UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEDERSON DE OLIVEIRA SILVA

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

CAMPINA GRANDE
2025

JEDERSON DE OLIVEIRA SILVA

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2025

S586g Silva, Jederson de Oliveira.
Uma generalização do Teorema do Valor Médio para Integrais [manuscrito] / Jederson de Oliveira Silva. - 2025.
40 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT".

1. Teorema do Valor Médio para Integrais. 2. Generalização. 3. Análise matemática. 4. Cálculo integral. I. Título

21. ed. CDD 515.8

Elaborada por Lêda Cristina Diniz Andrade - CRB - 15/1032 BC

JEDERSON DE OLIVEIRA SILVA

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 22/05/2015.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **20/06/2025 19:13:53** com chave **d9ca01064e2311f09fa51a1c3150b54b**.
- **Matheus Marques de Araújo** (***.259.704-**), em **20/06/2025 19:14:09** com chave **e376f3804e2311f0ae591a7cc27eb1f9**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **20/06/2025 19:17:19** com chave **547103c84e2411f0ba581a1c3150b54b**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 21/06/2025
Código de Autenticação: 37dfb3

Dedico este trabalho à minha mãe Lucinha e ao meu tio Biéda por sempre me lembrarem que a educação é a melhor opção para um mundo melhor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado em cada etapa dessa caminhada, concedendo força, sabedoria e serenidade para enfrentar os desafios que surgiram ao longo do percurso.

À minha mãe Lucinha e meu tio Biéda, meus maiores exemplos de amor, coragem e dedicação. Obrigado por estar sempre ao meu lado, me apoiando incondicionalmente, incentivando meus sonhos e acreditando em mim. Enfim, à minha família.

Aos meus amigos, Evaldo Luiz, Ana Carolina, Anderson Lopes e Ezequiel Ramos, pela companhia, pelo apoio emocional e pelas palavras de encorajamento nas horas em que mais precisei. Vocês foram fundamentais para que essa jornada fosse mais leve e possível.

À minha orientadora Emanuela Coelho, pela orientação segura, paciência, disponibilidade e comprometimento com meu aprendizado. Sua contribuição foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

À banca avaliadora, Profa Luciana Roze e Prof Matheus Marques pelas valiosas contribuições.

A todos vocês, o meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

Os teoremas do tipo valor médio são resultados que estabelecem algum tipo de média, de acordo com o contexto em que ele está inserido. Há diversos teoremas que são caracterizados assim, como, por exemplo, os Teoremas do Valor Médio (TVM) de Lagrange e de Cauchy, o Teorema de Flett e o Teorema do Valor Médio para Integrais. Este último é o que constitui nosso estudo. O TVM para Integrais estabelece que, para uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, existe ao menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que a integral definida da função pode ser expressa como o valor da função nesse ponto multiplicado pela medida do intervalo. Geometricamente, esse resultado garante que a área sob o gráfico de uma função contínua é igual à área de um retângulo de base $(b - a)$ e altura $f(c)$, fornecendo uma ponte entre análise matemática e interpretação geométrica. Diversas generalizações desse resultado têm sido estudadas, buscando ampliar sua aplicabilidade em contextos mais gerais. O objetivo deste trabalho é apresentar a generalização do TVM para integrais introduzida por Tong (2002). Esse resultado estabelece uma relação entre as integrais de funções f e g em subintervalos complementares e os valores pontuais das próprias funções num ponto c. Interpretando geometricamente, temos que a soma da área sob o gráfico de f em $[a, c]$ e a área sob o gráfico de g em $[c, b]$ é igual a soma das áreas de dois retângulos, um com base $[c, b]$ e altura $f(c)$ e outro com base $[a, c]$ e altura $g(c)$. Ademais, a demonstração do resultado se apoia nas propriedades da continuidade das funções envolvidas, além da aplicação do Teorema de Rolle em um argumento construtivo, que usualmente não é utilizado.

Palavras-chave: teorema do valor médio para integrais; generalização; análise matemática; cálculo integral.

ABSTRACT

Mean value theorems are results that establish some type of average, according to the context in which they are inserted. There are several theorems that are characterized in this way, such as, for example, Lagrange's and Cauchy's Mean Value Theorems (MVT), Flett's Theorem and the Mean Value Theorem for Integrals. The latter is the one that constitutes our study. The MVT for Integrals establishes that, for a continuous function in a closed interval $[a, b]$, there exists at least one point $c \in [a, b]$ such that the definite integral of the function can be expressed as the value of the function at that point multiplied by the measure of the interval. Geometrically, this result guarantees that the area under the graph of a continuous function is equal to the area of a rectangle with base $(b - a)$ and height $f(c)$, providing a bridge between mathematical analysis and geometric interpretation. Several generalizations of this result have been studied, seeking to expand its applicability in more general contexts. The objective of this paper is to present the generalization of TVM for integrals introduced by Tong (2002). This result establishes a relationship between the integrals of functions f and g in complementary subintervals and the point values of the functions themselves at a point c. Interpreted geometrically, we have that the sum of the area under the graph of f in $[a, c]$ and the area under the graph of g in $[c, b]$ is equal to the sum of the areas of two rectangles, one with base $[c, b]$ and height $f(c)$ and the other with base $[a, c]$ and height $g(c)$. In addition, the demonstration of the result is based on the continuity properties of the functions involved, in addition to the application of Rolle's Theorem in a constructive argument, which is not usually used.

Keywords: mean value theorem for integrals; generalization; mathematical analysis; integral calculus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Teorema do Valor Médio (TVM) ocupa uma posição central na Análise Matemática, sendo uma das ferramentas mais importantes para o estudo rigoroso de funções reais de variável real. Sua formulação clássica estabelece que, sob certas condições de continuidade e derivabilidade, existe pelo menos um ponto no qual a derivada de uma função é igual à taxa de variação média da função sobre um intervalo. Esse resultado possui implicações teóricas profundas, além de aplicações em diversos ramos da matemática, da física e da engenharia, fornecendo, por exemplo, base para demonstrações de unicidade de soluções de equações diferenciais, análise de comportamento de funções e estimativas de erro em aproximações numéricas.

Historicamente, o Teorema do Valor Médio tem suas origens nos trabalhos de Joseph-Louis Lagrange e Augustin-Louis Cauchy, dois dos principais nomes do desenvolvimento do cálculo diferencial no final do século XVIII e início do século XIX. A versão de Lagrange fornece uma visão mais intuitiva sobre a taxa de variação de funções, enquanto a generalização proposta por Cauchy amplia o escopo do teorema, introduzindo uma versão que considera duas funções contínuas e deriváveis. Essas formulações consolidaram o TVM como um dos fundamentos da teoria do cálculo diferencial.

Além do contexto diferencial, há também o Teorema do Valor Médio para integrais, que é uma consequência do Teorema do Valor Médio para as derivadas e do Teorema Fundamental do Cálculo, onde estabelece que, para uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, existe ao menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que a integral definida da função pode ser expressa como o valor da função nesse ponto multiplicado pela medida do intervalo. Geometricamente, esse resultado garante que a área sob o gráfico de uma função contínua é igual à área de um retângulo de base $(b - a)$ e altura $f(c)$, fornecendo uma ponte entre a matemática abstrata e uma significativa interpretação geométrica.

Contudo, em contextos mais complexos, a aplicação direta dessas formulações tradicionais pode ser limitada. Situações que envolvem funções menos regulares, intervalos irregulares ou relações mais sofisticadas entre grandezas exigem a generalização desses teoremas. Nesse cenário, generalizações do Teorema do Valor Médio tornam-se não apenas desejáveis, mas necessárias para estender sua aplicabilidade e fornecer ferramentas mais robustas à Análise Matemática.

A generalização, em matemática, refere-se ao processo de estender conceitos ou resultados clássicos para casos mais gerais, mantendo a essência das ideias originais, mas permitindo que estas se apliquem em contextos mais amplos. No caso dos teoremas do tipo valor médio, tais generalizações buscam preservar a ideia central de “valor intermediário representativo”, adaptando-a a estruturas funcionais ou integrais mais complexas.

Neste trabalho, propomos apresentar uma generalização do Teorema do Valor Médio para integrais, conforme introduzida por Tong (2002). Tal generalização amplia os resultados clássicos ao considerar hipóteses menos restritivas, mantendo, contudo, a essência do resultado original. A relevância da proposta reside não apenas em seu valor teórico, mas também em suas potenciais aplicações em modelagens matemáticas e em análises que exigem maior flexibilidade no tratamento de funções.

A estrutura deste trabalho organiza-se da seguinte forma: apresentamos uma revisão teórica dos conceitos fundamentais, abrangendo funções, derivadas, o Teorema Fundamental do Cálculo e integrais, preparando o terreno para a compreensão do resultado principal. Em seguida, expomos a formulação da generalização do Teorema do Valor Médio para integrais, proposta por Tong (2002) acompanhada de sua respectiva demonstração formal. Por fim, discutimos a interpretação geométrica do teorema.

Com este estudo, espera-se contribuir para o aprofundamento do entendimento teórico em análise matemática, bem como evidenciar o potencial de generalizações como ferramentas poderosas para a resolução de problemas em contextos aplicados.

2 UMA PEQUENA REVISÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA

Neste capítulo abordamos algumas definições e resultados que são importantes para a compreensão do resultado principal do trabalho. Tais resultados constituem uma pequena revisão de Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral, com o recorte de conceitos que servem como base sólida para a construção de toda a interpretação do teorema principal. Ademais, tentaremos apresentar as provas dos resultados enunciados sempre que possível e, quando estas se utilizarem de ferramentas que fogem ao nosso objetivo, indicaremos onde encontrá-las. Por fim, a construção deste capítulo é baseada em Lima (2004), Apostol (1967), Ávila (1999), Guidorizzi (1987), Maciel e Lima (2005), Lima (2023) e Stewart (2008).

2.1 Iniciando pelas Funções

Com o intuito de facilitar a compreensão do texto, e levando em consideração que os resultados principais a serem discutidos aqui envolvem temas relacionados às funções, fizemos uma breve explanação para relembrar noções introdutórias desse objeto matemático.

Dados dois conjuntos A, B, uma função $f : A \to B$ (lê-se "uma função de A em B") é uma relação entre dois conjuntos que associa cada elemento $x \in A$ a um elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A é chamado de domínio e B o contradomínio da função f. Para cada elemento $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se a imagem de x pela função f.

É importante se atentar que é comum aparecer apenas "função f"ao invés de "$f : A \to B$". Nesse caso, fica subentendido o conjunto A, domínio de f, como sendo o maior conjunto que a regra f faz sentido, e o conjunto B, contradomínio de f.

Além disso, jamais devemos confundir f com $f(x)$, enquanto f é a função, $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

A seguir, mostramos alguns definições de funções:

Definição 2.1. Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando são dados números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Definição 2.2. Chamamos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de função afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.3. Chamamos uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de função quadrática quando são dados números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.4. Dizemos que duas funções f e g são iguais, quando

1. f e g têm o mesmo domínio;

2. $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio de f.

Exemplo 2.1. Sejam f e g funções definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$. Temos $f = g$, pois

$$|x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gráfico de uma função

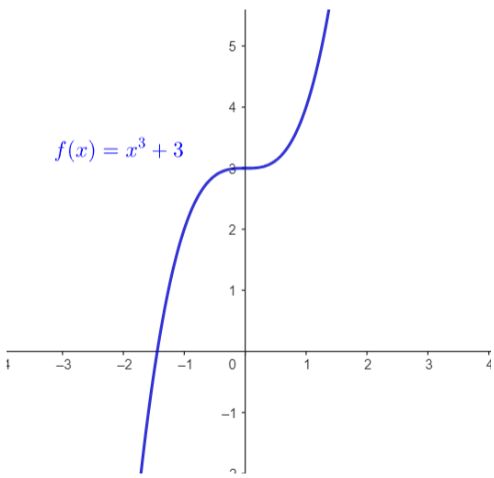
O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções possuem o mesmo gráfico se, e somente se, as funções são iguais.

Na Figura 1 abaixo, temos um exemplo do gráfico de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3$.

Figura 1 – Gráfico da função $x^3 + 3$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Limite de funções

Alguns conceitos e resultados importantes neste trabalho envolvem o conceito de limite de funções, com isso, o objetivo dessa subseção é relembrar o conteúdo para compreendermos melhor o que mostramos posteriormente. De uma maneira bem geral, o limite de uma função descreve o comportamento de uma função à medida que a variável independente se aproxima de um determinado valor. Antes de adentrar diretamente no assunto, trouxemos alguns conceitos de topologia na reta.

Definição 2.5. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, dizemos que um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de S se para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in S$, tal que,

$$0 < |x - x_0| < \epsilon.$$

Exemplo 2.2. Considerando o conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \right\},$$

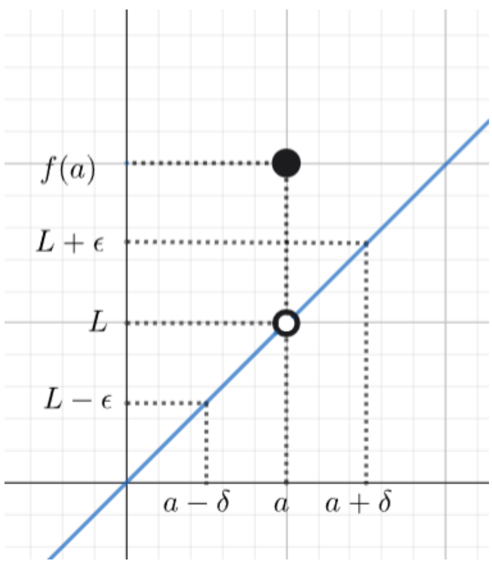
então o ponto $x_0 = 1$ é um ponto de acumulação de S.

Definição 2.6. Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de S e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f em a, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, quando para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in S \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \text{ implica em } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Na Figura 4 temos uma ilustração da representação geométrica do limite.

Figura 2 – Representação geométrica do limite



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.3. Mostre que $\lim_{x\to 2} 2x + 4 = 8$

Solução: Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$, logo, para $|x-2| < \delta$, temos

$$|f(x) - 8| = |(2x+4) - 8| = 2|x-2| < 2\delta < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x\to 2} 2x + 4 = 8$.

Exemplo 2.4. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x > 0 \\ -1, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

Solução: Suponhamos, por absurdo, que existe $L \in \mathbb{R}$, tal que $L = \lim_{x\to 0} f(x)$. Então, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1.$$

Agora, note que, se $x > 0$,

$$0 < x < \delta \Rightarrow |1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - L < 1 \Rightarrow -2 < -L < 0 \Rightarrow L > 0.$$

Por outro lado, se $x < 0$

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |-1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < -1 - L < 1 \Rightarrow 0 < -L < 2 \Rightarrow L < 0,$$

ou seja,

$$L < 0 < L$$

o que é um absurdo! Portanto, não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Sejam A um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in A'_+$, onde A'_+ representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita de A , ou seja, $a \in A'_+$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ vale $A \cap (a, a+\delta) \neq \varnothing$. Por exemplo, 0 é ponto de acumulação à direita de $[0,1]$.

Consideremos que a é um ponto de acumulação à direita do domínio da função $f : A \to \mathbb{R}$.

Diremos que o número real L é o *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a e é escrito

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in A$ e $0 < x - a < \delta$

Assim, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ é uma abreviação para a seguinte afirmação:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

De modo análogo, se define o *limite à esquerda*. Se a é um ponto de acumulação à esquerda do domínio da função $f : A \to \mathbb{R}$, dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$, quando x tende para a, é o número L, e é escrito

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

para dizer que a todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se encontrar um $\delta > 0$ tal que $x \in A, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $x \cap (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$.

A partir dessas definições, temos o seguinte resultado, cuja prova pode ser entrada em Maciel e Lima (2005), p. 124.

Teorema 2.1. *Seja* $f : (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \to \mathbb{R}$. *Então,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Proposição 2.1. *Sejam* $f, g : S \to \mathbb{R}$ *funções, com* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então*

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M$.

(iii) *Se* $g \neq 0$ *próximo de* a *e* $M \neq 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{L}{M}$.

Demonstração. Façamos o item (i). Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que, para $x \in S$

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in S$ e $0 < |x-a| < \delta$, temos

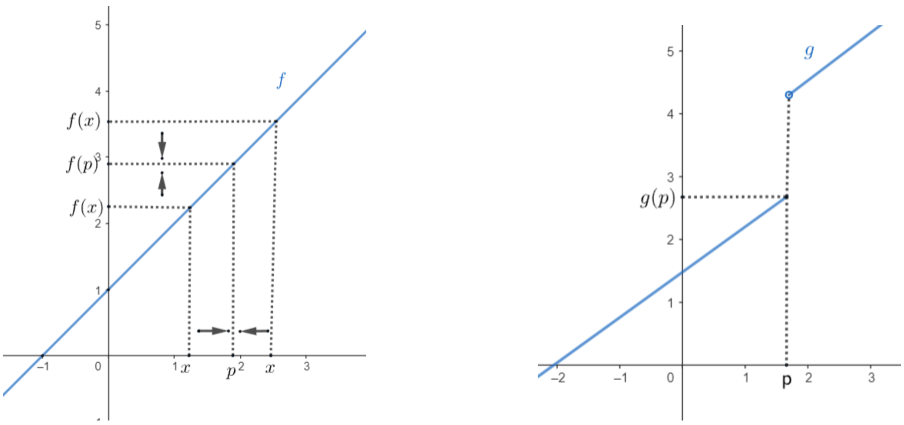
$$|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| = |(f(x) - L) \pm (g(x) - M)| \leq |(f(x) - L)| + |(g(x) - M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Continuidade de funções

Intuitivamente, uma *função contínua em um ponto p de seu domínio* é uma função em que você consegue construir o gráfico sem que ele tenha um "salto"em p.

Figura 3 – Funções contínua e descontínua



Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba na Figura 3 que o gráfico de f não apresenta nenhum "salto"em p: f é contínua em p. Note que quanto mais valores de x se aproximam de p pela esquerda ou pela direita, os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(p)$, diferentemente do gráfico da função g que apresenta um "salto", ou seja, g não é contínua em p.

Agora, que temos uma noção intuitiva do conceito de continuidade de funções, vamos avançar para sua definição formal.

Definição 2.7. Sejam $f : S \to \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de S. Dizemos que f é contínua em x_0, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in S$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Quando $f : S \to \mathbb{R}$ não é contínua em $x_0 \in S$, dizemos que é descontínua em x_0, ou que x_0 é uma descontinuidade de f.

Ou seja, uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é contínua em a, se satisfaz as seguintes condições:

1. f está definida em a;

2. existe o limite de f em a;

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se pelo menos um dos três itens acima não for verdadeiro, então f é descontínua em x_0.

Exemplo 2.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Então f é contínua em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solução: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, mostraremos que f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$. Assim, para $x \in \mathbb{R}$ e $|x - x_0| < \delta$ temos

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

Logo, f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.6. Verifique se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, \text{se } x \neq 2 \\ 3, \text{se } x = 2 \end{cases}$$

é contínua no ponto $a = 2$.

Solução: Da definição, $f(2) = 3$. Ainda,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq 3 = f(2).$$

Logo, f não é contínua em $a = 2$.

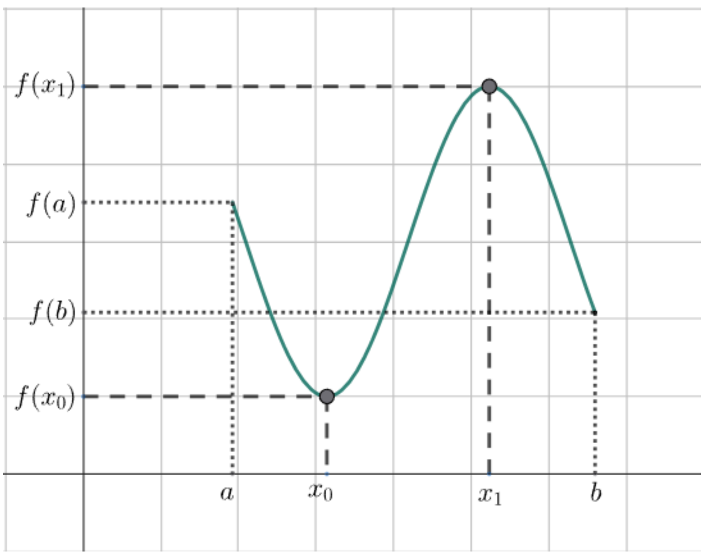
Anunciamos, a seguir, um importante Teorema, conhecido como Teorema de Weierstrass [1], cuja prova pode ser encontrada em Maciel e Lima (2005), p. 148.

Teorema 2.2 (de Weierstrass). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem $x_0, x_1 \in [a,b]$, tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1),$$

para todo $x \in [a,b]$. Em outras palavras, f assume um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[a,b]$.

Figura 4 – Teorema de Weierstrass



Fonte: Elaborada pelo autor.

[1]Karl Weierstrass(1815 - 1897) foi um matemático alemão.

2.2 Passeando pelo Cálculo Diferencial

Nesta seção relembramos o estudo das derivadas de funções reais de uma variável real. Mostramos as propriedades básicas da noção de derivada e também sua interpretação geométrica.

Definição 2.8. Sejam $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in S \cap S'$ (ou seja, a é um ponto de acumulação de S pertencente a S).

Dizemos que f é derivável no ponto a se existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.1}$$

Quando isso ocorre, o limite $f'(a)$ chama-se a derivada de f no ponto a.

Fazendo, em (2.1), $h = x - a$, ou seja, $x = a + h$, temos que $x \to a$ se, e somente se, $h \to 0$. Assim, quando o limite existe, também podemos escrever

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemplo 2.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Mostre que f é derivável em todo $a \in \mathbb{R}$.

Solução: De fato, se $a \in \mathbb{R}$, temos, para todo h, $f(a+h) = a+h$ e $f(a) = a$. Daí, obtemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$

ou seja, $f'(a)$ existe e

$$f'(a) = 1, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, não é derivável em $a = 0$.

Solução: De fato, vamos calcular os limites laterais.

Iniciando pela direita, temos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1.$$

Agora, pela esquerda, segue

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1.$$

Como os limites laterais não são iguais, o limite não existe e, consequentemente, a derivada também não, ou seja, f não é derivável em $a = 0$.

Exemplo 2.9. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ que é contínua em $\mathbb{R}$, não é derivável em $x = 0$.

Solução: De fato, vamos calcular o limite:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty$$

Portanto, o limite não existe de forma finita, e dizemos que a derivada não existe em $x = 0$. Isso indica que a curva tem uma reta tangente vertical em $x = 0$.

Interpretação Geométrica da Derivada

A interpretação geométrica da derivada está relacionada com a taxa de variação de uma função em um ponto específico. A derivada de uma função em um ponto fornece informações sobre a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto.

A reta tangente à curva em um ponto x_0 é a linha que "toca"a curva naquele ponto sem cortá-la em uma região próxima a ele. A derivada $f'(x_0)$ é precisamente o coeficiente angular (ou inclinação) dessa reta tangente. Isso significa que a reta tangente descreve a variação local da função naquele ponto específico.

Definição 2.9. Chama-se coeficiente angular de uma reta r de inclinação $\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$, o número m tal que $m = \tan \alpha$.

Observando o Gráfico representado na Figura 5, notamos que o coeficiente angular da reta que r que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ é dado por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Perceba, agora, na Figura 6, que para encontrarmos o coeficiente angular da reta tangente s é necessário fazer x tender a a e, como vimos anteriormente, basta aplicarmos o limite, e assim,

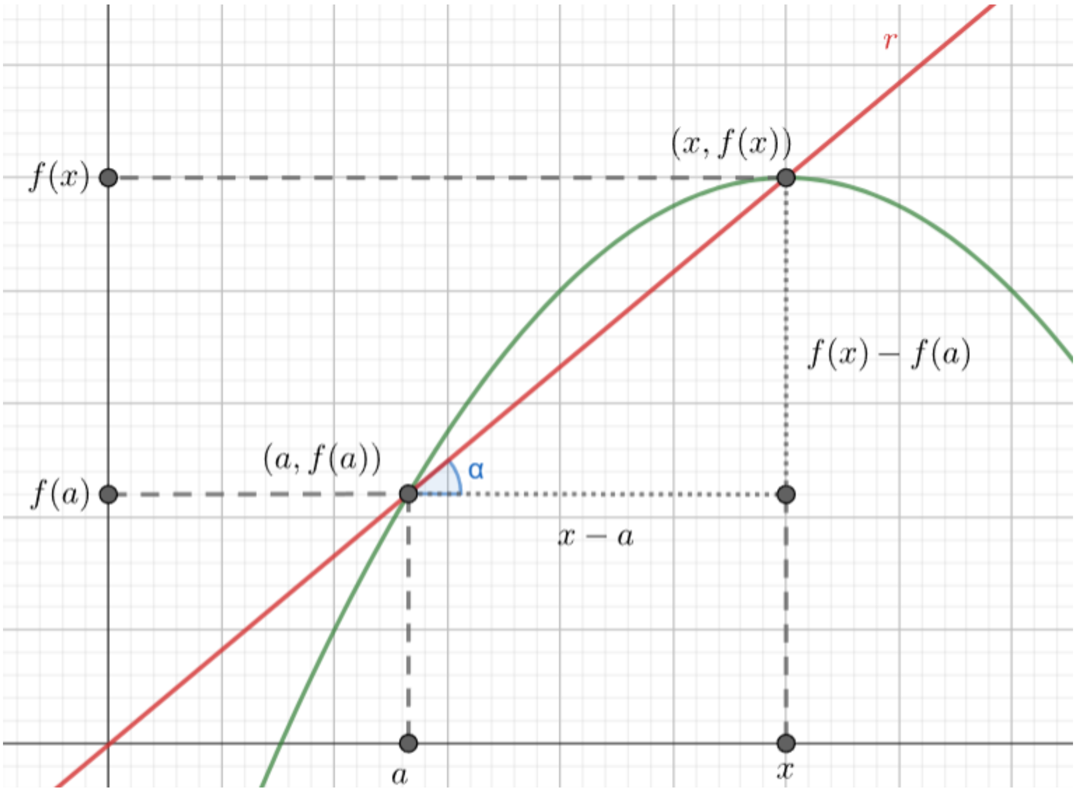
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

ou seja, geometricamente, $f'(a)$ representa o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

Algumas Propriedades da Derivada

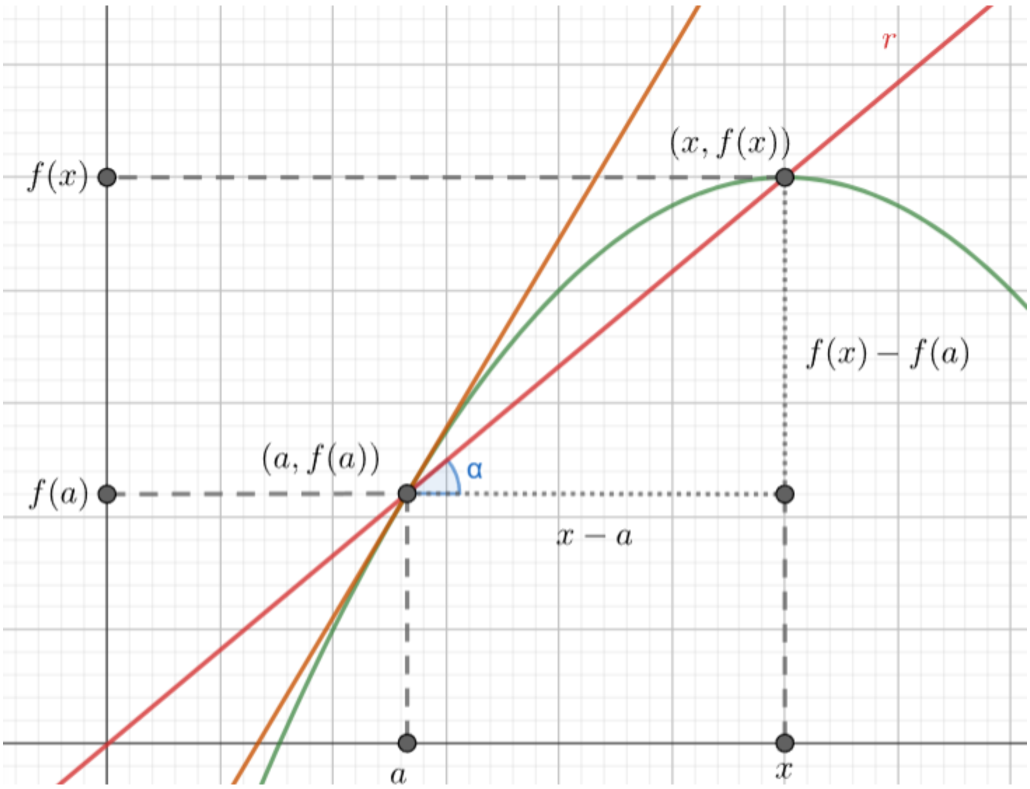
Proposição 2.2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $x_0 \in I$, onde I é um intervalo aberto. Então f é contínua em x_0.*

Figura 5 – Reta Secante



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6 – Derivada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Vamos considerar a igualdade a seguir:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \text{ com } x \neq x_0. \tag{2.2}$$

Por hipótese, f é derivável em x_0, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.3}$$

existe.

Passando o limite em (2.2), quando $x \to x_0$, obtemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0).0 = f(x_0).$$

Logo, f é contínua em x_0. □

Observação 2.1. A recíproca da proposição 2.2 não é verdadeira, isso quer dizer que uma função contínua nem sempre é derivável, como é o caso da função $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, apresentada no Exemplo 2.8.

Agora, temos um teorema que nos traz as propriedades algébricas da derivada.

Teorema 2.3. *Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I e deriváveis em $x_0 \in I$ e seja k uma constante . Então:*

(i) *$f + g$ é derivável em x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*

(ii) *kf é derivável em x_0 e $(kf)'(x_0) = k(f'(x_0))$*

(iii) *fg é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*

(iv) *Se $g \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Demonstração. (i) Segue

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

(ii) Note que

$$\begin{aligned}
(kf)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(kf)(x_0+h)-(kf)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} k\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\\
&= k\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = kf'(x_0)
\end{aligned}$$

(iii) Temos

$$\begin{aligned}
(f.g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f.g)(x_0+h)-(f.g)(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0).g(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

Agora, iremos fazer uma manipulação que seria "somar zero". Somando e subtraindo o termo $f(x_0+h)g(x_0)$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
(f.g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0+h).g(x_0)+f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right].g(x_0)+\lim_{h\to 0} f(x_0+h).\left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.\lim_{h\to 0} g(x_0)+\lim_{h\to 0} f(x_0+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&= f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).
\end{aligned}$$

(iv) Por fim, veja

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0).g(x_0+h)}{g(x_0+h).g(x_0)}\right]
\end{aligned}$$

Mais uma vez utilizando a manipulação, dessa vez com o termo "$f(x_0)g(x_0)$", obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0).g(x_0)-f(x_0).g(x_0+h)}{g(x_0+h).g(x_0)}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}.\left[\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right).g(x_0)-f(x_0).\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\right]\\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x_0)}.[f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)]\\
&= \frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.10. Seja $f(x) = 5x^4 + 2x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$ e $f'(1)$.
Solução: Inicialmente, note, do Exemplo 2.7, que a função $g(x) = x$ é derivável e $g'(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função $h(x) = x^2 = g^2(x)$ é derivável e

$$h'(x) = g(x)g'(x) + g'(x)g(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x.$$

Ainda, $x^3 = h(x)g(x)$, logo

$$(x^3)' = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot x = 3x^2.$$

De modo geral, temos

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $f'(x) = [5x^4 + 2x^3]' = (5x^4)' + (2x^3)' = 5 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)'$. Daí,

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 = 20x^3 + 6x^2.$$

Para descobrirmos $f'(1)$, basta substituirmos o valor de x, na expressão, por 1, ou seja,

$$f'(1) = 20 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 26.$$

Exemplo 2.11. Calcule $f'(x)$, com $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
Solução: Note que essa função pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{com } g(x) = x^2 + 1.$$

A derivada de uma função recíproca é dada por:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Demonstração da regra: Seja $f(x) = \frac{1}{g(x)}$. Aplicando a regra do quociente com $u(x) = 1$ e $v(x) = g(x)$, temos:

$$f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Como $u'(x) = 0$ e $u(x) = 1$, obtemos:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Agora, voltando à função original:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

Aplicando a regra:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ é:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Proposição 2.3. *(Regra da Cadeia) Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções definidas, respectivamente, nos intervalos abertos I e J com $f(I) \subset J$. Suponha que f é derivável em $x_0 \in I$ e g derivável em $f(x_0) \in J$. Então $g \circ f$ é derivável em x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

Demonstração. Suponha que $f'(x_0) \neq 0$, isto é, que $f(x) \neq f(x_0)$. Então:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

Agora, vamos utilizar mais uma manipulação, dessa vez multiplicando a expressão por "$\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$", assim

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

pois, quando $x \to x_0$, temos $f(x) \to f(x_0)$, pela continuidade de f, e assim,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

$\square$

Exemplo 2.12. Seja $f(x) = (x^2 - 5x + 7)^7$. Calcule $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Solução: Sejam $g(x) = (h(x))^7$, e $h(x) = x^2 - 5x + 7$. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 7 \cdot (x^2 - 5x + 7)^6 \cdot (2x - 5).$$

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ tem um máximo local no ponto $x_0 \in I$ se existir um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, com $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap I$ implica que $f(x) \leq f(x_0)$. Por outro lado, um ponto $x_0 \in I$ é um mínimo local se existir $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap I$ implica que $f(x) \geq f(x_0)$. Um método para determinar se um ponto representa o máximo ou mínimo local de uma função derivável é através do teorema a seguir:

Teorema 2.4. *Se uma função f é derivável em um ponto x_0, onde ela assume valor máximo ou mínimo, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Considere x_0 um ponto de máximo, então para $|h|$ arbitrariamente pequeno, temos $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, logo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \text{para } h > 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \text{para } h < 0.$$

Isso nos diz que o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$, ou seja, $f'(x_0) = 0$. De maneira análoga, se prova quando x_0 é um ponto de mínimo. $\square$

O próximo Teorema, conhecido como Teorema de Rolle[2] é uma das principais ferramentas para a Generalização do Teorema do Valor Médio para Integrais que apresentamos.

Teorema 2.5 (de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$. Então, existe um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$*

Demonstração. Se $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a, b)$, como $f(a) = f(b)$, então f é constante em $[a, b]$ e, portanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Se a função f não é constante, por ser continua em um intervalo que é limitado e fechado, terá de assumir um valor máximo e um mínimo, pelo Teorema de Weierstrass. Como supomos que f não é constante em (a, b) e por hipótese $f(a) = f(b)$, então pelo menos um dos valores de máximo ou de mínimo de f pertence a (a, b). Seja x_0 tal ponto. Pelo Teorema **2.4** , temos $f'(x_0) = 0$.

$\square$

[2]Michel Rolle (1652 - 1719) matemático francês.

Teorema 2.6 (do Valor Médio)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função que é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Para a prova, é suficiente considerar o Teorema de Rolle (Teorema **2.5**) e aplicá-lo à função

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Desse modo, $g(a) = g(b) = 0$. Então, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0) = 0$, ou seja, temos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

□

A grande importância do Teorema do Valor Médio reside no fato de ele nos possibilitar ob ter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada. Com isso, trouxemos um exemplo que mostra esse princípio.

Exemplo 2.13. Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Solução: Como f é derivável, logo é contínua em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0,2]$. Desse modo, existe um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

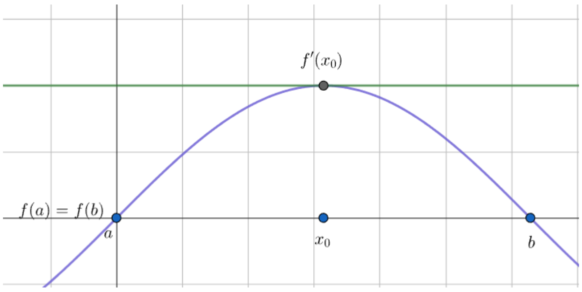
Como $f'(x) \leqslant 5$ para todo x, temos que $2f'(c) \leqslant 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

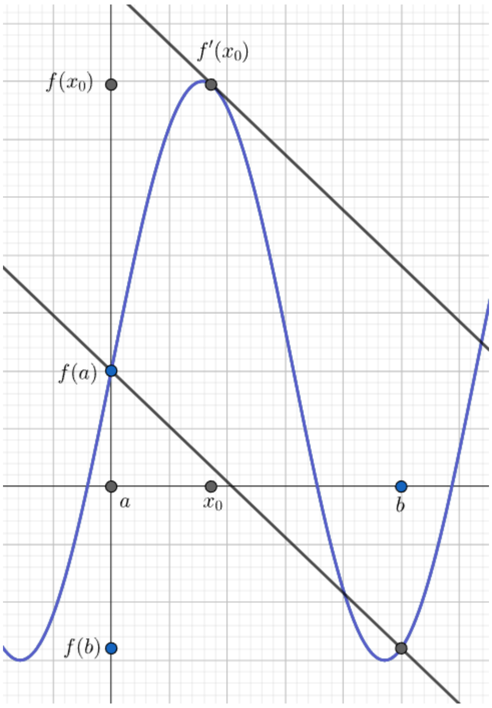
A interpretação geométrica dos teoremas 2.5 e 2.6 encontram-se nas Figuras 7 e 8, respectivamente.

Figura 7 – Teorema de Rolle



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Teorema do valor médio



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3 Finalizando com o Cálculo Integral

Nesta seção começamos a falar sobre as integrais de funções reais de uma variável real. Iniciamos com uma abordagem histórica e logo após introduzimos a integral de Riemann.[3]

Um Comentário Histórico

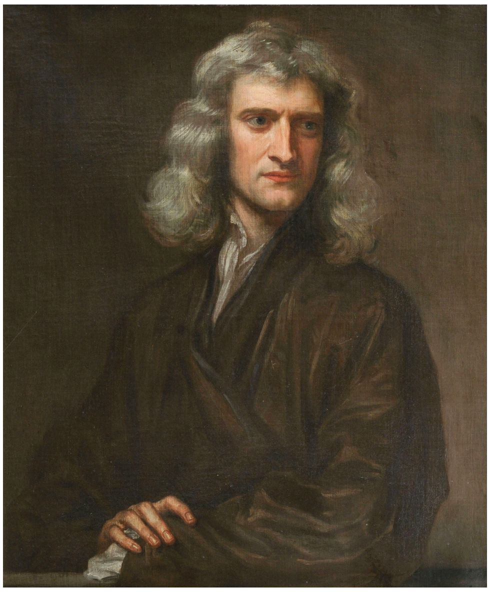
Depois séculos de brilhantes tentativas, o método geral para calcular a área de figuras curvas foi obtido no século XVII, esse método é chamado de integração. Ao contrário do que se pensa, a integração surge bem antes da diferenciação. Como nos cursos de cálculo se costuma ver primeiro derivadas, dá-se a pensar que ela surgiu primeiro.

Para chegarmos nessa notação desenvolvida que temos hoje, foi preciso que vários

[3]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão.

pesquisadores ao longo dos séculos contribuíssem no desenvolvimento do cálculo, contudo, dois pesquisadores são considerados essenciais nesse desenvolvimento, sendo eles: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz ou somente Leibniz, como é conhecido.

Figura 9 – Newton e Leibniz



(a) Isaac Newton - Fonte: National Portrait Gallery, London (s.d)

(b) Leibniz - Fonte: USEUM / Herzog Anton Ulrich Museum (s.d)

Segundo Eves (2008), o desenvolvimento do Cálculo teve um grande progresso científico durante o século XVII, com os principais contributos de Isaac Newton e Leibniz. Newton veio ao mundo no dia 25 de dezembro de 1642, em uma área rural da Inglaterra, perto de Cambridge. Sua infância foi repleta de dificuldades, pois nasceu prematuramente e perdeu o pai antes de sair do ventre materno. Ao longo de sua vida, enfrentou desafios enquanto era criado pela avó. Seus pais eram proprietários de terras e rebanhos, o que possibilitava uma certa influência, no entanto, mesmo assim, enfrentou uma existência difícil e tumultuada. Newton é famoso não apenas por sua ligação com o Cálculo, mas também por suas inovações na Física. Ele é amplamente reconhecido como físico, matemático, teólogo, astrólogo e outras designações.

Leibniz chegou ao mundo em 1 de junho de 1646, em Leipzig, na Alemanha. Ao contrário de Newton, que se destacou mais tarde, Leibniz já se destacava nos seus primeiros anos escolares. Com apenas quinze anos, ele se matriculou na universidade, e com 17 anos já tinha obtido seu diploma de bacharel em teologia. No início do século XVII, Leibniz e Newton envolveram-se em uma rivalidade acadêmica, cada um reivindicando ter sido o primeiro a desenvolver o Cálculo. Isso continuou por uma década e se estendeu até depois de suas mortes, com seus alunos também tomando partido, resultando em muitas disputas que intrigam historiadores da matemática. Oficialmente, ambos, Leibniz e Newton, são creditados como os criadores do Cálculo; o que é notável é que ambos chegaram a conclusões semelhantes, mesmo estando em países distintos.

Entretanto, Newton alcançou sua descoberta dez anos antes que Leibniz, o que levou muitos a identificá-lo como o pai do Cálculo, sugerindo que Leibniz teria o copiado. Essa controvérsia é conhecida como A Guerra do Cálculo. Apesar de Leibniz ter falecido em 1716, Newton continuou suas críticas, afirmando que era o único responsável pelo surgimento do Cálculo e que Leibniz havia sido mero plagiador. Muitos historiadores consideram essa disputa um desperdício de tempo, pois se ambos os matemáticos tiverem colaborado, poderiam ter produzido ainda mais avanço.

O bom da matemática é que ela nunca é alterada e sim acrescentada, e o cálculo já passou por várias mudanças até chegar nos dias atuais, apesar de Newton ter uma iniciação antes de Leibniz, boa parte das notações que temos hoje foram construídas por Leibniz que trazia uma abordagem mais prática e que facilitava o entendimento.

Entendido brevemente como surgiu essa parte do Cálculo Diferencial e Integral, vamos prosseguir com a apresentação do conceito de Integral de Riemann.

A Integral de Riemann

Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Uma partição P de $[a,b]$ divide $[a,b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, .., n$.

A amplitude do intervalo $[x_{i-}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Desse modo,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, ...$$

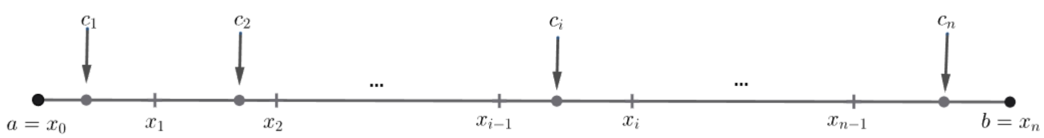
Os números $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ não precisam ser iguais e o maior deles chamamos de amplitude da partição P, indicando por máx Δx_i.

Uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ de $[a,b]$ será indicada por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Para cada índice $i (i = 1, 2, 3, .., n)$ seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente.

Figura 10 – Partição



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, o número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$$

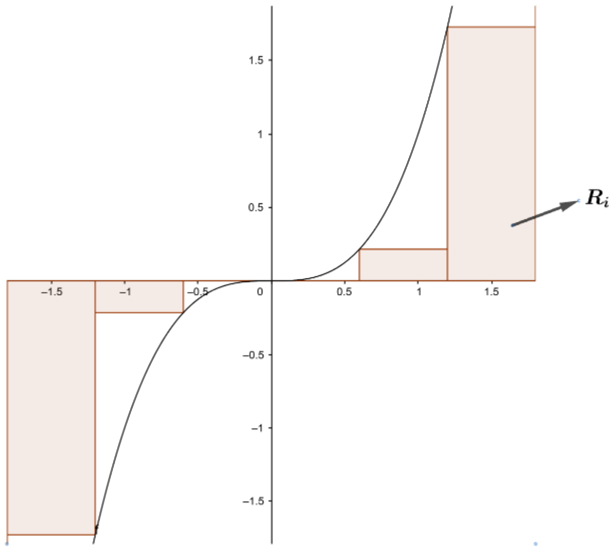
chama-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Geometricamente, podemos interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

como a diferença entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x.

Figura 11 – Soma de Riemann



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definimos agora a integral de Riemann. Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando máx $\Delta x_i \to 0$, escrevemos

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ dependente de ϵ, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$.

Tal número L, que é único quando existe, denomina-se integral de Riemann de f em

$[a, b]$ e indica-se por $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$. Daí, por definição,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Se $\int_a^b f(x)\ dx$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$.

Teorema 2.7. *Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então*

(i) *$f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$.*

(ii) *kf é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$.*

(iii) *Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.*

(iv) *Se $c \in (a, b)$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

(v) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

Demonstração. (i) Para toda partição P de $[a, b]$ e qualquer que seja a escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i - \left[\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\right]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n}[g(c_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)\ dx\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}[g(c_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)\ dx\right|.$$

Da integrabilidade de f e g segue que dado $\epsilon > 0$,existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[g(c_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)\ dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para uma partição que satisfaz $\Delta x_i < \delta$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i - \left[\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\right]\right| < \epsilon$$

ou seja $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

(ii) Para toda partição P de $[a,b]$ e qualquer que seja a escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$

$$\left|\sum_{i=1}^n [kf(c_i)]\Delta x_i - k\int_a^b f(x)\ dx\right| = \left|k\sum_{i=1}^n [f(c_i)]\Delta x_i - k\int_a^b f(x)\ dx\right| =$$

$$= \left|k\left[\sum_{i=1}^n [f(c_i)]\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right]\right| = |k|\left|\sum_{i=1}^n [f(c_i)]\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right|$$

Da integrabilidade de f e g segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $\Delta x_i < \delta$,,

$$\left|\sum_{i=1}^n [f(c_i)]\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

Logo,

$$|k|\left|\sum_{i=1}^n [f(c_i)]\Delta x_i - \int_a^b f(x)\ dx\right| < |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$$

ou seja kf é integrável e

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

(iii) Como $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, para toda partição P de $[a,b]$ e qualquer que seja a escolha dos c_i

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \geq 0.$$

Se tivéssemos $\int_a^b f(x)\ dx < 0$, tomando $\epsilon > 0$ tal que $\int_a^b f(x)\ dx + \epsilon < 0$, existiria um $\delta > 0$ tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx - \epsilon < \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i < \int_a^b f(x)\ dx + \epsilon$$

para toda partição P de $[a,b]$ com máx $\Delta x_i < \delta$. Assim, para alguma partição P teríamos

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i < 0.$$

que é uma contradição.

(iv) Para toda partição P de $[a,b]$, com $c \in P$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \left[\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\right]\right| \leq$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)\ dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)\ dx\right|.$$

Como, por hipótese, f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda partição P de $[a,b]$, com $c \in P$, e máx $\Delta x_i < \delta$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(c_i)\Delta x_i - \int_a^c f(x)\ dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - \int_c^b f(x)\ dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Com isso,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - \left[\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\right]\right| < \epsilon.$$

Segue da integrabilidade de f em $[a,b]$ que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$

□

Como exercício, sugere-se ao leitor que realize a demonstração dos itens **(v)**e **(vi)** utilizando diretamente a definição de integral de Riemann, explorando as propriedades das somas de Riemann e partições do intervalo.

Teorema do Valor Médio para Integrais

Esse teorema diz que existe um ponto c no intervalo onde o valor da função $f(c)$ é igual ao valor médio da função nesse intervalo, considerando a integral como média ponderada. Intuitivamente, a função pode subir e descer, mas sempre haverá um ponto onde o valor da função representa bem a média do comportamento dela no intervalo.

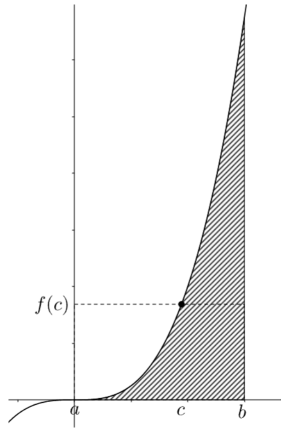
Geralmente o teorema do valor médio para integrais tem uma demonstração clássica que segue uma linha lógica bem comum no cálculo, combinando teoremas básicos de análise. Contudo, vamos demonstrá-lo utilizando a generalização do teorema do valor médio para integrais, por isso, vamos apenas enunciá-lo aqui, uma vez que o utilizamos para provar outro importante Teorema que é o Teorema Fundamental de Cálculo.

Teorema 2.8. *Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)$$

A interpretação geométrica do TVM para Integrais pode ser observada na Figura 12.

Figura 12 – TVM para integrais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo é um dos resultados mais importantes e elegantes da matemática. Ele estabelece uma conexão profunda entre dois conceitos centrais do cálculo: a derivada, que descreve a taxa de variação de uma função, e a integração, que mede a área sob uma curva.

Esse teorema não apenas simplifica o cálculo de áreas e soluções de problemas físicos, mas também fornece a base teórica para grande parte da matemática aplicada e das ciências exatas.

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I)**.** *Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e $x \in [a,b]$, definindo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt,$$

então F é derivável em (a,b) e

$$F'(x) = f(x).$$

Demonstração. Precisamos provar que, para todo $x \in [a,b]$,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Temos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais existe c entre x e $x+h$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c)h.$$

Assim,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c)$$

Daí, pela continuidade de f em $[a,b]$ e observando que c tende a x quando h tende a zero, obtemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

□

Chamamos uma função g de primitiva de uma função f em (a,b), quando $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Assim, o Teorema 2.9 garante que toda função contínua em um intervalo admite, neste intervalo, uma primitiva e, além disso, exibe-nos, ainda, uma primitiva.

Teorema 2.10 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte II)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$ e F é uma primitiva de f, ou seja, $F'(x) = f(x)$, então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Temos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue do Teorema 2.6 que, para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, temos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i)\Delta x_i,$$

ou seja,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i.$$

Se, para cada partição P de $[a,b]$, os $\bar{c}_i$ forem escolhidos como a equação acima, teremos

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

□

Encerramos este capítulo com uma análise do Teorema do Valor Médio para integrais, onde estabelece que, para uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, existe ao menos um ponto $c \in [a,b]$ tal que a integral definida da função pode ser expressa como o valor da função nesse ponto multiplicado pela medida do intervalo. Esse resultado clássico não apenas possui forte apelo geométrico, mas também fundamenta aplicações em diversas áreas.

No entanto, assim como ocorre em outras áreas da Análise, é natural questionar se tal teorema pode ser ampliado: seria possível estender sua validade a contextos mais gerais.

É essa busca por uma formulação mais abrangente que nos motiva no próximo capítulo, onde apresentaremos uma generalização do Teorema do Valor Médio para integrais, proposta por TONG, 2002 Demonstraremos seu enunciado e discutiremos as implicações e possibilidades abertas por essa extensão.

3 UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Neste Capítulo apresentamos uma generalização do Teorema do Valor Médio para Integrais, como resultado principal desde trabalho. A generalização aqui apresentada foi introduzida por Tong (2002). Após a apresentação do resultado, apresentamos a prova do Teorema do Valor Médio para Integrais como consequência do Teorema apresentado.

Teorema 3.1 (Generalização do TVM para Integrais). *Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$, então existe um valor c em (a, b) tal que*

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt = f(c)(b-c) + g(c)(c-a).$$

Demonstração. Vamos considerar a função h definida no intervalo $[a, b]$, tal que

$$h(x) = (x-b)\int_a^x f(t)dt + (x-a)\int_x^b g(t)dt.$$

Como f e g são contínuas em $[a, b]$, conforme o enunciado do teorema, a função h é contínua em $[a, b]$, pois é formada de produtos de polinômios e funções contínuas, e diferenciável em (a, b). Além disso, note que

$$h(a) = (a-b)\underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{0} + \underbrace{(a-a)}_{0}\int_a^b g(t)dt = 0$$

e

$$h(b) = \underbrace{(b-b)}_{0}\int_a^b f(t)dt + (b-a)\underbrace{\int_b^b g(t)dt}_{0} = 0$$

Como $h(a) = 0$ e $h(b) = 0$, pelo Teorema de Rolle, obtemos que existe um valor c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$.

Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I (Teorema 2.9), temos

$$h'(x) = (x-b)f(x) + \int_a^x f(t)dt - (x-a)g(x) + \int_x^b g(t)dt$$

e, como $h'(c) = 0$, temos

$$0 = h'(c) = (c-b)f(c) + \int_a^c f(t)dt - (c-a)g(c) + \int_c^b g(t)dt.$$

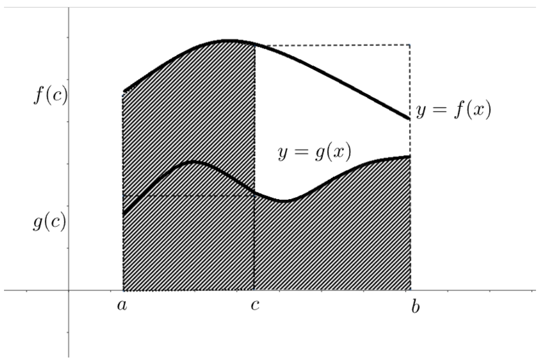
Isolando as integrais, obtemos

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt = f(c)(b-c) + g(c)(c-a).$$

como queríamos. □

Geometricamente, o Teorema 3.1 nos diz que a soma da área sob o gráfico de f em $[a,c]$ e a área sob o gráfico de g em $[c,b]$ é igual a soma das áreas de dois retângulos, um com base $[c,b]$ e altura $f(c)$ e outro com base $[a,c]$ e altura $g(c)$, como ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Generalização do TVM para integrais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mencionado anteriormente na seção 2.3, vamos demonstrar o TVM para integrais utilizando a sua generalização.

Corolário 3.1.1 (Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$, então existe um valor c em (a,b) tal que*

$$\int_a^b f(t)\ dt = f(c)(b-a).$$

Demonstração. Fazendo $g = f$, no Teorema 3.1, temos

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = f(c)(b-c) + f(c)(c-a) = f(c)(b-a).$$

□

Ainda, obtemos mais um resultado:

Corolário 3.1.2. *Se f é contínua em $[a,b]$, então existe um valor c em (a,b) tal que*

$$\int_a^c f(t)\ dt = f(c)(b-c).$$

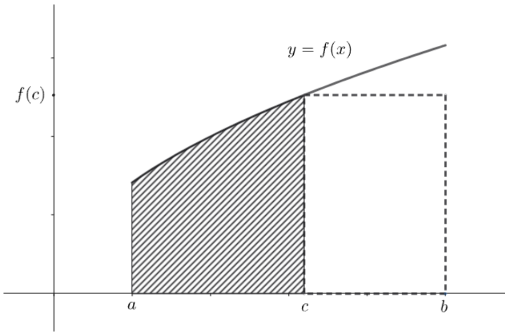
Demonstração. Fazendo $g = 0$, no Teorema 3.1, obtemos

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(b - c).$$

□

A interpretação geométrica do Corolário 3.1.2 é que existe um valor c no intervalo (a, b) tal que a área sob o gráfico de f no subintervalo (a, c) é igual a área do retângulo com altura $f(c)$ em (c, b).

Figura 13 – Corolário 3.1.2



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como foco a apresentação e análise de uma generalização do Teorema do Valor Médio para integrais, conforme proposta por Tong (2002). Para isso, foi necessário retomar conceitos fundamentais do cálculo, como funções, derivadas, integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo, permitindo construir uma base sólida para a compreensão do resultado principal.

A formulação proposta por Tong permite interpretar o comportamento médio de funções contínuas sob novas perspectivas, preservando o caráter intuitivo do resultado clássico, mas adaptando-o a contextos mais gerais. Essa abordagem evidencia como a matemática se desenvolve por meio de extensões naturais de ideias fundamentais, abrindo caminhos para novas aplicações e aprofundamentos teóricos.

Estudos como este são essenciais para estimular a reflexão crítica sobre os fundamentos e as possibilidades de generalização de resultados amplamente utilizados. Em muitos contextos acadêmicos, observa-se o uso rotineiro de fórmulas e teoremas sem o devido entendimento de suas origens ou limitações. Assim, a investigação proposta contribui para preencher essa lacuna, reforçando a importância da fundamentação teórica no ensino e na pesquisa em matemática.

Como perspectivas futuras, sugerem-se investigações sobre a aplicação da generalização a funções com descontinuidades controladas, integrais de linha e de superfície, ou ainda em espaços métricos e topológicos mais abstratos. Além disso, o potencial de aplicação em áreas como física matemática, estatística, economia e engenharia é promissor, especialmente em situações que envolvem médias generalizadas de grandezas contínuas — como energia, custo ou densidade.

Concluímos, portanto, que a generalização do Teorema do Valor Médio para integrais não apenas enriquece o entendimento conceitual da área, mas também se apresenta como uma ferramenta valiosa para futuras aplicações em problemas que exigem maior abrangência analítica.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1967. ISBN 9780471000051.

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 1999.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 1 / Hamilton Luiz Guidorizzi*. 2ª edição. ed. Rio de Janeiro; São Paulo: LTC, 1987.

LIMA, E. L. *Análise real*. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 2.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. ISBN 978-85-8337-194-6.

MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. *Introdução à Análise Real*. Campina Grande: Eduepb, 2005.

National Portrait Gallery, London. *Sir Isaac Newton*. s.d. Página na internet. Óleo sobre tela por Sir Godfrey Kneller, Bt, 1702. Acesso em 20 jun. 2025. Disponível em: ⟨https://www.npg.org.uk/collections/search/portrait/mw04660/Sir-Isaac-Newton⟩.

STEWART, J. *Cálculo, Volume 1*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. Tradução da 7ª edição norte-americana.

TONG, J. A generalization of the mean value theorem for integrals. *The College Mathematics Journal*, Mathematical Association of America, v. 33, n. 5, p. 408–409, 2002. ISSN 07468342, 19311346. Disponível em: ⟨http://www.jstor.org/stable/1559018⟩.

USEUM / Herzog Anton Ulrich Museum. *Portrait of Gottfried Wilhelm Leibniz*. s.d. Página na internet. Óleo sobre tela por Christoph Bernhard Francke, ca.1695. Acesso em 20 jun. 2025. Disponível em: ⟨https://www.useum.org/artwork/Portrait-of-Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Christoph-Bernhard-Francke-1695⟩.