} = i\hbar\partial^{\mu} = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, i\hbar\vec{\nabla}\right). \\ p_{\mu} = i\hbar\partial_{\mu} = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}\right). \end{cases}$$

$$(4.36)$$

Portanto, com as condições vistas anteriormente, podemos a partir da equação (4.34) obter a forma mais simples da equação quântica relativística,

$$p^{\mu}p_{\mu}\phi = m^{2}\phi,$$
ou,  $(i\hbar\partial^{\mu})(i\hbar\partial_{\mu})\phi = m^{2}\phi,$ 
ou,  $-\hbar^{2} \Box \phi = m^{2}\phi,$ 

$$(4.37)$$

assim defindindo h = 1, a equação assume o formato:

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{4.38}$$

Assumimos que a função onda mecânica quântica estudada  $\phi(x,t)$  é escalar, e sabemos que o operador entre os parenteses é um escalar de Lorentz, logo a equação é invariante pelas transformações de Lorentz obedecendo o postulado de Einstein para a relatividade restrita, onde temos que a velocidade da luz deve ser a mesma em todos os referenciais. A equação de Klein-Gordon (4.38) pode se reduzir à equação de onda quando tomamos a m = 0, ou quando a massa de repouso desaparece. Como a equação de Klein-Gordon é uma eq. de onda, ela também irá possuir soluções características de ondas planas para quando estudamos partículas (Das, 2020). Assim as funções

$$e^{\mp ik \cdot x} = e^{\mp ik_{\mu}x^{\mu}} = e^{\mp ik^{\mu}x_{\mu}} = e^{\mp i(k_0t - \mathbf{k} \cdot x)},$$
 (4.39)

Como  $k^{\mu}=(k^0, \mathbf{k})$ , usando a equação (4.36) obtemos

$$p^{\mu}e^{\mp ik\cdot x} = i\partial^{\mu}e^{\mp ik\cdot x} = i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}e^{\mp ik\cdot x} = \pm k^{\mu}e^{\mp ik\cdot x}, \tag{4.40}$$

Mostra-se que  $\pm \hbar k^{\mu}$  são os autovalores do operador energia-momento, logo as soluções para ondas planas também são soluções para equação de Klein-Gordon. temos então

$$k^{2} - m^{2} = (k^{0})^{2} - k^{2} - m^{2} = 0,$$
  
ou.  $k^{0} = \pm E = \pm \sqrt{k^{2} + m^{2}}.$  (4.41)

Nos deparamos então com a primeira particularidade da equação de Klein-Gordon

(que é intrinsecamente uma equação relativística), ela possibilita termos dois possíveis resultados para energia: positivo ou negativo. Devido a relação de energia-momento de Einstein, onde o termo E (energia) é quadrático. Diferente de quando estamos estudando uma partícula não relativística, onde a relação energia e momento são lineares. Logo, se considerarmos a equação de Klein-Gordon como sendo relativística e quântica, veríamos mais a frente que por conta das soluções da energia teríamos uma contradição da teoria (Das, 2020).

Avançamos observando a equação de Klein-Gordon e seu conjugado, pois toda função de onda quântica é complexa, sendo

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$
  
 $(\Box + m^2)\phi^* = 0,$  (4.42)

o que implica em

$$\phi^* \Box \phi - \phi \Box \phi^* = 0,$$
ou, 
$$\partial_{\mu} (\phi^* \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^*) = 0,$$
ou, 
$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}) - \vec{\nabla} \cdot (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) = 0.$$
(4.43)

Definimos o quadrivetor de probabilidade de corrente como

$$J^{\mu} = (j^0, \vec{J}) = (\rho, \vec{J}), \tag{4.44}$$

onde,

$$\vec{J} = \frac{1}{2im} (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*),$$

$$\rho = \frac{i}{2m} (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}),$$
(4.45)

Notamos que a densidade de probabilidade toma uma forma bem diferente da que vemos na mecânica quântica não-relativística. Portanto utilizando a equação de probabilidade

$$\rho = \frac{i}{2m} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \tag{4.46}$$

e aplicando a solução mais simples de onda plana

$$\phi(x) = e^{-ik \cdot x},\tag{4.47}$$

conseguimos obter

$$\rho = \frac{i}{2m}(-ik^0 - ik^0) = \frac{k^0}{m} = \pm \frac{E}{m}.$$
(4.48)

Vemos então que a energia pode obter valores positivos ou negativos. Assim temos que  $\rho$  não pode ser uma densidade de probabilidade, tendo em vista que a o resultado negativo nos impede de termos uma clara interpretação física. Esse problema surge pois a equação de Klein- Gordon, diferente da equação de Schrodinger, tem uma derivada no tempo de segunda ordem, o que ocasiona os dois possíveis valores para energia . Assim a equação de Klein-Gordon foi abandonada como uma das possíveis equações que abrangesse sistemas tão pequenos quanto partículas sub-atômicas, e que estivessem ao mesmo tempo movendo-se a uma grande velocidade (Das, 2020).

#### 4.3 Equação de Dirac

Como vimos na seção anterior surge a necessidade de uma equação que consiga descrever sistemas quânticos e relativísticos ao mesmo tempo, mas que mantenha a interpretação física e lógica (Das, 2020). Para obter sucesso nessa busca a equação deve ser de primeira ordem no tempo se assemelhando mais com a de Schrodinger, e para conseguir esse feito deve-se ter uma relação linear entre os operadores de energia e momento. Utilizando a equação (37) e obtendo uma raiz positiva dela temos (lembrando que c = 1):

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.\tag{4.49}$$

Mesmo que a raiz nessa equação esteja longe de deixá-la com uma relação linear entre a energia e o momento, uma raiz quadrada da matriz pode sim solucionar o problema. Isso foi o que Dirac propôs, portanto utilizando a notação da equação (4.34) e consideremos como uma relação matricial, utilizando a notação de barra de Feynman onde

$$p = \gamma^{\mu} p_{\mu}, \tag{4.50}$$

representa a matriz de rotação de  $p^2$ . Logo por definição temos:

$$\psi p = p^{2} \mathbf{I}$$
ou,  $\gamma^{\mu} p_{\mu} \gamma^{\nu} p_{\nu} = p^{2} \mathbf{I}$ 
ou,  $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} p_{\mu} p_{\nu} = p^{2} \mathbf{I}$ 
ou,  $\frac{1}{2} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} = p^{2} \mathbf{I}$ .
$$(4.51)$$

Denotamos I como sendo a matriz identidade, que é a mais apropriada em casos onde temos n dimensões, utilizaremos também as matrizes de Dirac,  $\gamma^{\mu}$  onde  $\mu = (0,1,2,3)$ ,

que são constantes o que possibilitando uma melhor manipulação matemática da equação (Das, 2020). Para a equação de Dirac esteja de acordo com a relatividade especial, as matrizes devem satisfazer a álgebra de Clifford, que por definição é descrita pela relação:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I}. \tag{4.52}$$

Portanto, agora devemos encontrar quatro matrizes especiais que irão satisfazer a álgebra de Clifford, e que nos permita obter uma representação matricial da raiz de  $p^2$  que será linear em energia e momento. Assim temos as seguintes soluções para a equação (o termo massa é constante por isso será apresentado sem o quadrado, e o mesmo também está multiplicado a matriz identidade a qual não escreveremos explicitamente).

$$p\psi = m\psi, \tag{4.53}$$

o que satisfaz automaticamente a relação de Einstein, isso é

$$p(p\psi) = mp\psi,$$

$$ou \ p^2\psi = m^2\psi.$$
(4.54)

Logo, temos agora uma nova equação que é linear nas variáveis de energia-momento, e consequentemente dispomos de um cenário propício para definirmos consistentemente a densidade de probabilidade. Podemos então determinar as matrizes  $\gamma^{\mu}$  e suas dimensões observando álgebra utilizada na equação (4.52). Reescrevendo como

$$(\gamma^{0})^{2} = \mathbf{I},$$
sendo  $i = 1, 2, 3, \quad (\gamma^{i})^{2} = -\mathbf{I},$ 

$$\gamma^{0}\gamma^{i} + \gamma^{i}\gamma^{0} = 0,$$

$$\gamma^{i}\gamma^{j} + \gamma^{j}\gamma^{i} = 0, \quad i \neq j.$$

$$(4.55)$$

Portanto, conseguimos escolher uma das matrizes para ser a diagonal sem perder nenhum dado importante, assim adotamos

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} b_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n} \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

Das. A (2020) afirma que  $(\gamma^0)^2 = \mathbf{I}$ , deste modo os valores das diagonais vão ser  $\pm$  1, ou seja

$$b_{\alpha} = \pm 1, \quad \alpha = 1, 2, ..., n.$$
 (4.57)

Usando as relações de álgebra de Clifford e mantendo o i fixado, temos

$$\operatorname{Tr}\gamma^{i}\gamma^{0}\gamma^{i} = \operatorname{Tr}\gamma^{i}(-\gamma^{i}\gamma^{0}) = -\operatorname{Tr}(\gamma^{i})^{2}\gamma^{0} = \operatorname{Tr}\gamma^{0}, \tag{4.58}$$

onde Tr corresponde ao traço da matriz quadrada, que é quando temos a soma de todos os elementos da diagonal principal da matriz. Uma de suas propriedades é a ciclicidade, onde o traço de produto de matrizes não se altera quando mudamos a ordem dos fatores, ou seja

$$Tr ABC = Tr CAB, (4.59)$$

o que nos leva

$$\operatorname{Tr}\gamma^{i}\gamma^{0}\gamma^{i} = \operatorname{Tr}(\gamma^{i})^{2}\gamma^{0} = -\operatorname{Tr}\gamma^{0}. \tag{4.60}$$

Assim comparando a equação (4.58) com a equação (4.60), resulta em

$$\operatorname{Tr} \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = \operatorname{Tr} \gamma^0 = -\operatorname{Tr} \gamma^0,$$
  
ou,  $\operatorname{Tr} \gamma^0 = 0.$  (4.61)

Logo para que essa afirmativa seja verdadeira a matriz  $\gamma^0$  deve ter na diagonal mesma quantidade de -1 e +1. Por consequência as matrizes  $\gamma^{\mu}$ devem ter dimensão par. Assumindo que n=2N temos que a dimensão das matrizes  $\gamma^{\mu}$  será sempre um múltiplo de 2, garantindo que sejam par. Sabemos que as matrizes de Pauli juntamente com a matriz identidade formam uma base para matrizes de ordem 2x2, ou seja qualquer matriz do espaço vetorial 2x2 podem ser formadas a partir da combinação linear dessas quatro matrizes (Das, 2020). Contudo essas matrizes não satisfazem a álgebra de Clifford utilizada até então. Definindo  $\sigma^{\mu} = (\mathbf{I}, \sigma)$ , temos

$$[\sigma^{\mu}, \sigma^{\nu}]_{+} \neq 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{I}. \tag{4.62}$$

Em duas dimensões não conseguimos achar quatro matrizes que satisfazem a propriedade de anti-comutação. Logo a próxima escolha é assumirmos N=2 para matrizes 4x4 e então encontrar um conjunto 4 matrizes que satisfazem a álgebra de Clifford (Das, 2020). As matrizes desse conjunto, por exemplo, pode assumir esse formato

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{i} \\ \sigma_{-i} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.63}$$

Aqui os elementos das matrizes 4x4 são outra matriz porém 2x2, e o  $\sigma_i$  representa as 3 matrizes de Pauli. Essa escolha que Dirac fez para representar as matrizes é conhecida como uma matriz Pauli-Dirac. Apesar de ter outras representações para  $\gamma^{\mu}$  a física da equação de Dirac não se altera devido alguma representação particular escolhida para as matrizes  $\gamma^{\mu}$ . Podemos observar essa característica a partir do teorema fundamental de Pauli, onde nos diz que se houver dois conjuntos de matrizes  $\gamma^{\mu}$  e  $\gamma'^{\mu}$  que satisfazem a álgebra de Clifford, então é provável desses conjuntos estarem relacionados entre si por alguma transformação de similaridade (Das, 2020). Portanto , se

$$[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{I},$$

$$[\gamma^{'\mu}, \gamma^{'\nu}]_{+} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{I},$$

$$(4.64)$$

logo tem-se uma matriz constante e característica S de maneira que

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}.\tag{4.65}$$

Portanto, tendo a equação

$$(\gamma'^{\mu}p_{\mu} - m)\psi' = 0, \tag{4.66}$$

obtemos

$$(S\gamma^{\mu}S^{-1}p_{\mu} - m)\psi' = 0,$$
ou, 
$$S(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)S^{-1}\psi' = 0,$$
ou, 
$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)S^{-1}\psi' = 0,$$
ou, 
$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)\psi' = 0.$$
(4.67)

Sendo  $\psi = S^{-1}\psi'$ , podemos observar que a matriz ao tomar forma de uma constante pode se mover em torno do operador momento, mostrando que  $\gamma^{\mu}$  são equivalentes e se comportam como uma base para a função de onda (Das, 2020). Em vista disso obtemos a equação de Dirac representando as coordenadas, onde a equação (4.53) leva a forma

$$(i\partial \!\!\!/ - m)\psi = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0. \tag{4.68}$$

Agora, vamos continuar nosso texto avançando no estudo da relação entre os princípios de invariância e o fenômeno dos raios cósmicos.

# 5 RAIOS CÓSMICOS A QUEBRA DE INVARIÂNCIA

Como discutimos durante o texto, a invariância de Lorentz é um princípio fundamental da teoria da relatividade especial, que postula que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais, independentemente de sua velocidade relativa ou orientação no espaço-tempo. Este princípio está intrinsecamente ligado à estrutura espaço-temporal descrita pela relatividade especial e, por extensão, à maioria das teorias físicas que descrevem o comportamento das partículas e campos fundamentais. No entanto, a possível quebra da invariância de Lorentz tem sido um tema de grande interesse na física teórica, especialmente no contexto da física de altas energias e da gravidade quântica, onde novas físicas além do Modelo Padrão são frequentemente exploradas.

Um dos fenômenos onde a possível quebra da invariância de Lorentz poderia ter implicações observacionais é no chamado limite GZK. Que está relacionado aos raios cósmicos de altíssimas energias. Tal limite se refere a um corte na distribuição de energia dos raios cósmicos. Ele surge devido à interação dos raios cósmicos com a radiação cósmica de fundo. Quando prótons ou núcleos de altíssima energia colidem com fótons da CMB. Essas interações prevem em uma perda significativa de energia dos raios cósmicos ao longo de suas viagens pelo espaço, o que deveria impedir que partículas com energias acima de aproximadamente 10<sup>19</sup> eV cheguem à Terra. Portanto, a observação de raios cósmicos com energias acima desse limite seria um indicativo de uma nova física além do Modelo Padrão, como a quebra da invariância de Lorentz. Se a invariância de Lorentz for violada, as relações de dispersão para as partículas — que descrevem a relação entre sua energia e momento — podem ser modificadas. Isso pode alterar os limiares energéticos para processos como a produção de píons, permitindo que partículas com energias superiores ao limite GZK evitem essas interações com a CMB. Como consequência, raios cósmicos de ultra-altas energias poderiam, em princípio, ser observados na Terra, mesmo acima do limite GZK, sugerindo uma quebra da invariância de Lorentz (Scully; Stecker; 2009).

Vários experimentos têm buscado sinais dessa violação através da detecção de raios cósmicos de altíssimas energias, mas até agora os dados são consistentes com a existência do limite GZK, sugerindo que, se houver quebra da invariância de Lorentz, ela deve ocorrer em escalas de energia ainda não acessíveis aos experimentos atuais (Bietenholz, 2011). Além disso, a ausência de uma violação clara coloca limites importantes em muitas teorias de gravidade quântica que predizem tal quebra. De fato, a relação entre a quebra da invariância de Lorentz e o fenômeno dos raios cósmicos GZK é um campo ativo de pesquisa na física de altas energias e física atômica (Kostelecký; Russel, 2011; Mattingly, 2005; Mattingly, 2008).

Embora a observação de raios cósmicos com energias superiores ao limite GZK

possa fornecer evidências de novas físicas, os dados atuais ainda são consistentes com a invariância de Lorentz. Esse fato impõe restrições importantes às teorias que buscam descrever o comportamento da natureza em escalas de energia ultra-altas (Bietenholz, 2011).

# 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos analisar o caso em particular de uma possível quebra na invariância de Lorentz envolvendo os raios cósmicos. Fizemos um estudo detalhado sobre a radiação cósmica e o comportamento do seu espectro de energia. Analisamos o chamado efeito GZK, que mostra uma previsão sobre o fluxo de energia desses raios, e nos diz que em uma determinada energia temos uma supressão nesse fluxo. O estudo dos raios cósmicos envolve a observação das partículas com as mais altas energias do universo. Entretanto seu fluxo em altas energias é baixo o que dificulta as medições, porém é possível observar um contínuo progresso nas técnicas utilizadas e nos observatórios para melhor medi-los. Além das observações acerca dos eventos físicos que ocorrem ao redor das partículas de ultra-alta energia, podemos tirar proveito também do caminho percorrido até as chuvas extensas chegarem na terra. Assim os raios cósmicos mostram uma possibilidade única de desenvolver e acessar a fenomenologia em escalas de grandes energias.Demonstramos as transformações de Lorentz e discutimos sua importância para o entendimento da Física Relativística. Em seguida avançamos com a demonstração da equação de Klein-Gordon e seus impasses com a mecânica quântica, e completamos mostrando a equação de Dirac que abrange de forma mais condizente a mecânica quântica e a relatividade. Logo trouxemos um estudo sobre como essa quebra da Invariância de Lorentz poderia estar ligada aos raios cósmicos através da previsão do corte GZK em raios de ultra alta energia.

Por fim constatamos que apesar da busca por essa quebra da covariância ter o poder de mudar muito da física que conhecemos, ainda é algo bastante distante de se provar experimentalmente principalmente por conta dos equipamentos de detecção. Assim como afirma Bietenholz (2006) que a produção de photopion de prótons da UHECR com fótons da CMB é na verdade um processo de baixa energia inofensiva cerca de 200 MeV, entretanto a aplicação dos resultados depende de impulsos utilizando fatores de lorentz de magnitude  $\gamma \sim O(10^{11})$ . O que torna impossível a aplicabilidade de tais transformações de Lorentz, pois são extremas e não poderiam ser testadas nos laboratórios (que são limitados a  $\gamma \simeq O(10^5)$ ). Até então, não temos notícias de nenhuma evidência da existência da invariância de lorentz testada experimentalmente, apesar de cada vez mais observamos avanços na tecnologia. Outros testes a fim de detectar uma quebra na simetria de lorentz foram realizados na física atômica; em muitos casos eles fornecem limites poderosos, porém para alguns deles a precisão que é testada pode ser ainda insuficiente na hora de descartar outros cenários para essa nova física. Deste modo, caso exista a quebra de invariância, ela deve ocorrer em outros níveis de energia nos quais não conseguimos ter acesso por enquanto (Kostelecký; Russel, 2011; Mattingly, 2005; Mattingly, 2008). O que acaba restringindo as teorias que buscam investigar como a natureza se comporta em escalas extremas de

energia. Entretanto, é importante frisar o quanto os estudos sobre a quebra de simetria de Lorentz, em específico no caso dos raios cósmicos, é uma área promissora e ativa na física de altas energias. Assim, existem alguns resultados que podem dar esperanças de que esse novo campo esteja se dirigindo na direção da falsificabilidade, um critério básico para uma teoria científica.

# REFERÊNCIAS

- Aab, A., Abreu, P., Aglietta, M., Ahn, E.-J., Samarai, I. A., Albuquerque, I., Allekotte, I., Allison, P., Almela, A., Castillo, J. A., et al. The pierre auger observatory upgrade-preliminary design report. arXiv preprint arXiv:1604.03637 (2016).
- Allard, D., Parizot, E., and Olinto, A. On the transition from galactic to extragalactic cosmic-rays: Spectral and composition features from two opposite scenarios. *Astroparticle Physics* 27, 1 (2007), 61–75.
- Anderson, C. D. The apparent existence of easily deflectable positives. *Science* 76, 1967 (1932), 238–239.
- Anderson, C. D. Energies of cosmic-ray particles. *Phys. Rev.* 41 (Aug 1932), 405–421.
- Antoni, T., Apel, W., Badea, A., Bekk, K., Bercuci, A., Blumer, J., Bozdog, H., Brancus, I., Chilingarian, A., Daumiller, K., et al. Kascade measurements of energy spectra for elemental groups of cosmic rays: Results and open problems. *Astroparticle Physics* 24, 1-2 (2005), 1–25.
- Auger, P., Ehrenfest, P., Maze, R., Daudin, J., and Freon, R. A. Extensive cosmic-ray showers. *Reviews of Modern Physics* 11, 3-4 (1939), 288.
- Berezinsky, V., Gazizov, A., and Grigorieva, S. On astrophysical solution to ultrahigh energy cosmic rays. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 74, 4 (2006), 043005.
- Bietenholz, W. Cosmic rays and the search for a lorentz invariance violation. *Physics Reports* 505, 5 (2011), 145–185.
- Botogoske, G. Application of ARAPUCA technology for detection of scintillation light in liquid argon and Cherenkov radiation in water= Aplica c ao da tecnologia ARA-PUCA para detec c ao de luz de cintila c ao em arg^onio l iquido e radia c ao de Cherenkov em agua. PhD thesis, [sn], 2023.
- CASTRO, M. L. D. Flutuações intrínsecas de chuveiro atmosféricos extensos e composição química de raios cósmicos ultra-energéticos, 2012.
- Coulomb, C. A. Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. *Histoire de l'Académie royale des sciences* 569 (1785).
  - Cronin, J. W. Cosmic rays: the most energetic particles in the universe. Reviews

of Modern Physics 71, 2 (1999), S165.

Crookes, W. On electrical insulation in high vacua. *Proceedings of the Royal Society of London* 28, 190-195 (1879), 347–352.

Das, A. Lectures on quantum field theory. World Scientific, 2020.

Elster, J., and Geitel, H. On electricity dissipation in air. Ann. Phys. 2 (1900), 425–446.

Faraday, M. Experimental Researches In Electricity-Volume 1, vol. 1. Read Books Ltd, 2016.

Greisen, K. End to the cosmic-ray spectrum? *Physical Review Letters* 16, 17 (1966), 748.

Griffiths, D. J. Eletrodinâmica, 3ª edição, 2011.

Harari, D., Mollerach, S., and Roulet, E. On the ultrahigh energy cosmic ray horizon. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2006, 11 (2006), 012.

Hess, V. F. Über Beobachtungen der durchdringenden Strahlung bei sieben Freiballonfahrten. *Phys. Z.* 13 (1912), 1084–1091.

Kostelecky, V. A., and Russell, N. Data tables for lorentz and cpt violation. *Reviews of Modern Physics* 83, 1 (2011), 11–31.

LATTES, C. M., Muirhead, H., Occhialini, G. P., and Powell, C. F. Processes involving charged mesons. *Nature* 159, 4047 (1947), 694–697.

Letessier-Selvon, A. Theoretical and experimental topics on ultra high energy cosmic rays.  $arXiv\ preprint\ astro-ph/0006111\ (2000)$ .

LLEWELLYN, R. A., and TIPLER, P. A. Física moderna, 2014.

Mattingly, D. Modern tests of lorentz invariance. Living Reviews in Relativity 8, 1 (2005), 1–84.

Mattingly, D. Have we tested lorentz invariance enough?  $arXiv\ preprint\ arXiv:0802.1561$  (2008).

Maze, R. Etude d'un appareil 'a grand pouvoir de résolution pour rayons cosmiques. Journal de Physique et le Radium 9, 4 (1938), 162–168.

Popper, K. Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge. Routledge, 2014.

Roulet, E. Astroparticle theory: Some new insights into high energy cosmic rays.

- International Journal of Modern Physics A 19, 07 (2004), 1133–1141.
- Scully, S., and Stecker, F. Lorentz invariance violation and the observed spectrum of ultrahigh energy cosmic rays. *Astroparticle Physics* 31, 3 (2009), 220–225.
- Watson, A. High-energy cosmic rays and the greisen–zatsepin–kuz'min effect. Reports on Progress in Physics 77, 3 (2014), 036901.
- Watson, A. A. Catching the highest energy cosmic rays. *Astronomy Geophysics* 50, 2 (2009), 2.20–2.27.
- Wilson, C. T. R. On the ionisation of atmospheric air. *Proceedings of the Royal Society of London* 68, 442-450 (1901), 151–161.
- Zatsepin, G. T., and Kuz'min, V. A. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters 4 (1966), 78.