



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

LUCIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

DINÂMICA ORBITAL EM UM BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO:
UMA ABORDAGEM COM SIMULAÇÃO EM PYTHON

CAMPINA GRANDE
2025

LUCIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

**DINÂMICA ORBITAL EM UM BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO:
UMA ABORDAGEM COM SIMULAÇÃO EM PYTHON**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado à Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Relatividade Geral

Orientador: Prof. Dr Jean Paulo Spinelly de Silva.

**CAMPINA GRANDE
2025**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

O48d Oliveira, Luciano Antunes de.
Dinâmica orbital em um buraco negro não comutativo [manuscrito] : uma abordagem com simulação em python / Luciano Antunes de Oliveira. - 2025.
24 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física - CCT".

1. Relatividade geral. 2. Buraco negro não comutativo. 3. Equações geodésicas. 4. Potencial efetivo. I. Título

21. ed. CDD 530.11

LUCIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

DINÂMICA ORBITAL EM UM BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO:
UMA ABORDAGEM COM SIMULAÇÃO EM PYTHON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovada em: 13/06/2025.

Banca Examinadora

Documento assinado eletronicamente por:

- **Alex da Silva** (***.295.004-**), em **25/06/2025 21:32:06** com chave **fd41aeae522411f09f7a06adb0a3afce**.
- **Everton Cavalcante** (***.699.765-**), em **25/06/2025 21:19:58** com chave **4b109a70522311f0ba3c1a1c3150b54b**.
- **Gabriela Coutinho Luna** (***.317.234-**), em **26/06/2025 07:41:31** com chave **1f63f708527a11f0b1ae2618257239a1**.
- **Jean Paulo Spinelly da Silva** (***.685.684-**), em **25/06/2025 20:34:25** com chave **ee2c8180521c11f0b0a206adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 26/06/2025

Código de Autenticação: b96a6a



Dedico esse trabalho aos meus pais, que sempre me incentivaram e acreditaram em meu potencial. Sem o apoio, o carinho e os conselhos deles, esta conquista não teria sido possível.

”O universo não foi feito à medida do ser humano, mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente.” **Carl Sagan**

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Massa de uma partícula espalhada em torno da origem, no caso em que $\Theta = 0,001$. Quanto mais intensa for a cor branca, maior será a concentração da massa.	10
2	Comportamento $\rho_{\Theta}(r)$ em $r = 0$, tomando a massa fixa ($M = 1$) e considerando diferentes valores de Θ . A medida que o Θ da função torna-se mais concentrada e elevada em $r = 0$	10
3	Comportamento da função g^{11} para $\Theta = 0.01$ e diferentes valores de M . Neste caso, quando $M = M_0 = 0,22$, a função será nula em $r = r_0 \cong 0,25$	13
4	A curva pontilhada descreve o comportamento de M_0 para qualquer Θ ; enquanto que a cheia, é comportamento da função $M_0 = 8\sqrt{\Theta/\pi}$, a qual é válida para pequenos valores Θ	14
5	Comportamento do potencial efetivo, para $K = 1/2$ (partícula), no caso em que l é muito pequeno.	18
6	Comportamento do potencial efetivo, para $K = 1/2$ (partícula), no caso em que l é grande.	18
7	Comportamento do potencial efetivo, para $K = 0$ (luz)	18
8	Simulador NC	19
9	Momento Angular Mínimo	21
10	Momento Angular Intermediário	22
11	Momento Angular Elevado	22

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Buraco Negro de Schwarzschild Não Comutativo	9
3	Movimento Geodésico na Presença de um Buraco Negro não Comutativo	13
3.1	Equações Geodésicas	14
3.2	Movimento Geodésico	16
4	Simulação Computacional do Movimento Geodésico	18
4.1	Plataforma e Ferramentas	19
4.2	Análise do Potencial Efetivo e das Órbitas	20
5	Conclusões	23
	Referências	23
	Agradecimentos	24

DINÂMICA ORBITAL EM UM BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO: UMA ABORDAGEM COM SIMULAÇÃO EM PYTHON

Luciano Antunes de Oliveira¹

RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral descreve os buracos negros como regiões do espaço-tempo onde a curvatura se torna extremamente intensa, especialmente em pontos conhecidos como singularidades. Nesses locais, os modelos da física clássica deixam de ser válidos, tornando-se incapazes de fornecer descrições coerentes e previsões confiáveis. Para contornar esse problema, diferentes abordagens têm sido propostas, entre elas a hipótese da não comutatividade do espaço-tempo, que introduz uma estrutura discreta nas coordenadas e distribui a massa de forma contínua, evitando a concentração pontual no centro do buraco negro (Nicolini et al., 2006). Por meio de simulações, comparamos os perfis de órbitas circulares e de dispersão nos cenários clássico e não comutativo. Verificamos que a introdução da não comutatividade regulariza a região central do buraco negro, desloca o raio de captura de partículas e fótons, e amplia as zonas de estabilidade orbital. Tais efeitos podem refletir-se em alterações observáveis na sombra do buraco negro e nos anéis de luz, fenômenos acessíveis por meio de observações astronômicas de alta resolução. Com o objetivo de explorar essas implicações, foi desenvolvido um simulador em Python, com interface gráfica via Streamlit. A ferramenta permite visualizar e comparar, em tempo real, as órbitas no cenário não comutativo, enriquecendo tanto a análise qualitativa quanto a quantitativa dos resultados.

Palavras chave: relatividade geral; buraco negro não comutativo; equações geodésicas; potencial efetivo.

ABSTRACT

General Relativity characterizes black holes as regions of space-time where curvature becomes extremely intense, especially at points known as singularities. In these places, classical physics models cease to offer valid descriptions and reliable predictions. To overcome this problem, different approaches have been proposed, among them the hypothesis of space-time noncommutativity, which introduces a discrete structure into the coordinates and distributes mass in a continuous way, avoiding point-like concentration at the center of the black hole (Nicolini et al., 2006). Through simulations, we compare the profiles of circular and scattering orbits in both the classical and noncommutative scenarios. It is found that the introduction of noncommutativity regularizes the central region of the black hole, shifts the radius from which particles and light are definitively captured, and expands the zones of orbital stability. These effects may manifest in

¹Graduando(a) em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

observable changes in the black hole’s shadow and in the light rings detectable in high-resolution astronomical observations. In order to explore these implications, a numerical simulator was developed in Python, with a graphical interface via Streamlit. The tool allows one to visualize and compare, in real time, the orbits in the noncommutative scenario, enriching both the qualitative and quantitative analysis of the results.

Keywords: general relativity; noncommutative black hole; geodesic equations; effective potential.

1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1915, redefiniu o conceito de gravidade ao interpretá-la como uma manifestação geométrica da curvatura do espaço-tempo, resultante da presença de massa e energia (Carroll, 1997). Diferentemente da gravitação newtoniana, baseada em forças à distância, essa teoria estabelece que a matéria influencia diretamente a geometria do espaço-tempo, determinando as trajetórias seguidas por partículas e radiação.

Em 1916, Karl Schwarzschild obteve a primeira solução das equações de Einstein, descrevendo o campo gravitacional gerado por uma massa pontual com simetria esférica em um espaço vazio. Essa solução revelou a existência de regiões das quais nada pode escapar, conhecidas como buracos negros. Embora a singularidade no horizonte de eventos possa ser eliminada com mudança de coordenadas, a divergência real da curvatura ocorre no centro do buraco negro, onde a densidade torna-se infinita e as previsões clássicas deixam de ser válidas. A observação direta de buracos negros, como a imagem da fonte M87*, confirma que tais objetos não são meras construções teóricas, mas entidades físicas reais com grande relevância astrofísica.

Apesar de seu êxito em descrever fenômenos gravitacionais em larga escala, a Relatividade Geral enfrenta dificuldades ao lidar com regiões de curvatura extrema, como o interior dos buracos negros. Diversas abordagens foram propostas para superar essas limitações, destacando-se entre elas a hipótese da não comutatividade do espaço-tempo. Essa abordagem introduz uma estrutura discreta ou “granular” no espaço-tempo, substituindo a concepção de uma massa pontual por uma distribuição contínua, o que elimina a singularidade central e permite a construção de geometrias mais regulares (Nicolini et al., 2006).

Neste trabalho, investigamos o comportamento de partículas massivas e fótons em torno de um buraco negro com estrutura não comutativa. Nosso objetivo é compreender como essa granularidade modifica as órbitas possíveis, a estabilidade dos movimentos e a forma do horizonte. Para isso, utilizamos uma abordagem baseada em simulação computacional, na qual desenvolvemos um simulador numérico em Python. A ferramenta emprega métodos de integração eficientes e uma interface interativa para explorar e visualizar, em tempo real, as trajetórias resultantes em diferentes regimes físicos. Essa abordagem permite comparar cenários clássicos e não comutativos, evidenciando as alterações provocadas pela estrutura modificada do espaço-tempo.

2 Buraco Negro de Schwarzschild Não Comutativo

A introdução de efeitos de não comutatividade na estrutura do espaço-tempo tem sido amplamente investigada como uma possível via para a incorporação de aspectos quânticos da gravidade em regimes extremos, como aqueles presentes no interior ou nas proximidades de buracos negros (Doplicher et al, 1995; Seiberg e Witten, 1999). Nesse cenário, a geometria não comutativa surge como uma generalização da geometria diferencial clássica, ao postular que as coordenadas do espaço-tempo satisfazem uma relação de comutação do tipo

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (1)$$

em que $\Theta^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico que introduz uma escala mínima de comprimento.

A não comutatividade das coordenadas impede a determinação precisa de fenômenos físicos em nível local (Tedescio, 2010). Como consequência, em um espaço-tempo não comutativo, uma partícula, antes concebida como um objeto pontual, passa a ser interpretada como uma massa distribuída de forma esfericamente simétrica. Nesse contexto, sua densidade, originalmente descrita por uma função delta de Dirac, é substituída por uma distribuição regular com simetria esférica (Nicolini et al, 2006).

Nesta seção, determinaremos a geometria do espaço-tempo, associada a uma “partícula” que se encontra na origem, conhecida como a métrica de Schwarzschild não comutativa. Para isso, vamos assumir que a densidade de massa dessa partícula é dada pela distribuição Lorentziana (Nozari e Mehdpour, 2008)

$$\rho_\Theta(r) = \frac{M\sqrt{\Theta}}{\pi^2 (r^2 + \Theta)^2}, \quad (2)$$

onde M é a sua massa e Θ é o parâmetro de não comutatividade.

De acordo com essa equação, a massa da partícula, ao invés de ser perfeitamente localizada na origem, é “espalhada” em torno desse ponto, através de uma região cujo tamanho depende do valor de Θ [Ver Figura 1]. Por outro lado, analisando o comportamento de $\rho_\Theta(r)$, exposto na Figura 2, vemos que, quando Θ se aproxima do zero, a função ρ_Θ fica mais concentrada e mais alta em $r = 0$. Isto significa que, no limite em que $\Theta \rightarrow 0$, a referida função deverá se comportar como uma delta de Dirac, corroborando com a exigência mencionada anteriormente. Além disso, independentemente do valor desse parâmetro, podemos mostrar que a integral dessa função sobre todo o espaço resulta em M .

Segundo a Relatividade Geral, para encontrarmos o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, gerado por uma determinada configuração de massa e energia, descrita pelo tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, precisamos resolver as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (4)$$

e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ são o tensor e o escalar de Ricci, sendo

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (5)$$

Figura 1: Massa de uma partícula espalhada em torno da origem, no caso em que $\Theta = 0,001$. Quanto mais intensa for a cor branca, maior será a concentração da massa.

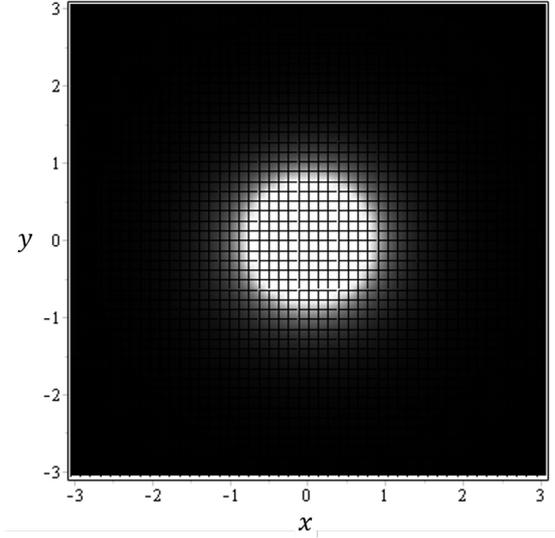
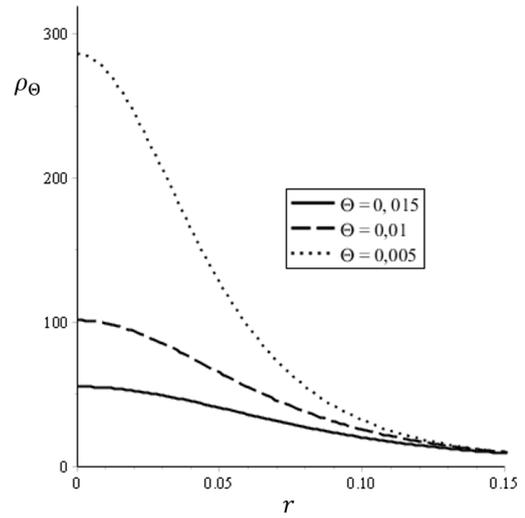


Figura 2: Comportamento $\rho_{\Theta}(r)$ em $r = 0$, tomando a massa fixa ($M = 1$) e considerando diferentes valores de Θ . A medida que o Θ da função torna-se mais concentrada e elevada em $r = 0$.



Fonte: Elaborada pela autor, 2025.

os símbolos de Christoffel. Porém, para simplificar os cálculos, devemos partir de um elemento de linha cuja forma geral seja adequada à distribuição (Carmeli, 1982; d' Inverno, 1988; Carrol, 1997).

No presente caso, devido a simetria da distribuição, o elemento de linha deve ser expresso por (Carmeli, 1982):

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) , \quad (6)$$

onde A e B são funções de t e r . Por conseguinte, as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^A & & & 0 \\ & -e^B & & \\ & & -r^2 & \\ 0 & & & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-A} & & & 0 \\ & -e^{-B} & & \\ & & -r^{-2} & \\ 0 & & & -r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta. \end{pmatrix} \quad (8)$$

onde $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$.

Usando essas expressões nas equações de Einstein, chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$-e^{-B} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{B'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0 , \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-B}\frac{\dot{B}}{r} = 8\pi T_0^1, \quad (10)$$

$$-e^{-B}\left(\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1, \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-B}\left(A'' + \frac{A'^2}{2} + \frac{A' - B'}{r} - \frac{A'B'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-B}\left(\dot{B} + \frac{\dot{B}^2}{2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{2}\right) = 8\pi T_2^2, \quad (12)$$

e

$$-\frac{1}{2}e^{-B}\left(A'' + \frac{A'^2}{2} + \frac{A' - B'}{r} - \frac{A'B'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-B}\left(\dot{B} + \frac{\dot{B}^2}{2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{2}\right) = 8\pi T_3^3. \quad (13)$$

onde o “ponto” e a “linha” indicam, respectivamente, derivadas em relação às coordenadas t e r .

Subtraindo (10) de (9), chegamos à:

$$e^{-B}(A' + B') = T_0^0 - T_1^1. \quad (14)$$

Na obtenção da métrica de Schwarzschild, nos deparamos com uma equação semelhante a (14), com o lado direito igual a zero. Então, como esperamos recuperar a referida solução, no caso limite em que $\Theta \rightarrow 0$, devemos ter $T_0^0 = T_1^1 = \rho_\Theta$. Levando isso em conta e usando a conservação da energia e do momento,

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (15)$$

chegamos a conclusão que o tensor energia-momento do buraco-negro de Schwarzschild no caso não-comutativo é

$$T_\mu^\nu = \text{diag}\left(\rho_\Theta, \rho_\Theta, \rho_\Theta + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta, \rho_\Theta + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta\right). \quad (16)$$

Isso mostra que a distribuição de massa possui uma pressão radial $p_r = -\rho_\Theta$. Fisicamente, uma pressão radial negativa não-nula é necessária para equilibrar a atração gravitacional, evitando que a massa colapse em um ponto de matéria (Nicolini et al, 2006). Esse é o principal efeito físico da não comutatividade do espaço-tempo sobre a matéria, sendo também a origem dos novos fenômenos que emergem na escala de distâncias da ordem de Θ .

Por causa da forma do tensor T_μ^ν , a equação (14) torna-se

$$(A + B)' = 0. \quad (17)$$

Consequentemente,

$$A + B = f(t). \quad (18)$$

Ao isolarmos A nesta equação e substituirmos o resultado em (6), veremos que a componente g_{00} será múltipla de $e^{f(t)}$. Porém, esse fator será absorvido se realizarmos

uma transformação de coordenadas do tipo $t = h(\tilde{t})$ e $x^k = x'^k$, de modo $dt' = e^{-f(t)}dt$. Por essa razão, podemos tomar, sem perdas de generalidade, $f(t) = 0$. Efetuando esse procedimento, segue que de (18) que:

$$A + B = 0 \Rightarrow e^B = e^{-A}. \quad (19)$$

Além de designar uma relação simples entre A e B , esta escolha nos permite afirmar que a soma $A + B$ depende apenas de r . Por outro lado, como a equação (16) estabelece que $T_0^1 = 0$, a equação (10) garante que B é função apenas de r . Então, diante desses resultados, concluimos que A e B dependem unicamente da coordenada r . Isso mostra que a dependência temporal da métrica, de uma distribuição esfericamente simétrica, pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas apropriada, que é o conhecido Teorema de Birkhoff.

Considerando que $B = B(r)$ e usando o fato que $T_0^0 = \rho_\Theta$, a equação (9) toma a forma

$$-e^{-B} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho_\Theta, \quad (20)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dr} (re^{-B}) - 1 = -8\pi r^2 \rho_\Theta. \quad (21)$$

Então, integrando entre 0 e r , e utilizando a densidade definida pela equação (2) e (19), obtemos:

$$e^{-B} = e^A = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (22)$$

onde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_\Theta dr' = \frac{2M}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{r}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\Theta}}{(r^2 + \Theta)} \right] \quad (23)$$

é a massa envolvida em uma esfera de raio r (Wei, Liu et al., 2011).

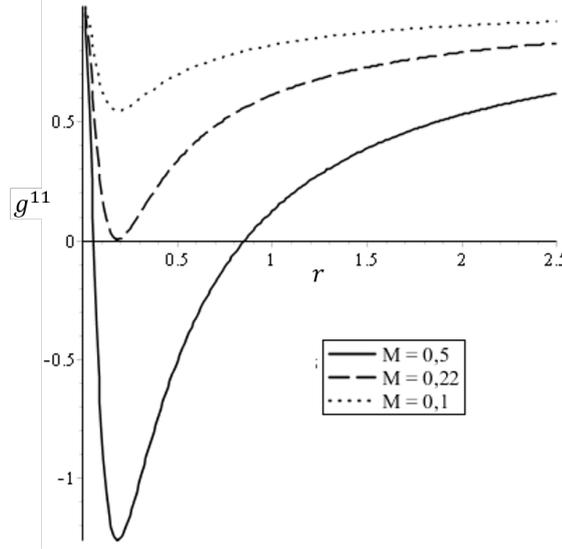
Por fim, substituindo (22) em (6), encontramos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (24)$$

Ao tomarmos o limite $\Theta \rightarrow 0$ na equação (24), verificamos que ela recupera a forma da métrica de Schwarzschild. Além disso, a presença da constante Θ no elemento de linha impede que ocorra uma singularidade na origem.

A depender da relação entre a massa e o parâmetro de não comutatividade, a métrica pode apresentar uma, duas ou nenhuma singularidade. Conforme ilustrado na Figura 3, ao mantermos Θ fixo, existe um valor crítico da massa, denotado por M_0 , para o qual a componente $g^{11} = e^{-\lambda}$ se anula em um único ponto $r = r_0$. Nesse caso, a métrica apresenta uma única singularidade. Se a massa M for maior que M_0 , a função g^{11} admitirá duas raízes reais, indicadas por r_- e r_+ (com $r_- < r_+$), o que resulta em duas singularidades na métrica. Por outro lado, quando $M < M_0$, g^{11} não se anula para nenhum valor de r , e, conseqüentemente, não há singularidades presentes na métrica.

Figura 3: Comportamento da função g^{11} para $\Theta = 0.01$ e diferentes valores de M . Neste caso, quando $M = M_0 = 0,22$, a função será nula em $r = r_0 \cong 0,25$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Uma vez que o parâmetro da não comutatividade é muito pequeno, para encontrarmos as singularidades, vamos expandir a componente g^{11} em potências de Θ até o termo de ordem mais baixa e igualar o resultados a zero. Ao fazermos isso, obtemos:

$$r_{\pm} \cong \frac{M\pi \pm \sqrt{M^2\pi^2 - 8M\pi\sqrt{\Theta}}}{\pi}. \quad (25)$$

Em geral, a massa crítica depende do valor do parâmetro Θ . Porém, no caso em que $\Theta \approx 0$, a equação acima nos permite concluir que essa massa obedece à relação $M_0 \approx 8\sqrt{\Theta}/\pi$. Ao analisarmos a Figura 4, observamos que essa é uma boa aproximação, pois concorda com o comportamento de $M_0(\Theta)$ quando Θ é muito pequeno.

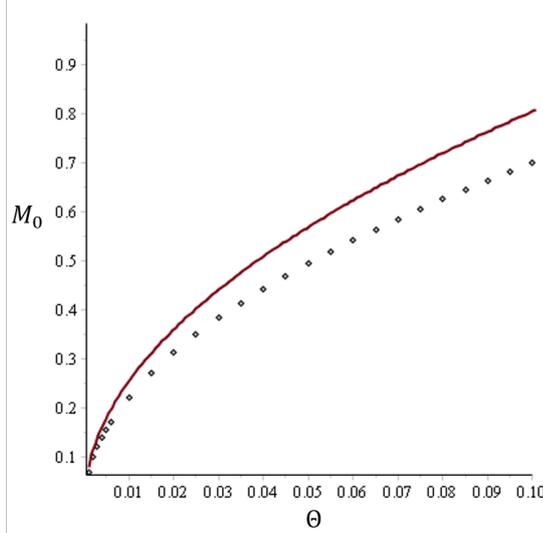
Embora as singularidades mencionadas possam ser removidas por meio de uma mudança de coordenadas apropriada, de forma análoga à solução de Schwarzschild, esses valores de r nos quais a métrica se torna singular indicam a presença de horizontes e, portanto, sinalizam a existência de um buraco negro. Na verdade, o horizonte de eventos é a superfície que se encontra em $r = r_+$.

3 Movimento Geodésico na Presença de um Buraco Negro não Comutativo

Na TRG, as geodésicas representam as trajetórias seguidas por partículas ou fótons quando se encontram sob a influência da curvatura do espaço-tempo, sem forças externas. Essas equações descrevem tanto as órbitas de partículas massivas (tipo-tempo) quanto os trajetos de fótons (tipo-luz) (Carmeli, 1982; Carrol, 1997).

Nesta seção, analisaremos as equações geodésicas associadas ao espaço-tempo gerado por um buraco negro de Schwarzschild não comutativo, descrito pela métrica (24). Nosso

Figura 4: A curva pontilhada descreve o comportamento de M_0 para qualquer Θ ; enquanto que a cheia, é comportamento da função $M_0 = 8\sqrt{\Theta/\pi}$, a qual é válida para pequenos valores Θ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

objetivo é investigar, qualitativamente, como partículas e feixes de luz se comportam nesse cenário modificado, identificando regimes de órbitas estáveis, instáveis, capturas e desvios. Antes, porém, obteremos as equações geodésicas a partir do lagrangiano relativístico associado a um espaço-tempo curvo.

3.1 Equações Geodésicas

Em um espaço-tempo curvo, caracterizado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, o intervalo entre os pontos P_1 e P_2 , ao longo de uma curva parametrizada por λ , é dado por

$$s = \int_{P_1}^{P_2} L d\lambda, \quad (26)$$

onde a Lagrangiana, a qual é definida pela expressão

$$L = \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

é uma função de x^α , $dx^\alpha/d\lambda$ e λ (Carmeli, 1982; d' Inverno, 1998)

A geodésica entre esses pontos é definida como a curva que minimiza a ação. Nesse contexto, como s é um funcional que depende de x^μ e $dx^\mu/d\lambda$, para encontrarmos a referida curva devemos aplicar o princípio de mínima ação, $\delta s = 0$. Fazendo isso e utilizando as técnicas do cálculo variacional (Lemos, 2013), encontramos a chamada equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} \right] = 0. \quad (28)$$

Em princípio, essas equações resolvem o problema, mas na prática existem diversas dificuldades. Antes de tudo, é muito melhor trabalhar sempre que possível com L^2 em vez de L , para evitar raízes quadradas (d' Inverno, 1998). Além disso, a escolha do parâmetro é arbitrária. Essas questões nos levam à distinção entre geodésicas nulas e não nulas.

Assumindo $L \neq 0$ e multiplicando (28) por $2L$, obtemos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L^2}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} \right] - \frac{\partial L^2}{\partial x^\alpha} = 2 \frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} \frac{dL}{d\lambda}. \quad (29)$$

Usando a equação (27), obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L^2}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} \right] - \frac{\partial L^2}{\partial x^\alpha} = 2g_{\alpha\sigma} \frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + 2 \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \{\sigma\beta, \alpha\}, \quad (30)$$

onde

$$\{\sigma\beta, \alpha\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (31)$$

Por outro lado, levando em conta que $L = ds/d\lambda$, temos que

$$2 \frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} \frac{dL}{d\lambda} = 2 \left(\frac{d^2 s}{d\lambda^2} / \frac{ds}{d\lambda} \right) g_{\alpha\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}. \quad (32)$$

Logo, substituindo (30) e (32) em (29), e multiplicando o resultado por $g^{\mu\alpha}/2$, obtemos a equação:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left(\frac{d^2 s}{d\lambda^2} / \frac{ds}{d\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (33)$$

em que

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\mu = g^{\mu\alpha} \{\sigma\beta, \alpha\}. \quad (34)$$

Se escolhermos o parâmetro $\lambda = s$, a expressão (33) torna-se

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (35)$$

Uma vez que s anulou o lado direito das equações geodésicas, o denominamos *parâmetro afim*. Porém, s não é o único parâmetro que nos permite escrever as equações geodésicas nas forma (35). Na verdade, qualquer parâmetro, \bar{s} , que se relacionar com s a partir da equação \bar{s} está relacionado com s por:

$$\bar{s} = as + b, \quad (36)$$

onde a e b são constantes, também é afim. Um argumento semelhante se aplica às geodésicas do tipo espaço.

Em uma geodésica nula, aquela cujo intervalo entre quaisquer dois de seus pontos é zero, a função L se anula e, portanto, o argumento apresentado acima deixa de valer. Diante disso, vamos assumir que as equações gerais de uma geodésica nula são dadas por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (37)$$

onde $f(\lambda)$ é uma função do parâmetro da curva λ e $dx^\mu/d\lambda$ representa o vetor tangente que satisfaz

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (38)$$

Assim como antes, se as equações geodésicas não possuem um lado direito, ou seja, se $f = 0$, então o parâmetro λ é chamado afim. Qualquer outro parâmetro $\tilde{\lambda}$ será afim se estiver relacionado com λ por:

$$\tilde{\lambda} = a\lambda + b, \quad (39)$$

onde a e b são constantes .

Portanto, desde que λ seja um parâmetro afim, podemos escrever as equações geodésicas como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (40)$$

independente do tipo de intervalo.

Definindo

$$2K = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (41)$$

onde K é uma constante que assume os valores $1/2$, $-1/2$ e 0 , para geodésicas tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz, respectivamente, podemos mostrar que as equações (40) tomam a forma (d' Inverno, 1998)

$$\frac{\partial K}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0, \quad (42)$$

Embora a equação geodésica tradicional, expressa com os símbolos de Christoffel, seja útil para obter as trajetórias no espaço-tempo, trabalhar com a equação de Euler-Lagrange aplicada à função K é, em geral, mais vantajoso. Isso porque essa abordagem dispensa o cálculo das conexões, sendo particularmente útil em contextos mais gerais ou com métricas complicadas.

3.2 Movimento Geodésico

Substituindo as componentes covariantes da métrica em (41), obtemos:

$$K = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right] \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right\}. \quad (43)$$

Conseqüentemente, utilizando o tensor métrico, dado pela equação (7), para os casos em que $\alpha = 0$ e $\alpha = 3$, chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right] \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{2E} \quad (44)$$

e

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = l, \quad (45)$$

onde E e l são constantes de integração.

Finalmente, substituindo estas equações em (43), encontramos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(r) = E, \quad (46)$$

em que

$$V_{eff}(r) = \left\{ 1 - \frac{4M}{\pi r} \left[\tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\Theta}}{r^2 + \Theta} \right] \right\} \left(K + \frac{l^2}{2r^2} \right) \quad (47)$$

é o potencial efetivo.

A seguir, com base no gráfico do potencial efetivo, realizaremos uma análise qualitativa dos movimentos tipo-tempo e tipo-luz.

• Análise Qualitativa

Conforme podemos observar nas Figuras 5, 6 e 7, próximo à origem, a derivada do potencial efetivo é negativa. Isso indica que tanto uma partícula quanto a luz, ao se aproximarem dessa região, sofreriam uma repulsão. No entanto, como esse comportamento ocorre no interior da região onde a massa do buraco negro está concentrada, nem a partícula nem a luz seriam efetivamente repelidas.

A título de ilustração, ao considerarmos $\Theta = 0,001$ e $M = 0,09$, observamos que a massa se concentra quase que totalmente na região delimitada por $r \approx 0,1$, enquanto o mínimo de V_{eff} se localiza em $r \approx 0,077$. Levando isso em conta, podemos concluir, a partir da Figura 5, que, no caso em que l é muito pequeno, valores de energia $E < 1/2$ levam à absorção da partícula pelo buraco negro quando ela se move além de r_+ . Por outro lado, para $E > 1/2$, a partícula será absorvida ao se aproximar do horizonte ou escapará para o infinito, caso esteja se afastando.

Na situação em que l é muito grande, observamos, pela Figura 6, que a condição $E = V_{m\acute{a}x}$ (com $V_{m\acute{a}x}$ sendo o máximo local do potencial efetivo) leva a uma órbita circular instável, na qual qualquer perturbação fará com que a partícula seja atraída pelo buraco negro ou se afaste indefinidamente. Já no caso $E = V_{m\acute{i}n}$, correspondente ao mínimo local, a partícula permanece em uma órbita circular estável, e pequenas perturbações a fariam descrever uma trajetória aproximadamente elíptica, à semelhança do comportamento newtoniano. Além disso, se $1/2 < E < V_{m\acute{a}x}$, a partícula será apenas desviada ao se aproximar do buraco negro. No entanto, quando $E > 1/2$, a absorção se torna inevitável.

De acordo com a Figura 7, para a geodésicas nulas ($K = 0$), se E for igual ao máximo do potencial, o fóton descreverá uma órbita circular instável. Por outro lado, se E for superior ao máximo do potencial, a luz será absorvida pela distribuição de massa ou seguirá para o infinito. Porém, caso essa quantidade seja menor que o máximo, a luz será inevitavelmente absorvida.

Figura 5: Comportamento do potencial efetivo, para $K = 1/2$ (partícula), no caso em que l é muito pequeno.

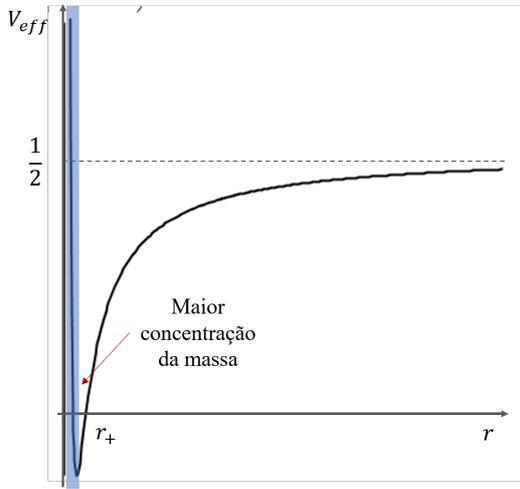
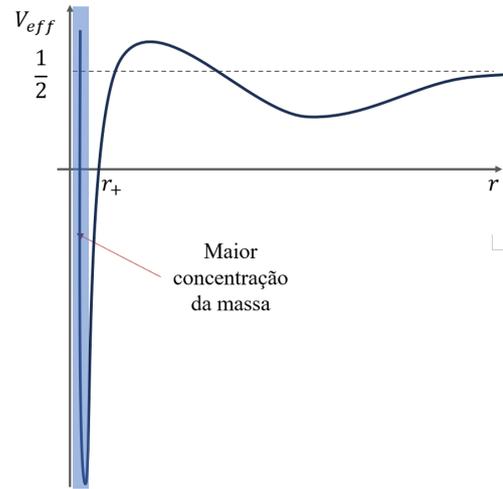
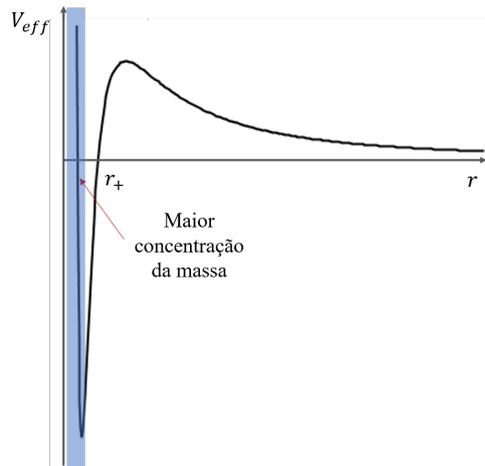


Figura 6: Comportamento do potencial efetivo, para $K = 1/2$ (partícula), no caso em que l é grande.



Fonte: Elaborada pela autor, 2025.

Figura 7: Comportamento do potencial efetivo, para $K = 0$ (luz)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

4 Simulação Computacional do Movimento Geodésico

A descrição analítica do movimento de partículas e fótons em torno de buracos negros, embora precisa e fundamental para o entendimento da dinâmica gravitacional, pode tornar-se abstrata quando se trata de visualizar as implicações da geometria do espaço-tempo. Isso se torna ainda mais evidente no caso de métricas modificadas por efeitos quânticos, como no cenário de não comutatividade. Para tornar esse comportamento acessível, desenvolvemos um simulador computacional interativo (disponível online em <https://simuladornc-ztiviz6f4yxxcib4e7drrr.streamlit.app>), capaz de ilustrar de forma

quantitativa como as trajetórias são influenciadas pelo parâmetro de granularidade quântica.

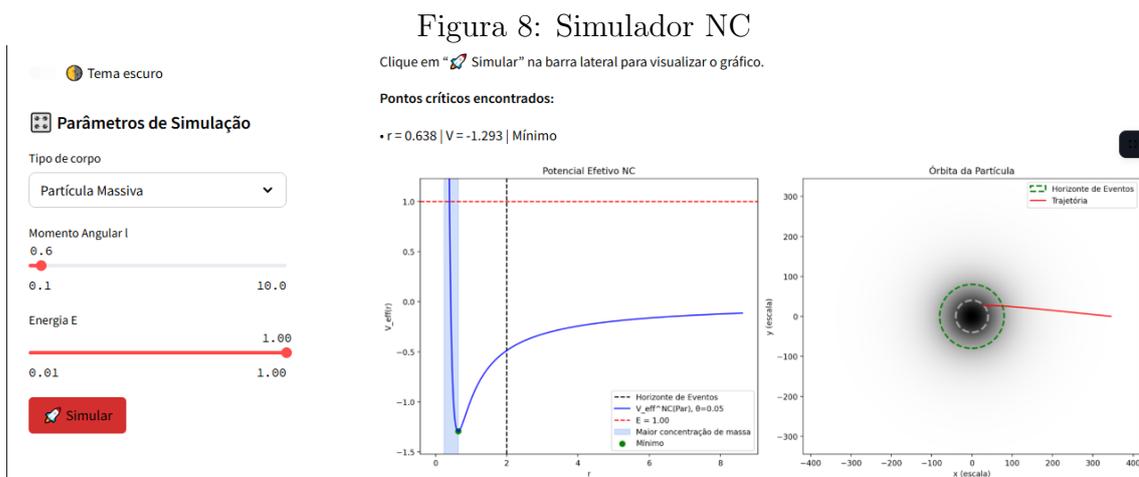
Nesta seção, utilizamos as equações obtidas na Seção 3 como o ponto de partida para desenvolver um simulador numérico que reproduz as trajetórias de partículas massivas e fótons que orbitam um buraco negro não comutativo. Inicialmente, revisitamos brevemente como as equações geodésicas derivadas anteriormente são incorporadas ao algoritmo. Em seguida, detalhamos a implementação em Python/Streamlit, a escolha dos métodos numéricos e, por fim, apresentamos os resultados para diferentes valores do momento angular l .

4.1 Plataforma e Ferramentas

Para a implementação do simulador, foi utilizada a linguagem Python em conjunto com bibliotecas científicas e de visualização amplamente adotadas. O principal critério para a escolha da linguagem e dos recursos foi a necessidade de combinar flexibilidade, desempenho e interatividade.

A biblioteca **NumPy** foi empregada para a avaliação eficiente de expressões vetorizadas como a função de massa difusa $m(r)$ e o potencial $V_{eff}(r)$, ambos formulados na Seção 3. Já o **Scipy**, particularmente o módulo **integrate**, foi utilizado para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias com os métodos Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e Dormand-Price (RK45), garantindo precisão e estabilidade numérica ao longo da simulação.

A visualização dos resultados foi realizada com a biblioteca **Matplotlib**, responsável pela geração de gráficos bidimensionais das órbitas e do perfil do potencial. Para tornar a simulação interativa e acessível, utilizou-se o **Streamlit**, que permite a criação de uma interface gráfica leve e intuitiva, onde o usuário pode manipular parâmetros físicos como energia E , momento angular l , ou parâmetros de impacto b , e observar em tempo real os efeitos dessas alterações sobre as órbitas simuladas [Ver figura 8].



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Essas ferramentas foram integradas de forma a construir uma aplicação que não apenas

reproduz numericamente os resultados teóricos, mas também os apresenta de forma clara e interativa.

4.2 Análise do Potencial Efetivo e das Órbitas

A implementação algorítmica do simulador baseia-se diretamente nas equações diferenciais deduzidas anteriormente. O sistema é descrito por um vetor de estado $[r, \dot{r}, \dot{\phi}]$, cujas componentes evoluem com o parâmetro afim λ . As expressões para \dot{r} e $\dot{\phi}$ derivam das equações geodésicas, sendo a componente radial relacionada ao potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$.

O código permite a definição, pelo usuário, de parâmetros como o tipo de partícula (massiva ou fóton), energia E , momento angular l e parâmetro de impacto b . Esses parâmetros moldam o potencial efetivo e determinam o comportamento orbital. O tipo de partícula define a natureza da geodésica, do tipo tempo ou luz, o que afeta a forma do potencial efetivo.

Para partículas massivas, o potencial efetivo costuma exibir um poço seguido de um pico centrífugo. À medida que l ou b aumentam, o mínimo torna-se mais raso e desloca-se para valores maiores de r , representando órbitas ligadas mais afastadas do centro. Para energias ligeiramente acima desse mínimo, a partícula oscila quase harmonicamente em torno de uma órbita circular estável. Com energia superior à barreira, ocorre dispersão ou captura direta.

Fótons, por outro lado, não percebem um mínimo no potencial, apenas um pico associado à “esfera de fótons”, cuja posição crítica r_{ph} e altura crescem com b . Raios com baixo impacto seguem trajetórias quase retilíneas, enquanto aqueles com b próximo de b_{crit} podem orbitar temporariamente o buraco negro antes de escapar ou serem capturados.

A energia E define o regime de movimento da partícula, indicando se ela será capturada, desviada ou permanecerá em órbita circular. O momento angular l atua como uma barreira centrífuga: quanto maior seu valor, maior a resistência à aproximação do centro. O parâmetro de impacto, dado por $b = \frac{l}{E}$, influencia a curvatura e a inclinação das trajetórias.

O parâmetro Θ regula a granularidade do espaço-tempo, suavizando a região central do buraco negro. À medida que Θ aumenta, o potencial torna-se mais suave, os pontos críticos se afastam do centro, e a geometria se desvia da solução clássica de Schwarzschild. Neste simulador, adotou-se $\Theta = 0,05$.

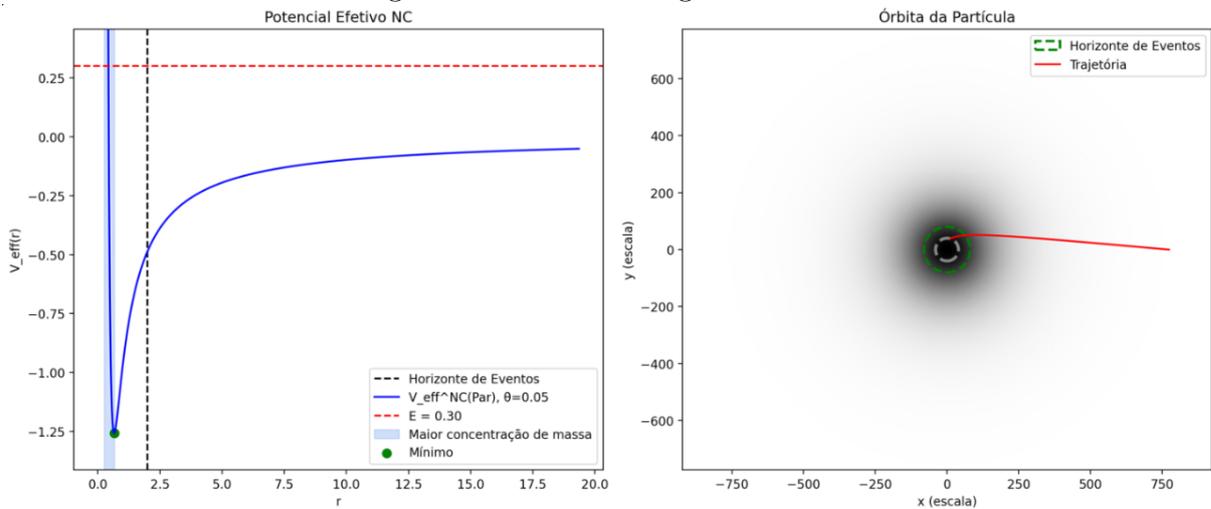
A introdução da não-comutatividade Θ suaviza o potencial nas regiões internas: o poço das partículas massivas se torna mais largo e raso, e o pico dos fótons se alarga e reduz em altura, indicando uma zona de instabilidade mais extensa, porém menos acentuada. Assim, corpos massivos percebem um poço menos profundo e mais afastado com o aumento de Θ e l , enquanto fótons enfrentam um pico deslocado e achatado com o crescimento de b e da granularidade do espaço-tempo. O próximo tópico tratará especificamente dos efeitos do momento angular l , principal responsável pelas mudanças mais significativas e visualmente perceptíveis nas órbitas simuladas.

• Diferentes Valores de Momento Angular

A seguir, investigamos como diferentes valores do momento angular l influenciam no comportamento orbital de partículas massivas no contexto da métrica de Schwarzschild não comutativa. Mantivemos fixos $\Theta = 0,05$, $E = 0,3$, variando apenas o momento angular em $l = 0, 6, 4$ e 8 . Os resultados são apresentados nas Figuras 9, 10 e 11.

O potencial efetivo para valores baixos apresenta um único mínimo profundo, e a energia ($E = 0,3$) está acima do mínimo. Como o momento angular é muito pequeno, a partícula não possui uma barreira centrífuga significativa e é rapidamente capturada, mergulhando diretamente no buraco negro, como mostrado na Figura 9. A trajetória confirma essa conclusão, com o movimento quase radial e sem deflexão.

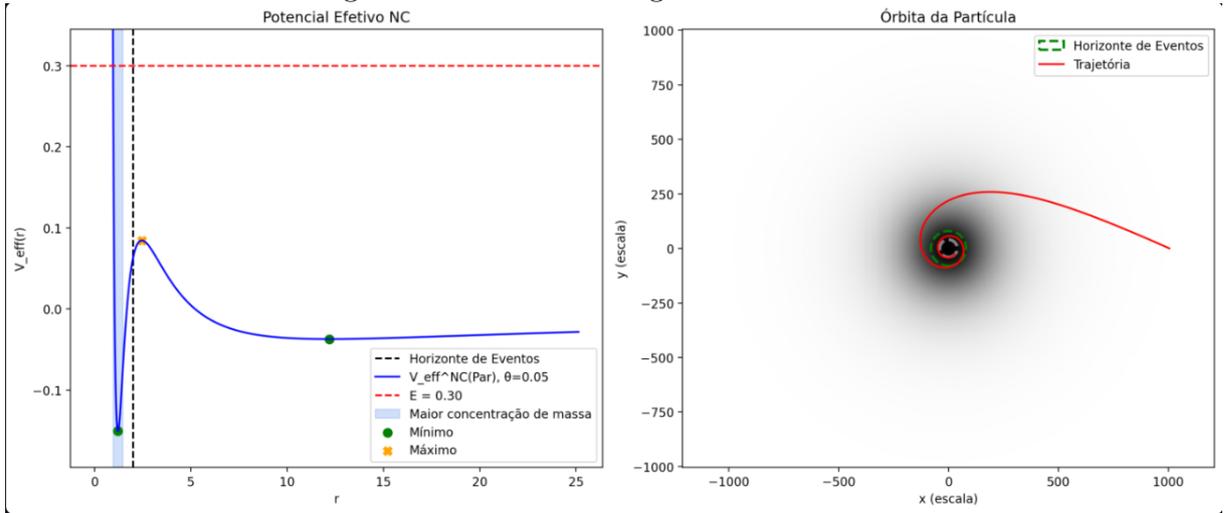
Figura 9: Momento Angular Mínimo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com um momento angular intermediário ($l = 4$), o potencial efetivo apresenta uma estrutura característica, com um mínimo e um máximo locais. O mínimo corresponde a uma órbita circular estável, enquanto o máximo indica uma órbita instável. Nesse regime, a partícula não é capturada de imediato, mas realiza uma trajetória do tipo espiralada: Ao se aproximar do buraco negro, o objeto sofre uma deflexão significativa e passa a descrever uma órbita ao seu redor da massa, como ilustrado na Figura 10.

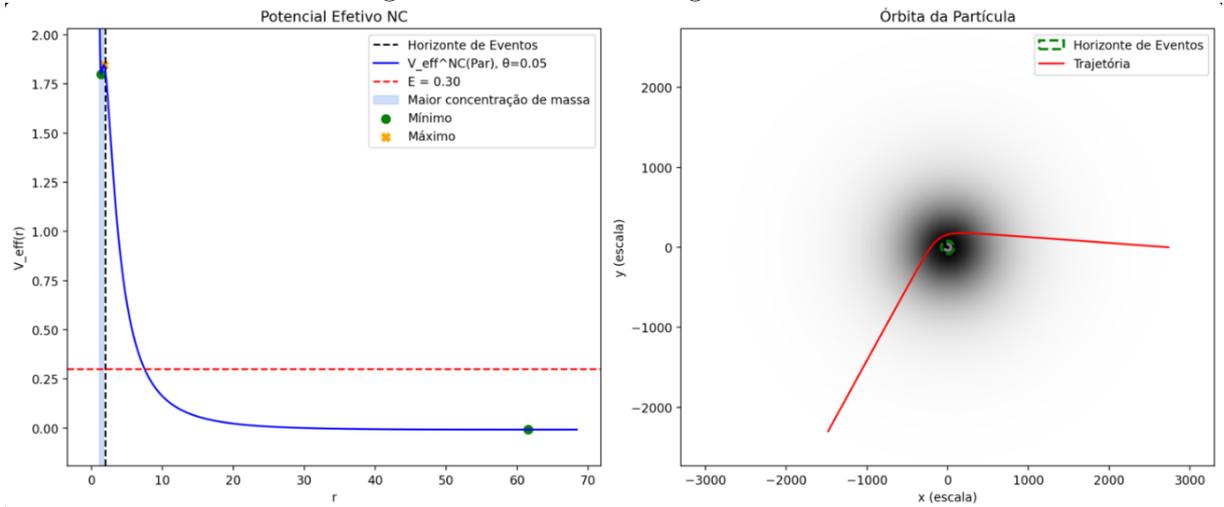
Figura 10: Momento Angular Intermediário



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Para valores elevados de l , a barreira centrífuga torna-se significativamente mais intensa, e o potencial efetivo exibe um vale profundo localizado mais distante do centro. Como a energia $E = 0,3$ está abaixo do pico do potencial, a partícula não consegue penetrar nas regiões mais internas. O gráfico da Figura 11 ilustra uma trajetória de desvio, na qual a partícula contorna a massa difusa e se afasta em direção ao infinito.

Figura 11: Momento Angular Elevado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

5 Conclusões

A construção do simulador interativo tornou possível transformar gráficos e dados numéricos em representações visuais das correções provocadas pela não comutatividade no movimento de partículas e fótons em torno de buracos negros. A ferramenta revela de forma clara os efeitos dessa estrutura modificada sobre o potencial efetivo e as trajetórias geodésicas, proporcionando uma compreensão mais concreta dos fenômenos discutidos teoricamente.

No simulador, os principais parâmetros ajustáveis são a energia E e o momento angular l . Os resultados mostram que a variação desses dois parâmetros é suficiente para explorar os comportamentos orbitais mais relevantes na métrica de Schwarzschild não comutativa. A energia determina se a partícula será capturada, desviada ou permanecerá em órbita, enquanto o momento angular atua como uma barreira centrífuga, influenciando a aproximação ao centro e a estabilidade do movimento.

A análise do papel do momento angular l mostrou-se particularmente significativa. Para valores baixos, a barreira centrífuga praticamente desaparece, e a partícula é rapidamente absorvida pelo buraco negro. Para valores intermediários, surgem órbitas instáveis e de espalhamento, com deflexões consideráveis. À medida que l aumenta, a barreira de potencial torna-se mais intensa, impedindo a aproximação da partícula ao núcleo e promovendo trajetórias de desvio em grandes distâncias.

Além disso, a interface amigável e as visualizações em tempo real não apenas facilitam a validação de hipóteses teóricas, mas também ampliam o potencial do simulador como ferramenta didática, sendo útil no ensino de conceitos avançados em relatividade geral e gravidade quântica.

Como perspectivas futuras, destacam-se possíveis aprimoramentos, como a implementação de métodos de integração adaptativos, a realização de análises estatísticas sobre múltiplas trajetórias e a disponibilização do código-fonte em repositórios públicos, fomentando colaborações acadêmicas e aplicações em contextos de ensino e pesquisa.

REFERÊNCIAS

CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. Capa dura. 650 páginas. Inglês. Wiley–Blackwell, 1982. ISBN: 0 – 471 – 86437 – 4.

CARROL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. San Francisco: University of California, 1997.

D’ INVERNO, R. **Introducing Einstein’s Relativity**. New York: Oxford University Press, 1998.

LANDAU, L. **The classical theory of fields**, Butterworth-Heinemann, 2013.

NOVELLO, M. **Cosmologia**, Livraria da física, 2010.

OLIVEIRA, Thiago Bruno Rafael de Freiras. **Teorias f(R) de Gravidade na**

Formulação de Palatini. 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

PERLMUTTER, Saul et al. **Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae.** The Astrophysical Journal, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.

REIS, Ribamar RR; SIFFERT, Beatriz B. **Supernovas do tipo Ia e a expansão do Universo.** Cadernos de Astronomia, v. 3, n. 1, p. 21-21, 2022.

RIESS, Adam G. et al. **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.** The astronomical journal, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

RINDLER, Wolfgang. **Relativity: special, general, and cosmological.** 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2006.

SOARES, D. **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas,** Universidade Federal de Minas Gerais, 2013.

VILENKIN, Alexander; SHELLARD, E. Paul S. **Cosmic strings and other topological defects.** Cambridge University Press, 1994.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, pelo amor, apoio incondicional e incentivo constante ao longo de toda a minha formação acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, expressei minha profunda gratidão pela dedicação, paciência e orientações fundamentais para a realização deste trabalho.

Estendo meus agradecimentos à Universidade Estadual da Paraíba, ao corpo docente do curso de Física e aos colegas de turma, com quem compartilhei aprendizados, desafios e conquistas.

Aos amigos que estiveram ao meu lado nos momentos difíceis, oferecendo apoio emocional, palavras de encorajamento e amizade verdadeira, meu sincero reconhecimento.

A todos, o meu mais profundo agradecimento.