UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEIWISON GUEDES DOS SANTOS

UM PASSEIO HISTÓRICO E MATEMÁTICO PELO TEOREMA DE PICARD E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2024

DEIWISON GUEDES DOS SANTOS

UM PASSEIO HISTÓRICO E MATEMÁTICO PELO TEOREMA DE PICARD E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE
2024

S237u Santos, Deiwison Guedes dos.
Um passeio histórico e matemático pelo teorema de picard e algumas aplicações [manuscrito] / Deiwison Guedes dos Santos. - 2024.
42 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Me. Maxwell Aires da Silva, Departamento de Matemática - CCT".

1. Equações diferenciais. 2. Modelo de Verhulst. 3. Teorema de Picard. I. Título

21. ed. CDD 515.352

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

DEIWISON GUEDES DOS SANTOS

UM PASSEIO HISTÓRICO E MATEMÁTICO PELO TEOREMA DE PICARD E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 19/11/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **17/02/2025 17:05:32** com chave **8b30e9fced6a11ef95401a7cc27eb1f9**.
- **Maxwell Aires da Silva** (***.574.364-**), em **17/02/2025 17:06:04** com chave **9e3cc2f0ed6a11ef9ce12618257239a1**.
- **José Lucas Galdino da Silva** (***.857.714-**), em **17/02/2025 17:17:46** com chave **404e79b6ed6c11efaaf91a7cc27eb1f9**.

A Deus, por me dar forças para enfrentar todos os obstáculos ao longo da caminhada. Aos meus pais, Solange Raposo e José Francisco, que sempre me apoiaram nos meus estudos e em minha vida. Ao meu tio, Luciano Raposo, que desde a minha infância me incentivou e serviu de espelho para minha vida acadêmica e pessoal. Dedico.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me guiar, iluminar meu caminho e me dar forças para superar os desafios ao longo desta jornada.

Aos meus pais, Solange Raposo e José Francisco, pelo amor incondicional, pelo apoio constante e cuidado que sempre tiveram comigo. Obrigado por acreditarem em mim e por estarem ao meu lado em todos os momentos especiais em minha vida.

À minha família, por todo o cuidado e afeto que tiveram comigo, em especial ao meu tio, Luciano Raposo, que sempre foi mais do que um familiar, foi um exemplo de dedicação e integridade, alguém que admiro profundamente e que serviu de inspiração em minha vida acadêmica e pessoal.

Gostaria de expressar minha eterna gratidão à minha amada namorada, Vitória Raina, pelo seu apoio, carinho e paciência, que foram fundamentais ao longo desta jornada. Agradeço por estar sempre ao meu lado, oferecendo palavras de incentivo nos momentos difíceis e celebrando comigo cada pequena conquista.

A todos os professores do meu ensino médio, dentre eles: José Valber; Maciel Marrero; Vagner Ataíde; Jorge Nunes; Erivânia Duarte; Erberty Silva; que desempenharam um papel fundamental na construção da minha base acadêmica e no desenvolvimento da minha paixão pelo conhecimento. Em especial, ao prof. José Valber, que despertou em mim o verdadeiro interesse pela matemática, tornando-se um grande amigo e uma inspiração por sua trajetória de vida.

Gostaria de expressar minha mais sincera gratidão ao meu excelentíssimo orientador, prof. Me. Maxwell Aires, por todo o apoio, dedicação e orientação ao longo deste trabalho. Seu comprometimento e paciência foram essenciais para a realização deste projeto, e sua orientação foi fundamental para meu crescimento acadêmico e profissional.

Ao prof. Dr. José Lucas, por sua profunda dedicação e comprometimento com o meu desenvolvimento acadêmico e por suas valiosas observações e orientações, que foram essenciais para aprimorar a qualidade deste trabalho.

Gostaria de agradecer a prof. Dra. Emanuela Régia, por sua dedicação, paciência e apoio ao longo da minha formação acadêmica que foram inestimáveis. Seu compromisso com a educação e o carinho com que trata seus alunos me inspiraram profundamente e deixaram uma marca permanente na minha vida. A senhora foi um verdadeiro exemplo de inspiração, sabedoria e generosidade.

Aos meus grandes amigos José Augusto, Mateus Martins e Matheus dos Santos, pelo apoio incondicional, pelas risadas nas horas mais tensas e pelos papos que, muitas vezes, nos ajudaram a superar as dificuldades. Cada um de vocês fez essa jornada muito mais leve e divertida, e, sem dúvida, a amizade de vocês se tornou uma das maiores conquistas dessa trajetória. Vocês são mais do que amigos, são irmãos que a vida me deu.

“Uma equação não significa nada para mim a não ser que expresse um pensamento de Deus.”

Srinivāsa Rāmānujan

RESUMO

O presente trabalho visa apresentar, demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferencias ordinárias, mais conhecido como teorema de Picard. Inicialmente, exploramos a história dos matemáticos que contribuíram (direta e indiretamente) para construção do teorema, seguido com a teoria preliminar através de uma revisão bibliográfica, até chegarmos no resultado principal, o qual demonstramos com riqueza de detalhes, explorando junto com algumas de suas aplicações, especialmente no modelo logístico populacional e no lançamento de foguetes. Por fim, deixamos algumas sugestões para pesquisas futuras que podem ser desenvolvidas a partir do que expomos.

Palavras-chave: equações diferenciais; modelo de Verhulst; lançamento de foguetes; Teorema de Picard.

ABSTRACT

The present work aims to presentation, demonstrate and show some applications of the theorem of existence and uniqueness of solutions to ordinary differential equations, better known as Picard's theorem. Initially, we explored the history of mathematicians who contributed (directly and indirectly) to the construction of the theorem, followed by the preliminary theory through a bibliographical review, until we reached the main result, which we demonstrated in great detail, exploring together with some of its applications, especially in the population logistics model and rocket launching. Finally, we leave some suggestions for future researche that can be developed based on what we expose.

Keywords: differential equations; Verhulst's model; rocket launch; Picard's Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática desempenha um papel fundamental no entendimento de fenômenos complexos, nesse sentido os estudos das Equações Diferenciais Ordinárias tornam uma excelente ferramenta para a compreensão de muito desses fenômenos e resolução de problemas diversos. Além de serem fundamentais para o entendimento de fenômenos dinâmicos, suas aplicações convergem para diversas áreas, dentre elas estão a Matemática, a Física, a Biologia, e até a Medicina. Contudo, um dos principais desafios está em garantir que essas equações tenham soluções bem definidas, o que é crucial para a confiabilidade dos modelos. Dentre todos os tópicos dessa área destaca-se o Teorema da Existência e Unicidade, ou popularmente conhecido como **Teorema de Picard**, que estipula condições para soluções de EDOs, além de ser uma ferramenta importante, pois estabelece suporte teórico para uma análise profunda sobre problemas sofisticados.

O teorema foi proposto pelo matemático francês **Charles Émile Picard**. Todavia, já se havia resquícios do que vinha a ser futuramente as bases para a construção desse resultado, ou seja ele evoluiu gradativamente ao longo do tempo. A priori, foi se destacando com base em sua finalidade, pois oferece garantias de existência e unicidade de soluções de problemas matemáticos (ou modelados matematicamente), sendo o motivo pelo qual é conhecido como "Teorema da Existência e Unicidade". É particularmente útil em modelos onde a continuidade das soluções é fundamental, como no caso do modelo logístico populacional e no modelo de lançamento de foguetes.

O modelo logístico populacional é amplamente utilizado na ecologia e em estudos de dinâmica das populações, pois descreve o crescimento limitado de uma população em função de recursos finitos e questões ambientais, visto que a aplicação do teorema nesse cenário não apenas confirma a existência de solução única, mas também assegura estabilidade do modelo diante de variações nas condições iniciais.

Por outro lado, o modelo de lançamento de foguetes, utilizado amplamente na engenharia aeroespacial, abrange Equações Diferenciais Ordinárias que descrevem a trajetória e a velocidade de um foguete em função de variáveis, como a queima de combustível em relação ao tempo. Neste aspecto, o teorema permite verificar que as trajetórias previstas são contínuas e únicas, colaborando para uma análise mais confiável dos fatores que influenciam diretamente ou indiretamente no lançamento. Dessa forma, torna-se possível realizar simulações mais seguras e precisas.

Este trabalho tem como objetivo aprofundar e explorar a compreensão do Teorema de Picard. Primeiramente, analisando seu desenvolvimento histórico no decorrer dos séculos. Depois, faremos uma breve exposição sobre a teoria preliminar no qual abordaremos alguns resultado prévios que serão usados para construção do teorema, em seguida, desenvolveremos suas aplicações em dois modelos, que são: no modelo de Verhulst e no

Lançamento de foguetes, finalizando com nossas considerações finais, deixando também algumas sugestões para pesquisas futuras.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Primeiramente, com base no objetivo principal deste trabalho, que é a demonstração e apresentação de algumas aplicações do Teorema de Existência e Unicidade, também conhecido como Teorema de Picard, destaca-se que é de extrema importância mostrarmos como os estudos foram desenvolvidos e por quem foram, de modo que tenhamos uma melhor compreensão de como Picard se baseou para apresentação do teorema. Assim, é aberto um espaço para um aprofundamento histórico sobre os primórdios do Cálculo Diferencial e Integral, em conjunto com as Equações Diferenciais Ordinárias.

2.1 Isaac Newton (1643-1727)

Figura 1 – Imagem de Isaac Newton

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 25 de dezembro de 1642, **Isaac Newton** revelou grandes habilidades desde criança, projetando miniaturas mecânicas engenhosas e deleitando-se com suas experiências. Formou-se no Trinity College, em Cambridge. Foi nessa época que, devido a um livro de astronomia que caiu em suas mãos, sua atenção se voltou para a Matemática. Esse novo interesse levou-o a ler primeiramente *Os Elementos* de **Euclides** e "*La Géométrie*" de **Descartes**. Ele também leu autores como **Kepler**, **Viète** e **Wallis**. Assim, segundo EVES (2004), não demorou muito para que ele começasse a criar sua própria Matemática.

Sua primeira contribuição foi o Teorema do Binômio Generalizado (hoje conhecido como Binômio de Newton em sua homenagem). Depois, desenvolveu os métodos de fluxões, como ele chamava o atual Cálculo Diferencial. Do final do verão de 1665 até o final de 1667, a Universidade de Cambridge esteve praticamente fechada devido a uma doença que se espalhava por todo o país, chamada peste bubônica. Assim, devido a essas condições, foi necessário refugiar-se em sua casa. Entretanto, Newton continuou seus estudos e experiências, abrindo portas em várias áreas do conhecimento, principalmente em Física e Matemática. Não só isso, mas ele também desenvolveu o Cálculo e questões de física, como óptica, além de estabelecer os princípios básicos de sua teoria da gravitação. Todavia, segundo EVES (2004), na página 436, pesquisas recentes mostram que esse relato é um mito disseminado pelo próprio Newton para ajudá-lo a ganhar primazia na questão da descoberta do Cálculo.

Sendo mito ou verdade, Newton teve grande importância, sendo considerado o pai do Cálculo e contribuindo direta e indiretamente para o desenvolvimento dessa nova área. Certamente, como matemático, está entre os maiores que o mundo já produziu em todos os tempos. Sua acuidade para com os problemas físicos e a habilidade para abordá-los matematicamente o fez destacar-se na historia da matemática e dá Ciência. Como resultado, o próprio Lagrange se referia a Newton como o maior gênio de todos os tempos.

2.2 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Figura 2 – Imagem de Gottfried Leibniz

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 1 de julho de 1646, em Leipzig, **Gottfried Wilhelm Von Leibniz** foi um dos maiores gênios do século XVII e é considerado o rival de Newton na invenção do Cálculo. Quando criança, aprendeu latim e grego por conta própria, e aos 12 anos de idade já dominava amplamente o conhecimento corrente de Matemática, Filosofia e Teologia. Por essa época, ainda menino, começou a desenvolver as primeiras ideias de sua "*characteristica generalis*", uma concepção que envolvia uma matemática universal, algo que posteriormente iria se manifestar na lógica simbólica (EVES (2004)).

Segundo Howard Eves, no seu livro EVES (2004), antes de deixar Paris, onde estava cumprindo uma missão diplomática, e assumir o posto de bibliotecário e conselheiro do Eleitor de Hanover, Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas fórmulas elementares de diferenciação.

Ainda segundo EVES (2004), Leibniz inventou seu cálculo entre 1673 e 1676. Não só isso, mas usou pela primeira vez o símbolo de integral como a letra "S" alongada, derivado da primeira letra da palavra "summa" em latim, para indicar uma soma de indivisíveis.

As notações de Leibniz são as que mais utilizamos hoje. Assim, tendo como base tudo o que ele produziu, Leibniz é considerado o pai do Cálculo, assim como Newton. Evidentemente, ele fez várias contribuições e estabeleceu parâmetros para trabalhos posteriores que viriam após ele.

2.3 Johann Bernoulli (1667-1748)

Figura 3 – Imagem de Johann Bernoulli

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 27 de julho de 1667, na Basileia, **Johann Bernoulli** foi um matemático suíço que estudou a reflexão e a refração da luz, as trajetórias ortogonais de famílias de curvas, a quadratura de áreas por séries e a braquistocrona.

Ele foi o décimo filho de Nicolas e Margaretha Bernoulli e irmão de Jakob Bernoulli, sendo doze anos mais novo que seu irmão. Vale salientar que os dois irmãos tiveram uma influência importante no desenvolvimento matemático um do outro. Consta-se que era verdade que, em seus primeiros anos, Johann deve ter sido muito influenciado ao ver Jakob seguir uma carreira matemática, apesar das objeções de seus pais, que queriam que ele seguisse o ramo empresarial.

Na Universidade de Basileia, Johann cursou Medicina, mas também estudou matemática com seu irmão, que lecionava física experimental na mesma universidade. Logo ficou claro que Johann dedicava a maior parte de seu tempo ao estudo dos artigos de Leibniz sobre Cálculo junto com Jakob. De modo que, após dois anos de estudo conjunto, Johann alcançou seu irmão em termos de habilidades matemáticas.

Em 1690, Johann Bernoulli iniciou sua jornada acadêmica com a publicação de um estudo sobre o processo de fermentação, demonstrando interesse por áreas além da Matemática. Surpreendentemente, no ano seguinte, em 1691, ele se dirigiu a Genebra, onde assumiu o cargo de professor de Cálculo Diferencial. Eventualmente, sua trajetória o levou a Paris, onde se encontrou com o círculo de Malebranche, um importante centro da

Matemática francesa na época. Lá, teve a oportunidade de travar profundas conversas matemáticas com o Marquês de L'Hôpital.

De L'Hôpital ficou encantado ao descobrir que Johann Bernoulli compreendia os novos métodos de Cálculo que Leibniz acabara de publicar e pediu a Johann que lhe ensinasse esses métodos. Assim, Johann concordou e as aulas foram ministradas em Paris, na casa de campo de L'Hôpital em Oucques. Porventura, Bernoulli recebeu um pagamento generoso de L'Hôpital por essas aulas, e de fato, elas foram muito valiosas, pois poucas pessoas eram capazes de ministrá-las. Logo adiante, após retornar a Basileia, Johann continuou suas aulas de Cálculo por correspondência, o que não foi barato para L'Hôpital, que pagou a Bernoulli metade do salário de um professor pela instrução. No entanto, isso garantiu a L'Hôpital um lugar na história da matemática, já que ele publicou o primeiro livro de Cálculo, "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*" (1696), baseado nas lições enviadas por Johann Bernoulli.

Johann também iniciou uma correspondência com Leibniz para ampliar seus estudos, e essa troca revelou-se extremamente frutífera. Na verdade, acabou sendo a correspondência mais importante que Leibniz teve. Naturalmente, esse foi um período de consideráveis realizações matemáticas para Johann, que produziu numerosos artigos sobre temas matemáticos e publicou resultados importantes contidos em sua correspondência.

Além disso, uma corrente de ideias Matemáticas continuou a fluir de Johann Bernoulli. Sendo que em 1694, ele considerou a função $\operatorname{sen} x = x^x$ e também investigou séries usando o método de integração por partes. Para Bernoulli, a integração era vista simplesmente como a operação inversa da diferenciação, e com essa abordagem ele obteve grande sucesso na integração de Equações Diferenciais. Ele somou séries e descobriu teoremas de adição para funções trigonométricas e hiperbólicas usando as Equações Diferenciais que essas funções satisfazem.

Johann Bernoulli alcançou grande fama durante sua vida. Com efeito, foi eleito membro das academias de Paris, Berlim, Londres, São Petersburgo e Bolonha. Assim sendo conhecido como o "Arquimedes de sua época", e esse título está realmente inscrito em sua lápide.

2.4 Leonhard Euler (1707-1783)

Nascido em 15 de abril de 1707, em Basileia, **Leonhard Euler** foi um grande matemático suíço que fez enormes contribuições para uma ampla gama de áreas da Matemática e da Física, incluindo Geometria Analítica, Trigonometria, Geometria, Cálculo e Teoria dos Números.

Desde criança, Euler demonstrou um grande talento para a Matemática, incentivado por seu pai, Paul Euler, que estudou Teologia e Matemática na Universidade de Basileia, e por Johann Bernoulli, amigo de seu pai e um dos maiores matemáticos da época. Acabou ingressando na Universidade de Basileia com 14 anos, inicialmente seguindo os desejos de

Figura 4 – Imagem de Leonhard Euler

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

seu pai para estudar Teologia, mas rapidamente mudou seu foco para a Matemática com a aprovação do pai e a persuasão de Johann Bernoulli. Ele completou seu mestrado em Filosofia em 1723, comparando as ideias de Descartes e Newton, e logo depois começou a publicar seus primeiros artigos.

Em 1727, Euler foi convidado para São Petersburgo pela Academia Russa de Ciências, onde trabalhou com muitos cientistas renomados, como Daniel Bernoulli e Christian Goldbach. Em 1730, tornou-se professor de Física e, em 1733, após a saída de Johann Bernoulli, assumiu a cadeira de matemática sênior. Destaca-se esse período que foi marcado por um aumento significativo em sua produção acadêmica e pela realização de vários projetos de estado.

Posteriormente, em 1741, Euler mudou-se para Berlim a convite de Frederico, o Grande, e permaneceu lá por 25 anos, produzindo cerca de 380 artigos e vários livros sobre diversas áreas da matemática teórica e aplicada, incluindo Cálculo das Variações, Análise e Construção Naval. Não só isso, mas também atuou como consultor do governo em diversos assuntos e supervisionou projetos práticos, como a correção do nível do canal Finow e o sistema hidráulico de Sans Souci.

Logo depois, em 1776, Euler retornou a São Petersburgo, onde continuou a trabalhar intensamente, mesmo após ficar quase totalmente cego devido a uma doença. Surpreendentemente, ele produziu quase metade de suas obras após a cegueira total, com a ajuda de seus assistentes, incluindo seu neto. Desse modo, Euler continuou trabalhando até sua morte, em 1783, quando sofreu uma hemorragia cerebral após um dia de trabalho normal.

É notório que Euler fez avanços significativos no estudo das Equações Diferenciais, sendo um dos primeiros a sistematizar métodos para resolvê-las, tanto lineares quanto não lineares. Ele introduziu métodos que permitiam tratar Equações Diferenciais em forma algébrica, facilitando sua resolução e fornecendo uma base metodológica para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática. Para mais detalhes, veja EULER (1732).

2.5 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Figura 5 – Imagem de Augustin-Louis Cauchy

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 21 de agosto de 1789, em Paris, **Augustin-Louis Cauchy** foi um dos pioneiros no estudo da Análise, tanto real quanto complexa, e na Teoria dos Grupos de Permutação. Além disso, ele pesquisou convergência e divergência de séries infinitas, Equações Diferenciais, Determinantes, Probabilidade e Física Matemática.

Durante sua infância, devido aos acontecimentos políticos da Revolução Francesa, sua vida foi difícil. Assim, ainda jovem, mudou-se com a família para Arcueil para escapar dos perigos em Paris, retornando posteriormente. Sobretudo, sua educação foi fortemente influenciada por seu pai e por matemáticos renomados como Laplace e Lagrange, que frequentavam a casa da família Cauchy.

Logo depois, ele começou sua educação formal focando inicialmente em línguas clássicas antes de ingressar na École Polytechnique em 1805, onde estudou sob a supervisão de Lacroix, de Prony, Hachette e Ampère. Então, continuando sua formação, ingressou na École des Ponts et Chaussées, onde se destacou como um excelente aluno por seu trabalho prático. Desse modo, foi designado para o projeto do canal Ourcq, onde trabalhou com Pierre Girard.

Posteriormente, Cauchy realizou importantes pesquisas matemáticas e provou em 1811 que os ângulos de um poliedro convexo são determinados por suas faces. Após vários trabalhos, ele buscava uma carreira acadêmica e, depois de várias tentativas, conseguiu alcançá-la. No entanto, devido às suas fortes convicções religiosas e políticas, frequentemente entrou em conflito com colegas e autoridades, inclusive, após a revolução de Julho de 1830, ele se recusou a prestar juramento de lealdade ao novo regime, resultando na perda de seus cargos acadêmicos. Com isso, passou algum tempo na Suíça e na Itália, onde lecionou e continuou suas pesquisas, retornando a Paris em 1838 e recuperando seu cargo na Academia de Ciências. Ainda assim, continuou a enfrentar desafios políticos e acadêmicos.

Nota-se que suas contribuições foram numerosas. Cauchy foi pioneiro na introdução de rigor matemático ao Cálculo, definindo formalmente conceitos de limites, continuidade e integrais, estabelecendo uma base sólida para a Análise Matemática. Essa formalização foi crucial para o desenvolvimento de métodos precisos para lidar com Equações Diferenciais. Dessa maneira, Cauchy foi o primeiro a formular uma fórmula rigorosa e a provar certos resultados, estabelecendo condições para a existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais, lançando as bases para o teorema da existência e unicidade.

2.6 Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)

Figura 6 – Imagem de Lipschitz

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 14 de maio de 1832 em Bönkeim, **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** nasceu na propriedade de seu pai. Infelizmente não há relatos escritos sobre sua infância, mas ele iniciou seus estudos universitários ainda jovem, ingressando na Universidade de Königsberg e estudando com Franz Neumann. Seguindo o costume da época, Rudolf se mudou para Berlim, onde estudou com Dirichlet. No entanto, este não foi um período fácil para ele, pois ficou doente e precisou tirar um ano de seus estudos para se recuperar. Ainda assim, completou seu doutorado em 9 de agosto de 1853.

Após seu doutorado, Rudolf passou quatro anos lecionando no ginásio de Königsberg e em Elbing. Mas só em 1857 ele se tornou Privatdozent (título universitário próprio das universidades de língua alemã na Europa) na Universidade de Berlim, um cargo de professor reconhecido que não fazia parte do quadro de funcionários assalariados. Em 1862, tornou-se professor extraordinário em Breslau.

Logo depois, durante seus dois anos em Breslau, Rudolf escreveu dois artigos que não foram muito importantes. Posteriormente, foi nomeado professor ordinário pela Universidade de Bonn, onde passou o resto de sua carreira, deixando Breslau na Páscoa de 1864.

Surpreendentemente, Rudolf fez contribuições importantes e frutíferas na Teoria dos Números, na Teoria das Funções de Bessel e das Séries de Fourier, nas Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, bem como na Mecânica Analítica e na Teoria do Potencial. No entanto, o trabalho mais importante de Rudolf, e pelo qual ele é mais lembrado, é pela "condição de Lipschitz", veja LIPSCHITZ (1876), uma desigualdade que garante uma solução única para a equação diferencial $y' = f(x, y)$. Que, posteriormente, Peano desenvolveu um teorema de existência para equações diferenciais, fornecendo condições que garantem pelo menos uma solução."Vejam também ARZELÀ (1895).

2.7 Giuseppe Peano (1858-1932)

Figura 7 – Imagem de Giuseppe Peano

Fonte: *https: // mathshistory. st-andrews. ac. uk/*

Nascido em 27 de agosto de 1858 na Itália, **Giuseppe Peano** foi o fundador da lógica simbólica, com interesses centrados nos fundamentos da matemática e no desenvolvimento de uma linguagem lógica formal.

Ele cresceu em uma família humilde, que trabalhava na agricultura. Porém, estudou na escola da aldeia em Spinetta e, posteriormente, em Cuneo, onde se destacou por sua inteligência. Um tio, Martino, reconheceu seu talento e o levou para estudar em Turim em 1870. Completou seus estudos no Liceo Cavour em 1876 e ingressou na Universidade de Turim no mesmo ano.

Logo depois, em 1880, formou-se doutor em Matemática e imediatamente ingressou no corpo docente da Universidade de Turim como assistente de D'Ovidio. No mesmo ano, publicou seu primeiro artigo matemático. No ano seguinte, em 1881, tornou-se assistente de Angelo Genocchi. Com a saúde debilitada de Genocchi, Peano assumiu parte das responsabilidades de ensino e, três anos depois, publicou o "Curso de Cálculo Infinitesimal", baseado nas palestras de Genocchi, mas com contribuições próprias.

Posteriormente, em 1886, Peano provou que, se $f(x, y)$ é contínua, então uma EDO tem uma solução. Quatro anos depois, em 1890, demonstrou que as soluções não eram únicas, exemplificando com a equação diferencial $\frac{dy}{dx}3y^{2/3}$. Esse resultado foi um avanço significativo porque, antes disso, a existência de soluções para equações diferenciais era garantida sob condições mais restritivas, como as fornecidas por Cauchy e Lipschitz.

Dando continuidade aos seus trabalhos, apresentou os famosos axiomas que definem os números naturais em termos de conjuntos, publicados em *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* no ano de 1889. Esse trabalho foi fundamental para a lógica matemática e seus fundamentos. Além disso, Peano inventou as curvas de preenchimento de espaço, demonstrando mapeamentos contínuos do intervalo [0, 1] para o quadrado unitário, o que surpreendeu a comunidade matemática da época.

Logo, é reconhecido que a carreira de Peano foi marcada por inovações matemáticas significativas e uma dedicação à precisão e o rigor. Seus axiomas e métodos continuam a ser fundamentais na matemática moderna, e sua abordagem lógica influenciou gerações subsequentes de matemáticos e cientistas. Para ver o trabalho original, indicamos PEANO (1890).

2.8 Charles Émile Picard (1856-1941)

Figura 8 – Imagem de Picard

Fonte: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/*

Nascido em 24 de julho de 1856 em Paris, **Émile Picard** foi um destacado matemático dos séculos XIX e XX, com contribuições significativas em Geometria Algébrica, Elasticidade, Calor e Eletricidade.

Foi criado em uma família cujo pai era gerente de uma fábrica de seda e morreu durante o Cerco de Paris em 1870, consequência da Guerra Franco-Prussiana. Assim, Picard e seu irmão foram sustentados por sua mãe, filha de um médico, que garantiu a educação dos filhos após a morte do marido.

Logo depois, Picard estudou no Lycée Napoléon, onde se destacou em várias disciplinas, apesar de inicialmente não gostar de Matemática. No entanto, durante as férias, após terminar o ensino secundário, seu interesse pela Matemática foi despertado ao ler um livro de Álgebra.

Posteriormente, Ele ingressou na École Normale Supérieure, onde se destacou, ficando em primeiro lugar nos exames de admissão. Após receber sua agrégation (licenciatura) em 1877, trabalhou como assistente e foi nomeado professor na Universidade de Paris em 1878 e, posteriormente, em Toulouse em 1879. Em 1881, foi nomeado maître de conférence em Mecânica e Astronomia na École Normale e retornou a Paris. Em 1885, foi nomeado para a cadeira de Cálculo Diferencial na Sorbonne, embora tenha inicialmente enfrentado um regulamento que impedia que alguém com menos de trinta anos ocupasse a cadeira. Todavia, em 1897, ele trocou sua cadeira para a de Análise e Álgebra, focando na formação de alunos de pesquisa.

Destaca-se que Picard recebeu reconhecimento de Jacques Hadamard, que destacou sua habilidade como professor, enfatizando sua capacidade de ensinar temas complexos de forma clara e detalhada. Além disso, Picard treinou mais de 10.000 engenheiros entre 1894 e 1937 na École Centrale des Arts et Manufactures, influenciando gerações de cientistas e engenheiros.

Émile Picard também fez contribuições fundamentais para o campo das Equações Diferenciais, particularmente através do desenvolvimento do método das aproximações sucessivas e do estabelecimento das condições de existência e unicidade das soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Desse modo, suas técnicas e teoremas formaram uma base para muitos avanços subsequentes na teoria das equações diferenciais, influenciando tanto a pesquisa teórica quanto as aplicações práticas, como será discutido nos capítulos seguintes deste presente trabalho. Os trabalhos originais de Picard podem ser estudados em PICARD (1890) e PICARD (1893).

Em resumo, vemos que o teorema de Picard foi fruto de uma construção histórica feita ao longo de, aproximadamente, 200 anos. Além disso, existiram algumas versões desse resultado até se chegar na formulação atual, a saber, Cauchy mostrou que se a função presente no PVI é diferenciável, então este tem solução. Em seguida, Lipschitz mostrou que, diante da condição que hoje leva seu nome, a qual é uma hipótese mais fraca do que a diferenciabilidade proposta por Cauchy, o PVI ainda assim tem solução. Passado algum tempo, Peano mostrou que a função precisa ser apenas contínua, e finalmente, Picard exibiu com seu operador condições não apenas para existência, mas também a unicidade de solução do PVI.

3 TEORIA PRELIMINAR

Neste capítulo abordamos conceitos preliminares e suas definições para uma futura e melhor compreensão do Teorema de Existência e Unicidade e suas Aplicações, junto com suas demonstrações. Dentre os conteúdos, abordamos a definição de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), solução de uma EDO, o problema do valor inicial (PVI), Espaços Métricos, Aplicação Lipschitziana, Aplicação localmente Lipschitziana, Contração, Ponto Fixo, entre outras. Para um estudo com maior acuidade, indicamos a leitura de VIANA (2022).

3.1 Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Definição 3.1. Sejam $t \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}, U \subseteq \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Uma **Equação Diferencial Ordinária** é uma expressão da forma:

$$x^{(k)} = F(t, x, x', ..., x^{(k-1)}), \tag{3.1}$$

em que $x^{(k)}$ denota a derivada de ordem k de $x = x(t) \in \mathbb{R}^d$.

Observação 1. Ordem e dimensão

É chamada de **Ordem** da EDO, a derivada de mais alta ordem da equação, no caso k, e o numero d é chamado de **Dimensão** da EDO.

Agora, tome a EDO de ordem k dada em (3.1), e note que esta pode ser reescrita como um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Com efeito, façamos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ &\vdots \\ x_{k-1}' &= F(t, x, x_1, ..., x_{k-1}), \end{aligned}$$

e então, montamos por meio dessas substituições a EDO

$$y' = G(t, y), \tag{3.2}$$

em que $y = (x, x_1, ..., x_{k-1})$ e

$$G(t, y) = (x_1, ..., x_{k-1}, F(t, x, x_{1,...,x_{k-1}}))$$

Assim, toda EDO poder ser transformada em uma equação de primeira ordem. Portanto, teoricamente, qualquer resultado que provarmos para EDOs de primeira ordem, vão continuar válidos para equações de mais alta ordem.

Definição 3.2. Solução de uma EDO
Uma solução para (3.2), tomando $G = F$, é uma aplicação

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

de classe C^k, tal que:

(1) I é um intervalo;

(2) $x \in \mathbb{R}^d, \forall\ t \in I$;

(3) $\dfrac{d\gamma^k}{dt^k} = F(t, \gamma)$.

3.2 Problema do Valor inicial (PVI)

Sejam I um intervalo da reta, $U \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Fixado um par $(t_0, x_0) \in U$, define-se o **Problema de Valor Inicial (PVI)** associado a F ao problema dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Tendo em vista tudo que foi exposto até aqui, é interessante refletirmos sobre as seguintes perguntas:

Pergunta 1: Todo PVI tem solução?
Pergunta 2: Se sim, quantas são as soluções?
Pergunta 3: Quais são as condições que se deve impor sobre a aplicação F de modo que um PVI tenha uma única solução?

Respondendo às perguntas, começando pela **Pergunta 1**, considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3x}{t} \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Para determinar a função que torna a primeira igualdade verdadeira, pode-se recorrer ao método de variáveis separáveis, obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{t} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{3dt}{t} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{3dt}{t} \\
&\Rightarrow \quad \ln|x| = 3\ln|t| + C_1 \\
&\Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|t^3| + C_1 \\
&\Rightarrow \quad x(t) = Ct^3, \text{em que } C = e^{C_1}.
\end{aligned}$$

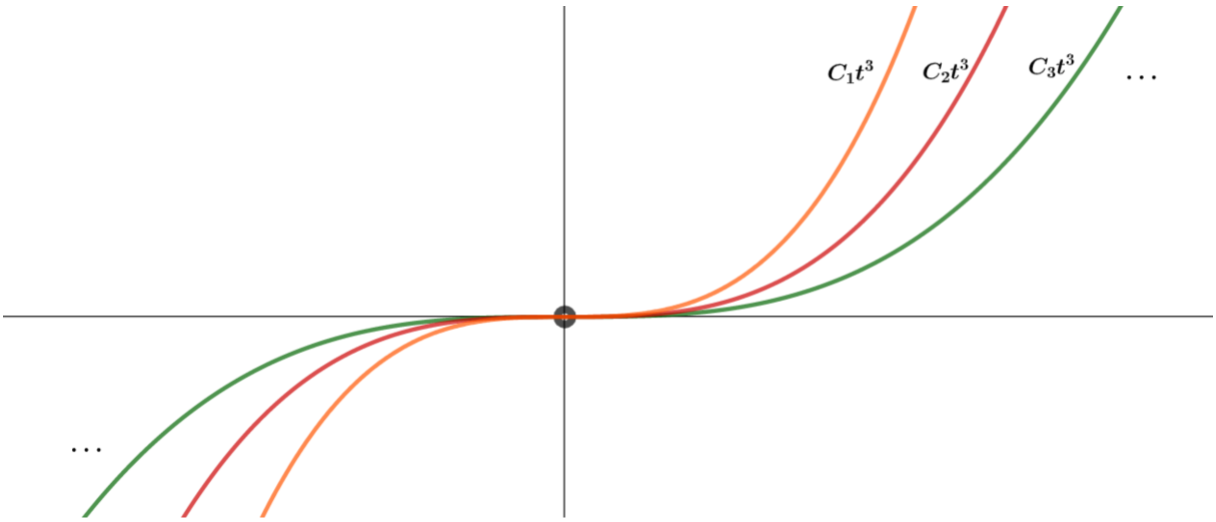
Agora perceba que $x(0) = 0$, para todo $C \in \mathbb{R}$ e como a condição inicial de (3.4) é $x(0) = 1$, segue que tal PVI não tem solução.

Para respondermos à **Pergunta 2**, considere agora o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3x}{t} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Agora, pelos mesmos cálculos anteriores, $x(t) = Ct^3$ é a função que torna a primeira igualdade verdadeira. Além disso, como $x(0) = 0$ para qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$, então neste caso, o PVI (3.5) tem infinitas soluções, que estão ilustradas geometricamente no gráfico a seguir:

Figura 9 – Infinitas soluções



Fonte: *Elaborado pelo autor, 2024*

Continuando agora, considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3x}{t} \\ x(1) = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

E novamente $x(t) = Ct^3$ é a função que torna a primeira igualdade verdadeira. Sendo assim, impondo a condição inicial, chega-se em $C = 1$, e portanto, $x_0(t) = t^3$ é, nesse caso, **única solução** de (3.6). Dessa forma, respondendo à **Pergunta 2** e parcialmente à **Pergunta 3**, a quantidade de soluções depende de outros fatores, um deles que ficou claro com esses exemplos é **valor inicial** que foi imposto.

Pela discussão desenvolvida até aqui concluímos que o valor inicial influencia no fato do PVI ter, ou não, solução, e ainda mais, em caso afirmativo, pode também influenciar na quantidade dessas soluções. Agora, para respondermos à **Pergunta 3**, precisamos antes apresentar toda uma teoria pleliminar, uma vez que a resposta desta é o **Teorema de Picard**, objeto principal de estudo desse texto.

3.3 Espaços Métricos

Definição 3.3. Seja $X \neq \varnothing$ um conjunto e

$$\begin{array}{rcl} d : X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) \end{array}$$

O par (X, d) é dito **Espaço Métrico** quando:
(1) $d(x,y) \geq 0$, e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall\ x, y \in X$;
(2) $d(x,y) = d(y,x), \forall\ x, y \in X$;
(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall\ x, y, z \in X$.

Nestas condições dizemos que d é uma métrica em X, chamada **função distância** em X. Assim, (X, d) é um espaço métrico quando d é uma métrica em X.

Para que tenhamos uma melhor compreensão, vejamos um exemplo a seguir de um **espaço métrico** bastante conhecido:

Exemplo 3.1. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A seguinte função

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d(x,y) & \longrightarrow & |x-y| \end{array}$$

é uma métrica sobre $\mathbb{R}$. De fato
(1) Queremos provar que $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Ora, mas com a métrica d considerada, temos $d(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow |x-y| \geq 0$, o que já é verdade dentro da definição de módulo de um número real.

$$d(x,y) \geq 0 \text{ e } d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y. \text{ então}$$
$$d(x,y) \geq 0 \Longleftrightarrow |x-y| \geq 0$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(x,y)=0 &\iff |x-y|=0 \\ &\iff x-y=0 \\ &\iff x=y. \end{aligned}$$

(2) Sabemos que o modulo da diferença representa a distancia desse dois números reais, e por definição é comutativo, então temos que:

$$d(x,y)=d(y,x) \iff |x-y|=|y-x|.$$

(3)

$$d(x,z)=d(x,y)+d(y,z) \iff |x-z| \leq |x-y|+|y-z|.$$

Recorde que a desigualdade triangular do módulo, é da forma

$$|x+z| \leq |x|+|z|.$$

Ora, mas note que

$$x-z=(x-y)+(y-z).$$

Sendo assim, temos

$$|x-z|=|(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z|.$$

Definição 3.4. (Espaço Métrico Completo) O par (X,d) é dito um **Espaço Métrico Completo** quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.

Definição 3.5. (Aplicação Lipschitziana) Uma aplicação entre espaços Métricos $T : X \longrightarrow Y$ é dita **lipschitziana** quando existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y), \forall\ x,y \in X.$$

Definição 3.6. (Aplicação Localmente lipschitziana) Uma aplicação

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

em que $U \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ é um aberto é dita **Localmente Lipschitziana** em x quando para todo $(t_0,x_0) \in U$ existem $\delta > 0$, $\lambda > 0$ tais que $\overline{B(t_0,\delta)} \times \overline{B(x_0,\delta)} \subset U$ e $\|F(t,x_1)-F(t,x_2)\| \leq \lambda \cdot \|x_1-x_2\|, \forall\ t \in \overline{B(t_0,\delta)}$ e $\forall\ x_1,x_2 \in \overline{B(x_0,\delta)}$.

Definição 3.7. (Contração) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação

$$T : X \longrightarrow X$$

é dita uma **Contração** quando existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \forall\ x, y \in X$

Definição 3.8 (**Ponto fixo**). Seja (X, d) um espaço métrico e T uma aplicação da forma

$$T : X \longrightarrow X.$$

Um ponto $x \in X$ é dito **ponto fixo** quando $T(x) = x$.

Teorema 3.1 (**Ponto fixo para contrações**). *Se $T : X \longrightarrow X$ é uma contração em um espaço métrico completo, então existe um único ponto fixo $x \in X$ dessa aplicação.*

Demonstração.
(Existência) De fato, seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_0 \in X$ um ponto fixado (valor inicial). Agora, defina a sequência a seguir:

$$T(x_0) = x_1;\ T(x_1) = x_2; ...; T(x_k) = x_{k+1}; ...$$

Daí, como T é uma contração, existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(T(x_k), T(x_{k-1}))(\text{por definição da sequência}) \\ &\leq \lambda \cdot d(x_k, x_{k-1}) \text{ (Pois } T \text{ é uma contração)} \\ &= \lambda\ \cdot d(T(x_{k-1}), T(x_{k-2})) \text{ (por definição da sequência)} \\ &\leq \lambda^2 \cdot d(x_{k-2}, x_{k-3}) \text{ (pois } T \text{ é uma contração)} \\ &= \vdots \end{aligned}$$

e prosseguindo com esse raciocínio, chegamos à seguinte desigualdade:

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda^k \cdot d(x_1, x_0), \tag{3.7}$$

Agora, dado $p \in \mathbb{N}$ note o seguinte:

$$\begin{aligned} d(x_{k+p}, x_k) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{k+i+1}, x_{k+i}) \text{ (Desigualdade triangular)} && (3.8) \\ &\leq \sum_{i+0}^{p-1} \lambda^{k+i} \cdot d(x_1, x_0) \text{ (Pois } T \text{ é uma contração),} && (3.9) \end{aligned}$$

e agora perceba o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\lambda^k}{1-\lambda}}{\lambda^{k+i}} &= \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^k \cdot \lambda^i} \\
&= \frac{1}{\lambda^i(1-\lambda)} \\
&> 1,
\end{aligned}
$$

pois $\lambda^i \in (0,1)$ e $(1-\lambda) \in (0,1)$ e isto nos diz que

$$
\lambda^{k+i} \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda},
$$

e portanto, podemos substituir em (3.9) sem alterar o sinal da desigualdade, com isso,

$$
d(x_{k+p}, x_k) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} d(x_1, x_0)
$$

e como $\lambda^k \to 0$ quando $k \to \infty$ segue que dado $\varepsilon > 0$ existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$ tal que

$$
d(x_{k+p}, x_k) < \varepsilon,
$$

e isto nos diz que a sequência $(T(x_k))$ inicialmente definida é de Cauchy, e portanto, convergente para algum ponto $x_q \in X$, uma vez que X é um espaço métrico completo. Por fim, note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
T(x_q) &= \lim_{k\to\infty} T(x_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} x_{k+1} \\
&= x_q,
\end{aligned}
$$

e com isso, $x_q \in X$ é um ponto fixo da aplicação T, provando assim sua existência.

(Unicidade) Sejam $x_u, x_v \in X$ dois pontos fixos tais que $T(x_u) = x_u$ e $T(x_v) = x_v$. Daí, tem-se

$$
\begin{aligned}
d(x_u, x_v) &= d(T(x_u), T(x_v)) \text{ (por definição)} \\
&\leq \lambda \cdot d(x_u, x_v) \text{ (pois } T \text{ é uma contração)}
\end{aligned}
$$

e desta desigualdade, obtém-se

$$
d(x_u, x_v) - \lambda \cdot d(x_u, x_v) \leq 0 \Rightarrow (1-\lambda) \cdot d(x_u, x_v) \leq 0,
$$

e como $1-\lambda > 0$ esta desigualdade é verdadeira apenas quando $d(x_u, x_v) = 0$ isto é, quando

$x_u = x_v$ e a unicidade do ponto fixo está provada. □

Proposição 3.1. *Sejam*

$$Y = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow B(x_0, \delta);\ \gamma \text{ é contínua}\}$$

e

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup\{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|;\ t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}.$$

Então, o par (Y, d) é um espaço métrico completo

Demonstração. Veja em, LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral* Capítulo 6, págs.152 a 153. □

Lema 3.1 (Operador de Picard). *Seja (Y, d) conforme apresentado na proposição anterior. Se F é localmente Lipschitziana em δ, então dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a saber,*

$$\varepsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{C}\right\},$$

o operador

$$\begin{array}{rcl} L : Y & \longrightarrow & Y \\ \gamma & \longrightarrow & L(\gamma)(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))ds \end{array}$$

está bem definido e é uma contração.

Demonstração. De fato, como F é Localmente Lipschitziana em γ, em particular, F é contínua, e como Y é um espaço métrico completo, segue que F é integrável em Y, além de que F é continua e seu domínio de integração é limitado, e portanto, L está bem definido. Além disso, note o seguinte:

$$\|L(\gamma)(t) - x_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))ds\right\|$$

e como Y é um espaço métrico completo, existe um

$$M = \sup\{\|F(t, x)\|; (t, x) \in \overline{B(t_0, \delta)} \times \overline{B(x_0, \delta)}\}$$

e portanto,

$$\begin{array}{rcl} \|L(\gamma)(t) - x_0\| & = & \left\|\displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))ds\right\| \\ & \leq & M \cdot (t - t_0) \\ & < & M \cdot \varepsilon \end{array}$$

e como $\varepsilon \leq \dfrac{\delta}{M}$, vem

$$||L(\gamma)(t) - x_0|| < \delta,$$

ou seja, $L(\gamma)(t) \in B(x_0, \delta), \forall\ t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, e portanto, $L(\gamma)(t) \in Y, \forall\ \gamma \in Y$. Para mostrar que $L(\gamma)(t)$ é uma contração, dadas as funções $\gamma_1, \gamma_2 \in Y$, Vale:

$$\begin{aligned}
||L(\gamma_1)(t) - L(\gamma_2)(t)|| &= \left|\left| \int_{t_0}^{t} [F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))] ds \right|\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))|| ds \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} ||F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))|| ds \right| \\
&\leq C \cdot (t - t_0) \cdot ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|| \\
&< C \cdot \varepsilon \cdot ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)||
\end{aligned}$$

e essa desigualdade é verdadeira, pois F é localmente Lipschitziana em γ. Agora, como $\varepsilon < \dfrac{1}{C}$ vem

$$||L(\gamma_1)(t) - L\gamma_2(t)|| < ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)||$$

e, por fim, pondo $\lambda = C \cdot \varepsilon$ vem $\lambda < 1$, e daí,

$$||L(\gamma_1)(t) - L(\gamma_2)(t)|| < \lambda \cdot ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)||$$

e portanto, L é uma contração. $\square$

4 APLICAÇÕES

Este capítulo é dedicado à apresentação e demonstração do Teorema de Picard, objeto principal de estudo nesse trabalho, bem como duas interessantes aplicações dele. Para um estudo com maior riqueza de detalhes, no que diz respeito à teoria como um todo, indicamos a leitura de VIANA (2022), MACHADO (2012) e TAVONI (2013).

4.1 Teorema de Picard

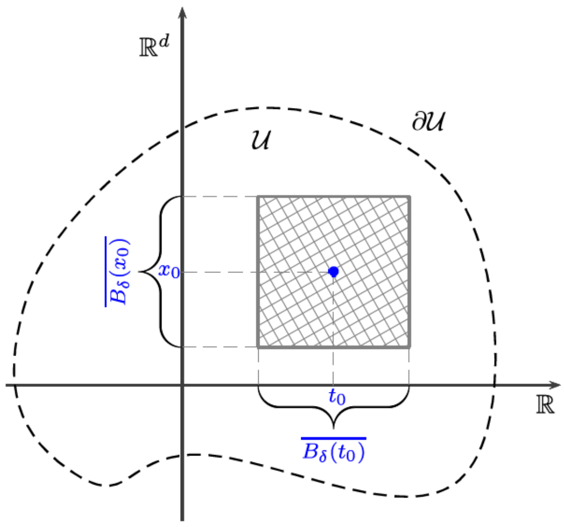
Teorema 4.1. *Se $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação localmente lipschitziana em x, então para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe um intervalo I e uma solução $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ do PVI dado por:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Além disso, se $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ são soluções de (4.1) e existe $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall\ t \in I_1 \bigcap I_2$.

Veja a interpretação geométrica desse resultado a seguir:

Figura 10 – Interpretação geométrica



Fonte: VIANA (2022)

Demonstração.
(Existência): De fato, pelo Lema do Operador de Picard anteriomente demonstrado,

$$\begin{aligned} L : Y &\longrightarrow Y \\ \gamma &\longrightarrow L(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\gamma(s))ds \end{aligned}$$

está bem definido e é uma contração, com isso, pelo teorema do ponto fixo para contrações, aplicado a L, existe uma única função $\gamma_0 \in Y$ tal que

$$\gamma_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \gamma_0(s))ds.$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a aplicação

$$\gamma_0 \longrightarrow L(\gamma_0)(t)$$

é contínua e vale $\dfrac{d\gamma_0}{dt} = F(t, \gamma_0(t))$. Por fim, como $\gamma_0(t_0) = x_0$ segue que γ_0 é uma solução de (4.1).

(Unicidade): Sejam $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soluções de (4.1) tais que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$ para algum $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$. Agora, defina $I = \{t \in I_1 \cap I_2; \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Ora, note que $I \neq \varnothing$, pois $t_0 \in I$, e além disso, dizer que I é o conjunto dos valores de t para quais γ_1 e γ_2 coincidem é equivalente a dizer que I é o conjunto dos valores de t para quais $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$, e portanto, I é a imagem inversa do zero por essa aplicação diferença, e disto como elas são continuas, segue que I é fechado em $I_1 \bigcap I_2$.

Afirmação: I é aberto.

Com efeito, tome $s_0 \in I$, então $\gamma_1(s_0) = y_0 = \gamma_2(s_0)$ para algum $(s_0, y_0) \in U$. Daí, pelo lema do operador de picard,

$$\begin{array}{rcl} L : Y & \longrightarrow & Y \\ \gamma & \longrightarrow & L(\gamma)(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))ds. \end{array}$$

está bem definido e é uma contração, com isso, pelo Teorema do Ponto Fixo para contrações, aplicado a L, a função é única. Logo, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall\ t \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, e portanto, I é um aberto na interseção. Logo, $I = I_1 \bigcap I_2$, portanto $\gamma_1 = \gamma_2$. □

É importante ressaltarmos aqui que se a hipótese de F ser localmente Lipschitziana em x for retirada, garante-se apenas existência de solução, conforme mencionamos no início do texto, esse teorema foi provado por Peano. Vamos enunciá-lo a seguir:

Teorema 4.2 (**Teorema de Peano**). *Se $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação contínua, então para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe um intervalo I e uma solução $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ do PVI dado por:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2 Aplicações do Teorema de Picard

4.2.1 Modelo Logístico de Verhulst

O modelo logístico populacional é o método usado para descrever o crescimento de uma população em um ambiente limitado, pelo qual a taxa de crescimento tende a diminuir a medida que a população se aproxima da capacidade de suporte de determinado ambiente. Segundo TAVONI (2013), o modelo de Verhulst cresce cada vez com taxas menores tendendo a um valor limite. Observe a seguir o modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = k \cdot \left(1 - \dfrac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

sendo denotado por:

- $\dfrac{dP}{dt}$: Taxa de variação da população em relação ao tempo;
- k: É a taxa de crescimento máximo que população pode crescer em condições ideais;
- P: O tamanho da população;
- L: Representa o tamanho máximo da população que o ambiente pode sustentar;

Aplicando o teorema de Picard ao modelo de Verhulst

Seja

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = k\left(1 - \dfrac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Como P é contínua, basta mostrar que P é localmente Lipschitziana em x. Assim, com base nisso, note que: Dados $(t, x_1); (t, x_2) \in U$, tem-se:

$$\begin{aligned} |F(t, P_1) - F(t, P_2)| &= \left| kP_1\left(1 - \frac{P_1}{L}\right) - kP_2\left(1 - \frac{P_2}{L}\right)\right| \\ &= \left| kP_1 - \frac{kP_1^2}{L} - kP_2 + \frac{kP_2^2}{L} \right| \\ &\leq k|P_1 - P_2| + \frac{k}{L}|P_1 + P_2| \cdot |P_1 - P_2| \\ &\leq k|P_1 - P_2| + \frac{k}{L} \cdot 2L \cdot |P_1 - P_2|, (\text{pois } P_1 \leq L \text{ e } P_2 \leq L) \\ &= 3k|P_1 - P_2| \end{aligned}$$

Tomando $C = 3k$ segue que F é localmente Lipschitziana em x. Logo, pelo Teorema de

Picard, o problema possui apenas uma única solução.
Resolvendo o PVI, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = k \cdot \left(1 - \dfrac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

rescrevendo a equação, temos

$$\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{L}\right)} = kdt$$

usando frações parciais para decompor, temos

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{L}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{P}{L}}$$

substituímos na equação diferencial, temos

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{P}{L}}\right) = kdt$$

integrando em ambos lados

$$\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{P}{L}} dP = \int kdt$$

assim, temos que

$$\ln(P) - \ln\left(1 - \frac{P}{L}\right) = kt + C$$

ou

$$\ln\left(\frac{P}{1 - \frac{P}{L}}\right) = kt + C$$

aplicando a exponencial em ambos os lados, assim obtemos

$$\begin{aligned} \frac{P}{1 - \dfrac{P}{L}} &= e^{kt+C} (\text{Definindo } C` = e^{C}) \\ &= Ce^{kt} \end{aligned}$$

resolvendo para P, temos

$$P = \frac{C`e^{kt}L}{1 + C`e^{kt}}$$

aplicando a condição inicial $P(0) = P_0$, temos

$$P_0 = \frac{C`L}{1 + C`}$$

manipulando os termos, temos que

$$C` = \frac{P_0}{L - P_0}$$

substituindo, logo vamos obter a solução explicita do PVI

$$P(t) = \frac{LP_0e^{kt}}{L + P_0(e^{kt} - 1)}$$

4.2.2 Modelo de Lançamento de Foguetes

Inicialmente, os primeiros foguetes lançados, os quais são semelhantes aos que são usados nos tempos atuais, foram fabricados na época da Guerra Fria, todo seu *design* é baseado em mísseis balísticos usados na Segunda Guerra Mundial. Sendo uma das tecnologias revolucionárias de sua época, os foguetes primordialmente foram usados em programas de estudos para analisar condições em grandes atitudes, como pressão atmosférica e detecção de raios cósmicos, abrindo espaço para novas áreas de pesquisa, tornando-se a tecnologia responsável por desencadear um marco histórico que foi a **corrida espacial** destravando uma nova era de descobertas e inovações.

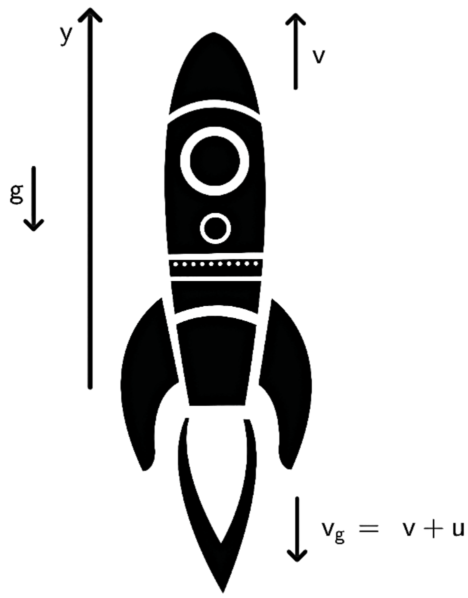
Todavia, por mais revolucionário, seus projetos de aprimoramento e desenvolvimento foram marcados por várias falhas, sejam elas de trajeto ou de mecânica. Seus modelos de lançamento eram criados e modificados ao longo de múltiplos fracassos, até chegar no modelo fundamental de lançamento que é tido como base há muito tempo no setor aeroespacial. É esse modelo que vamos explorar via Teorema de Picard.

Primeiramente, vamos introduzir alguns conceitos iniciais sobre o lançamentos de foguetes, consideremos um foguete sujeito ação de gravidade, quando estiver decolando:

Diante disso, o sistema (foguete + gases expelidos) não está isolado, sendo o resultante das forças a atração gravitacional, que é denotado pelo peso do foguete. Assim podemos escrever:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(Sendo } \vec{p} \text{ o peso do foguete)}$$

Figura 11 – Sistema de lançamento de foguetes



Fonte: *Elaborado pelo autor, 2024*

Como o peso do foguete varia em relação ao tempo na decolagem, temos que:

$$\vec{F}dt = d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)$$

Observação 2. Como o momento linear desse sistema é constante, e para o instante $t+dt$ o momento linear é dado pela soma dos momentos lineares, então temos que:

$$\vec{p}(t + dt) = \overbrace{(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})}^{\textbf{Foguete}} + \overbrace{(\vec{v} + \vec{u})(-dm)}^{\textbf{gás expelido}}$$

Assim, temos que:

$$\vec{F}dt = m\vec{v} + md\vec{v} + d\vec{v}\ dm - \vec{u}dm - m\vec{v}$$

simplificando, temos que:

$$\vec{F}dt = md\vec{v} + -\vec{u}dm$$

podemos desprezar o termo $d\vec{v}\ dm$, (pois $d\vec{v}$ e dm representam variações infinitesimais da velocidade e da massa receptivamente, e o produto entre eles resulta em outra variação infinitesimal ainda menor), daí obtemos:

$$\vec{F}dt = md\vec{v} - \vec{u}dm$$

considerando que força gravitacional pode ser escrita como:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

obtemos:

$$m\vec{g}dt = md\vec{v} - \vec{u}dm$$

ou

$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

ou,ainda,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{u}}{m}\frac{dm}{dt}$$

Assim, definindo uma equação diferencial para a aceleração do foguete. Como sendo, $\vec{g} = -g\hat{\jmath}$, $\vec{u} = -u\hat{\jmath}$, e $\hat{v} = v\vec{\jmath}$, temos na forma escalar:

$$\frac{dv}{dt} = -g - u\frac{u}{m}\frac{dm}{dt}$$

podendo ser reescrita como:

$$dv = -g\ dt - \frac{u}{m}\overbrace{\frac{dm}{dt}dt}^{dm}$$

ou

$$dv = -g\ dt - u\frac{dm}{m}$$

considerando que $t = t_0$, temos $v = v_0$ e $m = m_0$, desconsiderando que g varie com a altura, temos que:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -g\int_{t_0}^{t} dt - u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

ou

$$v - v_0 = -g(t - t_0) - u\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

quando foguete parte do repouso, podemos fazer $v_0 = 0$, não só isto, mas também podemos considerar $t_0 = 0$ como sendo o instante inicial em que o lançamento se inicia. Então,

$$v(t) = -gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \tag{4.5}$$

Aplicando o Teorema de Picard ao modelo de velocidade do foguete

Seja, então:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -gt + u\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Ao analisarmos a continuidade de $v(t)$, sabemos que:

- g e u são constantes;
- m e m_0 é variação da massa do foguete e sempre vai ser positiva;
- $\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right)$ é contínua para todo $\dfrac{m_0}{m} > 0$;
- $-gt$ é uma função polinomial, e portanto é contínua.

Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, Logo $v(t)$ é contínua.

Vamos agora analisar a condição de Lipschitz, e para isso definamos

$$F(m,t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt.$$

note o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\|F(m_1,t)-F(m_2,t)\| &= \left\|u\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)-gt-u\ln\left(\frac{m_0}{m_2}\right)+gt\right\| \\
&= \left\|u\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)-u\ln\left(\frac{m_0}{m_2}\right)\right\| \\
&= \left\|u\cdot\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)-\ln\left(\frac{m_0}{m_2}\right)\right]\right\| \\
&= |u|\cdot\|\ln(m_0)-\ln(m_1)-(\ln(m_0)-\ln(m_2))\| \\
&= |u|\cdot\|\ln(m_0)-\ln(m_1)-\ln(m_0)+\ln(m_2)\| \\
&= |u|\cdot\|-\ln(m_1)+\ln(m_2)\| \\
&= |u|\cdot\|\ln(m_1)-\ln(m_2)\|
\end{aligned}
$$

Existe $\theta > 1$ tal que $\theta m > \ln(m)$ uma vez que a função linear tem taxa de crescimento maior que a função logarítmica. Desse modo,

$$
\begin{aligned}
\|F(m_1,t)-F(m_2,t)\| &= |u|\cdot\|\ln(m_1)-\ln(m_2)\| \\
&\leq |u|\cdot\|\theta m_1-\theta m_2\| \\
&= |u|\cdot|\theta|\cdot\|m_1-m_2\| \\
&= L\|m_1-m_2\|
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Teorema de Picard verificamos que o modelo possui solução única.
Resolvendo o PVI, temos

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv}{dt} = -gt + u\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right) \\
v(0) = v_0
\end{cases}
$$

Separando as variáveis, obtemos

$$dv = -gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Integrando ambos os lado, temos que

$$\int dv = \int\left(-gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right)dt$$

Daí,

$$v = \int\left(-gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right)dt + C$$

Sendo C a constante de integração, daí dividindo a integral em duas partes, temos

$$v = \int -gtdt + \int u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)dt + C$$

Portanto a solução geral de $v(t)$ é

$$v(t) = -\frac{g}{2}t^2 + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)t + C$$

A condição inicial nos diz que $v(0) = v_0$. Assim, substituindo $t = 0$, obtemos

$$v(0) = -\frac{g}{2}0^2 + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)0 + C = v_0$$

Logo a solução do PVI é

$$v(t) = -\frac{g}{2}t^2 + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)t + v_0$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, este presente trabalho buscou explorar e aprofundar sobre a área das Equações Diferenciais, especificamente sobre o Teorema da Existência e Unicidade, desenvolvendo algumas de suas aplicações no modelo logístico populacional e, especialmente, no modelo de lançamento de foguetes. No decorrer da pesquisa, o Teorema de Picard verificou-se eficaz, ao garantir a existência e unicidade de soluções para problemas do valor inicial, fornecendo assim, uma base teórica concreta para análise e modelagem de sistemas em diferentes situações.

No modelo logístico populacional, que apresenta o crescimento limitado de uma população conforme os recursos finitos, a aplicação do teorema, em relação às condições iniciais, indicou que o mesmo possui única solução, o que nos permite verificar a veracidade das suas projeções do modelo em situações reais. Logo, a contribuição teórica do teorema serviu como ferramenta para comprovar que o modelo tem uma representação confiável.

Da mesma maneira, no modelo de lançamento de foguetes, a aplicação do teorema mostrou-se fundamental para estabelecer uma análise mais rigorosa das trajetórias, com base nas condições inicias necessárias para previsibilidade de lançamentos. Não só isto, conseguimos modelar com maior segurança algumas características desse modelo, como a variação da velocidade em função da perca de massa causada pela queima de combustível.

Por fim, esperamos ter contribuído para uma compreensão mais aprofundada da aplicabilidade do Teorema de Picard em modelagens simples ou complexas.

5.1 Sugestões para pesquisas futuras

A pesquisa em Matemática, assim como em qualquer ciência, não é um fim em si mesma, de modo que uma pesquisa sempre abre portas para que outras pessoas possam, a partir do que foi produzido, fazer suas próprias pesquisas. Pensando nesse espírito, indicamos para estudos futuros a exploração do teorema de Picard nas áreas de epidemiologia, mais especificamente no modelo SIR (Susceptíveis, Infectados e Recuperados), a aplicação pode auxiliar na precisão das previsões de surtos e no controle de epidemias, e para essa pesquisa indicamos a leitura de LIMA (2018). Sugerimos também aplicações envolvendo movimento de projéteis, decaimento radioativo, misturas de fluidos e reações químicas, estas podem ser encontradas em MACHADO (2012).

REFERÊNCIAS

ARZELÀ, Cesare. *Sulle funzioni di linee*. Gamberini e Parmeggiani, 1895.

EULER, Leonhard. *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, p. 124-137, 1732.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*; tradução: Hygino H. Domingues. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

LIMA, J. I. *Um estudo sobre equações diferenciais ordinárias aplicado á epidemiologia.* Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, p.50. 2018.

LIPSCHITZ, Rudolph. *Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles*. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, v. 10, p. 149-159, 1876.

MACHADO, Kleber Daum. *Equações diferenciais aplicadas*. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012.

PEANO, Giuseppe; PEANO, G. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*. Springer Vienna, 1890.

PICARD, Émile. *Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, v. 6, p. 145-210, 1890.

PICARD, Émile. *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*. Journal de mathématiques pures et appliquées, v. 9, p. 217-271, 1893.

TAVONI, Robinson. *Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst*: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. 2013.

VIANA, M. ESPINAR, J. *Differential Equations: a dynamical systems approach to theory and practice*, 1ª ed. American Mathematical Society. 2022.

MATHSHISTORY. Disponível em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`