UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ISAAC GOMES BARBOSA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CAMPINA GRANDE
2024

ISAAC GOMES BARBOSA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura.

Orientador: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2024

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

B238a Barbosa, Isaac Gomes.

Algumas aplicações da Álgebra Linear no Cálculo Diferencial e Integral [manuscrito] / Isaac Gomes Barbosa. - 2023.

32 p.

Digitado. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Álgebra linear. 2. Aplicações de álgebra linear. 3. Cálculo diferencial e integral. I. Título

21. ed. CDD 515.14

Elaborada por Lêda C. D. Andrade - CRB - 15/1032 BC/UEPB

Isaac Gomes Barbosa

ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovado em: 25/06/2024

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me Jair Dias de Abreu
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. José Lucas Galdino da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

RESUMO

Considerando a Álgebra Linear como área da Matemática, suas aplicações são inúmeras, especialmente, dentro da própria matemática. Aqui, pretendemos estudar algumas aplicações da Álgebra Linear no Cálculo Diferencial e Integral, apresentando de forma didática o que foi feito em (Rogers Jr., 1997) (7). Nosso trabalho propõe mostrar a importância de alguns conceitos fundamentais da Álgebra Linear, em aplicações não usuais do Cálculo Diferencial e Integral, especificamente, no cálculo de algumas integrais e na procura por soluções particulares de algumas Equações Diferenciais Ordinárias não Homogêneas.

Palavras-chave: álgebra linear; cálculo diferencial e integral; aplicações.

ABSTRACT

Considering Linear Algebra as an area of Mathematics, its applications are numerous, especially, within mathematics itself. Here, we intend to study some applications of Linear Algebra in Differential and Integral Calculus, presenting in a didactic way what was done in (Rogers Jr., 1997) (7). Our work proposes to show the importance of some fundamental concepts of Linear Algebra, in unusual applications of Differential and Integral Calculus, specifically, in the calculation of some integrals and in the search for particular solutions of some non-Homogeneous Ordinary Differential Equations.

Keywords: linear algebra; differential and Integral calculus; applications.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO 6

2 PRELIMINARES 9

2.1 Álgebra Linear 9

2.1.1 Espaço vetorial 9

2.1.2 Subespaço Vetorial 13

2.1.3 Subespaço Gerado por Combinação Linear 16

2.1.4 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial 17

2.1.5 Transformação Linear 20

2.1.6 Matriz de uma transformação linear 23

2.1.7 Subespaço T- invariante 25

3 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 27

3.1 Aplicação na Antidiferenciação 27

3.1.1 Antiderivadas das funções Seno e Cosseno 27

3.1.2 Integral por Partes 28

3.2 Aplicação nas Equações Diferenciais Ordinárias Lineares 29

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 31

REFERÊNCIAS 32

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática é rica e complexa, entrelaçando-se ao longo dos séculos e permeando todas as áreas do conhecimento humano. Dentro desse vasto campo, a Álgebra linear e o cálculo diferencial e integral surgem como duas das disciplinas fundamentais e influentes, cujas origens remontam à antiguidade e cujo desenvolvimento moldou não apenas o panorama matemático, mas também impulsionou avanços em diversas áreas científicas e tecnológicas.

A Álgebra linear, com suas raízes profundas na geometria e na manipulação de equações lineares, teve sua origem nas civilizações antigas, como os egípcios, babilônios e gregos, que utilizavam métodos rudimentares para resolver sistemas de equações lineares e explorar as propriedades dos números. Na era moderna, a álgebra linear se estabeleceu como uma área formal e rigorosa, com contribuições significativas de matemáticos como René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz e, posteriormente, com o trabalho seminal de Joseph-Louis Lagrange e Carl Friedrich Gauss.

O desenvolvimento da Álgebra linear foi impulsionado pelo crescente interesse na resolução de sistemas lineares de equações, com aplicações que vão desde a física e engenharia até a economia e ciência da computação. Segundo Strang (1976) (10), a álgebra linear estabeleceu sua base sólida na antiguidade, com contribuições notáveis de matemáticos como Euclides e Descartes. O estudo de vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e matrizes tornou-se essencial não apenas para a compreensão abstrata da matemática, mas também para o desenvolvimento de técnicas computacionais e algoritmos utilizados em uma variedade de campos práticos.

Por outro lado, a história do Cálculo diferencial e integral é marcada por uma série de avanços e disputas intelectuais que culminaram na criação de uma teoria unificada do Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com Stewart (2007) (10), figuras proeminentes como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz são frequentemente creditadas como os pais do Cálculo diferencial e integral, embora suas contribuições tenham sido objeto de controvérsia e disputas históricas, como a conhecida "guerra do cálculo". Essa controvérsia não apenas reflete a complexidade do processo intelectual e das relações científicas da época, mas também destaca a interdisciplinaridade inerente entre a álgebra linear e o cálculo diferencial e integral, uma vez que Gottfried Wilhelm Leibniz é figura comum às duas áreas.

O desenvolvimento histórico da Álgebra linear e do Cálculo diferencial e integral está repleto de marcos significativos e disputas intelectuais que moldaram sua evolução ao longo dos séculos. Enquanto, conforme Dunham (2005), a Álgebra linear estabeleceu sua base sólida na antiguidade, com contribuições notáveis de matemáticos como Euclides e Descartes, o Cálculo diferencial e integral emergiu como uma área revolucionária na era

moderna, impulsionada pelas descobertas de Newton e Leibniz. A "guerra do cálculo", que envolveu Newton, Leibniz e outros matemáticos proeminentes da época, é um exemplo vívido das tensões intelectuais e rivalidades que caracterizaram o período. No entanto, apesar das disputas e controvérsias, o Cálculo diferencial e integral se consolidou como uma ferramenta matemática fundamental, com aplicações que transcendem os limites da matemática pura e permeiam várias áreas do conhecimento humano.

Enquanto isso, a Álgebra linear continuou a se desenvolver, expandindo seu alcance e influência em campos tão diversos quanto a física quântica e a ciência de dados. Os conceitos de vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e matrizes tornaram-se ferramentas indispensáveis não apenas para os matemáticos teóricos, mas também para os praticantes e pesquisadores em uma ampla gama de disciplinas.

A interação entre Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral se estende além do desenvolvimento histórico dessas disciplinas e permeia suas aplicações contemporâneas. Hoje, Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral são componentes essenciais do currículo de matemática em instituições de ensino superior em todo o mundo, fornecendo aos estudantes as ferramentas e o conhecimento necessários para enfrentar os desafios da ciência e das tecnologias modernas.

A importância da relação entre Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral é particularmente evidente no contexto da ciência da computação e da engenharia de software. Métodos computacionais baseados em conceitos de álgebra linear e cálculo diferencial e integral são amplamente utilizados em áreas como processamento de imagem, aprendizado de máquina, simulação de sistemas complexos e muito mais, impulsionando avanços significativos em campos tão diversos quanto medicina, finanças e entretenimento.

Além disso, a interação entre Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral desempenha um papel crucial no desenvolvimento de modelos matemáticos precisos e na análise de fenômenos complexos em uma variedade de contextos científicos e tecnológicos. Da dinâmica dos fluidos à teoria dos grafos, da teoria da probabilidade à teoria da otimização, Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral fornecem as ferramentas matemáticas necessárias para compreender e resolver uma ampla gama de problemas do mundo real.

Nossa pesquisa tem origem no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), onde exploramos a Análise Funcional. Enquanto procurávamos um tema para o Encontro de Matemática Pura e Aplicada (Empa), organizado pela Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, nos deparamos com o inspirador artigo de Rogers Jr. intitulado "Applications of Linear Algebra in Calculos"(7), aonde encontrei um assunto de extrema relevância, que, à primeira vista, despertou meu interesse. Após dedicar mais tempo ao estudo aprofundado, esse interesse me levou a elaborar esta monografia. Esse artigo, fundamental para nosso estudo, nos forneceu uma base sólida. Decidimos então realizar uma apresentação didática do conteúdo abordado por Rogers Jr., destacando suas contribuições e explorando-as de forma aprofundada. Com o apoio do programa e o estudo do

artigo de Rogers Jr., conseguimos não apenas compreender melhor os conceitos discutidos, mas também apresentá-los de forma acessível e didática durante o evento, através de (1).

Álgebra linear e cálculo diferencial e integral são geralmente ensinados de forma independente durante a graduação. No entanto, o objetivo deste texto é explorar algumas correlações entre essas disciplinas, relações que muitas vezes passam despercebidas. Para isso, organizamos o texto da seguinte forma: No Capítulo 2, abordamos temas relacionados à álgebra linear e ao cálculo diferencial e integral, como transformações lineares, o teorema de representação matricial, os espaço das funções suaves, o espaço das funções contínuas..., de modo a fornecer uma base sólida para a compreensão das aplicações que são apresentadas no capítulo seguinte. Em seguida, no Capítulo 3, exibiremos algumas das aplicações da álgebra linear no cálculo diferencial e integral, apresentando exemplos práticos, seguindo o que foi feito por Rogers Jr. (1997) (7) e finalmente, apresentamos as Considerações Finais do nosso trabalho.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo abordamos definições e resultados fundamentais que são indispensáveis para uma compreensão sólida do tema central desta monografia, com o intuito de conferir autonomia ao texto. Inicialmente, apresentamos conceitos e resultados pertinentes à Álgebra Linear, a principal área de enfoque deste trabalho. Em seguida, discutimos alguns aspectos do cálculo diferencial e integral. Ao longo desta primeira seção, buscamos expor as justificativas dos resultados introduzidos sempre que possível. Nosso objetivo reside em estabelecer uma base robusta, permitindo que o leitor acompanhe o desenvolvimento do trabalho de forma independente, sem a necessidade de consultar fontes externas. A atenção cuidadosa a esses conceitos iniciais não apenas facilita a compreensão do conteúdo principal, mas também fomenta a autonomia na assimilação dos resultados apresentados ao longo da monografia.

2.1 Álgebra Linear

A Álgebra Linear em dimensão finita é uma área da matemática que se concentra no estudo de estruturas lineares e suas propriedades. Ela investiga conceitos fundamentais relacionados a espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes. A Álgebra Linear fornece ferramentas e métodos para analisar e resolver problemas geométricos, algébricos e numéricos em diversos campos, incluindo física, Estatística, Ciência da Computação, Engenharia e Economia; E a partir daqui vamos apresentar tópicos de extrema relevância para o avanço do nosso estudo.

Neste capítulo, vamos explorar temas da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral, fundamentais para nossa pesquisa, com base em (8) (Steinbruch e Winterle, 1986) como carro chefe e outras obras como: (2) (Boldrini, 1980), (3) (Boyce e DiPrima, 2020), (10) (Strang,1988), (5) (Lima, 2018), (6) (Louredo, 2015) e (4) (Coelho e Lourenço, 2013).

2.1.1 Espaço vetorial

Definição 2.1. Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, munido de duas operações: $+ : V \times V \to V$, e multiplicação por escalar, $\cdot : \mathbb{R} \times V \dot{\to} V$. De modo que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo devem ser satisfeitas:

EV$_1$. Associatividade da adição: $u + (v + w) = (u + v) + w$.

EV$_2$. Comutatividade da adição: $u + v = v + u$.

EV$_3$. Identidade aditiva: Existe um vetor $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$.

EV$_4$. Inverso aditivo: Para cada $u \in V$, existe um vetor $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

EV$_5$. Compatibilidade da multiplicação por escalar com a multiplicação real: $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.

EV$_6$. Identidade multiplicativa: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in V$, onde 1 é o elemento multiplicativo identidade em $\mathbb{R}$.

EV$_7$. Distributividade da multiplicação por escalar em relação à adição vetorial: $\alpha \cdot (u + v) = a \cdot u + \alpha \cdot v$.

EV$_8$. Distributividade da multiplicação por escalar em relação à adição real: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Exemplo 2.1. O conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ com as seguintes operações :

$$+: \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & x + y = xy \end{array} \quad \text{e} \quad \cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x = x^{\alpha} \end{array}$$

é um espaço vetorial real.

De fato, verifiquemos se as operações de adição (+) e multiplicação ($\cdot$) estão bem definidas: Sejam $x, y \in V$. Então $x + y = xy$. Como a multiplicação de dois números reais resulta em um número real, e $x > 0$ e $y > 0$ implicam que $xy > 0$, então a operação de adição em V é fechada. Além disso, x^{α} para $\alpha \in \mathbb{R}$ é sempre positivo (considerando $x > 0$) e é um número real. Além disso, potências de base real positiva é sempre um número real positivo então a multiplicação por escalar em V também é fechada.

Se $x, y, z \in V$, então $(x + y) + z = (xy) + z = (xy)z \overset{*}{=} x(yz) = x + (yz) = x + (y + z)$, em que na 3° igualdade (*) foi usada a associatividade de números reais, e vale EV_1.

Agora, $x + y = xy = yx = y + x$, uma vez que a multiplicação de números reais é comutativa, logo vale EV_2.

Se e é o elemento neutro de V, então: $x + e = xe = x \Rightarrow e = 1_R$. Assim, 1 é o elemento neutro de V e vale EV_3.

Ainda, se $x \in V$ e x_0 é o oposto de x, então $x + x_0 = e = 1$, ou seja, $xx_0 = 1$ e portanto $x_0 = 1/x$ (ou x^{-1}) é o oposto de x em V, com isso vale EV_4.

Agora, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in V$, temos: $(\alpha\beta)x = x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha} = (x^{\beta})^{\alpha} = \alpha x^{\beta} = \alpha(\beta x)$ em que foram usadas as propriedades da multiplicação entre os números reais α e β, assim comprovando EV_5.

E por fim, se $x \in V$, então: $1x = x^1 = x$. Mostrando EV_6.

Observe que nessas condições, sendo α e $\beta \in \mathbb{R}$ e $x \in V$, usando a distributiva da adição, ou seja, a adição usual de $\mathbb{R}$, temos: $(\alpha + \beta)x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha} + x^{\beta} = \alpha x + \beta x$, com isso EV_7 é válido.

Agora, observe que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in V$ com a adição definida em V, temos:

$$\alpha(x + y) = (x + y)^{\alpha} = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} = x^{\alpha} + y^{\alpha} = \alpha x + \alpha y$$

sendo assim EV_8 vale.

Como valem todas as condições, mostramos que V, com as operações definidas anteriormente, é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.2. Para $n \geq 1$, o conjunto $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{R}^n = \{v = (a_1, a_2, ..., a_n); a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n\}$$

munido da soma usual e do produto por escalar dados, respectivamente, por:

- $v_1 + v_2 = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ para todo $v_1 = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $v_2 = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $\alpha v_1 = \alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n)$ para todo $v_1 = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.3. O conjunto $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição $+ : V \times V \longrightarrow V$ e produto por escalar $\cdot : \mathbb{R} \times V \longmapsto V$, definidas por:

- $v_1 + v_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1, b_1), \quad \forall\, v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$
- $\alpha v_1 = \alpha(a_1, b_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ e $v_1 = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$

NÃO é um espaço vetorial.

Vamos verificar se valem as condições para V ser um espaço vetorial. As condições multiplicativas valem, pois a multiplicação por escalar está definida como a multiplicação por escalar usual de $\mathbb{R}^2$.

Tomando $v_1, v_2 \in V$, temos $v_1 + v_2 = v_1$, por definição, então $v_1 + v_2 \in V$. Logo, vale o fechamento da adição. Ainda tomando $v_1 = (2, 3) \in V$ e $v_2 = (4, 5) \in V$, temos: $v_1 + v_2 = (2, 3) + (4, 5) = (2, 3)$, mas $v_2 + v_1 = (4, 5) + (2, 3) = (4, 5)$. Logo, $v_1 + v_2 \neq v_2 + v_1$, assim a condição de comutatividade não é válida para V.

Além disso, também não é válida a condição do elemento neutro.

Como uma uma das condições não vale, então V, com as operações acima, não é um espaço vetorial.

Exemplo 2.4. O conjunto das matrizes $m \times n$, com entradas reais, denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com as operações de adição entre matrizes e multiplicação por escalar usuais, dadas por:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

para todo $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.5. Seja X um subconjunto dos números reais. O conjunto das funções reais definidas em X é dado por

$$F(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}.$$

Consideremos agora em $F(X)$,as seguintes operações, soma e produto por escalar, dadas por:

$$\begin{array}{rccl} +: & F(X)\times F(X) & \longrightarrow & F(X) \\ & (f,g) & \longmapsto & f+g: \quad X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & \qquad\quad x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \cdot: & \mathbb{R}\times F(X) & \longrightarrow & F(X) \\ & (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f: \quad X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & \qquad\quad x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}$$

Provamos que $F(X)$, com as operações acima, é um espaço vetorial real. A boa definição das operações vem da boa definição da soma e do produto no conjunto dos números reais.

Se $f, g, h \in F(X)$, então para todo $x \in X$ tem-se:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= (f(x)+g(x))+h(x) \\ &= f(x)+(g(x)+h(x)) \\ &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= [f+(g+h)](x) \end{aligned}$$

Portanto, a associatividade da soma é satisfeita e é verificado EV_1. A comutatividade da soma (EV_2)é verificada da seguinte maneira: se $f, g \in F(X)$ e $x \in X$, então

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x).$$

Agora, tomando $0 : X \to \mathbb{R}$ dada por $0(x) = 0$, para todo $x \in X$, verificamos que

$$\begin{aligned}(f+0)(x) &= f(x)+0\\ &= f(x)\\ &= 0+f(x)\\ &= (0+f)(x)\end{aligned}$$

Logo, 0 é o neutro aditivo, verificando assim EV_3.

Se $f \in F(X)$, então podemos tomar a função $-f: X \to \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in X$ e verificamos que:

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f(x)) = 0 = 0(x)$$

Logo, $-f$ é o inverso aditivo de f, mostrando assim EV_4

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in F(X)$ e $x \in X$, pela distributividade do produto por escalar em $\mathbb{R}$ temos:

$$[(\alpha+\beta)f](x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x)+\beta f(x) = (\alpha f+\beta f)(x)$$

e vale EV_8.

Ainda, pela associatividade do produto por escalar nos reais, temos

$$[\alpha(\beta f)](x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha\beta f(x) = ((\alpha\beta)f)(x)$$

verificando EV_5.

Se $f \in F(X)$ e $x \in X$, então

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

verificando EV_6.

Finalmente, se $f, g \in F(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos, para todo $x \in X$,

$$\alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f+\alpha g)(x)$$

mostrando EV_7.

Portanto, todas as propriedades de um espaço vetorial são satisfeitas, e assim $F(X)$ é um espaço vetorial real.

2.1.2 Subespaço Vetorial

Definição 2.2. Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, é dito subespaço vetorial de V se:

i) Para quaisquer $u, v \in W$, temos $u + v \in W$.

ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, temos $\alpha u \in W$.

Observação 2.1. Sobre Subespaços Vetoriais, destacamos as seguintes observações:

1. As condições da definição acima garantem que, ao realizarmos operações em W (soma e multiplicação por escalar), não obteremos um vetor que não pertença a W. Isso é suficiente para afirmar que W é ele próprio um Espaço Vetorial, pois as operações ficam bem definidas. Além disso, não é necessário verificar as propriedades de EV_1 a EV_8 de espaço vetorial, pois elas são válidas em V, que contém W.

2. Tendo W como espaço vetorial o vetor nulo de W coincide com o vetor nulo de V .

3. Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (chamados de subespaços triviais): o conjunto formado apenas pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 2.6. Considere o conjunto W definido como $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$, que representa o conjunto das matrizes antissimétricas. Verifiquemos que W é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

(i) Considere duas matrizes $A, B \in W$, ou seja, $A^t = -A$ e $B^t = -B$. Temos

$$(A + B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A + B),$$

concluindo que $A + B \in W$.

(ii) Se $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então: $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -\alpha A$, o que demonstra que $\alpha A \in W$.

Assim, podemos afirmar que W é um subespaço vetorial do espaço de $M_n(\mathbb{R})$.

Nos exemplos seguintes apresentamos nossa primeira conexão com elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Recordemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. E f é dita contínua se é contínua em todo ponto $x_0 \in X$.

Exemplo 2.7 (Espaço das funções Contínuas). O espaço das funções contínuas em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com a soma e o produto por escalar apresentados no Exemplo 2.5, é um espaço vetorial, denotado por $C([a, b])$.

Para provar esse fato, mostramos que $C([a, b])$ é um subespaço de $F([a, b])$. De fato,

- Fechamento para a Adição: Sejam f e g funções contínuas. Precisamos mostrar que a função $h = f + g$ também é contínua.

  Seja $x_0 \in [a, b]$. Então,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)).$$

Mas, pela linearidade do limite,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

E, como f e g são contínuas, temos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

Assim, h é contínua em x_0. Da arbitrariedade de $x_0 \in [a,b]$, temos h contínua.

- Compatibilidade da Multiplicação por Escalar:

  Seja f uma função contínua e α um escalar. Precisamos mostrar que a função $h = \alpha \cdot f$ também é contínua.

  Seja $x_0 \in [a,b]$. Então

  $$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha \cdot f(x)).$$

  das propriedades de limite, temos

  $$\lim_{x\to x_0}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

  Como f é contínua, temos

  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

  Portanto,

  $$\lim_{x\to x_0} h(x) = \alpha \cdot f(x_0) = h(x_0).$$

Como o espaço das funções contínuas em $[a,b]$ é fechado sob as operações de adição e multiplicação por escalar, ele é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções $F([a,b])$ e, portanto, um Espaço Vetorial.

Exemplo 2.8 (Funções de Classe C^n e C^∞). .

Uma função f é dita de classe C^n em um intervalo I se sua derivada até a ordem n, $f^{(n)}$, existir e for contínua em todos os pontos desse intervalo. E é dita de classe C^∞ se ela possui derivadas de todas as ordens nesse intervalo.

Um raciocício análogo ao do Exemplo anterior prova que os espaços $C^n(I)$ e $C^\infty(I)$ são Espaços Vetoriais.

2.1.3 Subespaço Gerado por Combinação Linear

Definição 2.3 (Combinação linear). Sejam V um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. O vetor $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ é um elemento de V ao qual chamamos de combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Ao fixarmos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ em um espaço vetorial V, surge um conceito essencial: o conjunto W formado por todos os vetores em V que são expressos como combinações lineares destes vetores, isto é,

$$W = \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que W é um subespaço vetorial de V. De fato, precisamos mostrar duas coisas:

1. **Fechamento sob a adição vetorial**: Sejam $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, então $u + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$.

O que mostra que $u + w$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ e, portanto, está em W.

2. **Fechamento sob a multiplicação escalar**: Sejam $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então: $\alpha u = \alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha\alpha_n v_n$ O que mostra que αu é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$, e portanto está em W.

Portanto, como todas as condições foram verificadas, podemos concluir que W é de fato um subespaço vetorial de V. Damos a este subespaço o nome de subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$, e utilizamos a notação ,

$$W = [v_1, \ldots, v_n],$$

isto é,

$$W = \{v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Essa representação nos diz que W consiste em todos os vetores v em V que podem ser formados ao multiplicar cada vetor v_i por um coeficiente a_i e somá-los.

Exemplo 2.9. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (2, -1, 3)$. O subespaço W gerado por combinação linear de v_1 e v_2 é dado por:

$$W = [v_1, v_2] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos expressar qualquer vetor w em W como uma combinação linear de v_1 e v_2. Por exemplo, o vetor $w = (3, -1, 4)$ é um elemento de W porque podemos encontrar α_1 e α_2 tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = w$$

De fato,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = w \iff \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(2,-1,3) = (3,-1,4)$$

logo,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3, -\alpha_2 = -1 \text{ e } \alpha_1 + 3\alpha_2 = 4$$

Resolvendo este sistema passo a passo:

1. A segunda equação nos dá diretamente $\alpha_2 = 1$.
2. Substituindo $\alpha_2 = 1$ nas equações restantes, obtemos: $\begin{cases} \alpha_1 + 2(1) = 3 \\ \alpha_1 + 3(1) = 4 \end{cases}$
3. Resolvendo essas equações, encontramos: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

Portanto, $w = 1v_1 + 1v_2$ é uma combinação linear de v_1 e v_2, e está em W.

2.1.4 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição 2.4. Considere V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. O conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI) ou os vetores são ditos Linearmente Independentes se, a equação

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

tem uma única solução dada por $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Quando há algum α_i diferente de zero, dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD).

Exemplo 2.10. Os elementos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3,6)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes.

De fato, temos que a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1(1,2) + \alpha_2(3,6) = (0,0)$$

é verdadeira para $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = -1$. Assim, v_1 e v_2 são linearmente dependentes (L.D.).

Também podemos verificar que $(3,6) = 3(1,2) \Rightarrow v_2 = 3v_1$, ou seja, v_2 é uma combinação linear de v_1.

Definição 2.5. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se

I. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI).

II. $[v_1, \ldots, v_n] = V$

Definição 2.6 (Dimensão de um Espaço Vetorial). Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A dimensão de V, denotada por $\dim(V)$, é o número de vetores em uma base de V. Formalmente, a dimensão de V é definida como

- Se V possui uma base finita $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então $\dim(V) = n$.
- Se V não possui uma base finita, dizemos que V é de dimensão infinita.

Em outras palavras, a dimensão de V é o número máximo de vetores linearmente independentes em V. Se não existe um conjunto finito de vetores que forme uma base, dizemos que V tem dimensão infinita.

Observação 2.2. Um espaço vetorial pode ter diferentes bases, mas todas elas têm o mesmo número de elementos, isto é, a dimensão do espaço independe da base escolhida. A prova desse resultado pode ser encontrada em Coelho e Lourenço, 2013, pág. 52 (4).

Exemplo 2.11. Vamos determinar uma base para o subespaço $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid M^t = M\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, subespaço das matrizes simétricas de ordem 2×2.

Vamos determinar um conjunto de geradores para S. Qualquer matriz simétrica de ordem 2×2 é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Logo, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é um conjunto de geradores para o subespaço S.

Tomando a equação:

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso implica em

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \text{ e } \alpha_3 = 0$$

Dessa forma, a equação só tem a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, e portanto, o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é linearmente independente, e gera o subespaço S, formando assim uma base para S, logo a dimensão de S é 3.

Exemplo 2.12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Uma base canônica para esse espaço é o conjunto de vetores unitários na direção dos eixos coordenados. Em $\mathbb{R}^n$, esses vetores são geralmente denotados por $e_1, e_2, \ldots, e_n$, onde cada e_i tem todas as componentes iguais a zero, exceto a i-ésima componente, que é igual a um.

Portanto, a base canônica para $\mathbb{R}^n$ é: $\{e_1 = (1,0,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,0,\ldots,1)\}$

Observe que de fato este conjunto é uma base para $\mathbb{R}^n$:

Considere uma combinação linear dos vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ igual a zero, ou seja, $c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = (0,0,\ldots,0)$ Assim, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0,0,\ldots,0)$.

Isso implica que cada componente do vetor resultante é zero.

Assim, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, o que significa que a única combinação linear que resulta no vetor nulo é a combinação linear trivial. Portanto, os vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são linearmente independentes.

Agora considere um vetor arbitrário $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Podemos expressar esse vetor como a seguinte combinação linear: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1,0,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,0,\ldots,1)$

Portanto, cada vetor em $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Como os vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são linearmente independentes e geram todo o espaço $\mathbb{R}^n$, como estamos falando do $\mathbb{R}^n$ e sabendo que a base vai até e_n, a dimensão é n e eles formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.7. Sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $v \in V$ onde $v = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$. Chamamos esses números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de coordenadas de v em relação à base β. A essa representação associamos uma matriz coluna, chamada de matriz de v na base β e denotada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Observação 2.3. As coordenadas de um vetor v no espaço vetorial V em relação a uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é única.

De fato, se existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \in \mathbb{R}$, de modo que

$$v = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n \text{ e } v = \alpha'_1v_1 + \cdots + \alpha'_nv_n$$

então

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n)v_n = 0$$

e, como $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, segue que $\alpha_i = \alpha'_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2.13. Considere $V = \mathbb{R}^2$ a base $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e o elemento $(4,3) \in V$, temos

$$(4,3) = 4(1,0) + 3(0,1).$$

Portanto, as coordenadas do vetor $(4,3)$ em relação à base β são dadas por

$$[(4,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, considere uma nova base $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Para o vetor $(4,3)$, temos:

$$\begin{aligned}(4,3) &= x(1,1) + y(0,1) \\ &= (x,x) + (0,y) \\ &= (x, x+y).\end{aligned}$$

Comparando com $(4,3)$, obtemos $x = 4$ e $y = -1$.

Portanto, as coordenadas do vetor $(4,3)$ em relação à base β' são dadas por

$$[(4,3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.4. A ordem dos elementos em uma base é importante, pois influencia na matriz das coordenadas de um vetor em relação a essa base.

2.1.5 Transformação Linear

Definição 2.8. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma transformação ou operador linear $T : U \to V$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Preservação de Adição:** Para todos os vetores $u, v \in U$, a transformação linear T preserva a operação de adição, $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

2. **Preservação de Multiplicação por Escalar:** Para todo vetor $u \in U$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, a transformação linear T preserva a multiplicação por escalar, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Observação 2.5. Essas propriedades asseguram que T preserve a estrutura vetorial entre os espaços U e V, mantendo linearidade nas operações de adição e multiplicação por escalar.

Exemplo 2.14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por: $T(1,0,0) = (1,0)$, $\quad T(0,1,0) = (1,-1)$, $\quad T(0,0,1) = (0,1)$.

Agora, buscaremos determinar de forma explícita a expressão que define a transformação linear T.

Tomando o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e sua base canônica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, podemos representar qualquer vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear dos elementos de β: $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

Assim, a aplicação da transformação linear T sobre (x,y,z) resulta em

$$T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)).$$

E, pela linearidade de T, temos

$$T(x,y,z) = xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1) \quad \text{,ou seja,} \quad T(x,y,z) = x(1,0)+y(1,-1)+z(0,1)$$

E portanto $T(x,y,z) = (x+y,-y+z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Dessa forma, conseguimos expressar de maneira explícita a transformação linear T.

Observação 2.6. Considere uma transformação linear $T : V \to W$, com V e W espaços vetoriais. Como T é uma transformação linear, ela preserva a operação de adição vetorial. Isso significa que para quaisquer vetores u e v em V, temos $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Agora, considere o vetor nulo 0 em V. Temos $T(0) = T(0+0)$ e, pela propriedade da preservação da adição de T, isso se torna

$$T(0) = T(0) + T(0).$$

Agora, vamos subtrair $T(0)$ de ambos os lados

$$T(0) - T(0) = T(0) + T(0) - T(0).$$

Portanto, $T(0) = 0$ para qualquer transformação linear $T : V \to W$.

Definição 2.9. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por $N(T)$, é definido como o conjunto de todos os vetores v em V tais que $Tv = 0$.

$$N(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$$

Observação 2.7. Essa definição estabelece as propriedades fundamentais de um operador linear, destacando sua ação sobre vetores no domínio $D(T)$ e as relações lineares preservadas por T. O núcleo $N(T)$ representa o conjunto de vetores que são enviados para o vetor nulo pela aplicação de T, desempenhando um papel crucial na análise do comportamento linear do operador.

Exemplo 2.15. SejaP(R) o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais, ou seja, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 0,\ldots,n, \text{ e } n \geq 0\}$.

Definindo a função $\mathcal{D} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ segue da linearidade da derivada que $\mathcal{D}$ é um operador linear. como $p(x) = p'(x)$. Observe que $\mathcal{D}$ é um operador linear, pela linearidade da derivada, e o chamamos de operador derivada.

Exemplo 2.16. Consideremos o conjunto $C([a,b])$, que consiste de todas as funções contínuas definidas no intervalo fechado $[a,b]$ e assumindo valores em $\mathbb{R}$.

Seja $T_1 : C[a,b] \to C[a,b]$ um operador definido como a operação de antiderivação, tal que para uma função em $C[a,b]$, temos

$$T_1 x(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau.$$

Este operador mapeia uma função em $C[a,b]$ para sua primitiva no intervalo $[a,t]$.

E, consideremos $T_2 : C[a,b] \to C[a,b]$, definido como o operador de multiplicação por t, onde para uma função em $C[a,b]$, temos

$$T_2 x(t) = t x(t).$$

Este operador multiplica cada valor de $x(t)$ por t, preservando assim a continuidade da função.

Esses operadores são comumente estudados na teoria dos espaços de funções contínuas e são essenciais em várias áreas da matemática, como análise funcional e equações diferenciais.

Esses exemplos ilustram diferentes operadores lineares em espaços de funções, destacando suas propriedades e aplicações específicas.

Proposição 2.1. *Seja $T : V \to W$ uma operador linear. Então,*

1. *O núcleo de T, denotado por $N(T)$, é um subespaço de V.*
2. *A imagem de T, denotada por $Im(T)$, é um subespaço de W.*

Demonstração. Para mostrar que o núcleo de T é um subespaço de V, precisamos verificar as propriedades que definem um subespaço vetorial:

1. **Fechamento sob adição:** Se u e v estão no núcleo de T, então $T(u) = 0$ e $T(v) = 0$. Portanto,
$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$$
o que implica que $u + v$ também está no núcleo de T.
2. **Fechamento sob multiplicação por escalar:** Se u está no núcleo de T e α é um escalar, então $T(u) = 0$. Assim,
$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot 0 = 0$$

o que mostra que αu também está no núcleo de T.

Portanto, o núcleo de T é de fato um subespaço de V.
Para a segunda parte, devemos provar que a Imagem de T é subespaço de W.

1. **Fechamento sob adição:** Sejam w_1 e w_2 elementos da imagem de T. Por definição, existem vetores u e v em V tais que $T(u) = w_1$ e $T(v) = w_2$. Então,

$$w_1 + w_2 = T(u) + T(v) = T(u + v)$$

   o que implica que a soma de dois vetores na imagem de T também está na imagem de T, demonstrando assim que a imagem de T é fechada sob adição.

2. **Fechamento sob multiplicação por escalar:** Suponhamos que w pertence à imagem de T e α seja um escalar. Então, existe um vetor u em V tal que $T(u) = w$. Logo,

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha w$$

   mostrando que o resultado da multiplicação de um vetor da imagem de T por um escalar também pertence à imagem de T, evidenciando assim que a imagem de T é fechada sob multiplicação por escalar.

Assim, concluímos que a imagem de T satisfaz as propriedades de um subespaço de W. Portanto, a imagem de T é de fato um subespaço de W. □

2.1.6 Matriz de uma transformação linear

Sejam V e W espaços vetoriais, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V e W, respectivamente e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Como γ é base de W e os elementos da Imagem de T estão em W, podemos escrever os elementos $T(v_j)$, $j = 1, \ldots, n$ como combinação linear dos elementos de γ, digamos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Ainda, para cada $v \in V$, como β é base de V, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

portanto, da linearidade de T, temos

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j).$$

Logo,

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \right) w_i$$

escrevendo $b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, temos

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i,$$

ou seja, os b_i's são as coordenadas de $T(v)$ na base γ. A soma acima pode ser reescrita da forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

escrevendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

concluímos que

$$[T(v)]_\gamma = A[v]_\beta.$$

A matriz A é dita matriz da transformação linear T com relação às bases β e γ e é denotada por $[T]_\beta^\gamma$. Quando a matriz $V = W$ e $\beta = \gamma$, denotamos apenas por $[T]_\beta$.

Observação 2.8. Segue da unicidade da representação dos vetores em cada base, que a matriz de uma transformação linear é única.

Exemplo 2.17. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 t \in \mathbb{R}; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ o espaço dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3. O conjunto $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ é base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Seja $\mathcal{D} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o operador derivada, isto é,

$$\mathcal{D}(p(x)) = p'(x).$$

A matriz de $\mathcal{D}$ em relação à β é uma matriz 4×4 dada por

$$[\mathcal{D}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A representação de uma transformação linear em forma de matriz auxilia nos cálculos para encontrar diversas informações sobre a transformação linear. Em particular, temos:

a) Se $T_1 : V \longrightarrow W$ e $T_2 : W \longrightarrow U$ são transformações lineares, $\dim U = \dim V = \dim W = n$, β, β' e β'' são bases de V, W e U, respectivamente, então

$$[T_2 \circ T_1]_{\beta}^{\beta''} = [T_1]_{\beta}^{\beta'} + [T_2]_{\beta'}^{\beta''}.$$

b) $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear bijetora, se e somente se, $[T]_\beta$ é invertível, em que β é base de V. Nesse caso, $[T^{-1}]_\beta = ([T]_\beta)^{-1}$.

As provas de ambos os resultados podem ser encontrados em (4) Coelho e Lourenço, 2013, pág.97-98.

2.1.7 Subespaço T- invariante

Um subespaço W de um espaço vetorial V é considerado invariante sob uma transformação linear $T : V \to V$ se, para cada vetor w em W, o vetor $T(w)$ também está em W. Em outras palavras, a aplicação da transformação linear T a vetores que pertencem ao subespaço W resulta em vetores que ainda pertencem a W.

Formalmente, um subespaço W de um espaço vetorial V é invariante sob a transformação linear T se, para todo w em W, temos $T(w) \in W$. Isso é expresso matematicamente como:

$$W \text{ é invariante sob } T \text{ se } T(w) \in W, \text{ para todo } w \in W.$$

A invariância de subespaços sob transformações lineares é uma propriedade importante em álgebra linear e é frequentemente utilizada para analisar a estrutura de sistemas lineares, especialmente em contextos como teoria de matrizes e teoria dos sistemas dinâmicos.

Observação 2.9. Se V é um espaço vetorial, W é subespaço de V e $T : V \longrightarrow V$ é uma trannsformação linear, então, para constatarmos a T- invariância de W, basta analisarmos se T aplicado nos elementos da base de W ainda estão em W. De fato, seja $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ uma base de W e $w \in W$. Escrevendo

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m,$$

temos

$$T(w) = T(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m) = \alpha_1 T(w_1) + \cdots + \alpha_m T(w_m)$$

se $T(w_i) \in W$, para $i = 1, \cdots, m$ então $T(w_i)$ pode ser escrito como combinação dos elementos de β que, substituindo na igualdade acima, concluiríamos que $T(w)$ é combinação linear dos elementos de β e, portanto, $T(w) \in W$.

Se V é um espaço vetorial, $T : V \longrightarrow V$ e W é subespaço de V $T-$ invariante, então a restrição $T_W : W \longrightarrow W$ é bem posta, uma vez que temos garantia de que a Imagem

de $T|_W$ está no contradomínio indicado. Isso nos permite olhar, por exemplo, a restrição de transformações lineares definidas, inicialmente, em espaços de dimensão infinita, a partir de subespaços de dimensão finita $T-$invariantes. Esse caminho é, exatamente, o que seguimos nas aplicações apresentadas no próximo capítulo.

3 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

3.1 Aplicação na Antidiferenciação

Vamos considerar o operador derivada

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}: & C^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array}$$

do espaço das funções contínuas e diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ no espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Nesse caso, $\mathcal{D}$ é linear, pelas propriedades da derivada.

Sejam $\beta = \{f_1, \cdots, f_n\}$ uma sequência finita de vetores em $C^1(\mathbb{R})$ tal que $S = [\beta]$ é invariante por $\mathcal{D}$, isto é, $\mathcal{D}(S) \subset S$. Então, a derivada restrita a S pode ser representada por uma matriz $n \times n$ relativa à base β nela própria, ou seja, podemos considerar $\gamma = \beta$, nessas condições.

As aplicações que apresentamos nessa seção seguem essa ideia. $\mathcal{D}$–invariantes, calculamos a antiderivada (ou integral) de algumas funções.

3.1.1 Antiderivadas das funções Seno e Cosseno

Seja $\beta = \gamma = \{\sin t, \cos t\}$ e $U = V = [\beta]$. Observe que $S = [\beta]$ é $\mathcal{D}$–invariante, uma vez que $\mathcal{D}(\sin t) = \cos t \in S$ e $\mathcal{D}(\cos t) = -\sin t \in S$. Assim, a restrição $\mathcal{D}|_S : S \longrightarrow S$ é bem posta e, como β é L.I., então β é base de S. Agora,

$$\text{a matriz } [\mathcal{D}(\sin t)]_\beta = [\cos t]_\beta = [0 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{D}(\cos t)]_\beta = [-\sin t]_\beta = [-1 \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a matriz $D = [\mathcal{D}|_S]_\beta$ para $\mathcal{D}$ relativa a β é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

D, em verdade, é a matriz para a rotação de 90° do plano, no sentido anti-horário, que dá imagem à geometria dos círculos das derivadas: $\sin t \to \cos t \to -\sin t \to -\cos t \to \sin t$.

Ainda, a matriz D é invertível, pois $\det D = 1 \neq 0$, portanto, $\mathcal{D}|_S$ é invertível e a matriz da inversa de $\mathcal{D}|_S$ relativa à base β é dada por

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que, nesse contexto, a inversa da diferenciação é a integração e as colunas de D^{-1} representam as coordenadas dos elementos da base, então as antiderivadas dos elementos da base são

$$\int \sin t dt = \mathcal{D}|_S^{-1}(\sin t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \end{bmatrix} = -\cos t$$

e

$$\int \cos t dt = \mathcal{D}|_S^{-1}(\cos t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \sin t$$

Sabemos que há outras antiderivadas para as funções sin e cos, que diferem destas apenas por uma constante. Entretanto, elas não aparecem aqui, uma vez que o espaço das funções constantes forma o núcleo do operador derivada(já que a derivada de qualquer função constante é zero e a função nula é o elemento neutro do espaço de funções) e S intercepta esse núcleo somente na origem, isto é, $Ker(\mathcal{D}) \cap S = \{0\}$. Assim, relativamente à base β, a antidiferenciação, em S, é única.

3.1.2 Integral por Partes

Queremos, agora, calcular o valor de $\int t^2 e^t \, dt$. Nesse caso, sabemos que esta é uma integração típica por partes, em que aplicamos duas vezes o método de integração para calcular o valor.

No nosso contexto, vamos olhar para o espaço contendo t^2e^t que é invariante sob a diferenciação.

Calculando sucessivamente as derivadas de t^2e^t, encontramos combinações dos elementos t^2e^t, te^t, e^t, de modo que nos leva a considerar o conjunto LI $\beta = \{t^2e^t, te^t, e^t\}$, como base de um espaço $\mathcal{D}-$ invariante. Ainda,

- $\mathcal{D}(t^2e^t) = t^2e^t + 2te^t = t^2e^t + 2te^t + 0e^t$;
- $\mathcal{D}(te^t) = te^t + e^t = 0t^2e^t + te^t + e^t$;
- $\mathcal{D}(e^t) = e^t = 0t^2e^t + 0te^t + e^t$;

ou seja, $S' = [B]$ também é $\mathcal{D}-$ invariante.

Portanto, a matriz $D = [\mathcal{D}|_S]_\beta$ é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E, consequentemente,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma única matriz inversa fornece todas as antiderivadas, somente com os coeficientes das colunas de D^{-1}, sendo elas:

- $\int t^2e^t dt = \mathcal{D}|_{S'}^{-1}(t^2e^t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2e^t & te^t & e^t \end{bmatrix} = t^2e^t - 2te^t + 2e^t.$
- $\int te^t dt = \mathcal{D}|_{S'}^{-1}(te^t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2e^t & te^t & e^t \end{bmatrix} = te^t - 1e^t.$
- $\int e^t dt = \mathcal{D}|_{S'}^{-1}(e^t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2e^t & te^t & e^t \end{bmatrix} = e^t.$

3.2 Aplicação nas Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Seja $f \in C^\infty$ e consideremos a Equação Diferencial Ordinária - EDO, não homogênea,

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = f. \tag{3.1}$$

Podemos associar a equação acima ao operador $\mathcal{L}$, de modo que,

$$\mathcal{L}(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y, y \in C^\infty.$$

Note que, se S é um espaço $\mathcal{D}^{(i)}$-invariante, com $i = 1, \cdots, n$; D_S é a matriz de $\mathcal{D}$ numa base β de S e L é a matriz de $\mathcal{L}$ na base β, então

$$L = a_n D_S^n + \cdots + a_1 D_S + a_0 I.$$

E, se $f \in S$, podemos encontrar uma solução particular de (3.1), reescrevendo o problema da forma

$$L[y]_\beta = (a_n D_S^n + \cdots + a_0 I)[y]_\beta = [f]_\beta$$

Exemplo 3.1. Consideremos a EDO

$$y'' + y' + y = \sin t.$$

Usando a base $\beta = \{\sin t, \cos t\}$, já sabemos que

$$\sin t \in S = [\beta] \text{ e } [\sin t]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda,

$$L = D_S^2 + D_S + I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, nosso problema está resumido a encontrar $y \in S$, de modo que

$$L[y]_\beta = [f]_\beta,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [y]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[y]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$y(t) = -\cos t$$

é uma solução particular da equação dada.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos estudos realizados sobre Álgebra linear e Cálculo diferencial e integral, podemos concluir que explorar a interação entre essas disciplinas é uma jornada enriquecedora e fundamental para a formação acadêmica.

Durante este trabalho, mergulhamos nos fundamentos da Álgebra linear, como espaços vetoriais, subespaços e transformações lineares. Esses conceitos não apenas solidificaram nossa compreensão teórica da matemática, mas também revelaram sua aplicabilidade prática em diversas áreas do conhecimento. Da mesma forma, ao explorar as aplicações do Cálculo, desde diferenciação até equações diferenciais, pudemos testemunhar como esses conhecimentos se entrelaçam e se complementam.

A aplicação da Álgebra Linear no Cálculo Diferencial e Integral proporciona uma abordagem robusta e sistemática para resolver uma ampla gama de problemas matemáticos de forma organizada e eficiente. Ao integrar conceitos fundamentais da Álgebra Linear, como a linearidade de operadores, as bases funcionais e suas representações matriciais, conseguimos obter uma compreensão mais profunda das interações entre esses elementos e suas aplicações práticas. Esse estudo não só amplia as ferramentas disponíveis para o cálculo de antiderivadas e a resolução de equações diferenciais ordinárias, mas também revela a elegância da matemática ao unir áreas aparentemente distintas.

Além disso, ao aplicar esses conceitos a problemas concretos, como as integrais de funções trigonométricas e a resolução de equações diferenciais, mostramos como a Álgebra Linear não apenas simplifica os cálculos, mas também oferece uma maneira mais clara e intuitiva de compreender o comportamento de sistemas dinâmicos e suas soluções. Esse entrelaçamento entre a Álgebra Linear e o Cálculo não só aprimora as habilidades analíticas, mas também destaca a interdependência entre diferentes ramos da Matemática, sugerindo que as fronteiras entre elas são muitas vezes mais fluidas do que aparentam. Dessa forma, a combinação dessas áreas matemáticas contribui de maneira significativa para o desenvolvimento de métodos mais poderosos e abrangentes, com aplicações em diversas disciplinas da Ciência e Engenharia.

REFERÊNCIAS

[1] Barbosa, I. G. ; Coelho, E. R. S. . Aplicações da Álgebra Linear no Cálculo. In: VII Encontro de Matemática Pura e Aplicada, 2023, Campina Grande. Anais do Encontro de Matemática Pura e Aplicada (EMPA), 2023. v. 3.

[2] Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*. Harper-Row, São Paulo, Vol. 3. 1980

[3] Boyce, W.E.; DiPrima, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Edição LTC, Rio de Janeiro, 2020.

[4] Coelho, F.U; Lourenço, M.L. *Um Curso de Álgebra Linear*. EdUsp, São Paulo, 2013.

[5] Lima, E. L. *Análise Real*. Vol. 112. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. *Funções de uma Variável*. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[6] Louredo, A.T. *Um Primeiro Curso de Álgebra Linear*. Campina Grande: EDUEPB, 2015.

[7] Rogers Jr, J.W. *Applications of Linear Algebra in Cálculos. The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 1 (Jan., 1997), pp. 20-26.

[8] Steinbruch, A., Winterle, P. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1986.

[9] Stewart, J. *Calculus: Early Transcendentals*. Brooks Cole, 6th edition, 2007.

[10] Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*. PWS Publishing Company, 3rd edition, 1988.