



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

ERIK LUIZ SOUZA ALVES

UMA ABORDAGEM TEÓRICA AO LASER ALEATÓRIO

PATOS - PB
2025

ERIK LUIZ SOUZA ALVES

UMA ABORDAGEM TEÓRICA AO LASER ALEATÓRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Óptica

Orientador: Prof. Dr. Valdeci Mestre da Silva Júnior

**PATOS - PB
2025**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A474a Alves, Erik Luiz Souza.
Uma abordagem teórica ao laser aleatório [manuscrito] /
Erik Luiz Souza Alves. - 2025.
47 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas
e Sociais Aplicadas, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Valdeci Mestre da Silva Júnior,
Coordenação do Curso de Física - CCEA".

1. Laser aleatório. 2. Emissão estimulada. 3. Espalhamento
da luz. I. Título

21. ed. CDD 535.8

ERIK LUIZ SOUZA ALVES

UMA ABORDAGEM TEÓRICA AO LASER ALEATÓRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física

Aprovada em: 06/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Guillermo Francisco Palacios Roque** (***.822.124-**), em **25/06/2025 12:33:19** com chave **b898216651d911f08bab1a7cc27eb1f9**.
- **Pedro Carlos de Assis Júnior** (***.670.524-**), em **25/06/2025 12:47:10** com chave **a7bb896c51db11f0b7ab06adb0a3afce**.
- **Valdeci Mestre da Silva Júnior** (***.639.694-**), em **25/06/2025 12:00:24** com chave **1f8443be51d511f0b95506adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 25/06/2025

Código de Autenticação: 6f7854



AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e principalmente a minha mãe, quem mais me apoiou incondicionalmente e ouviu meus desabafos ao longo do curso, mas que, principalmente, me deu forças e me ajudou a seguir em frente independentemente da dificuldade que viesse, sem dúvida alguma, jamais teria chegado a esse ponto sem ela ao meu lado.

Agradeço meu pai e minha irmã, por também estarem comigo ao longo desses mais de cinco anos.

Agradeço a meus amigos, que muitas vezes estiveram comigo em noites para esvaziar a cabeça, assim como os que conheci na UEPB.

Agradeço ao professor Dr. Valdeci Mestre, por ter me introduzido à área da óptica física e me guiado ao longo desses mais de dois anos, entre projetos e atividades que levarei comigo pelo resto da vida.

Agradeço também aos professores Dr. Pedro Assis e Dr. Guillermo Palacios por aceitarem participar da banca avaliadora.

RESUMO

O laser aleatório é um dispositivo óptico que utiliza meios desordenados para emissão de luz difusa através do processo de emissão estimulada e espalhamento da luz. Este trabalho almeja apresentar uma abordagem teórica acessível e estruturada do funcionamento do laser aleatório, explicando e conectando conceitos fundamentais da mecânica quântica, como absorção e emissão estimulada, aos mecanismos de espalhamento de Rayleigh e Mie, além de revisar o desenvolvimento histórico do laser aleatório e aplicações, como sensores, bioimagem e caracterização de materiais. O estudo visa fornecer uma base sólida para alunos de graduação compreenderem os princípios e a relevância científica e tecnológica dos lasers aleatórios.

Palavras-chave: laser aleatório; emissão estimulada; espalhamento da luz.

ABSTRACT

The random laser is an optical device that uses disordered media to emit diffuse light through the process of stimulated emission and light scattering. This work aims to present an accessible and structured theoretical approach to the operation of the random laser, explaining and connecting fundamental concepts of quantum mechanics, such as absorption and stimulated emission, to the Rayleigh and Mie scattering mechanisms, in addition to reviewing the historical development of the random laser and applications, such as sensors, bioimaging and material characterization. The study aims to provide a solid foundation for undergraduate students to understand the principles and scientific and technological relevance of random lasers.

Keywords: random laser; stimulated emission; light scattering.

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO 8
2	OBJETIVOS 9
2.1	Objetivos gerais 9
2.2	Objetivos específicos 9
3	METODOLOGIA 10
4	DA TEORIA AO DESENVOLVIMENTO 11
4.1	Da teoria quântica ao laser 11
4.2	A mudança na estrutura e o laser aleatório 12
5	FUNDAMENTOS DA INTERAÇÃO LUZ - MATÉRIA 13
5.1	Níveis de energia e transição 13
5.2	Absorção 16
5.3	Emissão espontânea 17
5.4	Emissão estimulada 18
5.5	Espalhamento da luz 20
5.5.1	Espalhamento de Rayleigh 21
5.5.2	Espalhamento de Mie 22
5.6	Amplificação, inversão de população, estados metaestáveis e a emissão laser 23
6	O LASER ALEATÓRIO 26
6.1	Estruturas de um laser aleatório 27
6.2	Propriedades de um laser aleatório 28
6.2.1	monocromática e coerente 29
6.2.2	Largura de banda 29
6.2.3	Caminho livre médio de espalhamento e de transporte 30
6.2.4	Ganho 30
6.2.5	Limiar laser 31
6.3	Da Cavity Ressonante ao Espalhamento: A Transição Estru- tural para o Laser Aleatório 31
6.4	Aplicações para um laser aleatório 33
7	CONCLUSÃO 36
A	Análise da Fórmula de Rabi no Regime de Quase-Ressonância 38

B	Probabilidade de transição para um sistema de dois níveis com correção de perturbação de primeira ordem	40
----------	--	-----------

1 INTRODUÇÃO

Lasers são dispositivos que surgiram no começo da década de 1960 com o advento do laser de rubi construído por T. H. Maiman no laboratório de pesquisas Hughes (Maiman, 1960). Eles consistem em um dispositivo capaz de produzir luz coerente, emitida de maneira bem orientada, através de um processo de amplificação por emissão estimulada de radiação, que dá origem ao acrônimo LASER, ou Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (Amplificação da luz por emissão estimulada de radiação) (Dëmtroder, 2006).

Ainda na década de 1960, começam a surgir os primeiros trabalhos modificando a cavidade do laser, alterando o seu modo de emissão de um feixe bem orientado para algo mais difuso. Os trabalhos para um dispositivo que gerasse emissão laser de maneira espalhada continuaram, até que em 1994 tivéssemos o primeiro laser aleatório demonstrado experimentalmente (Lawandy et al., 1994), onde desde então, diferentes estudos e aplicações passaram a ser trabalhados e continuam a ser uma fonte de interesse.

Diferentemente do laser convencional, onde há a emissão de luz evitando que ocorra dispersão, o laser aleatório prioriza que a luz emitida seja espalhada em múltiplas direções o máximo possível. Essa natureza do laser aleatório, sendo capaz de gerar uma amplificação em um meio desordenado resultando em diferentes modos de emissão, o torna uma ferramenta de trabalho extremamente útil para áreas como análise de tecidos humanos (Polson e Vardeny, 2004), sensores ópticos (Ignesti et al., 2016) e estudo de materiais (Jimenez-Villar et al., 2013).

Diante disso, esse trabalho tem por objetivo apresentar a teoria que compõe o laser aleatório de forma que compacte o conhecimento necessário para que um aluno de graduação consiga compreender os fundamentos necessários para o estudo mais aprofundado do laser aleatório.

Esse trabalho está estruturado em três capítulos principais. O capítulo 4 se trata de uma breve contextualização acerca da história e do desenvolvimento do laser aleatório. Os capítulos 5 e 6 abordam a teoria por trás do laser aleatório, onde no capítulo 5 serão discutidos os processos de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada, espalhamento da luz, necessários para gerar a amplificação da luz e a emissão de um laser aleatório, para que então possamos, no capítulo 6, abordar o funcionamento de um laser aleatório, a sua estrutura, propriedades, diferenças para um laser convencional e algumas aplicações.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos gerais

Foi estabelecido como objetivo geral deste trabalho fornecer uma abordagem acessível sobre o funcionamento do laser aleatório, trabalhando os conceitos de mecânica quântica e óptica que constroem a base de um laser aleatório e a história por trás de seu desenvolvimento, bem como informar algumas aplicações para a técnica, visando o entendimento de alunos de graduação em física ou interessados pelo tópico.

2.2 Objetivos específicos

- Demonstrar o desenvolvimento histórico do laser aleatório e a sua ligação com o laser convencional e a mecânica quântica.
- Discutir os processos de interação da luz com a matéria, abordando as transições das partículas e os processos de espalhamento óptico através dos regimes de Rayleigh e Mie.
- Descrever a estrutura e o funcionamento de um laser aleatório, abordando a sua estrutura, mecanismo de funcionamento e propriedades, destacando as suas diferenças para o laser convencional.
- Apontar algumas aplicações da técnica do laser aleatório em áreas, principalmente as da biologia, sensores ópticos e caracterização de materiais.

3 METODOLOGIA

Para esse trabalho se trata de uma pesquisa descritiva, desenvolvida a partir do estudo de artigos, livros e outros trabalhos que abordam o assunto, abrangendo tópicos de mecânica quântica, óptica clássica, lasers e história da física. A organização desse trabalho é feita visando uma compreensão progressiva, onde os tópicos abordados inicialmente sejam usados para desenvolver os conceitos posteriores, facilitando a leitura de um aluno de graduação, trabalhando processos fundamentais e algumas equações relevantes. Se tem presente em apêndice à resolução de algumas deduções, como a fórmula de Rabi para frequências quase-ressonantes e a densidade de probabilidade de um sistema de dois níveis como maneira de complementar o conteúdo principal.

A estrutura do texto é desenvolvida buscando um foco didático, de maneira que seja possível fornecer ao leitor uma compreensão sucinta e organizada dos tópicos abordados.

4 DA TEORIA AO DESENVOLVIMENTO

4.1 Da teoria quântica ao laser

O primeiro laser desenvolvido data do começo da década de 1960, por Theodore H. Maiman nos laboratórios HRL, todavia, o dispositivo carrega um desenvolvimento teórico muito anterior a sua criação, com raízes no surgimento da mecânica quântica. O começo do século XX e o problema da radiação de corpo negro marcaram a física ao demonstrar que o que hoje chamamos de física clássica possuía inconsistências que faziam com que a física necessitasse passar por modificações (Dëmtroder, 2006).

As soluções teóricas obtidas através das ferramentas conceituais conhecidas na época apresentavam inconsistência com o que era observado experimentalmente. A equação de Rayleigh-Jeans, usada para determinar densidade de energia, resultava que, para altas frequências, a energia emitida seria infinita, no que ficou conhecida como catástrofe do ultravioleta (Eisberg e Resnick, 1979). A solução para essa divergência veio em 1900, com Max Planck, assumindo que a energia emitida deveria oscilar em múltiplos de números inteiros, assim introduzindo o conceito de pacotes discretos de energia, os quanta. Este postulado marca o nascimento da mecânica quântica (Eisberg e Resnick, 1979).

Com o desenvolvimento da mecânica quântica, outras teorias importantes para o desenvolvimento do laser foram sendo construídas, como a dualidade onda-partícula da luz, o efeito fotoelétrico e os modelos atômicos, onde com o modelo atômico de Bohr, somos apresentados a eletrosfera e os níveis de energia (Young e Freedman, 2009). Alguns anos após o modelo atômico de Bohr, Einstein em seus trabalhos *Strahlungs-emission und -absorption nach der Quantentheorie* (Einstein, 1916) e *Zur Quantentheorie der Strahlung* (Einstein, 1917) desenvolveu os efeitos de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada de radiação, que formam a base da teoria para a construção do laser.

Em 1954 é dado um grande passo para a construção do laser. J. P. Gordon, H. J. Zeiger e C. H. Townes desenvolvem um dispositivo experimental capaz de atuar como um espectrômetro de micro-ondas de alta resolução, um oscilador extremamente estável e um amplificador de microondas (Gordon et al., 1955), o MASER (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*).

Alguns anos depois, A. L. Schawlow e C. H. Townes desenvolveram estudos acerca da extensão de utilizações do maser para o infravermelho e comprimentos ópticos (Schownes e Townes, 1958), até que em 1960, no laboratórios HRL, Theodore H. Maiman operou um laser pela primeira vez, utilizando um rubi dopado como material de amplificação (Maiman, 1960).

4.2 A mudança na estrutura e o laser aleatório

A biblioteca do estudo da ação laser com uma cavidade não ressonante passa a ocorrer em 1966, quando Ambartsumyan et al passam a trabalhar com um laser onde o ressonador de Fabry-Perot é substituído por espelhos espalhadores e o feedback ocorre devido ao espalhamento (Ambartsumyan et al., 1966). No mesmo ano, Sorokin e Lankard observaram o processo de emissão estimulada ocorrendo em uma solução do corante orgânico ftalocianina cloro-alumínio (Sorokin e Lankard, 1966).

A principal idealização teórica para o laser aleatório vem no ano seguinte, quando Lethokov postulou sobre a geração de luz em um meio espalhador quando o fóton tinha um caminho livre médio de deslocamento menor do que a região de espalhamento (Letokhov, 1968).

Nos anos seguintes tivemos Markushev et al estudando a luminescência e emissão estimulada em pó de neodímio (Markushev et al., 1986) e Guoedard et al chegando a desenvolver um laser quase monocromático sem espelhos em 1993, usando um composto de neodímio bombeado por um laser, gerando uma emissão de pulsos incoerente (Gouedard et al., 1993), mas é no ano seguinte que é relatado o primeiro laser aleatório desenvolvido de fato.

Em 1994, N. M. Lawandy, R. M. Balachandran, A. S. L. Gomes e E. Sauvin publicaram um trabalho relatando a ação laser em um meio fortemente espalhador. O experimento consistia no bombeamento de uma solução coloidal do corante rodamina 640 perclorato disperso em etanol contendo TiO₂ (Dióxido de titânio) cobertas por Al₂O₃ (Óxido de alumínio) como partículas suspensas responsáveis por fazer o espalhamento da luz (Lawandy et al., 1994).

O trabalho do Lawandy et al marcou o primeiro desenvolvimento do laser aleatório, que desde então segue em evolução, onde trabalhos posteriores visaram aplicar a técnica do laser aleatório, como no caso do Polson e Vardeny (Polson e Vardeny, 2004), variações como o laser aleatório de fibra (Matos et al., 2007) ou a observação da emissão de um laser aleatório em pó semiconductor (Cao et al., 1999), efeitos como voos de Levy (Lepri et al., 2007), localização de Anderson (Jimenez-Villar et al., 2016) e outros avanços (Gomes et al., 2021).

5 FUNDAMENTOS DA INTERAÇÃO LUZ - MATÉRIA

A emissão laser resulta de processos de transições entre níveis de energia atômicos, onde esse átomo sairia de uma energia E_a para uma energia E_b , “ganhando” ou “perdendo” energia nesse processo. Quando temos uma série constante de eventos de “perda” e “ganho” de energia nos átomos de um material, com o sistema sob certas condições, teremos a emissão laser.

Cada um desses aspectos serão discutidos a seguir, contextualizando-os para o uso em um laser.

5.1 Níveis de energia e transição

O modelo atômico de Bohr introduziu os níveis de energia em um átomo, onde foi estabelecido que os elétrons assumem níveis em órbitas estacionárias, de forma que eles não poderiam se “aproximar” ou se “afastar” do núcleo como uma órbita clássica, sendo obrigados a “saltar” de um nível para o outro. A eletrosfera, região onde os elétrons rodeiam o núcleo atômico, é separada em orbitais estáticos que representam os níveis de energia daquele átomo, onde quanto mais próximo do núcleo atômico, menor é a energia daquele nível, e quanto mais distante, maior a energia, sendo o nível de energia interna mínima do átomo o seu estado fundamental e os mais elevados os estados excitados (Young e Freedman, 2009).

Podemos nos referenciar aos estados de um átomo com um ψ , onde para cada estado, teremos uma função de onda e valores observáveis associados, chamados de autofunções e autovalores, respectivamente, onde as energias de cada estado consistem em um autovalor associado a aquele estado (Griffiths e Schroeter, 2018).

Os saltos entre os níveis de energia consistem no que chamamos de transições, que ocorrem por meio da absorção ou emissão de um fóton com energia (Dëmtroder, 2006)(adaptado):

$$E_{\text{fóton}} = \hbar\omega \quad (5.1)$$

Onde $E_{\text{fóton}}$ é a energia do fóton, \hbar a constante de Planck reduzida ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck), ω a frequência angular (lembrando que $\omega = 2\pi f$).

Dada a natureza dual da luz, comportando-se como partícula (fóton) ou onda (onda eletromagnética), podemos definir que a transição pode ocorrer devido a uma onda eletromagnética com uma frequência angular específica incidir em um átomo, induzindo um processo chamado de absorção e levando o átomo do estado ψ_a , associado à energia E_a , para o estado ψ_b , associado à energia E_b , ou devido a emissão de uma onda eletromagnética com uma frequência angular específica, levando o átomo do estado ψ_b , associado a uma

energia E_b , para o estado ψ_a , associado a energia E_a .

Para entender como funcionam as transições, primeiramente, vamos trabalhar com o sistema mais simples. O sistema de dois níveis consiste em uma partícula que possui apenas dois níveis de energia disponível, E_1 e E_2 associados respectivamente a ψ_1 e ψ_2 , onde $E_2 > E_1$. Se essa partícula for posta sobre a incidência de um campo sinusoidal externo, como um campo eletromagnético gerado por uma fonte externa, haverá uma probabilidade de uma energia associada a este campo externo induzir uma transição de um nível para o outro e vice-versa. A influência que esse campo externo causa no sistema se chama perturbação, por isso irei me referir a ele como campo perturbativo.

Supondo que a partícula esteja no seu estado fundamental, ela com certeza estará no ψ_1 , com a energia associada E_1 , então:

$$c_1(0) = 1, c_2(0) = 0 \quad (5.2)$$

Onde $c_1(t)$ e $c_2(t)$ representam a amplitude de probabilidade da partícula está no estado ψ_1 e ψ_2 . $|c_n(t)|^2$, por sua vez, nos dá a densidade de probabilidade de encontrar a partícula naquele estado, ou seja, para esse caso, $|c_1(0)|^2 = 1$ e a partícula está no estado ψ_1 .

Agora, ao considerarmos o campo perturbativo, a densidade de probabilidade sofrerá mudanças e a energia proveniente do campo externo terá uma probabilidade de induzir uma transição para o estado ψ_2 . Para encontrarmos a densidade de probabilidade quando as amplitudes de probabilidade dependem do tempo, trabalhamos com a equação de Schrödinger dependente do tempo, sendo (Sakurai e Napolitano, 2013):

$$i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} = \sum_m V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} c_m \quad (5.3)$$

onde ω_{nm} é a frequência angular característica desse sistema, ou seja, a frequência de transição entre os níveis de energia, que é:

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \quad (5.4)$$

Para o sistema de dois níveis, a equação toma a seguinte forma:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A densidade de probabilidade exata da transição ocorrer nesse sistema é encontrada a partir das equações diferenciais acopladas:

$$i\hbar \dot{c}_1 = \gamma e^{i(\omega - \omega_{21})t} c_2 \quad (5.6)$$

e

$$i\hbar\dot{c}_2 = \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} c_1 \quad (5.7)$$

Que nos permite encontrar que (Sakurai e Napolitano, 2013):

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} \text{sen}^2 \left(\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} t \right) \quad (5.8)$$

e

$$|c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2 \quad (5.9)$$

Onde γ é um valor real positivo e ω é a frequência angular, ambos associados ao campo perturbativo. A equação 5.8 é chamada de formula de Rabi (Sakurai e Napolitano, 2013). O grande ponto que devemos nos atentar a ela é o seu termo $(\omega - \omega_{21})^2/4$. Caso a frequência angular associada a perturbação seja extremamente próxima da frequência angular característica do sistema, utilizando de uma série de Taylor, podemos ver que a probabilidade de transição se torna aproximadamente:

$$|c_2(t)|^2 \approx \text{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{\hbar} t \right) \quad (5.10)$$

Para o caso das frequências serem exatamente iguais, a aproximação em 5.10 se torna uma igualdade, o que nos leva a ver que, quanto mais próxima a frequência angular associada a perturbação é da frequência característica do sistema, maior se torna a probabilidade de transição. Se as frequências angulares forem exatamente iguais, a probabilidade de transição atinge o seu valor máximo e o sistema atinge um estado chamado de condição de ressonância (Sakurai e Napolitano, 2013). Intuitivamente, se tivermos uma situação contrária, onde as frequências angulares associadas à perturbação e a frequência angular característica do sistema são muito diferentes, a probabilidade de que ocorra a transição é extremamente pequena.

A fórmula de Rabi, apesar de nos dar um resultado exato e funcionar para um potencial sinusoidal, é limitada a um sistema de dois níveis. Para sistemas mais complexos, que possuem mais estados para transição, as soluções se tornam um conjunto de integrais complexas e muitas vezes trabalhamos apenas a soluções aproximadas a partir de uma série de correções perturbativa dada por (Sakurai e Napolitano, 2013):

$$c_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n^{(i)}(t) \quad (5.11)$$

Onde $c_n^{(0)}$ é a amplitude de probabilidade inicial, sendo $c_n^{(0)} = \delta_{ni}$ independente do tempo. Já $c_n^{(1)}$ é a correção de primeira ordem da amplitude de probabilidade perturbada, $c_n^{(2)}$ a correção perturbada com a correção de segunda ordem e assim por diante.

Para ilustrar o comportamento da densidade de probabilidade através desta série, vamos usar mais uma vez um sistema de dois níveis para simplificar. Em um laser tere-

mos campo perturbativo que gera ondas de frequência específica para favorecer uma das transições específicas, a densidade de probabilidade com a correção de primeira ordem para ele sair de um estado inicial ψ_i (consideremos o estado fundamental) para o estado final ψ_f , com uma perturbação sinusoidal (assim como considerado no caso para a fórmula de Rabi). Seguindo os passos de David J. Griffiths (Griffiths e Schroeter, 2018), podemos encontrar a densidade de probabilidade de transição, nos limitando apenas à correção de primeira ordem, sendo:

$$|c_f(t)|^2 \approx \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \frac{\text{sen}^2 \left[\frac{(\omega_{fi} - \omega)t}{2} \right]}{(\omega_{fi} - \omega)^2} \quad (5.12)$$

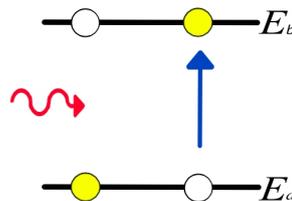
Em um sistema mais complexo do que apenas dois níveis de energia, a correção a probabilidade de transição irá incluir os estados intermediários (Sakurai e Napolitano, 2013), todavia, ainda com a primeira correção de um sistema de dois níveis é perceptível que a densidade de probabilidade de transição mantém o termo de diferença de frequência e a característica de ser grande para frequências muito próximas e extremamente pequeno para frequências muito distintas.

No contexto do laser, as transições ocorrem em um sistema de mais de dois níveis, onde um material é excitado por um campo eletromagnético gerado por uma fonte externa, onde as possíveis transições que podem ocorrer com o átomo são a absorção estimulada, ganhando energia, e as duas maneiras de emissão, a espontânea e a estimulada, perdendo energia, os quais detalharemos adiante.

5.2 Absorção

Se a transição ocorre com o átomo ganhando a energia de um fóton, ele realiza uma absorção estimulada. O processo de absorção ocorre quando temos um campo eletromagnético sendo incidido em um material, onde podemos ter um átomo desse material absorvendo um fóton desse campo e realizando uma transição de um estado de menor energia para um estado de maior energia.

Figura 1 – Processo de absorção: Um fóton é incidido na partícula, que absorve e realiza uma transição para um nível de maior energia.



Fonte: autoria própria

Quando essa transição ocorre, o átomo passa a estar em um estado excitado, onde a sua energia agora passa a ser a sua energia inicial mais a energia do fóton absorvido.

$$E_{\text{excitado}} = E_{\text{fundamental}} + E_{\text{fóton}} \quad (5.13)$$

Como em um laser temos um material, composto por muitos átomos, sendo bombardeado por fótons de um campo eletromagnético constante, teremos uma taxa de transição de um determinado número de átomos do estado de menor energia para o estado de maior energia em um intervalo de tempo (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$\frac{dN_a}{dt} = -B_{ba}\rho(\omega_0)N_a \quad (5.14)$$

Onde N_a é o número de átomos no estado de menor energia por unidade de volume, $\rho(\omega_0)$ é a densidade de energia, e B_{ba} é o uma constante de proporcionalidade chamada de coeficiente de Einstein para a absorção.

Resolvendo a EDO 5.14 por separação de variáveis, encontramos que:

$$N_a(t) = N_a(0)e^{-B_{ba}\rho(\omega_0)t} \quad (5.15)$$

Onde $N_a(t)$ é uma média de átomos no estado ψ_a em um instante t .

5.3 Emissão espontânea

Quando o átomo perde energia através da emissão de um fóton, temos duas possibilidades de transição, a emissão espontânea e a emissão estimulada. A primeira, a emissão estimulada, ocorre naturalmente em átomos excitados, sem a necessidade de um campo externo.

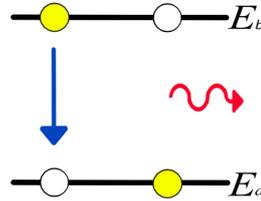
Definimos que a probabilidade de transição ocorre quando temos um campo atuando sobre o átomo, de forma que a sua perturbação induz a transição de nível, todavia, se tivermos um átomo em seu estado excitado e não incidirmos nenhum campo eletromagnético externo, ele ainda sofrerá uma transição de forma espontânea.

Ainda que não haja nenhuma perturbação externa, os átomos possuem um campo intrínseco em decorrência de não ser permitido haver um estado com energia zero, então mesmo em seu estado fundamental ele emite radiação eletromagnética que atuará como catalise da emissão espontânea (Griffiths e Schroeter, 2018).

Durante o processo de emissão espontânea, o átomo emite um único fóton em uma direção aleatória com energia igual à diferença de energias entre o estado excitado e o estado fundamental:

$$E_{\text{fóton}} = E_{\text{excitado}} - E_{\text{fundamental}} \quad (5.16)$$

Figura 2 – Processo de emissão espontânea: A partícula retorna para um estado de menor energia naturalmente e libera um fóton nesse processo.



Fonte: autoria própria

No laser, assim como no processo de absorção estimulada, teremos um material composto por muitos átomos excitados, que terão uma taxa de transição de um determinado número de átomos do estado de maior energia para um estado de menor energia em um intervalo de tempo dado por (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$\frac{dN_b}{dt} = -AN_b \quad (5.17)$$

Onde N_b é o número de átomos no estado de maior energia por unidade de volume e A é uma constante de equilíbrio chamada de coeficiente de Einstein para a emissão espontânea.

Novamente utilizando a resolução de EDO's por separação de variáveis, a equação 5.17 resulta em:

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \quad (5.18)$$

Para o caso onde os átomos do material sejam postos em um estado excitado e não haja mais um campo externo para alimentá-los, o decrescimento exponencial de N_b ocorre com uma constante de tempo τ , chamada de tempo de vida, dado pelo inverso do coeficiente de Einstein para a absorção (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$\tau = \frac{1}{A} \quad (5.19)$$

Que representa o tempo que N_b leva para chegar a aproximadamente 37% (ou $\frac{1}{e}$) de seu valor inicial (Griffiths e Schroeter, 2018).

5.4 Emissão estimulada

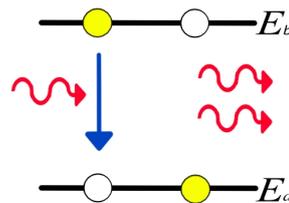
A segunda maneira do átomo perder energia através da emissão de um fóton ocorre quando temos a incidência de um campo externo em um átomo já excitado, a chamada emissão estimulada.

Se tivermos um átomo em seu estado excitado e os mantermos em um campo eletromagnético, podemos induzir uma transição para um estado de menor energia partindo do mesmo princípio usado para a absorção.

Se o campo eletromagnético incidido sobre os átomos excitados for de uma frequência muito próxima da frequência de transição de um nível de maior energia para um nível de menor energia, haverá uma alta probabilidade de que esse átomo transicione para um nível de menor energia e nesse processo, onde ele emite um fóton derivado da perda desta energia. Na prática, temos um fóton sendo adicionado ao campo eletromagnético incidido (Griffiths e Schroeter, 2018).

Diferente do processo de emissão espontânea, o fóton emitido pelo átomo é orientado pelo fóton gatilho, onde eles possuem a mesma direção e energia.

Figura 3 – Processo de emissão estimulada: A partícula retorna para um estado de menor energia a partir da incidência de um outro fóton e libera dois fótons nesse processo.



Fonte: autoria própria

Se tivermos um sistema onde o material seja composto por átomos com dois níveis de energia, o estado fundamental e um estado excitado, e incidirmos um campo eletromagnético constante sobre ele, com uma frequência muito próxima da frequência de transição, ele terá uma certa probabilidade de realizar uma absorção estimulada como vimos, mas um detalhe sobre essa condição é que, como ainda estamos incidindo o campo externo com uma frequência próxima da frequência de transição (Como temos um sistema de apenas dois níveis de energia, a frequência necessária para realizar a transição do estado de menor energia para o estado de maior energia é a mesma que para fazer a transição do estado de maior energia para o de menor energia), ele terá uma alta probabilidade de fazer uma emissão estimulada.

Vimos que para o cálculo da probabilidade de transição possui apenas o potencial, a frequência angular de transição, a frequência angular de perturbação e o tempo como variáveis, para o sistema descrito acima teremos as mesmas condições para a absorção estimulada e a emissão estimulada, o que demonstra que, para um átomo que está sofrendo a perturbação de um campo eletromagnético constante, a probabilidade de ele ir de um estado ψ_a para um estado ψ_b é a mesma de que ele vá do estado ψ_b para o estado ψ_a .

Nessa mesma linha, se para um material com muitos átomos no estado ψ_a sendo

bombardeado por um campo eletromagnético externo temos uma taxa de transição de um determinado número de átomos do nível de energia E_a para o nível de energia E_b em um intervalo de tempo sendo (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$\frac{dN_a}{dt} = -B_{ba}\rho(\omega_0)N_a \quad (5.20)$$

Como as variáveis para a probabilidade absorção estimulada são as mesmas que para a probabilidade de emissão estimulada, então a taxa de transição de um determinado número de átomos do nível de energia E_b para o nível de energia E_a em um intervalo de tempo será (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$\frac{dN_b}{dt} = -B_{ab}\rho(\omega_0)N_b \quad (5.21)$$

Onde B_{ab} é o coeficiente de Einstein para a emissão estimulada, e (Griffiths e Schroeter, 2018):

$$B_{ab} = B_{ba} \quad (5.22)$$

Partindo desses princípios, a EDO 5.21 tem por resolução, intuitivamente:

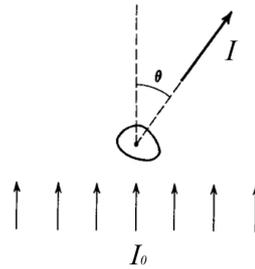
$$N_b(t) = N_b(0)e^{-B_{ab}\rho(\omega_0)t} \quad (5.23)$$

5.5 Espalhamento da luz

Uma das características da equação de probabilidade de transição é que o seu valor é extremamente alto para luz com frequência próxima da frequência de transição e extremamente baixa quando a diferença entre as frequências é grande. Isso resulta em outros efeitos da interação da luz com a partícula além dos descritos por Einstein. Um deles é o espalhamento da luz, como na figura 4, fundamental para a emissão difusa do laser aleatório.

As duas principais teorias do espalhamento da luz são fundamentadas na eletrodinâmica clássica, pois ainda que haja teorias de espalhamento quânticas como as de Raman, Brillouin e Compton, as teorias de Mie e Rayleigh são aplicáveis para um sistema sob certas condições, uma delas que o espalhamento é elástico, então a frequência da luz incidida será a mesma da luz espalhada e os efeitos resultados de transições quânticas não estão envolvidos (Hulst, 1981). A viabilidade da aplicação das teorias de Mie e de Rayleigh ocorre por constantemente podermos considerar as partículas que espalham a luz como esferas isotrópicas homogêneas ou próximas disso (Hergert e Wriedt, 2012).

Figura 4 – Espalhamento da luz por uma partícula com a luz incidente na parte inferior e a luz espalhada na parte superior.



Fonte: (Hulst, 1981), adaptado.

O espalhamento devido a interação do campo eletromagnético associado a luz interagindo com a partícula, onde a luz incidente possui uma intensidade inicial que ao interagir com a partícula, será parte espalhada e parte absorvida, com uma intensidade de energia por cm^2 por segundo. Essa relação é chamada de extinção (Hulst, 1981):

$$\text{Extinção} = \text{Espalhamento} + \text{Absorção}$$

Então a intensidade da luz espalhada não necessariamente é a mesma da luz incidida. Tratarei do espalhamento da luz individual a partir das teorias clássicas, a de Rayleigh e a de Mie.

5.5.1 Espalhamento de Rayleigh

O espalhamento de Rayleigh é uma teoria clássica que consiste na ideia de que partículas muito pequenas atuam como dipolo quando estão em um campo eletromagnético, forçando-os a oscilar emitindo radiação em todas as direções (Hulst, 1981; Miles et al., 2001).

O tratamento no regime de Rayleigh é possível em condições de trabalho específicas, exigindo que seja possível tratar a partícula espalhadora como uma esfera homogênea e que ela possua uma dimensão muito menor que o comprimento de onda (da ordem de $a \ll \frac{\lambda}{2\pi}$, onde a é o raio da partícula) (Hulst, 1981).

A luz espalhada no regime de Rayleigh é emitida em todas as direções, porém com diferentes intensidades. A intensidade de emissão da luz é diretamente proporcional a seção de choque total de espalhamento, dada por (Hulst, 1981):

$$\sigma_{esp} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 a^6 \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 \quad (5.24)$$

Onde m é o índice de refração complexo, que consiste em:

$$m = n - ik \quad (5.25)$$

Sendo n o índice de refração do material, enquanto a parte complexa representa a absorção do material, também chamada de coeficiente de absorção (Griffiths, 2011). O termo λ^{-4} apresenta uma das principais características do espalhamento da luz de Rayleigh, ondas com menor λ são espalhados mais fortemente.

A intensidade da luz espalhada, por sua vez, é (Hulst, 1981):

$$I = \frac{(1 + \cos^2\theta)}{2r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 a^6 \left|\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}\right|^2 I_0 \quad (5.26)$$

Onde I_0 é a intensidade da luz inicial, r é a distância entre a partícula espalhadora e o ponto onde é medido a intensidade da luz espalhada e θ o ângulo de espalhamento. Outra característica perceptível no espalhamento de Rayleigh é a preferência na direção do espalhamento, com $(1 + \cos^2\theta)$ demonstrando que para esse regime, a luz é mais intensamente para ângulos θ menores. O espalhamento de Rayleigh é ilustrado na figura 5.

Figura 5 – Espalhamento de Rayleigh.



Fonte: (Brunborg et al., 2014), adaptado.

5.5.2 Espalhamento de Mie

A teoria de Mie é outra teoria de espalhamento clássico que segue uma linha semelhante da de Rayleigh, podendo ser tratada como uma generalização para ela. O espalhamento de Mie trabalha para partículas de tamanho e formato arbitrário (Hulst, 1981). O desenvolvimento do espalhamento de Mie surge a partir da solução das equações de Maxwell e acaba sendo mais complexa de trabalhar do que o espalhamento de Rayleigh, mas assim como na teoria de Rayleigh, o espalhamento de Mie consiste na partícula emitindo radiação em todas as direções, porém, a seção de choque total de espalhamento para o regime de Mie é dado com funções de intensidade angular:

$$\sigma_{esp} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} (i_1 + i_2) \quad (5.27)$$

i_1 e i_2 são as funções de intensidade angular, obtidos a partir de uma série infinita:

$$i_1 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n \pi_n \cos(\theta) + b_n \tau_n \cos(\theta) \right|^2 \quad (5.28)$$

$$i_2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n \pi_n \cos(\theta) + a_n \tau_n \cos(\theta) \right|^2 \quad (5.29)$$

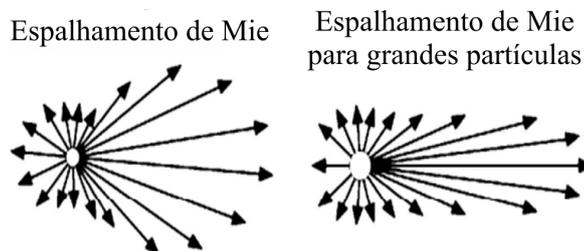
τ_n e π_n são termos expressos a partir de polinômios de Legendre, já θ , a_n , b_n são, respectivamente, o ângulo do espalhamento e os coeficientes de Mie.

A intensidade da luz espalhada no regime de Mie, por sua vez, é (Hulst, 1981):

$$I = \frac{(i_1 + i_2) \lambda^2}{8\pi^2 r^2} I_0 \quad (5.30)$$

Uma das características do espalhamento de Mie é que à medida que temos as dimensões da partícula aumentando em comparação ao comprimento de onda da luz, a emissão se torna mais direcionada e nos aproximamos do limite da óptica geométrica. O espalhamento de Mie é ilustrado na figura .

Figura 6 – Espalhamento de Mie.



Fonte: (Barnhart e Gunasekaran, 2020), adaptado.

5.6 Amplificação, inversão de população, estados metaestáveis e a emissão laser

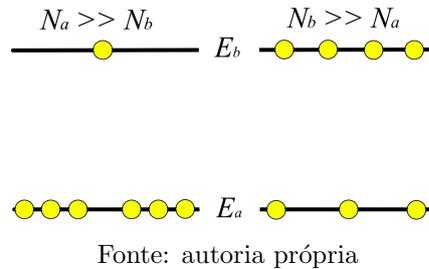
O processo de amplificação é a condição principal para a emissão laser, se o número de eventos de emissão estimulada supera todos os outros eventos no material, teremos a emissão laser.

É essencial, para que ocorra uma amplificação no material, uma inversão de população. Os átomos dos materiais usados para realizar os processos de absorção e emissão, por padrão, estão em seus estados fundamentais. Então, para um material com N átomos, temos N_a átomos no estado fundamental inicialmente e N_b átomos no estado excitado, onde inicialmente $N_a \gg N_b$.

A inversão de população é alcançada quando N_b supera N_a (Griffiths e Schroeter, 2018), como ilustrado na figura 7. Como dito na emissão estimulada, um átomo em um campo eletromagnético externo tem a mesma probabilidade de ir de ψ_a para ψ_b e

de ψ_b para ψ_a , por conta disso átomos com apenas dois níveis não servem para gerar amplificação, visto que não conseguem superar a barreira de $N_a = N_b$.

Figura 7 – Inversão de população. O número de átomos no estado fundamental é muito maior do que o número de átomos no estado excitado em $N_a \gg N_b$, já na situação $N_b \gg N_a$ o número de átomos no estado excitado é muito maior do que no estado fundamental.

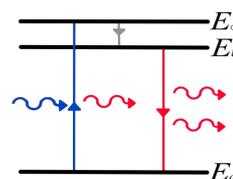


Essa barreira é superada com átomos de pelo menos três níveis, onde um deles é de rápido decaimento, geralmente em uma emissão não radiativa, e outro metaestável. Estados de metaestáveis são estados onde o tempo de vida para a emissão espontânea é bem maior que o padrão, esse tempo é o que permite que mais átomos sejam excitados, sem que retornem tão rapidamente para o estado fundamental.

Então, na prática, para um átomo de 3 níveis, o átomo inicialmente se encontra no estado ψ_a com energia E_a , absorve um fóton proveniente de um campo eletromagnético externo, faz uma transição para um estado ψ_c , de rápido decaimento com energia E_c , sofre uma rápida emissão não radiativa e faz uma transição para um estado ψ_b metaestável com energia E_b .

Já no estado metaestável, o átomo precisará de bem mais tempo para realizar uma emissão espontânea, ou de uma colisão (Griffiths e Schroeter, 2018), ou poderá sofrer a perturbação de um fóton de frequência angular próxima da frequência de transição do nível para retornar a um estado de menor energia e realizar uma emissão estimulada, conseguindo evitar que ele retorne rapidamente para o seu estado fundamental ou que realize uma emissão estimulada não desejada por causa do campo eletromagnético externo.

Figura 8 – Sistema de três níveis, onde o E_a é o estado de menor energia, E_c o estado de maior energia e rápido decaimento, e E_b um estado de energia intermediária e metaestável.



Como dito, quando o número de átomos excitados supera o número de átomos no

estado fundamental, temos uma inversão de população e a primeira condição para a emissão laser está satisfeita.

O próximo passo para a amplificação e conseqüentemente a emissão laser é que a quantidade de emissão estimulada supere todos os outros processos. Com a inversão de população atingida, é almejado que os primeiros fótons emitidos da transição do estado ψ_b para o estado ψ_a atinjam outros átomos excitados que também estão no estado ψ_b , assim cada átomo atingido adicionaria mais um fóton ao campo eletromagnético da luz que percorre o meio, onde eles irão atingir outros átomos excitados gerando uma reação em cadeia. Quando essa emissão superar todos os outros processos, teremos uma emissão laser.

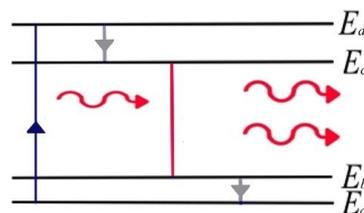
6 O LASER ALEATÓRIO

A partir do que foi trabalhado no capítulo anterior, podemos definir o laser aleatório como um dispositivo capaz de amplificar a luz através do processo de emissão estimulada e emitir essa luz de maneira difusa devido a sua construção.

Agora, analisando mais profundamente o laser aleatório, teremos um material concentrado em uma região, em que a maior parte de sua população atômica se encontra no estado fundamental. As partículas desse material irão sofrer a incidência de um campo eletromagnético externo proveniente de alguma fonte de energia, como um outro laser, por exemplo, que fornece energia para o material, fazendo com que as suas partículas alcancem um estado excitado que possui uma maior energia associada.

Com a evolução do sistema, mais partículas ocupam agora um estado de curta vida e rapidamente realizam a transição para um estado de menor energia metaestável em uma emissão não radiativa, o que permite que elas se mantenham em um estado excitado por um tempo e auxiliando para que ocorra a inversão de população e tornando improvável que retornem do estado E_4 para o estado E_1 através de uma emissão estimulada causada pela fonte de energia. Para que haja uma maior garantia de que não ocorra perdas, podemos trabalhar com um sistema de 4 níveis, como no da figura 9, onde o segundo estado de vida curta, logo após a emissão do fóton, evita com que o fóton emitido atinja outro átomo no estado fundamental, gerando uma transição indesejada.

Figura 9 – Sistema de 4 níveis, onde a primeira transição corresponde a absorção estimulada, fazendo com que a partícula passe para o nível de energia E_4 , primeiro estágio de vida curta. A segunda transição é o primeiro decaimento rápido, levando a partícula para o estado metaestável E_3 através de uma emissão não radiativa. A terceira transição corresponde a emissão estimulada, mas dessa vez levando o átomo para um segundo estado de vida curta, E_2 , para que enfim, através de outro rápido decaimento, representado pela quarta transição, retorne para o estado fundamental com uma emissão não radiativa.

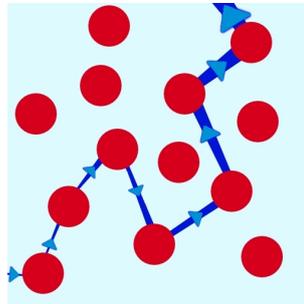


Fonte: autoria própria

As primeiras emissões espontâneas irão atingir outros átomos que já estejam no estado excitado, desencadeando os primeiros processos de emissão estimulada. Para garantir que a luz permaneça por mais tempo dentro da região onde está o material, é introduzido ao material partículas espalhadoras, que irão interagir com a luz que adentrou na região do material e a espalhar de maneira difusa, assim a luz percorre diversas regiões do

material interagindo com as partículas para induzir a emissão estimulada com o maior número de partículas possível durante esse trajeto, como na figura 10. Para que haja uma maior dispersão das partículas, tanto das que compõem o material excitado, quanto das partículas espalhadoras, uma das maneiras de desenvolvermos um laser aleatório é através de uma solução com um fluido (é comum usar etanol para tal, como no caso do laser aleatório desenvolvido pelo Lawandy et al) para que haja suspensão das partículas e possamos controlar a dispersão de material na região.

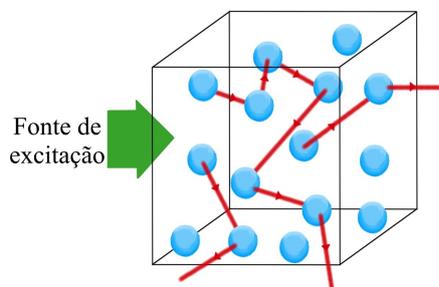
Figura 10 – A luz, em azul escuro, interage com as partículas espalhadoras, em vermelho, diversas vezes enquanto estiver confinada no meio. Durante esses eventos de espalhamento, a luz induz vários processos de emissão estimulada, amplificando a sua intensidade.



Fonte: autoria própria

Quando enfim o número de eventos de emissão estimulada for maior do que os eventos de emissão espontânea e emissão não radiativa, o sistema terá alcançado a inversão de população e a irá emitir luz laser. A figura a seguir mostra um diagrama exemplificando como seria o funcionamento de um laser aleatório.

Figura 11 – Esquema de um laser aleatório. A luz percorre o meio, induzindo processos de emissão estimulada e sendo dispersa pelas partículas espalhadoras, até sair na emissão laser



Fonte: autoria própria

6.1 Estruturas de um laser aleatório

Tendo em vista o funcionamento do laser aleatório, podemos entender as estruturas. Dividimos o laser aleatório em três estruturas fundamentais (Silva Júnior, 2014), a fonte de

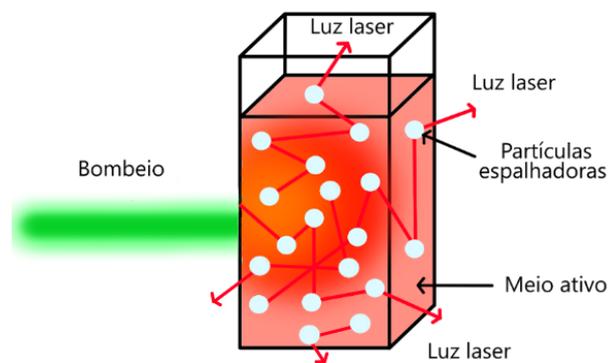
energia, o meio ativo, ou meio de ganho, e as partículas espalhadoras, como demonstrado na figura 12.

Fonte de energia: Como definimos, uma das partes fundamentais para o laser aleatório é a fonte de bombeio, pois ela será responsável por alimentar o sistema, precisando ser capaz de fornecer energia com uma frequência correta e intensidade o suficiente para gerar a inversão de população no material. Para um laser aleatório, podemos usar descargas elétricas ou até mesmo um laser convencional.

Meio ativo (meio de ganho): O meio ativo consiste no material que é excitado pela fonte de energia, de modo que os átomos desse material irão fazer as transições de energia. Além de realizar os processos de absorção e emissão, a natureza do meio ativo determina a frequência da qual a luz laser será emitida.

Partículas espalhadoras: Partículas suspensas presentes no meio ativo que interagem com a luz emitida alterando a sua trajetória, fazendo com que a luz siga um caminho desordenado e interaja o máximo possível com o meio ativo, contribuindo para o processo de amplificação e ressonância em todas as direções.

Figura 12 – Estrutura de um laser aleatório coloidal, com as partículas espalhadoras suspensas em uma solução de etanol e corante orgânico (que atua como meio ativo), energizado por uma fonte laser. O esquema da estrutura é baseado no laser desenvolvido pelo Lawandy et al em 1994.



Fonte: autoria própria

6.2 Propriedades de um laser aleatório

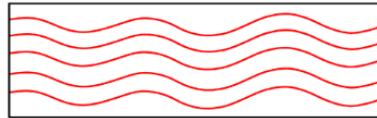
Para que a emissão laser ocorra de maneira eficiente, ela deve respeitar alguns requisitos. Já foi citado na introdução que uma das características do laser é a emissão monocromática e coerente, além disso, abordamos no capítulo 2 o tópico de inversão de população. Agora iremos abordar esses tópicos para o contexto do laser, assim como trabalhar outros que não foram citados ainda.

6.2.1 monocromática e coerente

Um dos requisitos para a emissão laser é que a luz emitida seja monocromática e coerente. A natureza ondulatória da luz fornece a ela a capacidade de atuar como onda construtiva ou destrutiva. Esse comportamento é explícito através do experimento da dupla-fenda de Young, onde vemos os resultados do fenômeno de interferência. Uma onda senoidal, como a de uma onda eletromagnética emitida em um laser, consiste em uma luz monocromática, ou seja, possui apenas uma frequência (na prática, a melhor fonte de emissão de luz monocromática, que é o laser, possui uma linha espectral de emissão da ordem de fentômetros, ou 10^{-15} metros) (Young e Freedman, 2009).

Quando duas ondas mantêm uma relação de fase constante entre si, as chamamos de coerente (Young e Freedman, 2009). Em um laser, o ideal é haver uma alta coerência espacial e temporal, onde a fase relativa entre as ondas é estável ao longo do tempo, havendo um padrão de interferência constante. A luz coerente e monocromática é ilustrada na figura 13.

Figura 13 – Luz monocromática e coerente

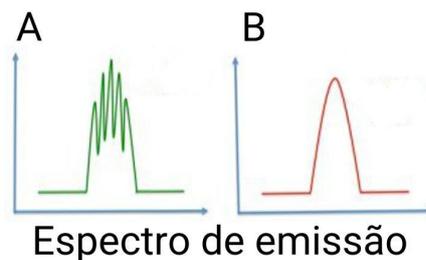


Fonte: autoria própria

6.2.2 Largura de banda

A largura de banda consiste na intensidade de emissão para os comprimentos de onda (Saleh e Teich, 2007). Lasers com uma alta coerência possuem uma largura de banda com picos estreitos de espectros de emissão e modos discretos, enquanto lasers incoerentes (com baixa coerência) apresentam uma largura de banda contínua, abrangendo uma faixa espectral mais larga (Luan et al., 2015), como ilustra a figura 14.

Figura 14 – (A) emissão coerente, com picos de emissão e (B) emissão incoerente, com um espectro de emissão contínuo.



Fonte: (Luan et al., 2015), adaptado.

6.2.3 Caminho livre médio de espalhamento e de transporte

No capítulo 2 descrevemos a ideia do espalhamento da luz de maneira individual, com as teorias de Rayleigh e Mie, todavia, no laser aleatório, a luz ao adentrar a amostra contendo o meio ativo e as partículas espalhadoras é espalhada diversas vezes até ser emitida.

A distância média que a luz percorre entre cada interação com uma partícula espalhadora é chamado de caminho livre médio, l_s . O valor de l_s é uma das propriedades mais importantes para o múltiplo espalhamento da luz, determinando o regime de espalhamento em que a luz atua no meio (Kamil et al., 2020). Primeiramente, o caminho livre médio de espalhamento é dado por (Bührer, 2012):

$$l_s = \frac{1}{\sigma \rho_s} \quad (6.1)$$

Onde σ é a seção de choque de espalhamento, já citada no capítulo 2, e ρ_s é a densidade de partículas espalhadoras no meio. Após a luz viajar uma certa distância no material, ela perde qualquer resquício de orientação original e ela se torna completamente aleatória. Essa distância é o caminho médio de transporte, l_t , sendo (Bührer, 2012; Kamil et al., 2020):

$$l_t = \frac{l_s}{1 - \langle \cos\theta \rangle} \quad (6.2)$$

l_s é o já citado caminho livre médio de espalhamento, $\langle \cos\theta \rangle$ consiste no cosseno do ângulo médio de espalhamento. Considerando que a luz, com um comprimento de onda λ , é incidida em uma amostra de dimensões L , há três regimes de atuação possíveis para a luz (Bührer, 2012; Kamil et al., 2020):

- Regime balístico ($l_s > L$): A maioria dos fótons atravessam a amostra sem realizar muitos eventos de espalhamento.
- Regime difuso ($l_s \approx L$): A maioria dos fótons realizam espalhamentos pelo menos uma vez antes de saírem da amostra.
- Regime de localização ($l_s < L$): A luz realiza muitos eventos de espalhamento na amostra, que sob certas condições pode ocorrer fenômenos ópticos como a localização da luz (Bührer, 2012).

6.2.4 Ganho

Na descrição dos processos de emissão de luz, foi citado que durante o processo de emissão estimulada, teremos um fóton sendo adicionado ao campo eletromagnético que induz a emissão. Se pegarmos, por exemplo, o trajeto em que a luz percorre entre os espalhamentos, durante esse percurso, a luz induz diversas emissões estimuladas, o que

adiciona fótons a intensificando. O aumento da potência da luz nesse trajeto corresponde ao ganho (Saleh e Teich, 2007), sendo l_g o comprimento do caminho da qual a intensidade é amplificada por um fator e (Luan et al., 2015) e l_{amp} a distância média entre o ponto inicial e o ponto final do comprimento l_g (Kamil et al., 2020). A distância média l_{amp} , para 3 dimensões, é (Kamil et al., 2020):

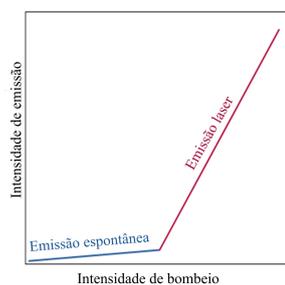
$$l_{amp} = \sqrt{\frac{l_t l_g}{3}} \quad (6.3)$$

6.2.5 Limiar laser

Para gerar o processo de emissão laser, é preciso que um material seja mantido sob a incidência de uma fonte de energia, onde ela induz o processo de absorção estimulada, que vai resultar nas primeiras emissões espontâneas e posteriormente, após os primeiros fótons emitidos atingirem outros átomos excitados, a emissão estimulada. Inicialmente a quantidade de emissões estimuladas é menor do que os outros processos, mas vimos que à medida que aumentamos a intensidade da energia fornecida ao sistema, mais átomos irão se excitar e, conseqüentemente, teremos mais emissões estimuladas ocorrendo. Eventualmente, com cada vez mais átomos sendo induzidos a emitir fótons, haverá a emissão de luz laser. A energia necessária para ultrapassar o limite onde a emissão estimulada supera os outros eventos é o chamado limiar laser (Santos e Gomes, 2024).

Podemos encontrar o limiar laser na mudança de intensidade de emissão da luz do material, como na figura 15, através da brusca mudança na intensidade de emissão, em um crescimento não linear (Santos e Gomes, 2024).

Figura 15 – Gráfico da intensidade de emissão pela intensidade de bombeio. É possível notar a mudança brusca na intensidade de emissão em dado momento, sendo esse o ponto de limiar laser.



Fonte: (Ma, 2019), adaptado.

6.3 Da Cavidade Ressonante ao Espalhamento: A Transição Estrutural para o Laser Aleatório

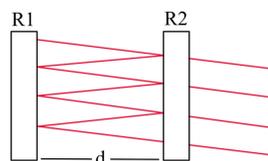
O laser aleatório, como caracterizamos, é estruturado com uma fonte para a alimentação do sistema, o meio ativo e as partículas espalhadoras. A partir desse sistema

é obtido a natureza difusa do laser aleatório. Todavia, se retornarmos para o desenvolvimento do laser e analisarmos o laser de rubi desenvolvido pelo T. H. Maiman (Maiman, 1960) e ao observarmos a sua estrutura, percebemos que ela difere da estrutura de um laser aleatório.

O laser de rubi desenvolvido pelo Maiman, como citado no capítulo 2, é uma extensão do MASER para o espectro de luz visível, assim, a sua estrutura também se baseia no interferômetro de Fabry-Perot. Uma fonte, com uma chave, que fornece energia para alimentar um flash de xenônio que rodeia uma haste de rubi dopado. Enquanto o flash consiste na fonte de alimentação do sistema, a haste de rubi realiza os processos de absorção e emissão, atuando como meio ativo.

Na extremidade da haste de rubi há dois espelhos, um parcialmente refletor e outro totalmente refletor. Vimos que para um laser aleatório, as partículas espalhadoras atuam para que ocorra a difusão da luz e contribui na alimentação do sistema. O laser desenvolvido por Maiman, usando o interferômetro de Fabry-Perot (figura 16) como base, concentra o feixe em uma direção bem orientada, além de garantir que o sistema entre em ressonância.

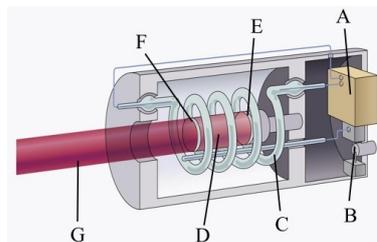
Figura 16 – Estrutura simplificada de um interferômetro de Fabry-Perot. Dois espelhos, R1 e R2, postos a uma distância d , o primeiro totalmente refletor e segundo parcialmente refletor, permitindo passagem de parte da luz. A luz sofre reflexões múltiplas entre os espelhos.



Fonte: autoria própria

Quando o sistema atinge os requisitos necessários, ocorre a emissão laser. A estrutura do dispositivo desenvolvido por Maiman está na figura 17:

Figura 17 – Estrutura do laser de rubi: (A) Fonte de energia; (B) Interruptor; (C) Flash de xenônio; (D) Haste de rubi; (E) Espelho totalmente refletor; (F) Espelho parcialmente refletor; (G) Feixe laser.



Fonte: <https://www.forbes.com/sites/meriambeerboucha/2019/03/28/a-brief-history-of-the-ruby-laser/>, adaptado

A disposição da estrutura com o interferômetro de Fabry-Perot leva o nome de cavidade ressonante e substitui as partículas espalhadoras para o caso de um laser convencional.

Algumas proposições que ocorreram nos anos seguintes, principalmente por parte do V. S. Letokhov (Letokhov, 1968) discutiram a geração laser em um meio sem uma cavidade ressonante. A ausência da cavidade que permitia a realimentação necessária para que ocorresse emissão estimulada o suficiente se tornou um dos grandes desafios para o desenvolvimento do laser aleatório.

Em 1993, Gouedard et al haviam chegado próximos a um laser aleatório, obtendo uma emissão laser sem o uso de espelhos, através de um bombeio laser em um composto de neodímio (Gouedard et al., 1993). A partir desse experimento Gouedard et al obtiveram uma emissão laser quase monocromática.

O grande desenvolvimento de um laser aleatório veio no ano seguinte. Lawandy et al, para solucionarem o problema causado pela ausência da cavidade ressonante, adicionaram o corante rodamina 640 perclorato em um meio contendo partículas de TiO_2 (Dióxido de Titânio) cobertas por uma camada de Al_2O_3 (Óxido de Alumínio) suspensas em etanol. Esse meio era altamente espalhador devido ao alto índice de refração do $\text{TiO}_2@/\text{Al}_2\text{O}_3$. A solução do meio altamente espalhador resultou em uma solução coloidal, que ao ser bombeada por um laser Nd:YAG com um comprimento de onda de 532nm, resultou em uma emissão laser com propriedades espectrais satisfatórias para um laser (Lawandy et al., 1994).

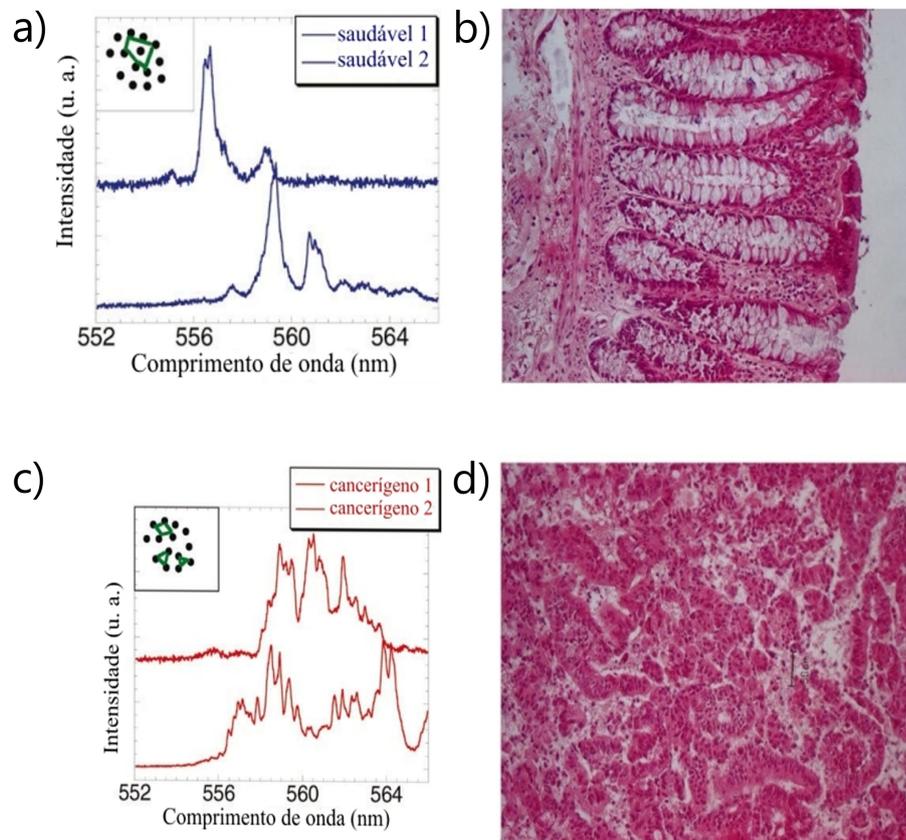
6.4 Aplicações para um laser aleatório

Desde o desenvolvimento do primeiro laser aleatório no final do século XX, as suas características o tornaram objeto de interesse para diversas aplicações e a diferença de emissão em comparação ao laser convencional faz com que ele continue sendo fonte de estudo.

Algumas das várias aplicações para ele se encontram na área da medicina. Ainda no começo do século, foi desenvolvido um trabalho para a detecção de tecidos cancerígenos ao comparar a diferença de emissão entre eles e tecidos saudáveis (Polson e Vardeny, 2004).

O trabalho de Polson e Vardeny demonstrou que tecidos saudáveis dopados com o corante rodamina 6G, bombeados por um laser Nd:YAG com um comprimento de onda de 532 nm, possuem um padrão de emissão laser, com picos de emissão bem definidos, enquanto os tecidos cancerígenos apresentam uma largura de banda pouco definida com diversos picos de emissão, permitindo a caracterização e diferenciação de tecidos saudáveis para tecidos cancerígenos, como demonstrado na figura 18.

Figura 18 – Resultados obtidos por Polson e Vardeny: (a) Espectro de emissão do tecido saudável; (b) Tecido saudável em uma visão microscópica; (c) Espectro de emissão do tecido cancerígeno; (d) Tecido cancerígeno em uma visão microscópica.



Fonte: (Polson e Vardeny, 2004), adaptado.

A relação entre o laser aleatório e a biologia é uma grande fonte de aplicação do laser aleatório devido à possibilidade de observar a emissão laser em diferentes conjuntos celular, em outros estudos temos por exemplo a detecção de emissão laser em nano-pilares distribuídos na asa de uma cigarra imperatriz, permitindo estudos para o desenvolvimento de lasers aleatórios orgânicos (Zhang et al., 2012) e com o uso da técnica do laser aleatório para realizar um monitoramento menos invasivo no cérebro, observando o padrão de emissão laser para devidas partes (Lahoz et al., 2019).

Outra aplicação comum do laser aleatório são os sensores ópticos, como para Ignesti et al, que utilizam da detecção de emissão laser em meios desordenados para a realização de diagnósticos de amostras sem precisar realizar uma ação invasiva (Ignesti et al., 2016).

Podemos destacar também a utilidade do laser aleatório para o estudo de partículas ao interagirem com a luz. Desde o seu desenvolvimento, diversos meios espalhadores já foram utilizados para construir o laser aleatório, desde o TiO₂ (Dióxido de titânio) na construção do Lawandy et al, a partículas de ZnO (óxido de zinco) (Thareja e Mitra, 2000) e WO₃(trióxido de tungstênio) (Ardakani e Rafeipour, 2018). Através do laser

aleatório é possível estudar o comportamento de nanopartículas ao interagirem com a luz em diferentes estados e condições, permitindo análises mais de comportamentos para aplicações práticas como a fotocatalise e espalhamento da luz (Jimenez-Villar et al., 2013), úteis para observação de fenômenos físicos como a localização de Anderson (Jimenez-Villar et al., 2016) ou estudo de materiais que podem ser utilizados em determinada aplicação. Por exemplo, (Jimenez-Villar et al., 2013) oferece uma análise de nanopartículas de TiO₂ com um revestimento de sílica, apresentando menor fotocatalise, uma maior intensidade de emissão e menor limiar laser, o que significa que proporciona uma alta intensidade da cor laser com menos energia do que apenas partículas de TiO₂, ao mesmo tempo que é mais resistente aos efeitos de fotocatalise, evitando degradação do corante. Tais propriedades são interessantes para uma das principais aplicações do TiO₂ que é a de pigmento em tintas de parede (*Dióxido de Titânio Rutilo em Tintas* 2022), mas o torna menos interessante para fotodegradadores que utilizam a oxirredução resultante da fotodegradação do TiO₂ para limpeza de ambientes (Chen et al., 2020).

7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do laser aleatório (e do laser como um todo) é recente assim como o embasamento que o fundamenta. Muitos dos tópicos abordados consistem em conceitos provenientes da mecânica quântica, como as transições, dualidade da luz e estados quânticos, mas ainda assim sendo possível desenvolver uma noção básica sobre os seus fundamentos. Esse trabalho estabeleceu como objetivo apresentar o laser aleatório demonstrando tópicos mais técnicos, mas ainda contemplando uma abordagem que permita aos alunos de graduação compreenderem a teoria do laser aleatório.

Vimos que lasers aleatórios mantêm uma semelhança em certo nível com os lasers convencionais, o que faz com que muito do conhecimento desenvolvido seja o mesmo para ambos os dispositivos. Os efeitos de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada, assim como os efeitos de inversão de população e amplificação estão presentes no laser em geral. A principal diferença está na sua construção, que visa um modo de emissão diferente para cada um deles.

A diferenciação do laser aleatório para o convencional também está na sua aplicação, havendo a necessidade de existir a separação entre o laser aleatório e o laser convencional. Tratei de explicar algumas dessas aplicações, permitindo que haja uma noção entre as diferenças na hora das aplicações, onde o laser aleatório está presente em situações que a sua emissão difusa se torna útil, em comparação ao laser convencional, que se beneficia em trabalhos de precisão. A partir destas constatações e do que foi desenvolvido, é esperado que este trabalho possa servir de acompanhamento para estudo e desenvolvimento de conhecimentos iniciais acerca do laser aleatório, para que o estudante possa se aventurar em diferentes temas mais profundos acerca do laser aleatório.

O trabalho estabeleceu algumas limitações que já foram citadas ao longo de sua estrutura, como o tratamento do espalhamento da luz a partir apenas das teorias clássicas. Também foi estabelecido, para fins de simplificação e por ter sido o primeiro desenvolvido, todas as discussões ocorrem com base em um laser aleatório coloidal. Há diferentes tipos de laser aleatório, seja líquido, sólido ou gasoso, cada um deles possuem propriedades que podem alterar o estudo ou aplicação do laser aleatório. O coloidal, por exemplo, é feito a partir da imersão de nanopartículas em uma solução contendo corante disperso em solvente e incidido por um outro laser. Essa composição permite um maior reaproveitamento de materiais, sendo útil para estudos, enquanto lasers sólidos, por exemplo, permitem um melhor manejo, sendo úteis para aplicações.

Em trabalhos futuros seria possível analisar tópicos mais avançados quanto ao laser aleatório, como os efeitos derivados de uma dinâmica não-linear, presentes no espalhamento de Raman, além dos já citados diferentes modelos como o laser aleatório de fibra e efeitos como localização da luz e os processos de Levy. Esse trabalho foca em fornecer

uma base suficiente para um estudo do laser, de modo que possa ser capaz de entender a teoria e visualizar as aplicações.

A Análise da Fórmula de Rabi no Regime de Quase-Ressonância

Neste apêndice veremos o comportamento da fórmula de Rabi quando a frequência de perturbação é extremamente próxima da frequência de transição. A fórmula de Rabi é dada por:

$$|c_b(t)|^2 = \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} \text{sen}^2 \left(\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} t \right) \quad (\text{A.1})$$

Considerando $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$, podemos analisar o comportamento da equação A.1 para frequências próximas, ou seja, quando $\Delta\omega$ se aproxima de 0, a partir de uma expansão em série de Taylor. Para isso, manipulamos o termo dentro da raiz para:

$$\text{sen}^2 \left(\left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\Delta\omega)^2}{4}} \right] t \right) = \text{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}} \right] t \right) = \text{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{\hbar} \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}} \right] t \right) \quad (\text{A.2})$$

Então:

$$|c_b(t)|^2 = \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\Delta\omega)^2}{4}} \text{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{\hbar} \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}} \right] t \right) \quad (\text{A.3})$$

Sendo a série de Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots \quad (\text{A.4})$$

A utilizando na razão inicial e no argumento do sen^2 temos:

1°) Série de Taylor na razão inicial:

$$f(x) = \frac{(\Delta\omega)^2}{4} \quad (\text{A.5})$$

$$f(x) = 0 + 2 \frac{\Delta\omega}{4} \Delta\omega + \frac{1}{4} \Delta\omega^2 \quad (\text{A.6})$$

O segundo e o terceiro termo são tão pequenos que podem ser ignorados.

2°) Série de Taylor para o argumento do sen^2 :

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}} \quad (\text{A.7})$$

$$f(x) = 1 + \frac{\hbar^2 \Delta\omega}{8\gamma^2 \sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}}} \sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2 \hbar^2}{4\gamma^2}} + \dots \quad (\text{A.8})$$

Assim como em A.6, do segundo termo em diante, os valores são tão pequenos que

podem ser ignorados. Implementando os resultados obtidos em A.6 e A.8 a A.3, temos:

$$|c_b(t)|^2 \approx \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + 0} \text{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{\hbar} [1] t \right) \quad (\text{A.9})$$

$$|c_b(t)|^2 \approx \text{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{\hbar} t \right) \quad (\text{A.10})$$

Assim, vemos que para frequências próximas, a fórmula de Rabi converge para uma função senoidal simples, o que evidencia a ressonância máxima quando a frequência do campo externo se iguala à frequência de transição do sistema.

B Probabilidade de transição para um sistema de dois níveis com correção de perturbação de primeira ordem

Neste apêndice, será desenvolvido a densidade de probabilidade de transição entre dois estados quânticos sob a ação de uma perturbação sinusoidal com a correção de primeira ordem. Considera-se a equação de Schrödinger dependente do tempo e a expansão do estado total da partícula em uma base ortonormal de dois níveis.

$$\Psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} + c_b(t)\psi_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \quad (\text{B.1})$$

Onde c_a e c_b , como estamos trabalhando com a equação de Schrödinger dependente do tempo, são funções de t . $|c_a|^2$ e $|c_b|^2$ são as densidades de probabilidade de a partícula estar em cada um dos estados. Como a partícula pode estar em apenas dois estados, ψ_a ou ψ_b , logicamente:

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1 \quad (\text{B.2})$$

As energias dos estados serão:

$$H^0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (\text{B.3})$$

O hamiltoniano do sistema é:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

Onde:

$$H = H^0 + H'(t) \quad (\text{B.5})$$

sendo H^0 o hamiltoniano não perturbada e $H'(t)$ a perturbação dependente do tempo. Ao adicionar a perturbação, o hamiltoniano do sistema se torna:

$$(H^0 + H')(c_a\psi_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} + c_b\psi_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (c_a\psi_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} + c_b\psi_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}}) \quad (\text{B.6})$$

Fazendo o produto entre os termos:

$$\begin{aligned}
& c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} [H^0 \psi_a] + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} [H^0 \psi_b] \\
& + c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} [H' \psi_a] + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} [H' \psi_b] \\
& = i\hbar \left[\psi_a \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} + c_a \frac{\partial e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}}}{\partial t} \right) \right. \\
& \quad \left. + \psi_b \left(\frac{\partial c_b}{\partial t} e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} + c_b \frac{\partial e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}}}{\partial t} \right) \right] \tag{B.7}
\end{aligned}$$

A partir do que foi definido em B.3 e resolvendo as derivadas, a equação B.7 será:

$$\begin{aligned}
& c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} E_a \psi_a + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} E_b \psi_b \\
& + c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} [H' \psi_a] + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} [H' \psi_b] \\
& = i\hbar \dot{c}_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \psi_a + i\hbar \dot{c}_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \psi_b \\
& + c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} E_a \psi_a + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} E_b \psi_b \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos da igualdade a esquerda e os dois últimos termos a direita da igualdade se cancelam e temos:

$$c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} [H' \psi_a] + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} [H' \psi_b] = i\hbar \dot{c}_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \psi_a + i\hbar \dot{c}_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \psi_b \tag{B.9}$$

Para encontrar a amplitude de probabilidade c_b , devemos isolar \dot{c}_b . Para isso, multiplicamos a equação por $\langle \psi_b |$ (sabendo que $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ e que $\langle \psi_n | H' | \psi_m \rangle = H'_{nm}$):

$$c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle = i\hbar \dot{c}_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \langle \psi_a | \psi_b \rangle + i\hbar \dot{c}_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \langle \psi_b | \psi_b \rangle \tag{B.10}$$

$$c_a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} H'_{ba} + c_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} H'_{bb} = i\hbar \dot{c}_b e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \tag{B.11}$$

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} [c_a e^{\frac{i(E_b - E_a)t}{\hbar}} H'_{ba} + c_b H'_{bb}] \tag{B.12}$$

Para encontrar uma aproximação para a correção de primeira ordem da densidade de probabilidade da partícula ser encontrada no estado ψ_b , assumimos algumas condições, como a de que os elementos da diagonal principal da matriz de perturbação são nulos, então $H_{nn} = 0$. Assim:

$$\frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} c_a e^{i\omega_0 t} H'_{ba} \tag{B.13}$$

$$\int_0^{c_b^{(1)}} dc_b^{(1)'} = \int_0^t -\frac{i}{\hbar} c_a e^{i\omega_0 t'} H'_{ba} dt' \quad (\text{B.14})$$

Onde:

$$\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar} \quad (\text{B.15})$$

Considerando que a partícula estava inicialmente no estado fundamental e ψ_b é o seu estado excitado, $c_a^{(0)} = 1$ inicialmente. Uma perturbação como a gerada por um campo eletromagnético externo assume forma de uma perturbação sinusoidal, ou seja:

$$H' = V \cos(\omega t) \quad (\text{B.16})$$

Então implementando as condições citadas a B.14, ficamos com:

$$\int_0^{c_b^{(1)}} dc_b^{(1)'} = \int_0^t -\frac{i}{\hbar} e^{i\omega_0 t'} V_{ba} \cos(\omega t') dt' \quad (\text{B.17})$$

$$c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t e^{i\omega_0 t'} \cos(\omega t') dt' \quad (\text{B.18})$$

A partir da identidade de Euler:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (\text{B.19})$$

$$c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \frac{1}{2} \int_0^t (e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_0 t'} dt' \quad (\text{B.20})$$

$$c_b^{(1)} = -\frac{i}{2\hbar} V_{ba} \left[\int_0^t e^{i(\omega_0 + \omega)t'} dt' + \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega)t'} dt' \right] \quad (\text{B.21})$$

$$c_b^{(1)} = -\frac{i}{2\hbar} V_{ba} \left[\left. \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t'}}{i(\omega_0 + \omega)} \right|_0^t + \left. \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t'}}{i(\omega_0 - \omega)} \right|_0^t \right] \quad (\text{B.22})$$

$$c_b^{(1)} = -\frac{i}{2\hbar} V_{ba} \left[\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{i(\omega_0 + \omega)} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{i(\omega_0 - \omega)} \right] \quad (\text{B.23})$$

Como $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$, o termo a esquerda é desprezível, o que nos leva a:

$$c_b^{(1)} \approx -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{(\omega_0 - \omega)} \right] = -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}}}{(\omega_0 - \omega)} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}} \right] \quad (\text{B.24})$$

Manipulando a relação de Euler para o seno, temos que:

$$2i \text{sen}(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \quad (\text{B.25})$$

Implementando essa relação em B.24, temos que:

$$c_b^{(1)} \approx -\frac{iV_{ba}}{\hbar} \frac{\text{sen}\left[(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}\right]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}} \quad (\text{B.26})$$

Como a densidade de probabilidade total é uma série da soma das correções de perturbação, então a probabilidade de transição com a correção de primeira ordem é:

$$|c_b(t)|^2 \approx |c_b^{(0)}|^2 + |c_b^{(1)}|^2 \quad (\text{B.27})$$

Como a partícula inicialmente está no estado fundamental, então $c_b^{(0)} = 0$, resultando em:

$$|c_b(t)|^2 \approx \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2} \frac{\text{sen}^2\left[(\omega_0 - \omega)\frac{t}{2}\right]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (\text{B.28})$$

REFERÊNCIAS

- Ambartsumyan, R. V., N. G. Basov, P. G. Kryukov e V. S. Letokhov (1966). “5A10(b)-A laser with a Nonresonant Feedback”. Em: *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. *QE-2*, No. 9.
- Ardakani, A. G. e P. Rafieipour (2018). “Random lasing emission from WO₃ particles dispersed in Rhodamine 6G solution”. Em: *Physica B: Condensed Matter* 546, 49-53.
- Barnhart, S. e S. Gunasekaran (ago. de 2020). “Design and Development of a Coherent Detection Rayleigh Doppler Lidar System for Use as an Alternative Velocimetry Technique in Wind Tunnels”. Tese de dout. DOI: 10.13140/RG.2.2.32670.15688.
- Brunborg, H., T. Smørgrav, R. Blake e P. Nyg (2014). “Light propagation in pulp and paper research”. Em.
- Bührer, W. (2012). “Anderson Localization of Light in the Presence of Non-linear Effects”. Tese de dout. Universität Konstanz.
- Cao, H., Y. G. Zhao, S. T. Ho, E. W. Seelig, Q. H. Wang e R. P. H. Chang (1999). “Random Laser Action in Semiconductor Powder”. Em: *Phys. Rev. Lett.*, 82, 11, 2278 - 2281.
- Chen, D., Y. Cheng, N. Zhou, P. Chen, Y. Wang, K. Li, S. Huo, P. Cheng, P. Peng, R. Zhang, L. Wang, H. Liu, Y. Liu e R. Ruan (2020). “Photocatalytic degradation of organic pollutants using TiO₂-based photocatalysts: A review”. Em: *Journal of Cleaner Production*, 268, 121725.
- Dëmtroder, W. (2006). *Atoms, Molecules and Photons*. Springer.
- Dióxido de Titânio Rutilo em Tintas* (2022). <https://www.fuzzatrade.com.br/dioxido-de-titanio-rutilo-em-tintas/>. Acessado em: 20 maio 2025.
- Einstein, A. (1916). “Strahlungs-Emission und Absorption nach der Quantentheorie”. Em: *Deutsche Physikalische Gesellschaft*, 18.
- (1917). “Zur Quantentheorie der Strahlung”. Em: *Physikalische Zeitschrift*, 18.

- Eisberg, R. e R. Resnick (1979). *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Editora Campus.
- Gomes, A. S., A. L. Moura, C. B. de Araújo e E. P. Raposo (2021). “Recent advances and applications of random lasers and random fiber lasers”. Em: *Progress in Quantum Electronics*, 78, 100343, ISSN 0079-6727,
- Gordon, J. P., H. J. Zeiger e C. H. Townes (1955). “The Maser-New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard, and Spectrometer”. Em: *Physical Review*, vol. 99, Issue 4, pp. 1264-1274.
- Gouedard, C., D. Husson, C. Sauteret, F. Auzel e A. Migus (1993). “Generation of spatially incoherent short pulses in laser-pumped neodymium stoichiometric crystals and powders”. Em: *J. Opt. Soc. Am. B/Vol. 10, No. 12*.
- Griffiths, D. J. (2011). *Eletrodinâmica*, 3^a edição. Pearson.
- Griffiths, D. J. e D. F. Schroeter (2018). *Introduction to quantum mechanics*, 3^o edition. Cambridge University Press.
- Hergert, W. e T. Wriedt (2012). *The Mie Theory: Basics and Applications*. Springer.
- Hulst, H. C. van de (1981). *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications.
- Ignesti, E., Federico Tommasi, L. Fini, F. Martelli, Niccolò Azzali e Stefano Cavalieri (2016). “A new class of optical sensors: a random laser based device”. Em: *Scientific Reports*, 6, 35225.
- Jimenez-Villar, E., V. Mestre, P. C. de Oliveira e G. F. de Sá (2013). “Novel core-shell (TiO₂@Silica) nanoparticles for scattering medium in a random laser: higher efficiency, lower laser threshold and lower photodegradation”. Em: *Nanoscale*, Issue 24.
- Jimenez-Villar, E., I. F. da Silva, V. Mestre, P. C. de Oliveira, W. M. Faustino e G. F. de Sá (2016). “Anderson localization of light in a colloidal suspension (TiO₂@silica)”. Em: *Nanoscale*, Issue 21.

- Kamil, N. A. I. M., W. Z. W. Ismail, I. Ismail, S. R. Balakrishnan, M. Sahrim, J. Jamaludin, M. Othman e S. Suhaimi (2020). “Principles and characteristics of random lasers and their applications in medical, bioimaging and biosensing”. Em: *AIP Conf. Proc.* 2203, 020017.
- Lahoz, F., A. Acebes, T. González-Hernández, S. de Armas-Rillo, K. Soler-Carracedo, G. Cuesta e V. Mesa-Infante (2019). “Random lasing in brain tissues”. Em: *Organic Electronics*, 75, 105389.
- Lawandy, N. M., R. M. Balachandran, A. S. L. Gomes e E. Sauvain (1994). “Laser action in a strongly scattering media”. Em: *Nature*, vol. 368, 436-438.
- Lepri, S., S. Cavalieri, G.-L. Oppo e D. S. Wiersma (2007). “Statistical regimes of random laser fluctuations”. Em: *Phys. Rev. A*, 75, 063820.
- Letokhov, V. S. (1968). “Generation of Light by a Scattering Medium with a Negative Resonance”. Em: *Soviet Physics JETP*, vol. 26, no. 4.
- Luan, F., B. Gu, A. S. Gomes, K.-T. Yong, S. Wen e P. N. Prasad (2015). “Lasing in nanocomposite random media”. Em: *Nano Today*, 10, 168-192.
- Ma, R.-M. (2019). “Lasing under ultralow pumping”. Em: *Nat. Mater.* 18, 1152-1153.
- Maiman, T. H. (1960). “Stimulated Optical Radiation in Ruby”. Em: *Nature* 187, 493-494.
- Markushev, V. M., V. F. Zolin e C. M. Briskina (1986). “Luminescence and stimulated emission of neodymium in sodium lanthanum molybdate powders”. Em: *Sov. J. Quantum Electron.* 16(2) 281.
- Matos, C. J. S. de, L. de S. Menezes, A. M. Brito-Silva, M. A. M. Gámez, A. S. L. Gomes e C. B. de Araújo (2007). “Random Fiber Laser”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 99, 153903.
- Miles, R. B., W. R. Lempert e J. N. Forkey (2001). “Laser Rayleigh scattering”. Em: *Meas. Sci. Technol.* 12.

- Polson, R. C. e Z. V. Vardeny (2004). “Random lasing in human tissues”. Em: *APPLIED PHYSICS LETTERS*, vol. 85, n. 7.
- Sakurai, J. J. e J. Napolitano (2013). *Mecânica Quântica Moderna*, 2^a edição. Bookman.
- Saleh, B. E. A. e M. C. Teich (2007). *Fundamental of Photonics*, 2^o edition. Wiley.
- Santos, E. P. e A. S. Gomes (2024). “O laser aleatório: fundamentos e aplicações”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 46, e20240134.
- Schownes, A. L. e C. H. Townes (1958). “Infrared and Optical Masers”. Em: *Physical Review*, vol. 112, Issue 6, pp. 1940-1949.
- Silva Júnior, V. M. da (2014). “Novo meio espalhador (TiO₂@Sílica) para um laser aleatório”. Tese de dout. UFPB.
- Sorokin, P. P. e J. R. Lankard (1966). “Stimulated Emission Observed from a Organic Dye”. Em: *IBM Journal*.
- Thareja, R. K. e A. Mitra (2000). “Random laser action in ZnO”. Em: *Applied Physics B*, v. 71, 181-184.
- Young, H. D. e R. A. Freedman (2009). *Física IV*, 12^a edição. Pearson Education.
- Zhang, D., G. Kostovski, C. Karnutsch e A. Mitchell (2012). “Random lasing from dye doped polymer within biological source scatters: The pomponia imperatorial cicada wing random nanostructures”. Em: *Organic Electronics*, 13, 2342-2345.