



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALAN TORQUATO TAVARES

ESTUDO DE ALGUMAS RELAÇÕES MÉTRICAS NOS
QUADRILÁTEROS COM O USO DO GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE-PB

2025

ALAN TORQUATO TAVARES

**ESTUDO DE ALGUMAS RELAÇÕES MÉTRICAS NOS
QUADRILÁTEROS COM O USO DO GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE

2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

T231e Tavares, Alan Torquato.

Estudo de algumas relações métricas nos quadriláteros com o uso do geogebra [manuscrito] / Alan Torquato Tavares. - 2025.

36 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Me. Maxwell Aires da Silva, Departamento de Matemática - CCT".

1. Relações métricas. 2. Quadriláteros. 3. Geogebra. 4. Geometria plana. I. Título

21. ed. CDD 516

ALAN TORQUATO TAVARES

ESTUDO DE ALGUMAS RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS COM O USO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso
de Matemática da Universidade
Estadual da Paraíba, como requisito
parcial à obtenção do título de
Licenciado em Matemática

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maxwell Aires da Silva** (***.574.364-**), em **18/06/2025 16:21:58** com chave **8113534c4c7911f084441a7cc27eb1f9**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **18/06/2025 16:45:56** com chave **da2dd51c4c7c11f09a531a1c3150b54b**.
- **Maria da Conceicao Vieira Fernandes** (***.640.424-**), em **18/06/2025 17:33:46** com chave **88ca8dee4c8311f0bae406adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 25/06/2025

Código de Autenticação: 30956c



Dedico este trabalho
a Deus, a minha
família e aos meus
colegas, que foram
meu alicerce durante
a jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e ao Senhor Jesus Cristo por me permitirem realizar o sonho da formação acadêmica, por me concederem saúde e coragem para seguir adiante em busca dos meus objetivos.

Agradeço também à minha mãe, Luciene Torquato, que, apesar das dificuldades vividas por nós, sempre acreditou em mim e me incentivou a continuar estudando.

Minha gratidão à minha esposa, Evelin Tatiane, que, nos momentos em que pensei em desistir, me deu forças, me ajudou a afastar os pensamentos negativos e colaborou na resolução dos exercícios das disciplinas de exatas, graças à sua graduação em Física. Agradeço também à minha sogra, Kátia Mendes, que, desde o momento em que conheci sua filha, sempre me tratou como um filho, me acolheu e nos fortaleceu como casal.

Ao meu avô, Cezarino Torquato, e ao meu tio, Aurélio Torquato, que, desde muito jovem, me ensinaram o valor do trabalho duro e honesto, e que isso me traria frutos no futuro.

Agradeço ao meu orientador, Maxwell Aires, que acreditou no meu potencial desde as disciplinas em que foi meu professor, sempre tirando minhas dúvidas, incentivando minha participação em eventos científicos e aceitando me orientar neste período final do curso.

Agradeço também aos colegas que fiz durante a graduação e aos amigos de convívio mais próximo. Sem vocês, eu não estaria onde estou hoje.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”
(Johannes Kepler)

RESUMO

Este trabalho é uma pesquisa de caráter bibliográfico que apresenta seis teoremas da geometria plana e tem como objetivo estudar do ponto de vista matemático as relações métricas existentes nos quadriláteros, visando um melhor preparo para a docência. Foram realizadas construções geométricas no *software* GeoGebra para uma melhor visualização e precisão, seguido do desenvolvimento da parte algébrica para a comprovação dos teoremas. Todo o processo desenvolvido ressalta a importância dos resultados obtidos através da geometria plana, da utilização de recursos tecnológicos nos dias atuais, e que deve servir como ponte entre o conteúdo universitário, a vivência do futuro docente, além de abrir caminhos para novas pesquisas.

Palavras-chave: relações métricas; quadriláteros; geogebra; geometria plana.

ABSTRACT

This work is a bibliographical research that presents six theorems of plane geometry and aims to study from a mathematical point of view the metric relations existing in quadrilaterals, aiming at better preparation for teaching. Geometric constructions were made in the GeoGebra software for better visualization and precision, followed by the development of the algebraic part to prove the theorems. The entire process developed highlights the importance of the results obtained through plane geometry, the use of technological resources in the present day, and which should serve as a bridge between the university content, the experience of the future teacher, in addition to opening paths for new research.

Keywords: metric relations; quadrilaterals; geogebra; plane geometry.

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO
	9
2	GEOMETRIA
	11
2.1	Contexto histórico 11
2.2	Ensino de Geometria 11
3	O GEOGEBRA
	14
4	QUADRILÁTEROS
	18
4.1	Quadriláteros inscritíveis 18
4.2	Construções e resultados 19
4.3	Aplicações 32
5	CONCLUSÃO
	35
5.1	Sugestões para pesquisas futuras 35
	REFERÊNCIAS
	36

1 INTRODUÇÃO

É bastante comum, para os licenciados em matemática, durante a vivência escolar se depararem com diversas questões complexas que demandam um conhecimento mais aprofundado, principalmente se tratando do conteúdo de geometria plana, mesmo que durante o nível médio da educação básica. Sabemos da extrema importância que tem o conteúdo matemático de geometria e como pode nos ajudar a resolver questões problemas, não só em sala de aula, mas também em nosso cotidiano.

Dando destaque a essa problemática, surgiu o questionamento de como munir o professor recém formado de um conhecimento mais aprofundado e prepará-lo para essas situações. Logo, em debate com o professor orientador, foi proposto o estudo de alguns teoremas geométricos, em específico as relações métricas presentes nos quadriláteros, com o intuito de divulgar resultados pouco explorados no sistema de ensino brasileiro.

Os teoremas geométricos e suas demonstrações são de suma importância para formação do aluno/professor. Com eles são possíveis a determinação de áreas, medidas de segmentos, raios de circunferências e afins, de acordo com as propriedades da geometria plana. Nesse contexto, a implementação de teoremas pouco explorados na literatura brasileira seria de grande ajuda na elucidação de questões que abordem o conteúdo de geometria. Com uma gama maior de conhecimento as resoluções de questões problemas acabam se tornando de uma maneira mais fluida, tendo em vista que seria possível recorrer a diversas formas de resolução para um mesmo assunto.

Vale ressaltar que a formação de professores, por parte das universidades públicas, sempre está em constante evolução com relação à preparação dos mesmos, buscando desenvolver novos métodos de ensino que sejam eficazes na aprendizagem de seus futuros alunos e ao mesmo tempo prazeroso para eles. Como vivemos em um momento de total expansão digital, tivemos a ideia de utilizar o *software* GeoGebra como recurso metodológico para que a transmissão do conhecimento acerca do assunto explorado acontecesse de maneira mais didática. Essa ferramenta possibilita a rica e precisa visualização das relações presentes no quadriláteros. Logo, o desenvolvimento do passo a passo dos teoremas se tornariam mais dinâmicos para os futuros profissionais da área e incentivaria a utilização de recursos tecnológicos semelhantes.

Esta pesquisa é uma revisão bibliográfica onde foram utilizados como referencial teórico base o livro *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*, livros e artigos secundários que ajudaram no desenvolvimento do trabalho, e está dividida em três seções. Na primeira seção serão apresentados o contexto histórico da geometria, como ela surgiu e seus possíveis primeiros registros em algumas regiões do planeta, logo após falaremos sobre o ensino de geometria, sua importância e as dificuldades que assolam essa prática.

A segunda seção será dedicada ao *software* GeoGebra, onde falaremos um pouco sobre quem o criou, como ele é utilizado de forma gratuita em todo o planeta com sua vasta comunidade, e também sua interface de fácil compreensão para realização de diversas construções e operações matemáticas.

Por fim, na terceira seção, apresentaremos as condições para que os teoremas de Marlen, Euler, Ptolomeu, Viette, Packein e Chaddu sejam desenvolvidos, suas construções geométricas realizadas no GeoGebra, algébricas e consequentemente a comprovação dos teoremas, seguindo com algumas aplicações.

2 GEOMETRIA

Neste capítulo, será ressaltado o contexto histórico acerca da geometria, onde foram pesquisados relatos sobre o seu surgimento e a sua utilização de acordo com os primeiros registros. Logo após, destacaremos como é utilizada no ensino e sua importância para o desenvolvimento dos estudantes.

2.1 Contexto histórico

A palavra geometria vem do grego, sendo a junção de “geo” (terra) e “metria” (medida) que resultam na sua formação, e a mesma é uma área da matemática em que se exploram os tamanhos, posições e dimensões das formas geométricas partindo de alguns conceitos primitivos tais como ponto, reta e plano. A partir desses conceitos conseguimos desenvolver todo o vasto campo de análise e pesquisa geométrica.

Por mais que registros históricos citem o surgimento da geometria no Egito Antigo, se torna um pouco complexo fazer essa afirmação, pois segundo Boyer (1974), “as afirmações sobre a origem da matemática, seja aritmética ou geometria são muito arriscadas, já que os primórdios são mais antigos do que a arte de escrever.”

Mesmo antes das produções egípcias, foi possível achar registros da antiguidade em que se observava certo padrão na produção de artefatos.

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são parte da geometria elementar. (Boyer, 1974)

A geometria tinha sua aplicação no Egito Antigo na prática de divisão de terras como necessidade após as inundações do Rio Nilo, segundo registros, mas também poderia ser estudada como forma de lazer de uma classe sacerdotal egípcia. Os praticantes dessa arte eram denominados de “esticadores de corda”, pois as cordas eram utilizadas para demarcações de terra e para traçar as bases de seus templos. Também há relatos históricos advindos da Índia, onde a geometria era usada na construção de templos de adoração, tratando da utilização da denominada “regra da corda” assim como no Egito Antigo.

2.2 Ensino de Geometria

Atualmente, sabe-se da dificuldade que se tem ao lecionar sobre assuntos matemáticos, pois a sociedade em que vivemos está cada vez mais envolvida com os recursos tecnológicos. Os alunos não se veem tão interessados em aprender, não só matemática mas também as diversas outras disciplinas da educação básica. Cada vez mais os profissionais dessa área devem estar atualizados com novos métodos de ensino e utilizar ferramentas, sejam elas

recursos tecnológicos ou materiais concretos, que possam auxiliar nesta difícil tarefa de ministrar aula. Não deve-se ater apenas a transmissão de conteúdo para aprendizagem de fórmulas por meio de métodos decorativos, e sim para que a matemática sirva como papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos em questão, e que os mesmos possam fazer assimilações do que foi visto em sala de aula com a sua realidade, principalmente se tratando do conteúdo de geometria, pois o estudo das formas geométricas têm extrema importância no desenvolvimento do pensamento do aluno sobre o mundo que o cerca.

O conhecimento de assuntos que dizem respeito à geometria se torna extremamente importante para a aprendizagem e desenvolvimento cognitivo de quem a estuda, pois acaba por ser um meio facilitador para a resolução de diversos problemas, tanto no âmbito teórico, como no visual e prático. Através dela é possível fazer assimilações e comparações com figuras bidimensionais e tridimensionais, associando seus lados, vértices, ângulos, e sem falar nas relações de simetria e nas construções e transformações geométricas.

Em Brasil (2007) é possível afirmar que “a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”. O documento normativo determina algumas habilidades, dentre as diversas, que os alunos devem desenvolver através do ensino de geometria. Algumas delas são:

- **(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;
- **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes;
- **(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares;
- **(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano;
- **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Logo, o ensino de geometria tem sua relevância não só na matemática, mas também em todo o processo educacional, pois através dele os alunos deverão desenvolver o pensamento

geométrico para produzir argumentos convincentes e fazer conjecturas que dizem respeito aos problemas em questão.

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995)

Com isso, percebe-se a importância da geometria, e que o ensino vai muito além das práticas tradicionais, e a interação dos envolvidos com as construções geométricas e a visualização das figuras são fatores fundamentais para uma aprendizagem significativa. Logo, a implementação de recursos, sejam os materiais manipuláveis ou os digitais, acabam se tornando algumas das possibilidades para o desenvolvimento do conteúdo com os discentes.

3 O GEOGEBRA

Neste capítulo será apresentado o recurso digital que foi utilizado como apoio metodológico nas construções geométricas, onde foram utilizadas as diversas ferramentas disponíveis em sua interface.

O GeoGebra é um *software* voltado para a comunidade matemática que engloba milhões de usuários em diversos países, e tem como objetivo tentar diminuir a dificuldade de relação entre alunos e a disciplina.

Figura 1 – Logo oficial do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

Tornou-se o mais conhecido e utilizado *software* dinâmico de matemática, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. O mecanismo matemático do GeoGebra alimenta centenas de sites educacionais em todo o mundo de diferentes maneiras, desde demonstrações simples até sistemas de avaliação online completos.

O *software* foi desenvolvido por **Markus Hohenwarter** e possibilita a realização de construções geométricas utilizando régua e compasso digitais, o que permite manter os passos e características fundamentais à construção convencional. Favorece dessa forma, as construções que envolvem Geometria, Álgebra e Cálculo. Nele é possível trabalhar na construção de figuras planas e em 3D como os sólidos de revolução, com diversos tipos de cálculos e equações com variáveis e constantes a serem definidas, planilhas, gráficos e estatísticas, com uma visualização dinâmica e interativa. Tem seu acesso totalmente gratuito no site www.geogebra.org e sua plataforma é de fácil manipulação com seus comandos totalmente intuitivos, servindo não só a comunidade acadêmica como às redes de ensino público em geral, e os professores podem acompanhar o desenvolvimento do aluno de forma online através de plataformas secundárias como o Google Classroom.

Ao navegarmos em seu site e explorarmos na aba inicial, podemos encontrar os comandos para utilização da calculadora e seus demais recursos matemáticos.

Figura 2 – Funcionalidades do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

Na aba referente a todos os recursos, podemos ser direcionados a área de Álgebra, Geometria, Medição, Sentidos Numéricos, Operações, Probabilidade e Estatística, como na imagem a seguir.

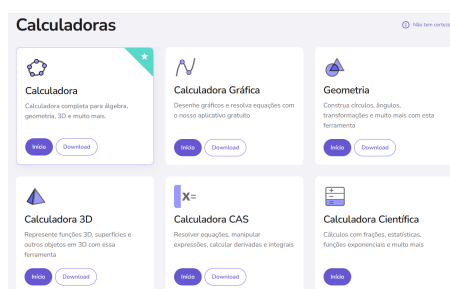
Figura 3 – Recursos prontos do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

No comando iniciar calculadora, podemos encontrar diversas opções em que pode-se fazer o seu download em separado ou utilizar o modo online. Daremos ênfase a calculadora da barra de Geometria, onde construiremos os quadriláteros e seus respectivos teoremas.

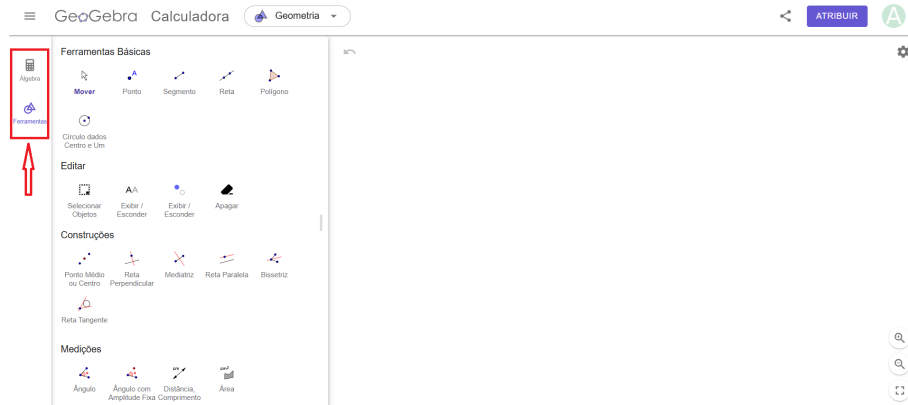
Figura 4 – Funcionalidades do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

Selecionando a aba de Geometria, podemos ter acesso às diversas ferramentas de construções geométricas, assim como o comando de Álgebra em que podemos adicionar equações e legendas às figuras.

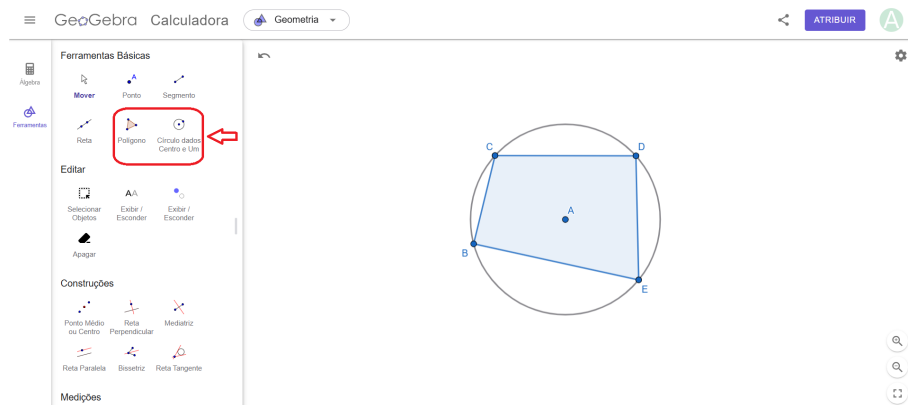
Figura 5 – Ferramentas de construção do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

Podemos construir um círculo ou circunferência através do seu comando na barra de ferramentas dado qualquer ponto e seu raio, e após isso podemos inscrever um quadrilátero no mesmo pela ferramenta polígono, resultando em um dos processos de elaboração dos teoremas em questão deste trabalho.

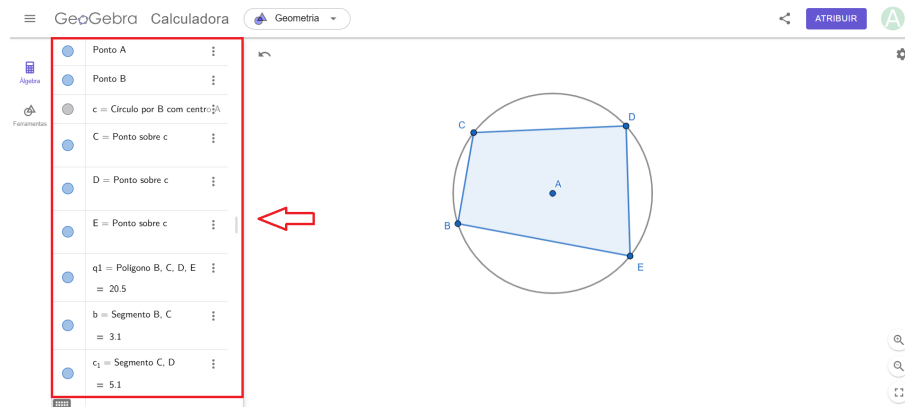
Figura 6 – Exemplo de construção do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

Todos os pontos das construções são exibidos na aba Álgebra, mostrando o passo a passo de todo o processo.

Figura 7 – Passo a passo da construção do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.

São processos muito intuitivos e de fácil execução, o que torna o *software* diferenciado em relação aos demais voltados para a área Matemática. O GeoGebra é um ambiente propício para que os estudantes explorem, manipulem objetos e construções, pois valoriza a ação do discente, tanto no processo de construção quanto no de exploração. Neste sentido, sua utilização nas aulas de Matemática pode levar os estudantes ao processo de tomada de consciência relacionada aos conceitos matemáticos ao internalizarem as ações e consequências observadas nesse ambiente de geometria dinâmica.

Nossa missão é dar as melhores ferramentas para professores capacitarem seus alunos para desenvolverem seu maior potencial. Nós vamos além de ser apenas uma coleção de ferramentas. Esforçando-nos para conectar indivíduos apaixonados do mundo da educação, oferecemos uma nova abordagem para ensinar, explorar e aprender matemática. (GeoGebra, 2025)

O mesmo será utilizado na apresentação dos teoremas que serão explorados nesta pesquisa, mostrando a construção dos quadriláteros e suas relações métricas passo a passo, com o intuito de tornar uma melhor visualização na demonstração dos mesmos.

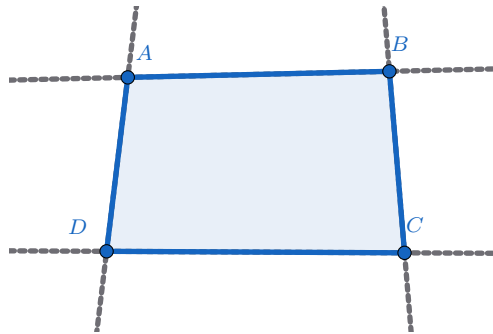
4 QUADRILÁTEROS

Neste capítulo, serão apresentadas na primeira seção o que é um quadrilátero e as condições para ser inscrito, na segunda seção os teoremas que foram propostos, que são o de Marlen, Euler, Ptolomeu, Viette, Packein, Chaddu, juntamente com suas demonstrações e resultados, e por fim uma seção com possíveis aplicações.

4.1 Quadriláteros inscritíveis

Segundo Dolce (2013), “sejam A , B , C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.”

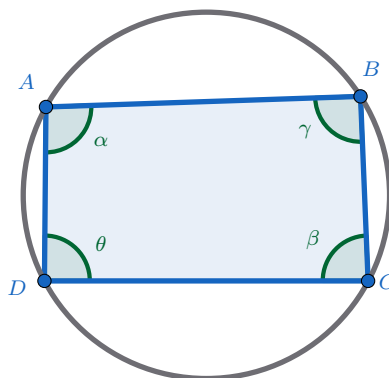
Figura 1 – Quadrilátero.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

Caminha (2012) nos afirma que “dado um quadrilátero convexo, dizemos que o mesmo é inscrito (ou cíclico) se por todos os seus vértices passar uma única circunferência.”

Figura 2 – Quadrilátero inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

As condições para que um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ seja inscritível são:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

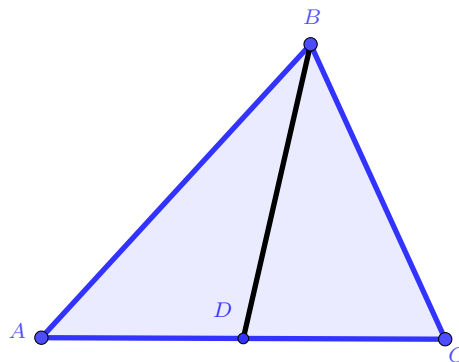
$$\theta + \gamma = 180^\circ$$

4.2 Construções e resultados

Nesta seção serão apresentados cinco teoremas auxiliares extraídos do livro *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales* que servirão como lemas, seguindo então as demonstrações dos principais resultados desta pesquisa.

Lema 4.1. *Dado um triângulo ABC , a soma dos quadrados dos lados adjacentes à mediana de um lado de um triângulo é igual a duas vezes o quadrado da mediana mais a metade do quadrado do lado relativo a referida mediana.*

Figura 3 – Teorema da Mediana.



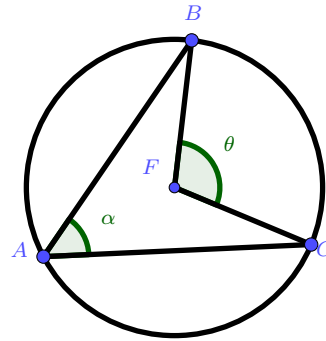
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 3, temos:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = 2(\overline{BD})^2 + \frac{(\overline{AC})^2}{2}$$

Lema 4.2. *Dado um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R , o produto dos comprimentos de dois lados de um triângulo é igual ao produto do diâmetro da circunferência circunscrita pela altura relativa ao terceiro lado.*

Figura 6 – Teorema do ângulo inscrito.



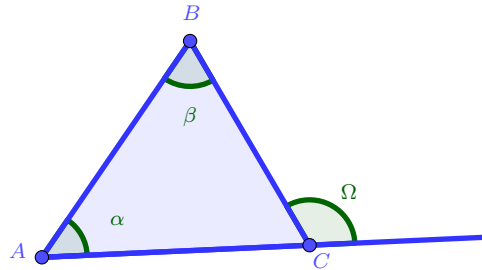
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 6, temos:

$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

Lema 4.5. *Dado um triângulo ABC, a medida de seu ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes.*

Figura 7 – Teorema do ângulo externo.



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 7, temos:

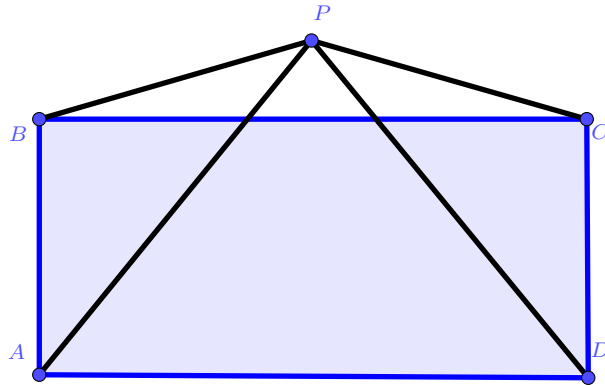
$$\Omega = \alpha + \beta$$

Agora, daremos início às construções dos teoremas e suas demonstrações, também extraídos do livro *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*, explicitando todo o passo a passo das seguintes relações métricas presentes no quadriláteros.

O **Teorema de Marlen** se trata de uma relação métrica presente nos retângulos em geral, onde podemos utilizar de qualquer ponto interior ou exterior da figura e calcular a distância desse mesmo ponto aos vértices da referida figura.

Teorema 4.1. *A soma dos quadrados das distâncias de um ponto P qualquer do plano aos vértices opostos de um retângulo $ABCD$ são iguais.*

Figura 8 – Teorema de Marlen



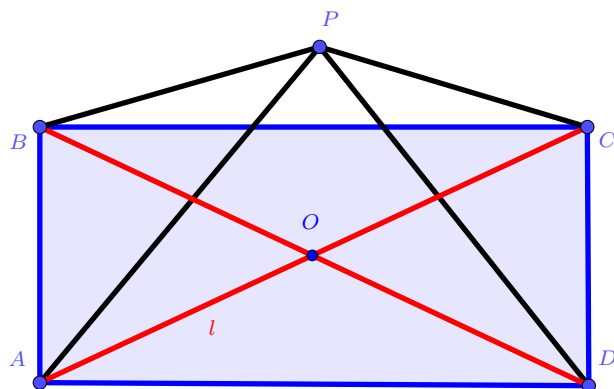
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 8, temos:

$$(\overline{AP})^2 + (\overline{PC})^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{PD})^2 \quad (4.1)$$

Demonstração: Em um retângulo $ABCD$, iremos traçar as suas diagonais de modo que se intersectem no ponto O . Sabemos que as distâncias $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$. Denotaremos esses segmentos de l .

Figura 9 – Teorema de Marlen (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Tomando os triângulos APC e BPD , observamos que $\overline{PO}$ é mediana. Aplicando o Lema 4.1, obtemos:

No triângulo APC ,

$$(\overline{AP})^2 + (\overline{PC})^2 = 2(\overline{PO})^2 + \frac{(2l)^2}{2}$$

Fazendo o mesmo processo em BPD ,

$$(\overline{BP})^2 + (\overline{PD})^2 = 2(\overline{PO})^2 + \frac{(2l)^2}{2}$$

Relacionando as duas equações obtidas, chegamos ao resultado:

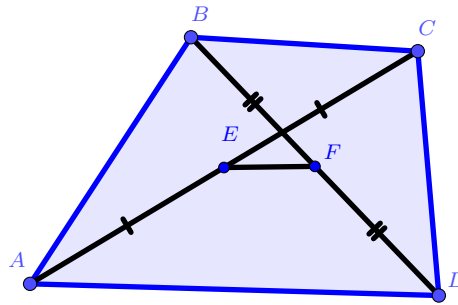
$$(\overline{AP})^2 + (\overline{PC})^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{PD})^2$$

□

O próximo teorema é conhecido como **Teorema de Euler** e fala sobre a relação métrica presente nos quadriláteros, envolvendo suas diagonais e seus pontos médios.

Teorema 4.2. *Em todo quadrilátero, a soma dos quadrados de seus lados é igual a soma dos quadrados de suas diagonais mais o quádruplo do quadrado da distância entre os pontos médios dessas diagonais.*

Figura 10 – Teorema de Euler



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 10, temos:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CD})^2 + (\overline{AD})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BD})^2 + 4(\overline{EF})^2 \quad (4.2)$$

Demonstração: Recorrendo ao Lema 4.1 utilizado anteriormente, aplicado aos triângulos ABC e ADC projetados no quadrilátero $ABCD$.

No triângulo ABC ,

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = 2(\overline{BE})^2 + \frac{(\overline{AC})^2}{2}$$

Utilizando do mesmo processo no triângulo ADC ,

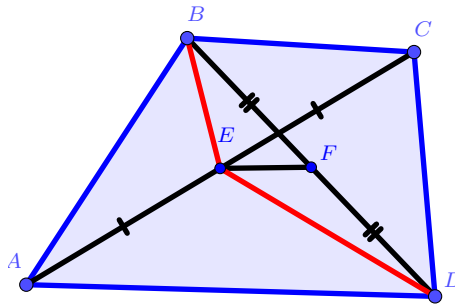
$$(\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 = 2(\overline{DE})^2 + \frac{(\overline{AC})^2}{2}$$

Agora, iremos somar as equações obtidas nos triângulos projetados ABC e ADC :

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 = 2(\overline{BE})^2 + 2(\overline{DE})^2 + (\overline{AC})^2 \quad (4.3)$$

Projetando o triângulo BED :

Figura 11 – Teorema de Euler (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Aplicando o Lema 4.1 ao mesmo, temos:

$$(\overline{BE})^2 + (\overline{DE})^2 = 2(\overline{EF})^2 + \frac{(\overline{BD})^2}{2}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por dois,

$$2(\overline{BE})^2 + 2(\overline{DE})^2 = 4(\overline{EF})^2 + (\overline{BD})^2$$

Agora, substituindo na equação 4.3, chegamos ao seguinte resultado:

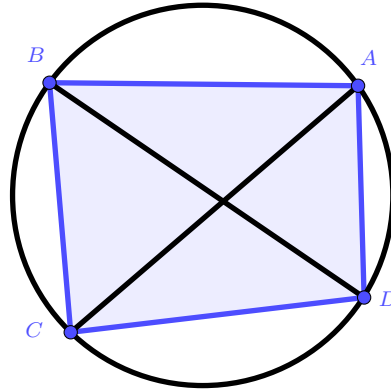
$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CD})^2 + (\overline{AD})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BD})^2 + 4(\overline{EF})^2$$

□

Seguindo com as construções e demonstrações, trataremos a partir de agora dos quadriláteros inscritíveis. A seguir, o **Teorema de Ptolomeu** fala sobre a relação entre os lados e as diagonais.

Teorema 4.3. *Em todo quadrilátero inscritível, o produto dos comprimentos de suas diagonais é igual à soma dos produtos dos comprimentos de seus lados opostos.*

Figura 12 – Teorema de Ptolomeu



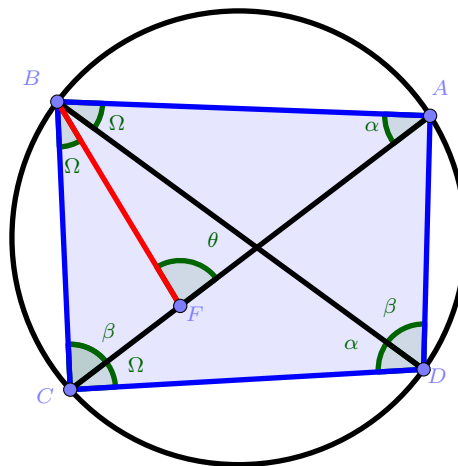
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 12, temos:

$$(\overline{CA}) \cdot (\overline{BD}) = (\overline{AD}) \cdot (\overline{BC}) + (\overline{CD}) \cdot (\overline{BA}) \quad (4.4)$$

Demonstração: Na diagonal $\overline{CA}$ marcamos o ponto F através do segmento de reta isogonal¹ $\overline{BF}$ de modo que a medida do ângulo $\angle CBF = \angle DBA$ e, sendo $\angle BCF = \angle BDA$ pelo Lema 4.4, logo os triângulos CBF e DBA são semelhantes.

Figura 13 – Teorema de Ptolomeu (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Por compartilharem do mesmo arco, temos $\angle CDB = \angle CAB$, e pelo Lema 4.5 temos $\theta = \Omega + \beta$ implicando também em $\angle BFA = \angle BCD$. Logo, os triângulos CDB e FBA são semelhantes.

¹Seja ABC um triângulo e AD uma reta qualquer que passa por A , com D sobre a reta BC . Então a reta r , reflexão da reta AD pela bissetriz do ângulo $\angle BAC$, é chamada a isogonal da reta AD .

No triângulo CBF semelhante à DBA , utilizamos da proporção:

$$\frac{(\overline{CF})}{(\overline{AD})} = \frac{(\overline{BC})}{(\overline{BD})} \Rightarrow (\overline{CF}) = \frac{(\overline{BC}) \cdot (\overline{AD})}{(\overline{BD})}$$

De forma análoga à anterior, temos o triângulo CBD semelhante à FBA :

$$\frac{(\overline{FA})}{(\overline{CD})} = \frac{(\overline{BA})}{(\overline{BD})} \Rightarrow (\overline{FA}) = \frac{(\overline{BA}) \cdot (\overline{CD})}{(\overline{BD})}$$

Somando as equações,

$$(\overline{CF}) + (\overline{FA}) = \frac{(\overline{BC}) \cdot (\overline{AD}) + (\overline{BA}) \cdot (\overline{CD})}{(\overline{BD})}$$

Isso implica em,

$$((\overline{CF}) + (\overline{FA})) \cdot \overline{BD} = (\overline{BC}) \cdot (\overline{AD}) + (\overline{BA}) \cdot (\overline{CD})$$

Substituindo a soma entre parênteses, chegamos ao seguinte resultado:

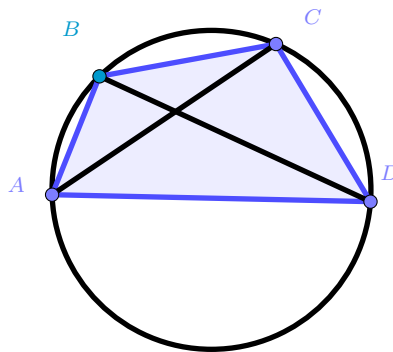
$$(\overline{CA}) \cdot (\overline{BD}) = (\overline{BC}) \cdot (\overline{AD}) + (\overline{BA}) \cdot (\overline{CD})$$

□

O **Teorema de Viette** é uma relação métrica nos quadriláteros inscritíveis que envolve também as medidas de seus lados e suas diagonais, que é explicito pela razão entre alguns elementos da referida figura.

Teorema 4.4. *Em todo quadrilátero inscritível, a razão dos comprimentos de suas diagonais é igual a razão da soma dos produtos dos comprimentos dos lados que se encontram nas extremidades das referidas diagonais.*

Figura 14 – Teorema de Viette



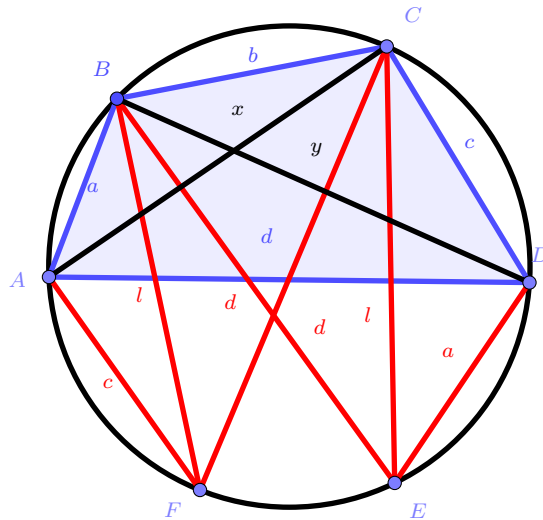
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 14, temos:

$$\frac{(\overline{AC})}{(\overline{BD})} = \frac{(\overline{AB}) \cdot (\overline{AD}) + (\overline{CB}) \cdot (\overline{CD})}{(\overline{AB}) \cdot (\overline{BC}) + (\overline{CD}) \cdot (\overline{AD})} \quad (4.5)$$

Demonstração: Na circunferência, marcamos os pontos E e F de modo que o arco $\widehat{DE}$ seja de mesma medida que $\widehat{AB}$ e $\widehat{AF}$ seja de mesma medida que $\widehat{CD}$. Deduzimos que $\widehat{DE} \equiv \widehat{AB}$ e $\widehat{AF} \equiv \widehat{CD}$. Também deduzimos que $\widehat{FAB} \equiv \widehat{EDC}$. Conseguimos observar também que os arcos $\widehat{FABC} \equiv \widehat{ABCD} \equiv \widehat{BCDE}$. Consequentemente, pela relação de cordas congruentes gerarem arcos congruentes², obtemos $\overline{DE} = \overline{AB} = a$, $\overline{AF} = \overline{CD} = c$, $\overline{BF} = \overline{CE} = l$ e $\overline{FC} = \overline{AD} = \overline{BE} = d$.

Figura 15 – Teorema de Viette (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Nos quadriláteros $FABC$ e $EDCB$ inscritos, aplicaremos o Teorema 4.3.

Em $FABC$

$$x \cdot l = a \cdot d + b \cdot c$$

Fazendo o mesmo processo no quadrilátero $EDCB$,

$$y \cdot l = a \cdot b + c \cdot d$$

²Duas cordas de mesma medida determinam em uma circunferência arcos de mesma medida, e vice-versa.

Agora, dividindo ambas as equações, temos,

$$\frac{x \cdot l}{y \cdot l} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}$$

Resultando em:

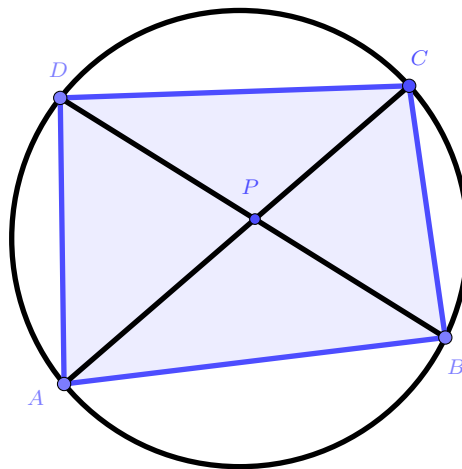
$$\frac{(\overline{AC})}{(\overline{BD})} = \frac{(\overline{AB}) \cdot (\overline{AD}) + (\overline{CB}) \cdot (\overline{CD})}{(\overline{AB}) \cdot (\overline{BC}) + (\overline{CD}) \cdot (\overline{AD})}$$

□

O **Teorema de Páckein** que será apresentado a seguir, apesar de também envolver a relação entre lados e diagonais, leva em consideração a intersecção entre as referidas diagonais e seus segmentos parciais.

Teorema 4.5. *Em todo quadrilátero inscrito em uma circunferência, a razão de seus comprimentos dos segmentos parciais determinados em uma diagonal pelo ponto de intersecção com a outra é igual a razão dos produtos de lados adjacentes aos referidos segmentos.*

Figura 16 – Teorema de Páckein



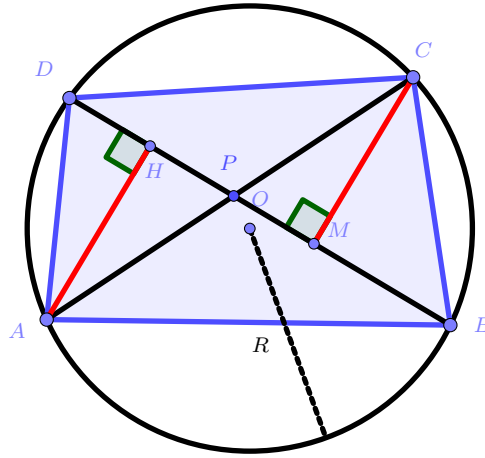
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 16, temos:

$$\frac{(\overline{AP})}{(\overline{CP})} = \frac{(\overline{AB}) \cdot (\overline{AD})}{(\overline{CB}) \cdot (\overline{CD})} \quad (4.6)$$

Demonstração: Seja R o raio da circunferência em que o quadrilátero $ABCD$ está inscrito. Traçamos os segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{CM}$ que serão as alturas relativas ao segmento $\overline{BD}$ dos triângulos ADB e CDB .

Figura 17 – Teorema de Ptolemeu (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Aplicando o Lema 4.2 ao triângulo ADB ,

$$(\overline{AD}) \cdot (\overline{AB}) = 2R \cdot (\overline{AH})$$

Analogamente, faremos o mesmo processo no triângulo CDB ,

$$(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD}) = 2R \cdot (\overline{CM})$$

Dividiremos as equações encontradas, uma pela outra, resultando assim,

$$\frac{(\overline{AD}) \cdot (\overline{AB})}{(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD})} = \frac{2R \cdot (\overline{AH})}{2R \cdot (\overline{CM})}$$

Isso implica em:

$$\frac{(\overline{AD}) \cdot (\overline{AB})}{(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD})} = \frac{(\overline{AH})}{(\overline{CM})}$$

Por possuírem dois ângulos iguais, conseguimos garantir a semelhança dos triângulos APH e CPM . Com isso dispomos da relação

$$\frac{(\overline{AP})}{(\overline{CP})} = \frac{(\overline{AH})}{(\overline{CM})}$$

Substituindo na equação anterior, obtemos,

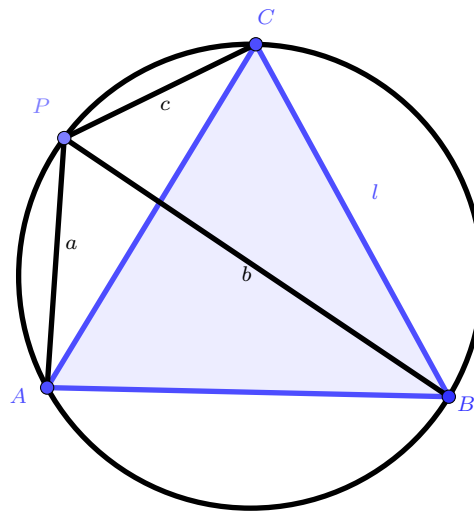
$$\frac{(\overline{AD}) \cdot (\overline{AB})}{(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD})} = \frac{(\overline{AP})}{(\overline{CP})}$$

□

A próxima construção se trata do **Teorema de Chaddu**, que é uma aplicação do Teorema 4.3, onde serão apresentadas duas relações métricas que surgem a partir de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, e após chegar na primeira relação determinamos um quadrilátero como construção auxiliar para o resultado proposto.

Teorema 4.6. *A soma das distâncias de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero aos dois vértices mais próximos é igual a distância desse ponto ao vértice mais distante do triângulo equilátero.*

Figura 18 – Teorema de Chaddu



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Considerando a Figura 18, temos:

$$a + c = b \quad (4.7)$$

i) Demonstração: Observando o quadrilátero $ABCP$, podemos recorrer ao Teorema 4.3, onde

$$a \cdot l + c \cdot l = l \cdot b$$

Dividindo por l ambos os lados da equação, temos

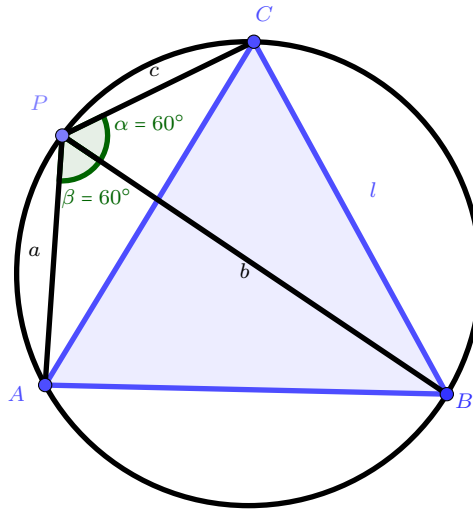
$$\frac{a \cdot l}{l} + \frac{c \cdot l}{l} = \frac{b \cdot l}{l} \Rightarrow a + c = b$$

Também é válida a relação:

$$l^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4.8)$$

ii) Demonstração: Partindo do Lema 4.4, observamos que os arcos $\widehat{AB} = \widehat{BC} = 120^\circ$ e que os ângulos $\angle APB = \angle BPC = 60^\circ$.

Figura 19 – Teorema de Chaddu (Construção).



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Aplicando o Lema 4.3 ao triângulo APB

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60^\circ$$

Agora, substituímos o valor do cosseno,

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2}$$

isso implica em

$$l^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b$$

Aplicaremos o mesmo processo ao triângulo CPB

$$l^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos 60^\circ$$

Fazendo a mesma substituição como anteriormente,

$$l^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \frac{1}{2}$$

Resultando em:

$$l^2 = c^2 + b^2 - c \cdot b$$

Somando ambas as equações, temos

$$2l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a \cdot b - c \cdot b \Rightarrow 2l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - b \cdot (a + c)$$

Observamos que $a + c = b$ pela relação encontrada na demonstração anterior. Logo,

$$2l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - b \cdot (b) \Rightarrow 2l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - b^2$$

Obtemos então a seguinte equação:

$$2l^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow l^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

□

4.3 Aplicações

A seguir, temos algumas aplicações dos teoremas explorados nesta pesquisa, que foram retirados do livro *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*.

Problema 1: Seja $ABCDEFGH$ um heptágono regular de lado igual a 7. Determine:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AF}$$

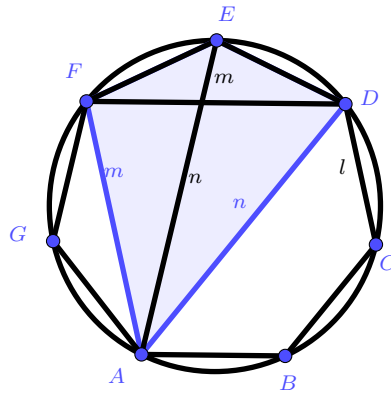
Resolução: Denotando como l a medida dos lados do heptágono regular, e $AB = n$, $AF = m$, então tentaremos encontrar

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Como $AD = AE = n$ e $DF = AF = m$, projetamos o quadrilátero $AFED$ inscrito. Desse modo, podemos utilizar do **Teorema de Ptolomeu** 4.3.

$$m \cdot n = n \cdot l + m \cdot l$$

Figura 20 – Aplicação 1



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Em que,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

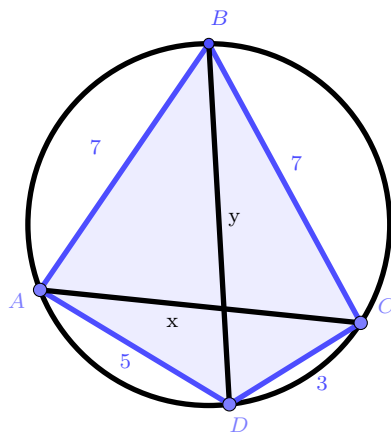
Sabemos que $l = 7$, então

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$$

Link da construção no GeoGebra da aplicação acima: <https://www.geogebra.org/calculator/hqasaspv>.

Problema 2: Em um quadrilátero inscrito $ABCD$, de lados $AB = 7$, $BC = 7$, $CD = 3$ e $AD = 5$, encontre a soma de suas diagonais.

Figura 21 – Aplicação 2



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Resolução: Por $ABCD$ ser um quadrilátero inscritível, iremos utilizar dois teoremas para resolver o problema.

Pelo **Teorema de Ptolomeu** 4.3, temos:

$$x \cdot y = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 56$$

Agora, pelo **Teorema de Viette** 4.4, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 3}{7 \cdot 7 + 5 \cdot 3} = \frac{7}{8}$$

Encontrando $x = 7$ e $y = 8$, concluímos a equação anterior e chegamos no seguinte resultado:

$$x + y = 15$$

Link da construção no GeoGebra da aplicação acima: <https://www.geogebra.org/calculator/wtmckrpp>.

Os teoremas estudados podem ser aplicados em diversas situações, sejam no ensino básico ou no estudo de questões a nível de concursos públicos e olimpíadas. E ao utilizar o GeoGebra como recurso didático, aliamos a teoria com a prática na formação docente e no ensino de geometria.

5 CONCLUSÃO

Foi de suma importância apresentar os teoremas geométricos que envolvem as relações métricas presentes nos quadriláteros, pois através deles podemos repassar resultados ricos em termos de geometria plana, e que podem despertar a curiosidade de alunos/professores para pesquisas na área da matemática, e para que possamos incentivar os alunos a desenvolverem o pensamento crítico e geométrico de modo geral.

A vasta aplicabilidade dos mesmos, sejam durante o ensino básico, olimpíadas de matemática e até mesmo na resolução de questões de colégios militares a exemplo do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Escola de Sargentos das Armas e entre outros, podem fortalecer o acervo de conhecimento daqueles que têm interesse em conteúdos que envolvam geometria.

Também vale ressaltar a contribuição do uso de recursos tecnológicos como o GeoGebra, pois através dele podemos fortalecer a interação e atrair os olhares para a visualização das construções geométricas, sem contar na precisão dos resultados obtidos. Além disso, os discentes podem fazer suas próprias construções e encontrar os resultados de acordo com que se pede em determinadas atividades.

Esta pesquisa pode e deve servir como ponte entre o conteúdo universitário e a prática docente, mostrando assim a possibilidade de adaptação de conteúdos avançados para o ensino básico através da utilização de recursos tecnológicos.

5.1 Sugestões para pesquisas futuras

Diversas possibilidades de pesquisas podem surgir através deste trabalho, entre elas podemos destacar o aprofundamento no que diz respeito às relações métricas presentes nos quadriláteros, onde o livro *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales* apresenta muitos outros resultados que merecem ser explorados. Também há a possibilidade de explorar a comprovação dos teoremas por meio de outros métodos de construção.

Outra pesquisa que sugerimos é através das construções e resultados obtidos na utilização de outros *softwares* como o Cabri e o Desmos, ou até mesmo a criação de fóruns de estudos e discussões, a exemplo do próprio GeoGebra, das plataformas Brasil Escola e Me Salva, e das comunidades no Facebook e Instagram que contenham essas construções para que sirvam de auxílio para professores e alunos.

E por último, pode-se aplicar as linhas de pesquisa apresentadas utilizando sequências didáticas e observar os efeitos na aprendizagem do conteúdo de geometria.

REFERÊNCIAS

- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2007.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- CAMINHA, Antônio. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. São Paulo: Atual, ed. 9, 2013.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 5° ed, 2011.
- GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?**. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 28 de novembro de 2024.
- LORENZATO, Sergio. **Por quê não ensinar Geometria?**. Blumenau: A Educação Matemática em Revista n°4, 1995.
- MILTON, D. P., WILLIAN, R. P., ALBERTO, F. R. L.. **Geomatria plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales**. Lima: Asociación Fondo de Investigadores y Editores, 1^a ed, v.1, 2019.