UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EVALDO LUIZ DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE LAX-MILGRAM COM ÊNFASE EM ALGUNS MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

CAMPINA GRANDE
2025

EVALDO LUIZ DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE LAX-MILGRAM COM ÊNFASE EM ALGUNS MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

2025

S237e Santos, Evaldo Luiz dos.

Um estudo sobre o teorema de Lax-Milgram com ênfase em alguns métodos de demonstração [manuscrito] / Evaldo Luiz dos Santos. - 2025.

45 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática - CCT".

1. Espaços de Hilbert. 2. Espaços de Banach. 3. Funcionais lineares. 4. Teorema de Lax-Milgram. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

EVALDO LUIZ DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE LAX-MILGRAM COM ÊNFASE EM ALGUNS MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 26/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **30/06/2025 17:37:56** com chave **1abc272c55f211f08f3a06adb0a3afce**.
- **José Luando de Brito Santos** (***.668.714-**), em **30/06/2025 22:22:49** com chave **e6c62062561911f0a36206adb0a3afce**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **30/06/2025 17:08:14** com chave **f46fadae55ed11f0a61d06adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 30/06/2025
Código de Autenticação: eebf38

À MARIA JOSÉ E OSVALDO LUIZ. SEM VOCÊS NADA DISSO SERIA POSSÍVEL.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus Pai, Filho e Espirito Santo, que desde o começo esteve presente comigo. Toda honra e toda glória a Jesus, meu pai.

Aos meus pais, Maria José Emiliano e Osvaldo Luiz, que desde o começo não me deixou desistir. Em cada conta matemática, em cada exercício respondido, eu carregava comigo o desejo de ser o pioneiro da família à ter um diploma. Graças a vocês, que sempre me encorajaram e me fortaleceram nos momentos difíceis desse curso, dedico este trabalho de conclusão.

À minha irmã, Mayra Emiliano, e minha sobrinha, Nayara Mylena, obrigado por acreditarem em mim.

Aos meus colegas que começaram comigo, carrego cada um de vocês no meu coração. Em especial gostaria de dedicar esse trabalho aos meus queridos amigos: Jederson Oliveira, Anderson Lopes, Ezequiel Ramos e Ana Carolina. Vocês tornaram essa caminhada mais leve e com certeza esse trabalho carrega consigo vitórias que nós cinco conquistamos juntos.

De maneira especial gostaria de lembrar e agradecer a todos que de alguma forma me ajudaram a ser, hoje, uma pessoa melhor dentro da UEPB.

À professora Emanuela Coelho, examinadora deste trabalho, colega e excelente profissional, por me confiar a função de monitoria na disciplina *Variáveis Complexas*, onde juntos compartilhamos experiências marcantes na jornada estudantil.

Ao Professor José Luando, examinador deste trabalho, colega e excelente profissional que também confiou em mim em exercer a função de monitoria na disciplina *Vetores e Geometria analítica*, que despertou em mim o desejo de seguir a área educacional.

Ao professor Maxwell Aires por exercer um papel de colega e amigo, além de me orientar em diversos trabalhos, confiando em mim levar seu nome em diversos trabalhos apresentados (totalizados em 7).

À professora, orientadora, Luciana Roze, por ser um exemplo de profissional e amiga. Obrigado por aceitar o convite de me orientar em algo totalmente fora da zona de conforto. Sua contribuição na minha trajetoria está muito além do que eu poderia expressar. Seu cuidado na orientação, mas rigorosidade no ensinamento, me fez apreciar ainda mais o trabalho do "ser professor".

E aos meus familiares - meus tios e avôs - pelo apoio em toda essa trjetoria. Cada um foi marcante em um momento. Obrigado por tudo. Dedico, por fim, esse trabalho a minha avô, Maria Luzinete, por acreditar no menino sonhador de 10 anos que sonhava ser matemático. Eu consegui, vovô. Espero que esteja feliz por mim tanto quanto estou.

"A matemática é a linguagem mais simples de uma vida complexa. Sem ela, a própria vida perderia o sentido."
(Evaldo Luiz)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o Teorema de Lax–Milgram, com ênfase em sua formulação clássica. Inicialmente, apresenta-se um contexto histórico e, em seguida, revisa-se a base teórica necessária, abordando conceitos fundamentais de Análise Funcional, com foco em espaços completos, particularmente os espaços de Banach e de Hilbert, funcionais lineares contínuos, formas bilineares e operadores lineares. O objetivo central é compreender as condições que asseguram a existência e a unicidade de soluções de equações funcionais associadas a formas bilineares contínuas, conforme estabelecido pelo teorema. O método adotado baseia-se na exposição teórica e na análise de três abordagens distintas para a demonstração do resultado principal: a clássica, utilizando o Teorema de Riesz–Fréchet; uma baseada no Teorema de Hahn–Banach; e uma alternativa fundamentada no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Como resultado, evidencia-se a flexibilidade do teorema, sua aplicabilidade em diferentes contextos matemáticos e sua importância em áreas como teoria das equações diferenciais parciais, métodos variacionais e análise numérica.

Palavras-chave: espaços de Hilbert; espaços de Banach; funcionais lineares; Teorema de Lax–Milgram.

ABSTRACT

This work presents a study of the Lax–Milgram Theorem, with an emphasis on its classical formulation. It begins with a brief historical overview, followed by a review of the necessary theoretical background, covering fundamental concepts of Functional Analysis, with a focus on complete spaces, particularly Banach and Hilbert spaces, well as continuous linear functionals, bilinear forms, and linear operators. The main objective is to understand the conditions that ensure the existence and uniqueness of solutions to functional equations associated with continuous bilinear forms, as established by the theorem. The adopted methodology is based on theoretical exposition and the analysis of three distinct approaches to proving the main result: the classical one, using the Riesz–Fréchet Theorem; one based on the Hahn–Banach Theorem; and an alternative approach grounded in the Banach Fixed Point Theorem. As a result, the theorem's flexibility, its applicability in various mathematical contexts, and its importance in fields such as the theory of partial differential equations, variational methods, and numerical analysis.

Keywords: Hilbert spaces; Banach spaces; linear functionals; Lax–Milgram Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Lax-Milgram é um dos resultados mais relevantes da Análise Funcional. Ao estabelecer a existência e a unicidade de soluções para uma ampla classe de problemas variacionais, esse teorema é particularmente fundamental no estudo de equações diferenciais parciais e problemas de contorno. Suas aplicações geram resultados significativos em diversas áreas, tais como a física matemática, a engenharia e as ciências aplicadas.

A resolução de certos problemas, como os que envolvem equações diferenciais parciais, frequentemente conduz à análise de problemas de valor de contorno cuja existência de solução nem sempre é evidente. Esses problemas podem ser reformulados de maneira natural no contexto dos espaços de Hilbert, onde surge a necessidade de se estudar formas bilineares associadas às formulações variacionais. Nesse cenário, o Teorema de Lax-Milgram desempenha um papel fundamental ao fornecer condições suficientes para a existência e unicidade de soluções, assegurando a viabilidade matemática dos modelos considerados.

O desenvolvimento histórico do Teorema de Lax-Milgram se deu no século XX, em meio a uma crescente formalização dos métodos de Análise Funcional e à busca por bases rigorosas para métodos numéricos aplicados à engenharia e às ciências físicas. O nome do teorema é uma homenagem aos matemáticos Peter David Lax (1926 - 2025) e Arthur Norton Milgram (1912 - 1961), que contribuíram para a formulação e demonstração do resultado em diferentes contextos.

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre o Teorema de Lax-Milgram, explorando tanto sua demonstração clássica quanto duas demonstrações alternativas. Busca-se, ainda, contextualizar historicamente o surgimento do teorema e apresentar os conceitos preliminares necessários para sua completa compreensão. Para isso, utilizam-se como principais referências as obras *Fundamentos de Análise Funcional*, de Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira (Botelho et al., 2012), *Introductory Functional Analysis with Applications*, de Erwin Kreyszig (Kreyszig, 1978), e *Introdução aos Espaços de Banach*, de Aldo Bazan, Alex Farah e Cecília de Souza (Bazan et al. , 2023). Ademais, emprega-se como base complementar o trabalho de (Melis, 2025) e (Lax, 2010), que apresenta uma análise histórica detalhada e algumas generalizações do Teorema de Lax-Milgram.

A metodologia adotada baseia-se em uma exposição teórica, com definições, proposições, demonstrações e exemplos ilustrativos. Os principais resultados são apresentados de forma didática, buscando não apenas provar o teorema, mas também discutir sua relevância e implicações.

No primeiro capítulo, apresenta-se uma breve contextualização histórica dos matemáticos

Peter Lax e Arthur Milgram, bem como do desenvolvimento do Teorema de Lax-Milgram. Destaca-se, ainda, no decorrer do contexto histórico e de forma direta, a evolução dos métodos da Análise Funcional e a relevância desse teorema para a matemática aplicada.

No segundo capítulo, são expostos os conteúdos preliminares necessários, isto é, definições e resultados fundamentais sobre espaços de Banach, espaços de Hilbert, operadores lineares contínuos e formas bilineares.

No terceiro capítulo, são apresentadas três demonstrações distintas do Teorema de Lax-Milgram. A primeira corresponde à abordagem clássica, fundamentada no Teorema de Riesz–Fréchet, resultado central na Análise Funcional, bem como em propriedades de operadores lineares definidos em espaços de Hilbert. A segunda demonstração é construída a partir do Teorema de Hahn-Banach. E a terceira demonstração, embora menos recorrente na literatura, baseia-se no Teorema do Ponto Fixo de Banach e revela-se igualmente rigorosa e relevante.

Ao final deste trabalho, espera-se que seja possível compreender a prova do Teorema de Lax-Milgram em diferentes contextos matemáticos, reconhecendo sua importância fundamental na Análise Funcional. Embora não se explorem aplicações práticas específicas, o teorema é reconhecido por sua ampla influência na garantia de existência e unicidade de soluções em problemas variacionais e equações diferenciais parciais.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Nesse capítulo inicial, abrangemos o contexto histórico dos célebres matemáticos Peter Lax e Arthur Milgram, assim como um pouco da história que envolve o desenvolvimento do Teorema de Lax-Milgram. Apresentamos brevemente suas contribuições no cenário matemático do século XX, destacando os caminhos que os levaram à formulação do resultado que leva seus nomes. Com base contextual sólida para compreender não apenas a formulação técnica do teorema, mas também sua motivação, relevância histórica e o seu impacto em diversas áreas da matemática e das ciências aplicadas.

2.1 Peter Lax

Peter David Lax (1926 – 2025), nascido em Budapeste, Hungria, desde cedo fascinado pela matemática, mudou-se para os Estados Unidos aos 15 anos. Formou-se na Stuyvesant High School e, aos 18 anos, publicou seu primeiro trabalho. Em 1949, obteve seu doutorado sob a orientação de K. O. Friedrichs, "um matemático maravilhoso e uma pessoa encantadora e idiossincrática" (Lax, 2010).

Figura 2.1 – Peter Lax
Fonte: MacTutor. Disponível em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lax/`. Acesso em: 10 jun. 2025.

Reconhecido por suas contribuições significativas às equações diferenciais parciais, tanto no âmbito teórico quanto computacional e aplicado, Lax trabalhou, na década de 1950, em

Los Alamos, onde desenvolveu métodos numéricos para equações hiperbólicas, com ênfase no fluxo compressível (Lax, 2010). Segundo (Cipra, 2005), em 1951, Lax assumiu o cargo de professor assistente na Universidade de Nova York, onde desenvolveu uma carreira marcada por contribuições fundamentais à Análise Funcional e às equações diferenciais parciais.

Ainda em 2005, Peter Lax tornou-se o primeiro matemático aplicado a receber o Prêmio Abel — distinção de grande relevância no cenário matemático internacional, frequentemente comparada, em prestígio, ao Prêmio Nobel. A honraria foi concedida em reconhecimento às suas contribuições fundamentais no campo das equações diferenciais parciais (Barany & Shields, 2025).

Ao longo de sua carreira, Lax também se dedicou ao ensino e à formação de uma nova geração de matemáticos e cientistas, influenciando áreas como a física, matemática e a computação científica. "Sempre gostei de ensinar em todos os níveis, inclusive cálculo introdutório. Na pós-graduação, meus cursos favoritos eram Álgebra Linear, Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais." (Lax, 2010). Seu trabalho em Los Alamos, por exemplo, foi de fundamental importância para o avanço de métodos numéricos aplicados em problemas envolvendo dinâmica de fluidos e outras áreas da física.

Entre suas contribuições mais importantes à matemática aplicada, destacam-se a chamada Equação de Lax (ligada aos pares de Lax), o desenvolvimento da teoria matemática dos sistemas hiperbólicos de leis de conservação, a introdução do Esquema Numérico de Lax–Friedrichs — fundamental na análise computacional de equações diferenciais parciais — e a formulação da Condição de Entropia de Lax para ondas de choque, conceito essencial para a seleção de soluções físicas em sistemas com descontinuidades (Lax, 2010). Seu trabalho teve um impacto profundo no desenvolvimento de métodos numéricos para equações diferenciais parciais e na computação científica, desde os estudos iniciais em Los Alamos até o uso moderno de simulações computacionais em diversas áreas, como meteorologia, engenharia de fluxo e modelagem de fenômenos físicos complexos (Lax, 2010).

Além disso, suas inovações no campo da Análise Funcional e sua contribuição para o desenvolvimento da teoria espectral de operadores em espaços de Hilbert ajudaram a consolidar a base matemática para muitos métodos numéricos usados até hoje, particularmente no contexto de simulações numéricas em grandes sistemas dinâmicos. Seu legado se estende além das soluções analíticas de equações diferenciais, atingindo a maneira como problemas complexos são resolvidos em modelos computacionais modernos.

2.2 Arthur Milgram

Arthur Milgram (1912–1961), nascido na cidade de Filadélfia, fez importantes contribuições à matemática, atuando em áreas como Análise Funcional, geometria diferencial, equações diferenciais parciais e topologia. Em 1937, Arthur Milgram obteve seu doutorado sob a orientação de John Kline, com a tese intitulada *Decompositions and Dimension of Closed Sets in* $\mathbb{R}^n$, na Universidade da Pensilvânia. Essa pesquisa foi posteriormente publicada na revista Transactions of the American Mathematical Society (Milgram, 1938), e abordava problemas relacionados à topologia e à geometria, contribuindo significativamente para a compreensão das estruturas topológicas.

Entre 1940 e 1950, Milgram orientou dois alunos de doutorado na Universidade de Syracuse, período em que consolidou seu papel como educador e mentor de jovens matemáticos. Sua influência acadêmica estendeu-se por várias áreas da matemática, com destaque para a Teoria dos Grafos, a Teoria de Galois (Hilbert, 1912) e especialmente, o Teorema de Lax-Milgram, que pode ser usado para provar a existência e unicidade de soluções fracas para equações diferenciais parciais (EDPs), particularmente problemas de valor de contorno elípticos (Evans, 1998; Brezis, 2011). Esse último teve um impacto profundo na teoria das EDPs, oferecendo uma nova abordagem para a existência e unicidade de soluções em espaços de Hilbert, configurando um marco na Análise Funcional moderna.

Além de suas contribuições em Análise Funcional e EDPs, Milgram foi uma figura-chave no desenvolvimento de métodos algébricos e topológicos para problemas de física, matemática e engenharia. Seu trabalho no Teorema de Lax-Milgram continua sendo fundamental para diversas áreas, incluindo a modelagem matemática de sistemas físicos complexos e a formulação matemática de problemas variacionais (Evans, 1998; Brezis, 2011). Seu legado é amplamente reconhecido tanto na pesquisa acadêmica quanto nas aplicações práticas, deixando uma marca duradoura na matemática aplicada e na computação científica.

2.3 Breve histórico do Teorema de Lax-Milgram

Mesmo com diversos estudos que buscavam soluções para equações diferenciais parciais, antes da formulação do Teorema de Lax-Milgram, as soluções eram geralmente obtidas por métodos clássicos, como transformadas integrais e séries de Fourier que apresentavam limitações para problemas mais complexos, como os da elasticidade e mecânica dos fluídos (Milgram, 1938; Brezis, 2011). Esses métodos, embora eficazes para uma classe restrita de problemas, tinham limitações significativas. Eles não conseguiam lidar adequadamente com problemas mais complexos, como os da elasticidade e da mecânica dos fluidos, que exigem uma abordagem mais geral e sofisticada.

Por volta de 1954, Peter Lax e Arthur Milgram formularam o célebre Teorema de Lax-Milgram, que estabelece a existência e unicidade de soluções em espaços de Hilbert para uma ampla classe de problemas variacionais. Essa formulação introduziu uma abordagem mais abstrata e robusta para tratar esses problemas, valendo-se das ferramentas da Análise

Funcional, especialmente no que tange aos espaços vetoriais e operadores lineares contínuos (Evans, 1998; Brezis, 2011).

O Teorema de Lax-Milgram surgiu em um contexto de consolidação da teoria das formas bilineares e da teoria espectral de operadores em espaços de Hilbert, desenvolvidas por matemáticos como David Hilbert, John von Neumann e Sergei Sobolev (Zeidler, 1995; Hilbert, 1912). A abordagem variacional proposta por Sobolev, em particular, introduziu os espaços que levam seu nome, possibilitando a extensão da noção de solução para funções menos regulares, o que viabilizou a formulação fraca das equações diferenciais. Como destaca Sobolev:

> Os espaços de Sobolev permitem a ampliação da noção de soluções de equações diferenciais para funções que podem não ser diferenciáveis classicamente, possibilitando o estudo de problemas físicos mais gerais. Sobolev (1938).

Essa generalização foi crucial para o tratamento de problemas que não podiam ser modelados por funções de classe C^∞ ou mesmo contínuas, mas que ainda assim podiam ser abordados no âmbito das soluções fracas (Evans, 2010).

Embora o Teorema de Lax-Milgram possa ser considerado uma generalização do Teorema de Riesz–Fréchet, ele representou um marco no desenvolvimento da Análise Funcional.

> "Do ponto de vista da análise funcional, o Teorema de Lax-Milgram teve uma grande importância não apenas teórica, mas também histórica e temporal, em um momento em que a matemática se encontrava em um período de revolução e mudança profunda, com o nascimento e desenvolvimento dessa área da análise." Melis (2025).

Por meio de sua formulação, tornou-se possível garantir a existência e a unicidade de soluções em contextos mais gerais, os quais anteriormente eram tratados de forma incompleta ou mesmo não eram abordados. Esse avanço foi fundamental não apenas para a teoria matemática, mas também para aplicações práticas em áreas como a engenharia e a física matemática (Zeidler, 1995; Evans, 2010).

O impacto do teorema é notável especialmente nas seguintes áreas: Método dos Elementos Finitos (FEM), Análise Numérica de EDPs, Análise Funcional, Matemática Aplicada, Métodos Numéricos para EDPs e Engenharia Computacional (Quarteroni e Valli , 1994). Sua relevância continua a crescer, pois fornece uma base sólida para o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes, que são utilizados em simulações computacionais que resolvem problemas complexos da física, da engenharia e da biologia (Evans, 2010; Zeidler, 1995). O Teorema de Lax-Milgram, portanto, não é apenas um marco teórico, mas também uma ferramenta indispensável para a solução de problemas do mundo real, especialmente em disciplinas que dependem de modelagens computacionais.

3 CONTEÚDO PRELIMINAR

Neste capítulo, são recordados alguns conceitos e resultados fundamentais da Análise Funcional, os quais serão a base para compreensão do Teorema de Lax–Milgram e de suas demonstrações. Os conteúdos expostos baseiam-se nas referências (Botelho et al., 2012; Domingues, 1982; Kreyszig, 1978).

3.1 Espaços normados

A ideia de norma é um conceito fundamental na Matemática, pois permite atribuir uma noção de tamanho a elementos de um espaço vetorial. A partir dela, pode-se definir uma função distância, o que possibilita analisar a proximidade entre vetores. Essa noção, além de facilitar cálculos, também serve como base para diversos conceitos abstratos.

Nesta seção abordaremos definições relacionadas a espaços normados, em particular, aos espaços de Banach. Além disso, adotaremos sobre o corpo $\mathbb{K}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 3.1. *(Norma) Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.. Uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que, para cada $x \in E$, associa um numero real, $\|x\|$, é chamado de norma em E se, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são válidas:*
(1) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Um espaço normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, em que E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em E. No que segue, denotaremos por E um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, uma vez que a norma fica subentendida.

Definição 3.2. *(Sequência) É chamada de sequência em um conjunto M uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$. Denotamos uma sequência por (x_n), onde x_n é a imagem de x em $n \in \mathbb{N}$, chamado de n-ésimo termo da sequência.*

Definição 3.3. *(Sequência limitada) Uma sequência (x_n) em um espaço normado E chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que*

$$\|x_n\| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.4. *(Sequência convergente) Uma sequência (x_n) em um espaço normado E é dita convergente se existe um $x \in E$ tal que:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

O elemento x é chamado limite de (x_n) e escrevemos:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x,$$

ou simplesmente, $x_n \longrightarrow x$. Neste caso, dizemos que (x_n) converge para x ou tem limite x. Se (x_n) não é convergente, dizemos que é divergente.

Definição 3.5. *(Sequência de Cauchy) Uma sequência (x_n) em um espaço normado E chama-se sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.1. *Os espaços $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ são espaços vetoriais normados, onde a norma é dada, respectivamente, pelo valor absoluto usual e pela norma euclidiana:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0, \\ -x, & se\ x < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

e

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 3.2. *A sequência $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana [1], existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_1 \cdot \varepsilon > 2.$$

Isso implica que, para todo $m, n > n_1$, temos

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Como $m, n > n_1$, segue que

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n_1} \quad e \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n_1}.$$

Portanto,

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{2}{n_1}.$$

[1] Essa propriedade garante que, dados dois números reais positivos x e y, existe um número natural n tal que $nx > y$. Ela expressa o fato de que os números naturais não são limitados superiormente nos reais.A propriedade pode ser encontrada em (Kreyszig, 1978, p. 6)

Pela escolha de n_1, temos $\frac{2}{n_1} < \varepsilon$ e, assim,

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \textit{sempre que } m, n > n_1.$$

Logo, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy. □

Proposição 3.1. *Toda sequência convergente, em um espaço vetorial normado, é de Cauchy.*

Demonstração. Seja E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset E$ uma sequência. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se tomarmos $m, n > n_0$, teremos

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_n + a - a\| \leq \|x_m - a\| + \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Definição 3.6. *(Espaço de Banach) Diz-se que um espaço normado E é completo se cada sequência de Cauchy converge em E. Um espaço normado completo é chamado de espaço de Banach.*

Definição 3.7. *(Bola e esfera). Dado um ponto $x_0 \in E$ e um número real $r > 0$, definimos três tipos de conjuntos:*

(a) $B(x_0; r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$;

(b) $\bar{B}(x_0; r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq r\}$;

(c) $S(x_0; r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| = r\}$.

*Os conjuntos $B(x_0, r)$, $\bar{B}(x_0, r)$ e $S(x_0, r)$ são chamados, respectivamente, de **bola aberta**, **bola fechada** e **esfera** de centro x_0 e raio r.*

Definição 3.8. *(Ponto interior) Seja X um subconjunto de um espaço normado E. Dizemos que um ponto $x_0 \in X$ é um ponto interior de X quando existe $r > 0$ tal que*

$$B(x_0; r) \subseteq X.$$

O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado o interior de X, sendo denotado por $\operatorname{int}(X)$. Por definição, $\operatorname{int}(X) \subseteq X$.

Definição 3.9. *(Conjunto aberto) Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que um subconjunto $X \subseteq E$ é aberto em E quando*

$$\operatorname{int}(X) = X.$$

Como $\operatorname{int}(X) \subseteq X$*, para mostrarmos que um conjunto X em E é aberto, devemos provar que $X \subseteq \operatorname{int}(X)$, ou seja, que, para cada $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset X$.*

Definição 3.10. *(Ponto aderente) Dizemos que um ponto $x_0 \in E$ é aderente a $X \subseteq E$ quando, existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow a$. Chamamos de fecho do conjunto $X \subseteq E$, e denotamos por $\overline{X}$, o conjunto formado pelos pontos de E que são aderentes a X.*

Definição 3.11. *(Conjunto fechado) Dizemos que $K \subseteq E$ é um conjunto fechado quando $K = \overline{K}$, isto é, se todo ponto aderente a K pertencer a K.*

Proposição 3.2. *Um conjunto $K \subseteq E$ é fechado se, e somente se, seu complementar K^c é aberto.*

A demonstração desta proposição está apresentada em (Kreyszig, 1978, p. 21).

Teorema 3.1. *0 Sejam E um espaço normado e $M \subseteq E$. Então, M é fechado se, e somente se, para toda sequência $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em E, tem-se $x \in M$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que M é fechado. Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência convergente tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Como M é fechado, seu complementar $M^c = E \setminus M$ é aberto. Se, por absurdo, $x \in M^c$, então existe uma bola aberta $B(x;r) \subset M^c$ para algum $r > 0$. No entanto, como $x_n \longrightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x;r) \subset M^c$ para todo $n \geq n_0$, contradizendo o fato de que $(x_n) \subset M$. Portanto, $x \in M$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que toda sequência $(x_n) \subset M$ que converge em E possui seu limite em M. Seja $x \in \overline{M}$, o fecho de M. Então, pela definição 3.10, existe uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Pela hipótese, $x \in M$, o que mostra que $\overline{M} \subset M$. Por outro lado, por definição, o fecho $\overline{M}$ é o menor conjunto fechado que contém M, o que implica que $M \subset \overline{M}$.Assim, concluímos que $M = \overline{M}$, e, portanto, M é fechado. □

Teorema 3.2. *Seja Y um subespaço de um espaço de Banach B. Então Y é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Suponha que $x_n \longrightarrow x \in X$, com $x_n \in Y$ para todo n. Se Y é completo, então a convergência da sequência $(x_n) \subset Y$ implica $x \in Y$. Logo, Y é fechado.

Reciprocamente, suponha que Y é fechado em X. Então, toda sequência de Cauchy $(x_n) \subset Y$ converge para um ponto $x \in X$, já que X é completo. Como Y é fechado, $x \in Y$, e portanto Y é completo. □

3.2 Operador linear

Os operadores lineares desempenham um papel central na Análise Funcional, bem como em diversas áreas da Matemática Aplicada. Um operador linear é uma aplicação entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição e multiplicação por escalar, ou seja, que preserve a estrutura de espaço vetorial. Nesta sessão apresentemos o conceito formalmente, juntamente com teoremas, proposições e definições complementares que abordam esse conceito.

Definição 3.12. *(Operador linear) Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ é um operador linear, onde $D(T)$ é um subespaço vetorial, quando temos, para todo $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:*

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$;

(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Do item (ii) dessa definição, segue-se que $T(0) = 0$, para todo operador linear T.

Definição 3.13. *(Núcleo) Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear entre espaços vetoriais. O **núcleo** de T, denotado por $\ker(T)$, é o conjunto de todos os vetores $v \in X$ tais que $T(v) = 0$, ou seja,*

$$\ker(T) = \{v \in X \mid T(v) = 0\}.$$

Proposição 3.3. *Seja $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*
a) A imagem $Im(T)$ é um subespaço vetorial de Y;
b) O núcleo $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de $D(T)$.

Demonstração. (a) Vamos mostrar que $Im(T) = \{T(x) \mid x \in D(T)\}$ é um subespaço vetorial de Y. Sejam $y_1, y_2 \in Im(T)$. Então, existem $x_1, x_2 \in D(T)$ tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Como T é linear, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Como $D(T)$ é um subespaço (por ser domínio de um operador linear), $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$. Logo, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Im(T)$, o que mostra que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de Y.

(b) Vamos agora mostrar que $\ker(T) = \{x \in D(T) \mid T(x) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $D(T)$. Sejam $x_1, x_2 \in \ker(T)$. Então, $T(x_1) = 0$ e $T(x_2) = 0$. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Logo, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker(T)$, o que prova que $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de $D(T)$. □

Exemplo 3.3. *Considere o operador linear*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x+y,\ y+z).$$

- ***Imagem:***
$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ a = x+y,\ b = y+z\}.$$
Como pode ser escrito como soma de vetores do tipo, esse conjunto é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

- ***Núcleo:***
$$\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ y+z=0\} = \{(-t,t,-t) : t \in \mathbb{R}\},$$
que é claramente um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.3. *Seja* $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear. Então:*

(a) A inversa $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow D(T)$ *existe se, e somente se,* $T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

(b) Se T^{-1} *existe, então ela é um operador linear.*

Demonstração. (a) Suponha que a inversa de T exista. Neste caso, T é injetor, ou seja, se $T(x) = T(y)$, então $x = y$. Em particular, se $T(x) = 0$, temos $T(x) = T(0)$, e pela injetividade, isso implica que $x = 0$.

Reciprocamente, suponha $T(x) = 0$ então $x = 0$, e que $T(x) = T(y)$. Assim,

$$T(x-y) = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

Portanto, o operador é injetivo e, consequentemente, a inversa existe.

(b) Se T^{-1} existe, então, para quaisquer $y_1, y_2 \in Im(T)$ e $c \in \mathbb{K}$, existem x_1, $x_2 \in D(T)$ tais que $y_j = T(x_j)$ para $j = 1,2$. Daí,

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = y_1 + y_2,$$

ou seja,

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2).$$

Além disso,

$$T(cx_1) = cT(x_1) = cy_1 \Rightarrow T^{-1}(cy_1) = cx_1 = cT^{-1}(y_1).$$

Portanto, T^{-1} preserva adição e multiplicação por escalar. □

Definição 3.14. *(Operador linear limitado) Um operador linear $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ entre espaços normados é dito ser limitado se existe uma constante real $c > 0$ tal que, para todo $x \in D(T)$, tem-se:*

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|.$$

Observação 3.1. *O conjunto de todos os operadores lineares limitados $T : X \longrightarrow Y$ denotado por $\mathcal{B}(X,Y)$, se $X = Y$ então $\mathcal{B}(X)$, é um espaço vetorial normado, com a norma definida por:*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|, \tag{2.1}$$

o que implica que:

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in D(T).$$

Exemplo 3.4. *(Operador identidade) Seja X um espaço vetorial normado. O operador identidade $I : X \to X$ é definido por*

$$I(x) = x, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

I é linear, pois

$$I(x + y) = x + y = I(x) + I(y),$$

$$I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x).$$

I é limitado, com norma $\|I\|$ = 1. De fato, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Definição 3.15. *(Operador linear limitado) Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ é contínuo em um ponto $x_0 \in D(T)$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| < \delta$, temos $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$. O operador é contúnuo quando é contínuo em todos os pontos $x \in D(T)$.*

Proposição 3.4. *Seja T um operador linear limitado. Então:*
a) Para $x_n, x \in D(T)$, temos $x_n \longrightarrow x$ implica $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.
b) O núcleo $ker(T)$ é fechado.

Demonstração. a) Vamos provar que se $x_n \longrightarrow x$, então $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Seja $\epsilon > 0$, como T

é um operador linear limitado, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq c\|x\| \quad \text{para todo } x \in D(T).$$

Agora, dado que $x_n \longrightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, temos

$$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{c}.$$

Como T é linear e limitado, temos

$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq c\|x_n - x\| < \frac{c\epsilon}{c}, \ \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$\|T(x_n) - T(x)\| < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Portanto, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$, o que conclui a prova da primeira parte.

b) Agora, vamos provar que o núcleo de T é fechado. Seja (x_n) uma sequência em $ker(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Então,

$$T(x_n) = 0, \quad \text{para todo } n,$$

pois $x_n \in ker(T)$ para todo n. Como T é linear e limitado, temos que

$$T(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 0 = 0.$$

Logo, $x \in ker(T)$, o que implica, a partir do Teorema 3.1, que $ker(T)$ é fechado. □

Teorema 3.4. *Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Suponhamos que T seja limitado. Se T é o operador nulo a afirmação é imediata. Considere, então, $T \neq 0$ e, consequentemente, $\|T\| > 0$. Sejam $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ arbitrário e $\varepsilon > 0$ dado. Como T é linear, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $\|x - x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$, obtemos

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ foi arbitrário, isso mostra que T é contínuo.

Reciprocamente, suponha que T seja contínuo e considere $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Então, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < 1, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T) \text{ satisfazendo } \|x - x_0\| < \delta. \tag{2.2}$$

Agora, tomemos qualquer $y \neq 0$ em $\mathcal{D}(T)$ e definimos

$$x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|} y.$$

Então $x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|} y$ e, portanto, $\|x - x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, de modo que podemos usar (2.2). Como T é linear, temos

$$1 > |T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|y\|} y\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|T(y)\|,$$

e (2.2) implica

$$\frac{\delta}{2\|y\|}\|T(y)\| < 1.$$

Assim, $\|T(y)\| < \frac{2}{\delta}\|y\|$. Isso pode ser escrito como $\|T(y)\| \leq c\|y\|$, onde $c = \frac{2}{\delta}$, o que mostra que T é limitado. □

Observação 3.2. *Observe que a continuidade de T em um ponto implica na limitação de T, o que por sua vez implica na continuidade de T pela proposição 3.4.*

3.3 Funcional linear

Como veremos a seguir, um funcional linear é um operador linear cujos valores pertencem a um corpo $\mathbb{K}$, de modo que todos os resultados anteriores sobre operadores lineares também se aplicam. Apresentamos ainda o espaço dual e algumas de suas propriedades, elementos ricos e importantes para nosso teorema principal e suas demonstrações.

Definição 3.16. *(Funcional linear) Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um **funcional linear** é um operador $f : \mathcal{D}(f) \subset X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que:*

i) $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(f),$

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathcal{D}(f).$

Exemplo 3.5. *Seja $E = \mathbb{R}^2$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2,$$

onde $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é um funcional linear. De fato, observe que

$$f\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) = f(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) = (2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2))$$

$$= (2x_1 + 3x_2) + (2y_1 + 3y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2).$$

Além disso,

$$f(\alpha(x_1,x_2)) = f(\alpha x_1,\alpha x_2) = 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 = \alpha(2x_1+3x_2) = \alpha f(x_1,x_2).$$

Portanto, f é linear.

Definição 3.17. *(Funcional linear contínuo e espaço dual) Seja X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Um funcional linear $f : X \to \mathbb{K}$ é dito limitado se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$|f(x)| \le c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{K}$ é chamado de espaço dual de X, e denotado por X'.

Observação 3.3. *De forma similar ao operador linear, a norma de f nesse caso é definida por*

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{D}(f)-\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathcal{D}(f),\|x\|=1} |f(x)|.$$

Observação 3.4. *Se f é um funcional linear limitado, segue da definição da norma desse funcional que,*

$$|f(x)| \le \|f\|\|x\|, \forall x \in D(f)$$

.

Observação 3.5. *Podemos considerar o dual de X', denominado bidual de X, e denotado por X''.*

O teorema a seguir é uma consequência do célebre Teorema de Hahn-Banach, e sua demonstração pode ser encontrada em (Botelho et al., 2012, p. 47).[2]

Teorema 3.5. *Sejam X um espaço vetorial normado e M um subespaço fechado de X. Seja $x_0 \in X\backslash M$, ou seja, x_0 está fora de M. Então, existe um funcional linear contínuo $f_0 \in X'$ tal que:*

$$f_0(x_0) > 1$$

e

$$f_0(x) = 0, \forall x \in M.$$

[2] O Teorema de Hahn–Banach garante, sob condições adequadas (espaço vetorial normado real ou complexo, presença de funcional sublinear, etc.), que um funcional linear definido em um subespaço pode ser estendido a todo o espaço preservando a desigualdade. O enunciado deste resultado pode ser encontrado em Botelho et al. (2012).

A seguir enunciamos um outro teorema clássico da Análise Funcional, o Teorema Ponto Fixo de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em (Kreyszig, 1978, Seção 5.1, p. 228).

Teorema 3.6. *Seja (X, d) um espaço vetorial normado, e seja $T : X \longrightarrow X$ uma contração, ou seja, existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Então, T possui um único ponto fixo $x^* \in X$ tal que $T(x^*) = x^*$. Além disso, para qualquer ponto inicial $x_0 \in X$, a sequência definida recursivamente por

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

converge para x^*, e temos a estimativa

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0).$$

3.4 Espaços de Hilbert

Vimos anteriormente os espaços normados, nos quais a noção de comprimento, dada pela norma, nos permite analisar convergência, continuidade e completude. No entanto, em muitas aplicações da Análise Funcional, especialmente na resolução de equações diferenciais, séries de Fourier e teoria espectral, é essencial dispor de uma estrutura adicional que permita falar de ângulos, ortogonalidade e projeções. Essa estrutura é fornecida pelos produtos internos.

Esta seção tem por objetivo desenvolver os conceitos fundamentais que envolvem os espaços de Hilbert. Para isso, introduziremos inicialmente a noção de produto interno e as propriedades que dele decorrem. Em seguida, construiremos a norma associada e, por fim, definiremos formalmente os espaços de Hilbert, acompanhados de exemplos ilustrativos e resultados teóricos relevantes.

Definição 3.18. *(Produto Interno) Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um **produto interno** em X é uma função*

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

satisfazendo, para todos os vetores $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições:

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$*;*

(ii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$*;*

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$*;*

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$*, e* $\langle x, x\rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*.*

Um ***espaço com produto interno*** *(ou* ***pré-espaço de Hilbert****) é um espaço vetorial no qual um produto interno está definido.*

Definição 3.19. *(Espaço de Hilbert) Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial* H *sobre* $\mathbb{K}$ *munido de um produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *tal que* H *é completo em relação à norma induzida por esse produto interno, definida por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in H. \tag{4.3}$$

Ou seja, toda sequência de Cauchy em H*, com respeito à norma acima, converge para um elemento de* H*. Assim, um espaço de Hilbert é, em particular, espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.*

Observação 3.6. *A aplicação*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in H,$$

é uma norma no espaço H*, ou seja, satisfaz as propriedades de norma: positividade, homogeneidade, desigualdade triangular e que* $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$*.*

Definição 3.20. *(Espaço reflexivo) Seja* E *um espaço normado. Definimos a aplicação canônica*

$$J : E \to E'', \quad J(x)(f) = f(x), \quad \forall f \in E',$$

e dizemos que E *é reflexivo se* J *é um isomorfismo linear sobrejetivo, isto é,* $J(E) = E''$*.*

Teorema 3.7. *Todo espaço de Hilbert* H *é reflexivo.*

A demonstração completa deste teorema está em (Kreyszig, 1978, p. 116).

A seguir veremos que (4.3) satisfaz a desigualdade triangular, as demais condições que definem uma norma são de fácil verificação.

Lema 3.1. *Seja* X *um espaço com produto interno. Então, para qualquer* $x, y \in X$*, o produto interno e a norma correspondente satisfazem:*

(a) ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz:***

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|,$$

com igualdade se, e somente se, os vetores x e y forem linearmente dependentes.

(b) ***Desigualdade triangular (propriedade da definição de norma):***

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Demonstração. (a) Para $y = 0$, a desigualdade é imediata. Suponha $y \neq 0$. Então, para todo $a \in \mathbb{K}$, temos:

$$0 \leq \|x - ay\|^2 = \langle x - ay, x - ay\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{a}\langle y, x\rangle - a\langle x, y\rangle + |a|^2\langle y, y\rangle.$$

Escolhendo $a = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$, obtemos:

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\langle y, y\rangle$, resulta:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

ou seja,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\|x - ay\| = 0$, ou seja, $x = ay$, isto é, x e y são linearmente dependentes.

(b) Seja $z = x + y$. Então:

$$\|z\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2.$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz, temos:

$$\|z\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Portanto,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Exemplo 3.6. *Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\mathbb{R}$. Definimos o funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por meio de um vetor fixo $v \in X$ como:*

$$f(x) = \langle x, v\rangle \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Esse funcional é linear e limitado. De fato,

- ***Linearidade**: Para $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:*

$$f(x+y) = \langle x+y, v\rangle = \langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha x) = \langle \alpha x, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle = \lambda f(x).$$

- ***Limitado**: Existe uma constante $C = \|v\|$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$|f(x)| = |\langle x, v\rangle| \leq \|x\| \cdot \|v\|.$$

Portanto, a norma do funcional f é dada por:

$$\|f\| = \|v\|.$$

Observação 3.7. *Existe um teorema que generaliza este resultado, conhecido como Teorema da Representação de Riesz-Frechet. A demonstração desse teorema será apresentada posteriormente.*

3.5 Ortogalidade

Do ponto de vista formal, dois vetores são considerados ortogonais quando o produto interno entre eles é nulo. Esta definição é apresentada nesta seção, acompanhada de propriedades, exemplos e aplicações relacionados à ortogonalidade.

Definição 3.21 (Ângulo entre vetores)**.** *Sejam $x, y \in X$ vetores não nulos em um espaço com produto interno. O* ângulo *θ entre x e y é definido pelo número $\theta \in [0, \pi]$ tal que*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Observação 3.8. *Em $\mathbb{R}^3$, dois vetores são ortogonais quando formam um ângulo reto, ou seja, um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. De maneira equivalente, esses vetores são ortogonais se o produto interno entre eles for zero. Este conceito de ortogonalidade, observado em $\mathbb{R}^3$, é, na verdade, generalizável para qualquer espaço vetorial com produto interno.*

Definição 3.22. *(Vetores ortogonais) Seja X um espaço com produto interno. Dizemos que dois vetores $x, y \in X$ são* ***ortogonais*** *se*

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Neste caso, escrevemos $x \perp y$.

Definição 3.23. *(Complemento ortogonal) Sejam X um espaço com produto interno e M um subconjunto de X. O complemento ortogonal de M, denotado por $M^\perp$, é o subconjunto de X definido por*

$$M^\perp = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}.$$

Exemplo 3.7. *Seja $X = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, para $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Esse produto é um produto interno, pois é bilinear, simétrico, positivo-definido e satisfaz $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.*

Considere o subconjunto $M = \{(1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$, que é um subespaço de dimensão 1, gerado pelo vetor $(1, 0, 0)$.

O complemento ortogonal de M, denotado por $M^\perp$, é o conjunto de todos os vetores $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tais que $\langle x, (1, 0, 0) \rangle = 0$. Ou seja, queremos que:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0) \rangle = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = x_1 = 0.$$

Portanto, o complemento ortogonal de M é o conjunto:

$$M^\perp = \{(0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Esse conjunto $M^\perp$ é o plano $x_1 = 0$ em $\mathbb{R}^3$, ou seja, o plano $y_1 = 0$ no espaço tridimensional.

Lema 3.2. *Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$ um subespaço fechado. Dado $x \in H$, existe um único vetor $y \in M$ tal que*

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \mid v \in M\} := dist(x, M).$$

Além disso, esse vetor y satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\langle x - y, z \rangle = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in M.$$

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (Kreyszig, 1978, p. 122).

Proposição 3.5. *Sejam H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Se $x \in H$, então existem únicos $y \in M$ e $z \in M^{\perp}$ tais que*

$$x = y + z.$$

Além disso,

$$\|x - y\| = dist(x, M).$$

Em outras palavras, H é a soma direta do subespaço M com seu complemento ortogonal $M^{\perp}$, e neste caso, escrevemos

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, que a soma é direta, ou seja, que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Note que $0 \in M$ e $0 \in M^{\perp}$, portanto $0 \in M \cap M^{\perp}$.

Seja $w \in M \cap M^{\perp}$. Então, $w \in M$ e $w \in M^{\perp}$. Logo, temos

$$\langle w, w \rangle = 0,$$

pois $w \in M^{\perp}$ implica que w é ortogonal a todo vetor de M, em particular a si mesmo.

Como $\langle w, w \rangle = \|w\|^2$, segue que

$$\|w\|^2 = 0,$$

o que implica $w = 0$. Portanto,

$$M \cap M^{\perp} = \{0\}.$$

Considere $x \in H$. Como M é um subespaço fechado, pelo Lema 3.2, existe um único $y \in M$ tal que

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - v\| \,|\, v \in M\} \quad \text{e} \quad \langle x - y, v \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in M.$$

Definindo $z = x - y$ temos $z \in M^{\perp}$. Assim, obtemos a decomposição

$$x = y + z, \quad \text{com} \quad y \in M \quad \text{e} \quad z \in M^{\perp},$$

e, consequentemente, concluímos que

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Para a unicidade, suponha que existam $y_1, y_2 \in M$ e $z_1, z_2 \in M^\perp$ tais que

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2.$$

Então,

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1.$$

Mas o lado esquerdo pertence a M e o lado direito a $M^\perp$. Como $M \cap M^\perp = \{0\}$, concluímos que

$$y_1 = y_2 \quad \text{e} \quad z_1 = z_2.$$

Portanto, a decomposição é única e

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$$

como desejado.

□

3.6 Formas bilineares

Nesta seção, introduziremos o conceito de formas bilineares, que generalizam a ideia de produto interno real:

Definição 3.24. *(Forma bilinear) Sejam X e Y espaços vetoriais reais. Uma aplicação*

$$b : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear se satisfaz as seguintes propriedades:

- *Para cada $y \in Y$, a aplicação $x \mapsto b(x, y)$ é linear em X, isto é,*

$$b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha b(x_1, y) + \beta b(x_2, y), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x_1, x_2 \in X.$$

- *Para cada $x \in X$, a aplicação $y \mapsto b(x, y)$ é linear em Y, isto é,*

$$b(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha b(x, y_1) + \beta b(x, y_2), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Definição 3.25. *(Forma bilinear limitada) Sejam X e Y espaços normados e $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que b é limitada quando existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|b(x,y)| \leq C \|x\| \|y\|, \quad \forall (x,y) \in X \times Y. \tag{6.4}$$

O número

$$\|b\| = \sup_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \frac{|b(x,y)|}{\|x\| \|y\|}$$

é chamado de norma da forma bilinear b.

Observação 3.9. *Da definição da norma, segue que*

$$|b(x,y)| \leq \|b\| \|x\| \|y\|, \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Definição 3.26. *(Coercividade) Sejam X um espaço normado e $b : X \times X \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que b é coerciva se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$|b(x,x)| \geq c\|x\|^2, \quad \forall x \in X. \tag{6.5}$$

3.7 O Teorema de Riesz-Frechét

O Teorema de Representação de Riesz–Fréchet é um dos resultados fundamentais da Análise Funcional, caracterizando o dual de um espaço de Hilbert. Possui várias aplicações, como por exemplo, o Teorema de Lax-Milgram, foco deste trabalho. Esse teorema estabelece que todo funcional linear contínuo sobre um espaço de Hilbert pode ser representado como um produto interno. A seguir, apresentamos seu enunciado e demonstração, e uma proposição essencial para uma das demonstrações do teorema principal deste trabalho.

Teorema 3.8. *(Teorema de Riesz-Frechét) Cada funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de produto interno, a saber, $f(v) = \langle v, y \rangle$, $\forall v \in H$, onde $y \in H$ depende de f, é determinado unicamente por f e satisfaz $\| y \| = \| f \|$.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em três etapas:
Existência do elemento $y \in H$: Seja $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear limitado. Se $f \equiv 0$, podemos considerar $y = 0$ então $\| y \| = \| f \|$, e o caso é trivial. Consideremos, então, $f \neq 0$.

Pela Proposição 3.4, temos $ker(f)$ é um subespaço fechado de H. Porém, pelo fato de $f \neq 0$, segue-se que $ker(f) \neq H$. Pela Proposição 3.5, temos

$$H = ker(f) \oplus ker(f)^{\perp}.$$

Como $ker(f) \neq H$, então $ker(f)^{\perp} \neq \{0\}$ e deverá existir um $y_0 \neq 0$ com $y_0 \in \ker(f)^{\perp}$. Seja qualquer v arbitrário, com $v \in H$, e defina o vetor $x \in H$ por

$$x = f(v)y_0 - f(y_0)v.$$

Aplicando o funcional f, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(v)y_0 - f(y_0)v) \\ &= f(v)f(y_0) - f(y_0)f(v) = 0 \\ &\Rightarrow x \in ker(f). \end{aligned}$$

Além disso, como $y_0 \in ker(f)^{\perp}$ *e* $x \in ker(f)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y_0 \rangle \\ &= \langle f(v)y_0 - f(y_0)v, y_0 \rangle \\ &= f(v)\langle y_0, y_0 \rangle - f(y_0)\langle v, y_0 \rangle, \end{aligned} \tag{*}$$

ou seja, a partir de (*), deduzimos

$$f(v) = \frac{f(y_0)\langle v, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle},$$

assim,

$$f(v) = \langle v, \frac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 \rangle.$$

Tomando $y = \frac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0$, teremos

$$f(v) = \langle v, y \rangle, \forall v \in H.$$

Unicidade do vetor y: Digamos que existam y_1 e y_2 tais que $\forall v \in H$

$$f(v) = \langle v, y_1 \rangle = \langle v, y_2 \rangle.$$

Como é válido para todo $v \in H$, em particular, considerando $v = y_1 - y_2$, temos,

$$0 \;=\; \langle v, y_1\rangle - \langle v, y_2\rangle = \langle v, y_1 - y_2\rangle = \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle = \| y_1 - y_2 \|^2 .$$

Logo,

$$y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Provado que y em $f(v) = \langle v, y\rangle$ é único.

Norma do funcional f: Agora, provaremos que $\|f\| = \|y\|$. Veja que, usando $f(v) = \langle v, y\rangle, \forall v \in H$, e sabendo que, para todo $v \in H$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$|f(v)| = |\langle v, y\rangle| \leq \|v\| \cdot \|y\|.$$

Assumindo $v \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da desigualdade por $\|v\|$, obtendo:

$$\frac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|y\|.$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $v \in H$ com $\|v\| = 1$, temos

$$\|f\| := \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \leq \|y\|.$$

Portanto, obtemos a desigualdade desejada: $\|f\| \leq \|y\|$.

Vamos provar agora que $\| y \| \leq \| f \|$. Usando manipulação algébrica, temos

$$\| y \|^2 = \langle y, y\rangle = f(y) \leq |f(y)| \leq \| f \| \| y \|$$

logo, $$\| y \|^2 \leq \| f \| \| y \| \Rightarrow \| y \| \leq \| f \| .$$

Portanto, $\| f \| = \| y \|$ e está demonstrado o Teorema da Representação de Riesz-Frechét. □

Proposição 3.6. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Se $b : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear limitada, então existe um único operador $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ satisfazendo*

$$b(x, y) = \langle T(x), y\rangle, \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Demonstração. Para cada $x \in H_1$, considere o funcional $L_x : H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $L_x(y) = b(x, y)$, para todo $y \in H_2$. Por definição, L_x é linear e pela norma da forma bilinear limitada temos

$$\frac{|b(x, y)|}{\|x\|\|y\|} \leq \|b\|, \quad \forall x \in H_1 - \{0\},\ y \in H_2 - \{0\},$$

assim,

$$|L_x(y)| = |b(x,y)| \leq \|b\|\,\|x\|\,\|y\|, \forall y \in H_2.$$

Logo, L_x é contínuo. E, portanto, $L_x \in H_2'$.

O Teorema da Representação de Riesz garante que existe um único $z \in H_2$, tal que

$$L_x(y) = \langle z, y\rangle, \quad \forall y \in H_2.$$

Então, definindo $T : H_1 \longrightarrow H_2$, por $T(x) = z$, temos:

$$b(x,y) = L_x(y) = \langle z, y\rangle = \langle T(x), y\rangle, \quad \forall x \in H_1,\ y \in H_2.$$

Vamos mostrar que $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, w \in H_1$. Como b é linear e $\langle T(x), y\rangle = b(x,y)$, temos para todo $y \in H_2$:

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha x + \beta w), y\rangle &= b(\alpha x + \beta w, y)\\
&= \alpha b(x,y) + \beta b(w,y)\\
&= \alpha\langle T(x), y\rangle + \beta\langle T(w), y\rangle\\
&= \langle \alpha T(x), y\rangle + \langle \beta T(w), y\rangle\\
&= \langle \alpha T(x) + \beta T(w), y\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$T(\alpha x + \beta w) = \alpha T(x) + \beta T(w)$$

e, assim, T é linear.

Suponha $T \neq 0$, daí,

$$\begin{aligned}
\|b\| = \sup_{\substack{x\neq 0,\\ y\neq 0}} \frac{|b(x,y)|}{\|x\|\|y\|} &\geq \sup_{\substack{x\neq 0,\\ T(x)\neq 0}} \frac{\langle T(x), T(x)\rangle}{\|x\|\|T(x)\|}\\
= \sup_{\substack{x\neq 0,\\ T(x)\neq 0}} \frac{\|T(x)\|^2}{\|x\|\|T(x)\|} &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\|
\end{aligned}$$

Portanto, $\|T\| \leq \|b\|$, provando que T é limitado. Agora, suponha que exista outro operador $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ que satisfaz $b(x,y) = \langle S(x), y\rangle$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle S(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle &\Rightarrow \langle S(x), y\rangle - \langle T(x), y\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle S(x) - T(x), y\rangle = 0, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S(x) - T(x) = 0 \Rightarrow S(x) = T(x), \quad \forall x \in H_1.$$

$\square$

4 TEOREMA DE LAX-MILGRAM

O Teorema de Lax–Milgram representa o ponto culminante deste trabalho, configurando-se como um dos resultados mais relevantes da Análise Funcional aplicada.

Neste capítulo, são apresentadas três demonstrações distintas do teorema, cada uma delas explorando um conceito diferente para a demonstração. A primeira é fundamentada no Teorema de Representação de Riesz–Fréchet; em seguida, apresenta-se uma abordagem baseada no Teorema de Hahn–Banach; e, por fim, uma demonstração que utiliza o Teorema do Ponto Fixo de Banach. As referências que serviram como base para as demonstrações se encontram em (Botelho et al., 2012; Kreyszig, 1978; Giacomoni e Giacomoni, 2024; Nunes, 2024)

Teorema 4.1 (Teorema de Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert. Se $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, limitada e coerciva, então para todo $f \in H'$ existe um único $x_f \in H$ tal que*

$$f(y) = b(x_f, y), \quad \forall y \in H.$$

4.1 Demonstração via Teorema de Riesz-Fréchet

A demonstração baseada no Teorema de Representação de Riesz–Fréchet constitui uma das abordagens clássicas para o Teorema de Lax–Milgram e fundamenta-se em propriedades do produto interno.

Demonstração. Sendo b uma forma bilinear limitada, pela Proposição 3.6 existe um único operador $T \in \mathcal{B}(H)$ que satisfaz:

$$b(x, y) = \langle T(x), y \rangle, \quad \forall x, y \in H. \tag{1.1}$$

Vamos mostrar que T é invertível e limitado. De fato, pela coercividade de b e por (1.1), temos a desigualdade

$$c \parallel x \parallel^2 \leq |b(x, x)| = |\langle T(x), x \rangle| \leq \parallel T(x) \parallel \parallel x \parallel, \quad \forall x \in H.$$

Isso resulta na desigualdade

$$\parallel T(x) \parallel \geq c \parallel x \parallel, \quad \forall x \in H. \tag{1.2}$$

Se $T(x) = 0$, então $0 = \parallel T(x) \parallel \geq c \parallel x \parallel$, o que implica que $x = 0$. Portanto, pelo Teorema 3.3, temos que T é invertível e sua inversa T^{-1} é um operador linear.

Vejamos agora que T^{-1} é limitado. Considerando a desigualdade (1.2), temos:

$$\begin{aligned} x = T^{-1}(y) \quad &\Rightarrow \quad c \parallel T^{-1}(y) \parallel \leq \parallel TT^{-1}(y) \parallel \\ &\Rightarrow \quad \parallel T^{-1}(y) \parallel \leq \frac{1}{c} \parallel y \parallel . \end{aligned}$$

Logo, concluímos que T^{-1} é limitado, como queríamos.

Agora, mostraremos que T é um operador sobrejetor em toda a imagem, ou seja, $Im(T) = H$. Veja que, se $y \in \overline{Im(T)}$, então existe uma sequência $T(x_n) \subset Im(T)$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y.$$

Verifiquemos se a sequência (x_n) é de Cauchy. Como $(T(x_n))$ é convergente, então é de Cauchy e, assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\parallel T(x_m) - T(x_n) \parallel < c\epsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Assim, pela desigualdade (1.2), temos:

$$\parallel x_m - x_n \parallel \leq \frac{1}{c} \parallel T(x_m - x_n) \parallel < \frac{1}{c} \cdot c\epsilon = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy e, como H é completo, ela converge para algum $x \in H$. Logo, como T é limitado, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, temos que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$. Isso implica que $T(x) = y$, ou seja, $y \in Im(T)$ e, portanto, $Im(T)$ é fechado.

Sendo $Im(T)$ um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, temos que, de acordo com a Proposição 3.5, podemos escrever

$$H = Im(T) \oplus Im(T)^{\perp}.$$

Agora, observe que se $z \in Im(T)^{\perp}$, então

$$0 = \langle T(z), z \rangle = b(z, z) \geq c \parallel z \parallel^2 .$$

Logo, $z = 0$, e isso implica que $Im(T)^{\perp} = \{0\}$. Daí, concluímos que

$$H = Im(T) \quad \text{e} \quad D(T^{-1}) = H.$$

Pelo Teorema de Riesz-Frechet, para o funcional $f \in H'$, existe um único vetor $x \in H$ tal que

$$f(y) = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

Pela equação (1.1), temos:

$$b(T^{-1}(x), y) = \langle T(T^{-1}(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle = f(y).$$

Portanto, para cada funcional linear contínuo $f \in H'$, existe um único $x_f \in H$ tal que

$$f(y) = b(x_f, y), \quad \forall y \in H,$$

em que $x_f = T^{-1}(x)$, e isso conclui a demonstração do teorema.

□

4.2 Demonstração via Hahn-Banach

Nessa seção iremos trazer uma abordagem diferente do baseada no Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, que depende crucialmente da identificação entre um espaço de Hilbert e seu dual. A demonstração aqui apresentada ressalta o papel da aplicação natural $T : H \to H'$, sem recorrer à representação explícita dos funcionais como produtos internos. Aqui aplicaremos o Teorema 3.5, que é uma consequência do Teorema de Hanh-Banach.

Demonstração. Seja T uma transformação linear $T : H \to H'$ em que, para cada $x \in H$, o funcional $T(x) \in H'$ é dado por

$$T(x)(y) = b(x, y).$$

Vamos provar as seguintes afirmações:

a) T é linear;

b) T é limitada;

c) T é injetiva;

d) $Im(T) = H'$.

a) Linearidade: Vamos primeiramente verificar a linearidade da aplicação T. De fato, para $x_1, x_2 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(x_1 + \lambda x_2)(y) = b(x_1 + \lambda x_2, y) &= b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y) \\ &= T(x_1)(y) + \lambda T(x_2)(y), \quad \forall y \in H. \end{aligned}$$

Portanto, $T(x_1 + \lambda x_2) = T(x_1) + \lambda T(x_2)$, provando que T é uma transformação linear.

b) Limitação: Agora, vamos verificar que T é limitada. De fato, para cada $x \in H$, temos

$$|T(x)(y)| = |b(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|, \ \ \forall y \in H$$

e

$$\|T(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |T(x)(y)| \leq C\|x\|,$$

o que mostra que T é limitada.

c) Injetividade: Vamos provar que T é injetiva utilizando a coercividade da forma bililinear b.

Sabemos que b é coerciva, o que significa que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|b(x,x)| \geq c\|x\|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in H.$$

Note que

$$c\|x\|^2 \leq |b(x,x)| = |T(x)(x)| = \|x\| \left| T(x)\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|x\|\|T(x)\| \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\|\|T(x)\|.$$

Logo, $c\|x\| \leq \|T(x)\|, \forall x \in H$. Assim, se $T(x) \equiv 0$ então $x = 0$, o que prova a injetividade.

d) $Im(T) = H'$ **:** De fato, argumentando por contradição, suponhamos que exista um $\hat{f} \in H'$ tal que $\hat{f} \notin Im(T)$ e $\hat{f} \neq 0$. Aplicando o Teorema 3.5, sabemos que existe um $x_0 \in H''$ tal que $x_0(\hat{f}) > 1$ e $x_0(f) = 0$ para todo $f \in Im(T)$.

Como $H'' \cong H$ (isto é, H é reflexivo), podemos identificar x_0 com um $x_f \in H$, de modo que $\hat{f}(x_f) > 1$ e $f(x_f) = 0, \forall f \in Im(T)$.

Agora, como b é coercivo,

$$c\|x_f\| \leq b(x_f, x_f) = T(x_f)(x_f) = 0,$$

e isso implica que $x_f = 0$. Logo, pela linearidade de $\hat{f}$, temos que $\hat{f}(x_f) = 0$, o que contradiz a condição $\hat{f}(x_f) > 1$. Assim, a suposição de que $\hat{f} \notin Im(T)$ é falsa, e, portanto, $\hat{f} \in Im(T)$, implicando que $Im(T) = H'$.

Portanto, para cada $f \in H'$, existe um $x_f \in H$ tal que:

$$f = T(x_f) \quad \text{e} \quad b(x_f, y) = T(x_f)(y) = f(y), \quad \forall y \in H.$$

Pela injetividade de T, x_f é único. Isso conclui a demonstração do teorema. □

4.3 Demonstração via Teorema do Ponto Fixo de Banach

Agora, apresentamos uma demonstração alternativa do Teorema de Lax-Milgram, fundamentada em conceitos mais abstratos da Análise Funcional. Em vez de tratar diretamente com elementos de H via produto interno, reformulamos o problema como uma equação no espaço dual H', resolvendo-a por meio de técnicas da teoria de operadores e do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Demonstração. Definimos como na demonstração anterior a transformação linear $T : H \to H'$ por:

$$T(x)(y) := b(x, y), \quad \forall x, y \in H.$$

E novamente, segue-se que

a) T é linear;

b) T é limitado;

c) T é injetivo;

d) $Im(T) = H'$.

Alternativamente, podemos provar a existência de solução reformulando o problema como um problema de ponto fixo. Seja $f \in H'$. Nosso objetivo é encontrar $x_f \in H$ tal que:

$$b(x_f, y) = f(y), \quad \forall y \in H.$$

Isso equivale a:

$$T(x_f) = f.$$

Considere o operador linear limitado $\Lambda : H \longrightarrow H'$ dado por

$$\Lambda(x)(y) = \langle x, y \rangle$$

e defina o operador $S : H \longrightarrow H$ por:

$$S(x) := x - \lambda \Lambda^{-1}(T(x) - f),$$

onde $\lambda > 0$ será escolhida adequadamente. Observe que x é ponto fixo de S se, e somente se, $T(x) = f$, ou seja, x é solução do problema original.

Sejam $x, y \in H$ e considere $z = x - y$. Note que

$$\begin{aligned} \|S(x) - S(y)\|^2 &= \|(x-y) - \lambda\Lambda^{-1}T(x-y)\|^2 \\ &= \|z\|^2 + \lambda^2\|\Lambda^{-1}T(z)\|^2 - 2\lambda\langle\Lambda^{-1}T(z), z\rangle \\ &= \|z\|^2 + \lambda^2\|\Lambda^{-1}T(z)\|^2 - 2\lambda T(z)(z) \\ &= \|z\|^2 + \lambda^2\|\Lambda^{-1}T(z)\|^2 - 2\lambda b(z,z) \\ &\leq (1 + \lambda^2 C - 2\lambda c)\|z\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $\lambda < \frac{2c}{C}$, segue-se que S é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 3.6), existe um único ponto fixo $x_f \in H$ tal que $S(x_f) = x_f$, isto é,

$$x_f = x_f - \lambda\Lambda^{-1}(T(x_f) - f) \Rightarrow T(x_f) = f.$$

Portanto, existe e é único o elemento $x_f \in H$ tal que $b(x_f, y) = f(y)$ para todo $y \in H$. $\square$

5 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, foi realizada uma análise aprofundada do Teorema de Lax–Milgram, com foco não apenas em sua formulação clássica, mas também em diferentes estratégias de demonstração e generalizações. Inicialmente, discutiu-se a versão tradicional do teorema em espaços de Hilbert, utilizando o Teorema de Riesz–Fréchets.

Em sequência, foram apresentadas duas abordagens alternativas para a prova: uma baseada no Teorema do Ponto Fixo de Banach e outra que utiliza ferramentas fundamentais da Análise Funcional, como o Teorema de Hahn–Banach. Essas demonstrações reforçam a flexibilidade conceitual do teorema e revelam suas raízes em princípios gerais da teoria dos operadores.

Dessa forma, conclui-se que o estudo do Teorema de Lax–Milgram, em suas diversas versões e abordagens, oferece uma visão rica e interconectada da Análise Funcional moderna, destacando sua importância não apenas teórica, mas também em aplicações concretas que facilitam a resolução de equações diferenciais parciais, o desenvolvimento de métodos numéricos e a modelagem matemática.

A realização deste estudo contribuiu significativamente para o aprofundamento da pesquisa matemática, especialmente no campo da Análise Funcional. Espera-se que esta abordagem forneça uma base sólida para o desenvolvimento de futuros trabalhos nas áreas de Análise Funcional, Teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) e métodos variacionais.

REFERÊNCIAS

BAZÁN, A.; PEREIRA, A. F.; FERNANDEZ, C. de S. **Introdução aos espaços de Banach**. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2023. 125 p. ISBN 978-85-244-0544-0. Disponível em: `https://coloquio34.impa.br/pdf/34CBM03-eBook.pdf`. Acesso em: 25 abr. 2025.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

CIPRA, Barry A. Peter Lax: Mathematician and Peacemaker. SIAM News, v. 38, n. 1, 2005. Disponível em: `https://www.siam.org/news/news.php?id=127`. Acesso em: 15 maio 2025.

DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. 1^a ed. São Paulo: Atual, 1982.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010.

GIACOMONI, G. M.; GIACOMONI, L. **A Banach fixed point approach to the Lax–Milgram lemma**. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Springer, v. 73, p. 1–9, 2024. Disponível em: `https://link.springer.com/article/10.1007/s13398-024-01636-6`. Acesso em: 12 março 2025.

HILBERT, D. **Grundlagen der Mathematik**. Leipzig: Teubner, 1912.

HONIG, C. S. **Aplicações da Topologia à Análise**. 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. 1ª ed. New York: Wiley, 1978.

LAX, Peter D. Autobiography. In: HOLDEN, Helge; PIENE, Ragni (org.). The Abel Prize: 2003–2007: The First Five Years. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 183–189. Disponível em: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-01373-7_8`. Acesso em: 15 maio 2025.

LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1^a ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. **Análise Real**, vol. 2. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real**, vol. 1. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MELIS, D. Á. **El Teorema de Lax-Milgram: Generalizaciones y Aplicaciones**. Trabajo de Conclusión de Curso (Licenciatura en Matemática) — Universidad de Lancaster, 2025. Disponível em: `https://dmelis.github.io/assets/publications/BS_thesis/BSThesis.pdf`. Acesso em: 25 abr. 2025.

MILGRAM, A. R. **Decompositions and Dimension of Closed Sets in $\mathbb{R}^n$**. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 44, n. 3, p. 403–425, 1938.

NUNES, E. da S. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua relação com alguns resultados de Análise Funcional**. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) – UFPB. Disponível em: `https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/33480`. Acesso em: 18 jun. 2025.

OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

PELEGRINI, L. **Notas de aula**. 2025. Disponível em: `https://www.ime.usp.br/ leonardo/notas.pdf`. Acesso em: 25 abr. 2025.

QUARTERONI, A.; VALLI, A. **Numerical Approximation of Partial Differential Equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1994. (Springer Series in Computational Mathematics, v. 23).

SOBOLEV, S. L. **Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics**. Leningrado: Leningrad University Press, 1938.

ZEIDLER, E. **Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics**. New York: Springer-Verlag, 1995.

BARANY, Michael J.; SHIELDS, Brit. **Peter Lax, pre-eminent Cold War mathematician, is dead at 99**. The New York Times, 19 maio 2025. Disponível em: `https://www.nytimes.com/2025/05/16/science/peter-lax-dead.html`. Acesso em: 09 jun. 2025.