UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EZEQUIEL DE FARIAS RAMOS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DAS CÔNICAS

CAMPINA GRANDE
2025

EZEQUIEL DE FARIAS RAMOS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DAS CÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE
2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

R175g Ramos, Ezequiel de Farias.

O GeoGebra como ferramenta didática no ensino das cônicas [manuscrito] / Ezequiel de Farias Ramos. - 2025.

84 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo, Departamento de Matemática - CCT".

1. GeoGebra. 2. Sequência Didática. 3. Cônica. 4. Softwares educacionais. 5. Tecnologia na educação. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

EZEQUIEL DE FARIAS RAMOS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DAS CÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 27/05/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Israel Burití Galvão** (***.241.144-**), em **09/06/2025 10:17:33** com chave **1aaa5eee453411f0bf3306adb0a3afce**.
- **Aldo Trajano Louredo** (***.317.454-**), em **09/06/2025 09:13:59** com chave **3940dfa8452b11f0ad5006adb0a3afce**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **09/06/2025 09:15:23** com chave **6b5c2010452b11f092201a1c3150b54b**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 09/06/2025
Código de Autenticação: b01641

Dedico este trabalho a Deus, por ser minha fonte de força, sabedoria e inspiração, e a minha família, por todo o apoio e incentivo durante essa jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus, pela força e orientação ao longo desta trajetória.

Aos meus pais, Inácio e Maria do Carmo, que sempre foram a base do meu desenvolvimento e a fonte da minha inspiração.

Aos meus irmãos Izaías, Izabel, Daniel, Moisés, Bernadete, Karolina, Beatriz e Euflaudizia, que contribuíram de forma significativa para minha trajetória.

Aos meus avós maternos, Sebastião (in memoriam) e Terezinha (in memoriam), e aos meus avós paternos, Manoel (in memoriam) e Dalzira (in memoriam), rendo minha homenagem e gratidão eterna, por suas histórias de vida, valores e exemplos que continuam vivos em mim.

Ao meu orientador, Aldo Trajano Lourêdo, pela orientação e pelo suporte inestimáveis durante a elaboração deste trabalho.

Aos membros da banca, meus professores Israel Buriti Galvão e Luciana Roze de Freitas, pelas valiosas contribuições.

Aos meus colegas de classe, pela convivência, pelo incentivo mútuo e pelas trocas de experiências que tanto enriqueceram minha jornada. Em especial, agradeço à Ana Carolina, Anderson, Evaldo e Jederson, companheiros desde o início desta caminhada, cuja amizade e parceria foram imprescindíveis para superar os desafios do percurso.

A todos os professores, desde o ensino fundamental até a graduação, agradeço pelas lições transmitidas e pela dedicação constante, que foram fundamentais para a minha formação e crescimento acadêmico.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), pela oportunidade de formação e pelos recursos disponibilizados ao longo do curso.

À cidade de Campina Grande, por ter sido o cenário dessa fase tão importante da minha vida, acolhendo-me com tantas experiências e aprendizados.

Por fim, minha sincera gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, e a todos que estiveram ao meu lado ao longo dessa jornada.

"Buscai primeiro o Reino de Deus, e a sua justiça, e todas estas coisas vos serão acrescentadas." Mateus 6:33

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino das cônicas no ensino médio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta didática. Considerando as dificuldades enfrentadas por alunos e professores na abordagem desse conteúdo, a proposta busca tornar o estudo das cônicas mais dinâmico, atrativo e eficaz. Para isso, foi elaborada uma sequência didática que integra aspectos históricos, geométricos e algébricos das curvas elipse, parábola e hipérbole, com instruções detalhadas de construção no GeoGebra. A proposta visa contribuir para a prática pedagógica de professores da educação básica, oferecendo um recurso acessível que favoreça a compreensão e o interesse dos estudantes, além de prepará-los melhor para avaliações como o ENEM, onde esse conteúdo é frequentemente cobrado.

Palavras-chave: GeoGebra; sequência didática; cônica.

ABSTRACT

This paper presents a proposal for teaching conics in high school, using the GeoGebra software as a didactic tool. Considering the difficulties faced by by students and teachers in the approach to this content, the proposal seeks to make the study of conics more dynamic, attractive and effective. For this, a didactic sequence that integrates historical, geometric and algebraic aspects of the curves ellipse, parabola and hyperbola, with detailed construction instructions in GeoGebra. The proposal aims to contribute to the pedagogical practice of basic education teachers, offering an accessible resource that favors students' understanding and interest in addition to better preparing them for assessments such as ENEM, where this content is frequently charged.

Keywords: GeoGebra; didactic sequence; conic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 ASPECTOS HISTÓRICOS 11
2.1 Surgimento da Geometria Analítica 11
2.2 Seções Cônicas 13

3 RESULTADOS BÁSICOS 19
3.1 Elipse 19
3.1.1 Equação da Elipse 20
3.1.2 A Parametrização da Elipse 21
3.2 Parábola 23
3.2.1 Equação da Parábola 23
3.3 Hipérbole 24
3.3.1 Equação da Hipérbole 26
3.4 Simplificação da Equação Geral de uma Curva de Segundo Grau 27
3.5 Aplicação do Teorema 38

4 O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS CÔNICAS 42
4.1 O software GeoGebra 42
4.2 Construção da Elipse no GeoGebra 43
4.3 Construção da Parábola no GeoGebra 50
4.4 Construção da Hipérbole no GeoGebra 57
4.5 Identificação das Cônicas no GeoGebra 69
4.5.1 Principais casos 69

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 71
5.1 Definição de Sequência Didática 71
5.2 Sequência Didática Proposta 72

6 CONCLUSÃO 77

REFERÊNCIAS 78

APÊNDICE A – ATIVIDADE I 79

APÊNDICE B – ATIVIDADE II 81

APÊNDICE C – QUESTÕES SOBRE CÔNICAS - ENEM . . 83

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática, em especial no contexto da educação básica, tem enfrentado constantes desafios, sobretudo no que se refere à construção de um aprendizado significativo e conectado à realidade dos estudantes. Em um cenário marcado por rápidas transformações tecnológicas e sociais, repensar as práticas pedagógicas torna-se essencial para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, atrativo e eficaz.

Entre os conteúdos matemáticos frequentemente considerados complexos e abstratos pelos alunos, destacam-se as seções cônicas. Apesar de sua importância teórica e prática em áreas como física, engenharia, astronomia e arquitetura, as cônicas costumam ser abordadas de maneira superficial no ensino médio, muitas vezes limitadas à manipulação algébrica, sem proporcionar aos alunos uma compreensão mais ampla e significativa do conteúdo.

Além disso, esse conteúdo continua sendo cobrado em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (disponível no Apêndice C), o que reforça a necessidade de abordagens mais eficazes. O ENEM valoriza competências como a resolução de problemas, a interpretação de gráficos e a compreensão de situações do cotidiano, o que exige dos estudantes não apenas domínio técnico, mas também capacidade de visualizar e aplicar conceitos matemáticos em contextos variados.

Neste cenário, o uso de tecnologias educacionais surge como um aliado importante no processo de ensino-aprendizagem. Este trabalho propõe uma abordagem metodológica para o ensino das cônicas (elipse, parábola e hipérbole) a partir da utilização do software GeoGebra, uma ferramenta gratuita e acessível que permite a construção dinâmica de representações geométricas. Por meio do GeoGebra, é possível integrar os aspectos algébricos e geométricos das curvas, proporcionando aos estudantes uma experiência mais concreta, investigativa e interativa.

A proposta aqui apresentada contempla uma sequência didática que visa articular os fundamentos históricos, conceituais e formais das seções cônicas com o uso pedagógico do GeoGebra. Além de ampliar a compreensão dos alunos, a proposta também busca colaborar com a prática docente, oferecendo um recurso que pode ser facilmente incorporado ao cotidiano escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018), em uma de suas competências gerais, destaca a importância de:

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva."(BRASIL, 2018)

Dessa forma, o uso do GeoGebra no ensino das cônicas reforça as diretrizes da BNCC

ao aliar tecnologia e visualização matemática, tornando o conteúdo mais acessível e envolvente para os estudantes.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: inicialmente, discutem-se aspectos históricos relacionados à geometria analítica e às seções cônicas. Em seguida, apresentam-se os fundamentos matemáticos das cônicas, suas equações e propriedades. Posteriormente, são detalhadas as construções das curvas no GeoGebra, seguidas da apresentação da sequência didática elaborada. Por fim, são discutidas as contribuições dessa proposta para a prática docente e para a aprendizagem dos alunos.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para o enriquecimento das práticas pedagógicas no ensino da matemática, especialmente no que se refere ao ensino das cônicas, promovendo uma aprendizagem mais significativa, contextualizada e alinhada com as possibilidades que as tecnologias educacionais oferecem.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

A Geometria Analítica conecta a álgebra à geometria, permitindo descrever curvas geométricas, como as seções cônicas, por meio de equações. Nesse sentido, elipses, parábolas e hipérboles ganham destaque, pois suas propriedades podem ser representadas analiticamente, unindo esses dois campos da matemática.

Neste capítulo, será apresentado o surgimento da Geometria Analítica, com ênfase nas contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat. Logo em seguida, serão abordadas as contribuições de Menecmo e Apolônio de Perga para a origem e evolução histórica das seções cônicas.

2.1 Surgimento da Geometria Analítica

Segundo Eves (2011), a geometria analítica surgiu no século XVII com as contribuições decisivas dos matemáticos franceses René Descartes (1596 - 1650) e Pierre de Fermat (1601 - 1665). Diferentemente da geometria projetiva, que é um ramo específico da geometria, a geometria analítica é um método que transforma problemas geométricos em questões algébricas. Esse método consiste em estabelecer uma correspondência entre os pontos do plano e pares ordenados de números reais, o que permite associar curvas do plano a equações algébricas em duas variáveis, como $f(x, y) = 0$. Assim, propriedades geométricas de curvas podem ser analisadas por meio das propriedades das equações associadas, o que facilita a resolução de problemas geométricos através da álgebra.

> "Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois matemáticos à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados". (EVES, 2011)

Já Boyer (1974), em sua obra, destaca que embora não esteja claro se René Descartes (Figura 1) já dominava completamente o conceito em 1628, sabe-se que, ao resolver o problema das três e quatro retas de Papus, ele reconheceu a força de seu novo método matemático. Isso o motivou a escrever a obra *La Géométrie*, que levou a geometria analítica ao conhecimento de seus contemporâneos.

Figura 1 – René Descartes

Fonte: Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

Descartes, em sua obra *La Géométrie*, afirmou que "Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para sua construção". Essa frase indica que o objetivo é geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria à álgebra. Seu método consistia em traduzir problemas geométricos para equações algébricas e resolvê-los geometricamente. Dessa forma, a obra demonstra a aplicação mútua entre Álgebra e Geometria. No entanto, a omissão de detalhes tornou-a difícil de entender por seus contemporâneos. Descartes justificou essa falta de explicações, afirmando que deixou partes ocultas para preservar a alegria da descoberta para os leitores (BOYER, 1974).

Além das contribuições de René Descartes para a geometria analítica, Pierre de Fermat (Figura 2), por sua vez, também desempenhou um papel crucial, embora menos reconhecido em vida.

Figura 2 – Pierre de Fermat

Fonte: Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

Em 1629, Fermat começou a fazer descobertas significativas, inclusive a reconstrução de obras matemáticas antigas, como os *Lugares Geométricos* de Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.), com base em informações de tratados clássicos (BOYER, 1974). Além disso, há indícios de que nesse mesmo ano ele começou a ter as primeiras ideias sobre geometria analítica, como relata Smith (1958), "Fermat, em uma carta ao matemático Gilles Persone Roberval, escrita 22 de setembro de 1636 e, portanto, no ano anterior a Descartes publicou *La Geometrie*, Fermat mostra que já tinha ideias de geometria analítica cerca de sete anos antes, isto é, em 1629".

Em 1636, Fermat formulou o princípio fundamental da geometria analítica: "Sempre que em uma equação final encontram-se duas incógnitas, temos um lugar geométrico, a extremidade de um deles descrevendo uma linha, reta ou curva".

Tanto para Fermat quanto para Descartes, uma curva representava a relação entre as incógnitas, que hoje interpretamos como a expressão algébrica de uma função. Assim, a curva servia como um lugar geométrico que estabelecia essa conexão.

Enquanto Descartes construíra sua Geometria em torno do difícil problema de Papus, Fermat focou em lugares geométricos mais simples, conforme exposto em seu tratado intitulado *Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos*. No entanto, sua obra não foi publicada durante sua vida, o que levou muitos a acreditar que a geometria analítica era exclusivamente uma invenção de Descartes. Somente em 1679, após a morte de Fermat, seus manuscritos foram publicados na coleção Varia Opera Mathematica. Boyer (1974) ressalta que a abordagem de Fermat era mais sistemática e próxima da geometria analítica moderna, com o uso de coordenadas ordenadas geralmente perpendiculares ao eixo das abscissas.

Antes da consolidação dessas ideias, houve tentativas antigas de usar coordenadas, como no caso dos egípcios e romanos em práticas de agrimensura, e dos gregos, que desenvolveram uma forma primitiva de álgebra geométrica. No entanto, a verdadeira essência da geometria analítica, que consiste na transformação de problemas geométricos em problemas algébricos, só se concretizou com os avanços algébricos e o uso de símbolos mais modernos, alcançados por Descartes e Fermat (EVES, 2011).

2.2 Seções Cônicas

O estudo das seções cônicas se deu antes mesmo da formação da Geometria Analítica. Esse campo do conhecimento remonta a um período entre 440 a.C. e 212 a.C., quando começaram a surgir problemas relacionados ao estudo das seções de um cone reto de revolução por planos perpendiculares a uma de suas geratrizes. Um exemplo notável desse período é a busca pela solução do problema conhecido como Duplicação do Cubo, proposto pelos gregos. O problema consiste em encontrar, usando apenas régua e compasso, a aresta

de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado.

O problema da Duplicação do Cubo é fruto de várias versões históricas. Conforme Eves (2011), uma delas se baseia na história do rei Minos, que, insatisfeito com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco, ordenou que fosse dobrado. Minos acreditava erroneamente que, para isso, bastaria dobrar as dimensões do túmulo. Esse equívoco motivou os matemáticos a investigar como dobrar o volume de um sólido sem alterar sua forma.

Outra versão afirma que:

> "Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, foi a origem do problema da "duplicação do cubo", que a partir daí foi geralmente designado como "problema deliano" — dada a aresta de um cubo, construir apenas com régua e compasso a aresta de um segundo cubo, que tenha o dobro do volume do primeiro". (BOYER, 1974)

O desafio, posteriormente, foi então submetido a Platão, que o apresentou aos matemáticos de sua época, intensificando os estudos sobre o tema.

Segundo Eves (2011), o primeiro avanço da sua solução foi feito por Hipócrates (c. 440 a.C.), que simplificou o problema para a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de comprimentos, s e $2s$. Definindo x e y as médias proporcionais, temos:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}.$$

Diante disso, resulta que

$$x^2 = sy \Rightarrow x^4 = s^2y^2 \quad \text{e} \quad y^2 = 2sx.$$

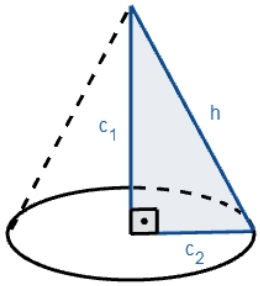
Eliminando-se o y, resulta que

$$x^3 = 2s^3 \Rightarrow x = s\sqrt[3]{2}.$$

Dessa forma, x representa a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo com aresta s.

A partir desse resultado, entra em cena um grande matemático grego chamado Menecmo de Atenas (380 a.C. - 320 a.C.). Menecmo, amigo de Platão e discípulo de Eudoxo de Cnido, com os conhecimentos gregos dos séculos IV e III a.C., gerou três tipos de cones a partir da rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos.

Figura 3 – Cone gerado pela rotação de um triângulo retângulo

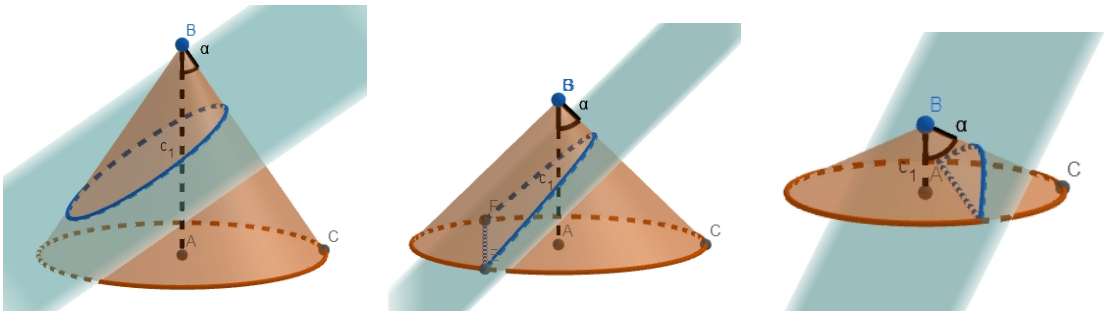


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Posteriormente, Menecmo fez uma descoberta importante ao encontrar curvas com as propriedades necessárias. Ele percebeu que essas curvas surgiam ao cortar um cone circular reto com um plano perpendicular a um de seus lados. Dessa forma, Menecmo parece ter descoberto as curvas que mais tarde seriam chamadas de elipse, parábola e hipérbole (BOYER, 1974).

Como vemos na Figura 3, a hipotenusa h é a geratriz do cone, e, c_1 e c_2, os catetos. Considerando um plano que seja perpendicular à geratriz (hipotenusa), torna-se possível a análise de cada tipo de curva. Ao observar o ângulo $\hat{\alpha}$ (Figura 4) formado entre a geratriz (hipotenusa) e o eixo do cone (cateto vertical), é possível definir três tipos de cones. Quando $2\hat{\alpha} < 90°$, o cone é acutângulo, o que gera uma elipse; quando $2\hat{\alpha} = 90°$, trata-se de um cone retângulo, resultando em uma parábola; e quando $2\hat{\alpha} > 90°$, o cone é obtusângulo, obtendo, assim, uma hipérbole.

Figura 4 – Curvas cônicas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Portanto, os historiadores acreditam que Menecmo foi o pioneiro no estudo das curvas cônicas. Acredita-se que ele tenha utilizado essas curvas como uma ferramenta para resolver o clássico Problema da Duplicação do Cubo.

Embora Menecmo seja visto como o precursor no estudo das seções cônicas, é o matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.) quem tem a principal associação histórica com essas curvas. Apolônio, conhecido como "O Grande Geômetra", foi o autor de uma obra de grande relevância intitulada "As Cônicas", composta por oito

livros com 400 proposições. Desses, os quatro primeiros foram escritos em grego, enquanto os três seguintes foram traduzidos para o árabe. Infelizmente, o oitavo volume dessa obra foi perdido (EVES, 2011).

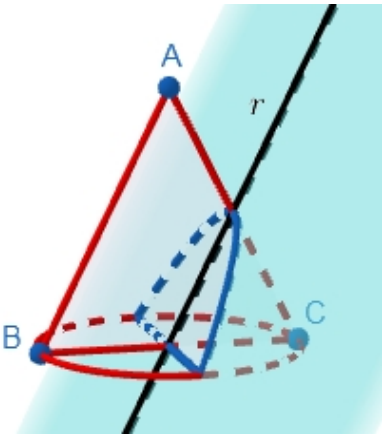
Segundo Lopes (2011), Apolônio concebeu a ideia de que não é necessário fazer cortes perpendiculares à geratriz de um cone. Ele mostrou que é possível obter as três diferentes espécies de seções cônicas a partir de um único cone, bastando apenas alterar a inclinação do plano da seção.

Nas seguintes figuras, a reta r corresponde à interseção entre os planos de corte e o triângulo axial[1]. Assim, a natureza da seção cônica formada depende da posição de r em relação aos lados desse triângulo.

Se r for paralelo a um dos lados do triângulo axial, a interseção com o cone resultará em uma parábola, como vemos na Figura 5.

Já se r cruzar um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado além do vértice A, a seção resultante será uma hipérbole (Figura 6). Nesse caso, a curva terá dois ramos distintos, diferentemente da hipérbole gerada quando o cone possui ângulo obtuso.

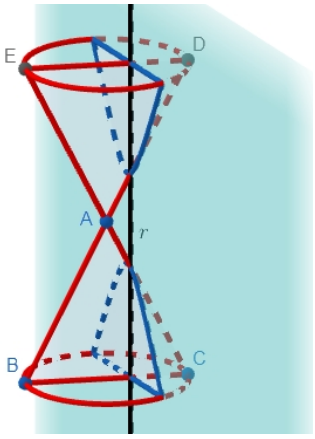
Figura 5 – Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

[1] Um "triângulo axial", no contexto geométrico, refere-se a um triângulo que possui simetria axial, ou seja, uma reta pode ser traçada de forma a dividir o triângulo em duas partes idênticas, como se fossem reflexões uma da outra. Essa reta é chamada de eixo de simetria.

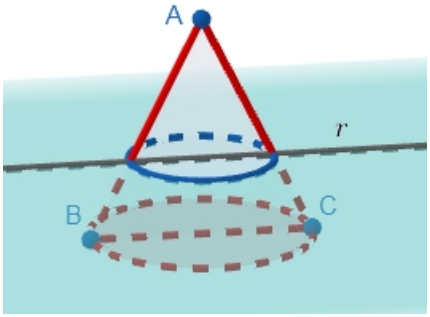
Figura 6 – Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

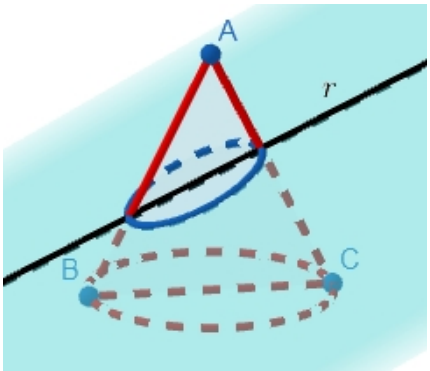
Se for traçado um plano perpendicular ao eixo de rotação, ele cortará o cone, resultando em uma seção com formato de círculo (Figura 7). E por fim, se a reta r interceptar ambos os lados do triângulo axial, de modo que não seja nem paralela à hipotenusa nem ao eixo de rotação, a interseção com o cone resultará em uma elipse (Figura 8).

Figura 7 – Círculo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 8 – Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Esse avanço foi crucial para estabelecer uma relação entre os três tipos de curvas. Introduzir um plano que atravessasse um cone, explorando como a inclinação e a posição desse plano afetariam a forma das curvas geradas na interseção.

Eves (2011) afirma que os termos *elipse*, *parábola* e *hipérbole* foram introduzidos pelo próprio Apolônio e têm origem na terminologia pitagórica antiga, a qual estava relacionada à aplicação de áreas.

> "Antes de Apolônio, os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo."(EVES, 2011)

Dessa forma, as contribuições de Apolônio foram fundamentais para a sistematização do estudo das cônicas, consolidando uma abordagem geométrica mais generalizada e independente do tipo de cone gerador.

3 RESULTADOS BÁSICOS

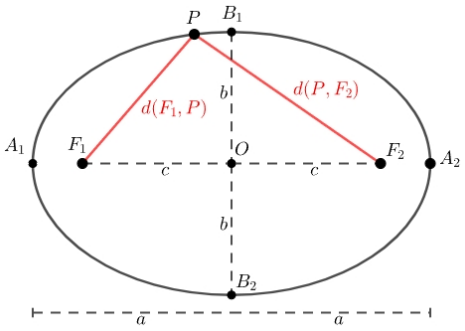
Neste capítulo, são apresentadas as definições clássicas da elipse, parábola e hipérbole, baseando-se nas propriedades geométricas que distinguem cada uma dessas cônicas. Boa parte das definições e demonstrações apresentadas foi extraída do livro intitulado *Geometria Analítica* de Genésio Lima dos Reis e Valdir Vilmar da Silva (1996). Posteriormente, serão abordados os elementos fundamentais, seguidos pelo desenvolvimento detalhado das equações canônicas dessas curvas, inclusive a parametrização da elipse. Além disso, o capítulo aborda o teorema da Simplificação da Equação Geral de uma Curva de Segundo Grau, prosposto por Aref Neto Antar (1980) e demonstrado pelo livro *Elementos de Geometria Analítica* de Nikolai Efimov (1972).

3.1 Elipse

Nesta seção apresentaremos o conceito de elipse, a dedução de sua equação e algumas propriedades. Mais adiante, no próximo capítulo, disponibilizaremos um tutorial animado detalhando o passo a passo da construção da elipse no GeoGebra.

Definição 3.1 Dados dois pontos F_1 e F_2, chamados de focos, que pertencem a um único plano β, e o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$. O conjunto de todos os pontos P de β, cuja soma da distância entre P e F_1 com a distância entre P e F_2 é igual a uma constante $2a$, é chamado de elipse.

Figura 9 – Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em outras palavras, se um ponto P pertence a uma elipse, então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \tag{3.1}$$

A partir da Figura 9, podemos definir alguns elementos da elipse, sendo eles:

- Focos: F_1 e F_2

- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- Eixo maior: $\overline{A_1A_2} = 2a$
- Eixo menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- Relação pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$

Para compreender a relação pitagórica, considere o triângulo retângulo $\triangle OB_1F_2$. Como O é o ponto de interseção entre os eixos da elipse, os segmentos $\overline{OB_1} = b$ e $\overline{OF_2} = c$ são perpendiculares. Assim, o triângulo $\triangle OB_1F_2$ é retângulo em O.

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$\overline{F_2B_1}^2 = \overline{OF_2}^2 + \overline{OB_1}^2 = c^2 + b^2.$$

Como o ponto B_1 pertence à elipse, a distância $\overline{F_2B_1}$ corresponde ao semi-eixo maior a. Portanto:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Essa é a **relação pitagórica da elipse**, que conecta os três principais elementos da elipse: o semi-eixo maior a, o semi-eixo menor b e a distância do centro ao foco c.

3.1.1 Equação da Elipse

A partir dessas informações e da Figura 9, vamos deduzir a equação da elipse para o caso particular em que o centro está na origem do sistema cartesiano ortogonal e os focos se encontram nos eixos coordenados. Nesse sentido, temos dois casos a observar:

1° caso. Quando os focos estão sobre o eixo x: As distâncias de um ponto $P(x, y)$ aos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ são dadas, respectivamente, por

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.2}$$

Segundo a definição da elipse, $d_1 + d_2 = 2a$. Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (cx - a^2)^2 &= \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3.3}$$

Ora, pela relação pitagórica,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3),

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2, resulta em

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.5}$$

que é a equação da elipse.

Para fins de curiosidade, o segundo caso é análogo ao primeiro, porém os focos estarão sobre o eixo y, com $P(x, y)$ sendo um ponto qualquer da elipse e os focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. A equação para esse segundo caso seria da forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3.6}$$

3.1.2 A Parametrização da Elipse

No ensino médio, a parametrização da elipse geralmente não é abordada, o que limita a compreensão completa dessa cônica. É interessante que os professores considerem introduzir esse assunto, pois a parametrização permite uma visão mais ampla das propriedades da elipse e suas diversas aplicações.

A parametrização da elipse é apresentada da seguinte forma:

Como a equação da elipse pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

segue-se que o ponto $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ está situado no círculo unitário e, consequentemente, a elipse pode ser descrita pelo conjunto de pontos

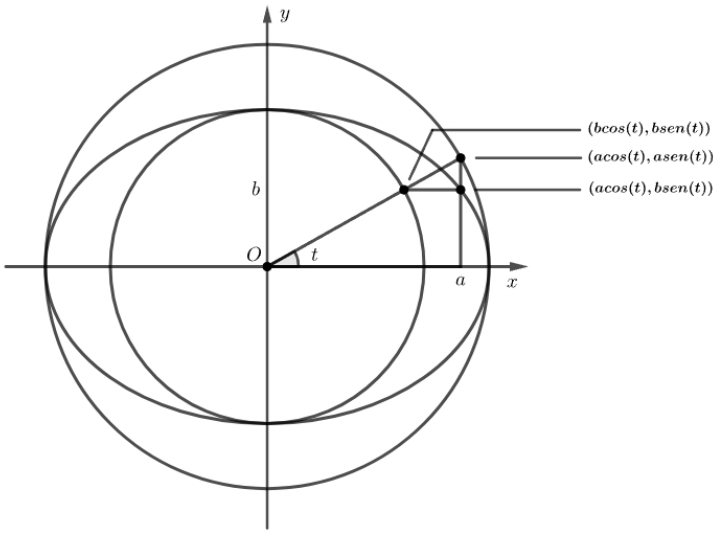
$$\left\{(x, y) \mid \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

A partir disso, encontramos imediatamente uma parametrização da elipse, ou seja, uma descrição dos pontos na curva da elipse por um único parâmetro, neste caso, o parâmetro t.

Teorema 3.1. *Em um sistema padrão de coordenadas retangulares xy no plano euclidiano, a elipse com semieixo maior a e semieixo menor b pode ser descrita pela parametrização*

$$(x, y) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Figura 10 – Parametrização da Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A partir da parametrização da elipse acima, percebe-se facilmente que a elipse pode ser construída a partir do círculo com o semieixo maior como diâmetro, comprimindo-o na razão $\frac{b}{a}$ em torno do eixo maior ou, alternativamente, a partir do círculo com o semieixo menor como diâmetro, ampliando-o na razão $\frac{a}{b}$ em torno do semieixo menor, (Figura 10).

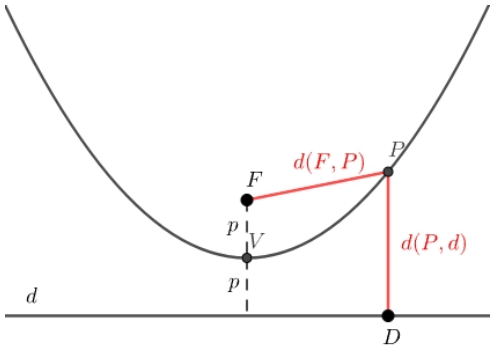
Pode-se usar isso para provar que a sombra de um círculo (ou disco) projetada sobre uma superfície plana por raios de luz paralelos é sempre uma elipse. De fato, existe um diâmetro no círculo ortogonal aos raios de luz, de modo que a sombra do círculo é congruente à elipse obtida ao comprimir o círculo em uma certa razão ao longo desse diâmetro. Esse diâmetro é único, exceto quando os raios de luz são ortogonais tanto ao plano do círculo quanto ao plano da sombra. Um caso degenerado ocorre quando o plano do círculo é paralelo aos raios de luz, nesse caso, a sombra é um segmento de linha.

3.2 Parábola

Nesta seção, exploraremos a definição de uma parábola, a derivação de sua equação e alguns de seus elementos. Semelhante à elipse, mais à frente acompanharemos um tutorial animado no GeoGebra que ilustra cada etapa de sua construção.

Definição 3.2 Dada uma reta d (chamada de reta diretriz) e um ponto F (chamado de foco) que não pertence a essa reta, mas ambos pertencentes ao mesmo plano β, uma parábola é o conjunto de todos os pontos P de β, no qual a distância de P até F é igual à distância de P até d.

Figura 11 – Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Portanto, o ponto P pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, d). \tag{3.7}$$

Os elementos de uma parábola são dados por:

- Foco: F
- Vértice: V
- Reta diretriz: d
- Parâmetro: $d(F, d) = 2p$.

3.2.1 Equação da Parábola

No que segue, deduziremos a equação da parábola.

Consideramos o caso em que o eixo da parábola coincide com um dos eixos coordenados e o vértice está na origem. Isso resulta em quatro casos distintos.

1° caso. Quando o foco estiver na parte positiva do eixo y e a reta diretriz for paralela ao eixo x, com parâmetro $2p$.

Nesse sentido, as distâncias do ponto $P(x,y)$ ao foco $F(0,p)$ e à reta diretriz $y=-p$ são dadas, respectivamente, por

$$d_1 = \sqrt{x^2+(y-p)^2} \quad \text{e} \quad d_2 = |y+p|. \tag{3.8}$$

Pela definição da parábola, $d_1 = d_2$. Logo, por (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+(y-p)^2} &= |y+p| \\ \Rightarrow (\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 &= (|y+p|)^2. \end{aligned}$$

Desenvolvendo, obtemos

$$x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p}, \tag{3.9}$$

que é a equação da parábola.

Os outros casos se diferenciam pela orientação da parábola em relação aos eixos coordenados e à posição da reta diretriz e têm como equações

$$y = -\frac{x^2}{4p}, \quad x = \frac{y^2}{4p} \quad \text{e} \quad x = -\frac{y^2}{4p}. \tag{3.10}$$

3.3 Hipérbole

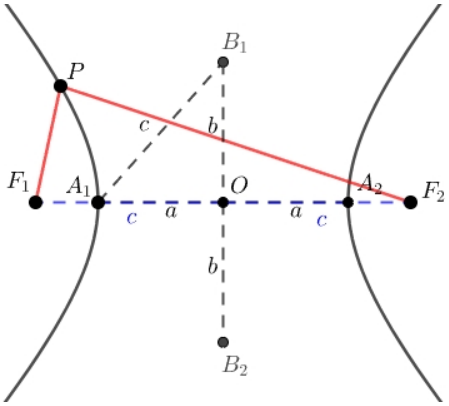
Nesta seção, abordaremos o conceito de hipérbole, a dedução de sua equação e suas propriedades essenciais. Assim como a elipse e parábola, através de um tutorial animado no GeoGebra, explicaremos de forma clara o processo da construção da hipérbole.

Definição 3.3 Dados dois pontos F_1 e F_2 (chamados de focos) do plano β, sendo $2c$ a distância entre esses pontos, a hipérbole é o conjunto de pontos P do plano β no qual a diferença entre $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é sempre a igual a uma constante $2a$. Essa diferença, porém, somente é avaliada em módulo.

Dessa forma, um ponto P é um ponto da hipérbole se

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a. \tag{3.11}$$

Figura 12 – Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Analisando a Figura 12, deduzimos os elementos de uma hipérbole:

- Focos: F_1 e F_2
- Vértices: A_1 e A_2
- Eixo real: $\overline{A_1A_2} = 2a$
- Eixo imaginário: $\overline{B_1B_2} = 2b$
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- Relação pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$

Assim como na elipse, também é possível estabelecer uma relação pitagórica na hipérbole utilizando seus elementos fundamentais.

Para compreender essa relação, considere o triângulo retângulo $\triangle OA_1B_1$. Como O é o ponto de interseção entre os eixos da hipérbole, os segmentos $\overline{OA_1} = a$ e $\overline{OB_1} = b$ são perpendiculares. Assim, o triângulo $\triangle OA_1B_1$ é retângulo em O.

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 = a^2 + b^2.$$

No entanto, observe que o segmento $\overline{A_1B_1} = \overline{F_1O} = c$. Logo,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Essa é a **relação pitagórica da hipérbole** que conecta os três principais elementos da hipérbole: o semi-eixo real a, o semi-eixo imaginário b e a distância do centro ao foco c (distância de A_1 a B_1).

3.3.1 Equação da Hipérbole

Nesta seção deduziremos a equação da hipérbole.

Consideramos o caso em que a origem do sistema de coordenadas seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ e que os focos se encontrem em um de seus eixos. Assim como a elipse, para a hipérbole temos dois casos.

1° caso. Quando os focos estão sobre o eixo x, as distâncias de um ponto $P(x,y)$ aos focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ são dadas por

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{3.12}$$

A diferença entre essas distâncias é constante e igual a $2a$. Nesse caso, pela definição da hipérbole,

$$|d_1 - d_2| = 2a.$$

Substituindo as distâncias, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| &= 2a \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \pm 2a. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo processo que fizemos para a elipse, elevando ao quadrado, eliminando os radicais e isolando alguns termos, obtemos

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{3.13}$$

Sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.13), obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2, resulta em

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.15}$$

que é a equação da hipérbole.

Para o segundo caso, os focos, $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, estarão sobre o eixo y e $P(x,y)$, um ponto qualquer da hipérbole. Sua equação seria:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3.16}$$

3.4 Simplificação da Equação Geral de uma Curva de Segundo Grau

Nos parágrafos a seguir, nosso principal objetivo será simplificar a equação geral de segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.17}$$

e, ao mesmo tempo, identificar todas as possíveis variedades de curvas de segundo grau. A simplificação dessa equação é alcançada por meio de uma transformação adequada dos eixos de coordenadas. Como veremos, ao utilizar um novo sistema de coordenadas, podemos reduzir a equação de segundo grau a uma forma que contenha, no máximo, três termos no primeiro membro.

Antes de avançarmos com a abordagem do problema, é importante destacar as condições sob as quais a maioria dos coeficientes da equação podem ser eliminados, desde que os coeficientes B, D e E sejam divididos por 2. Assim, a equação geral do segundo grau pode ser reescrita como:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{3.18}$$

Dessa forma, definiremos os coeficientes B, D e E como sendo metade dos valores correspondentes. Por exemplo, para a equação:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 4y + 1 = 0, \tag{3.19}$$

os coeficientes serão:

$$A = 1, B = \frac{3}{2}, C = 2, D = \frac{5}{2}, E = 2, F = 1.$$

Essa forma, que chamaremos de equação geral de segundo grau (3.18), tem como coeficientes as letras A, B, C, D, E e F. Vale lembrar que o uso das letras B, D e E segue uma convenção para facilitar o desenvolvimento da análise.

Inicialmente, vamos demonstrar a simplificação da equação de uma curva de segundo grau por transferência da origem das coordenadas para o centro, conforme Aref (1980).

Teorema 3.2. *Seja dada a equação de uma cônica do segundo grau:*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes reais. Definimos os valores Δ, δ e I da seguinte forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad e \quad I = A + C.$$

A depender dos valores de Δ, δ e I, a equação $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ pode descrever diferentes tipos de cônicas: uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, duas retas, um único ponto ou até mesmo o conjunto vazio.

Os casos possíveis são descritos a seguir:

1. Se $\Delta \neq 0$, $\delta > 0$ e $\Delta \cdot I < 0$, a equação representa uma **elipse**. Caso, adicionalmente, $A = C$ e $B = 0$, a figura descrita é uma **circunferência**.

2. Se $\Delta \neq 0$ e $\delta = 0$, a equação corresponde a uma **parábola**.

3. Se $\Delta \neq 0$ e $\delta < 0$, a equação descreve uma **hipérbole**.

4. Se $\Delta \neq 0$, $\delta > 0$ e $\Delta \cdot I > 0$, o conjunto de soluções é o **conjunto vazio**.

5. Se $\Delta = 0$ e $\delta \neq 0$, a equação pode representar **duas retas**, um **ponto único** ou até mesmo o **conjunto vazio**.

Demonstração: Seja a equação de uma curva do segundo grau:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{3.20}$$

Vamos primeiro ver como essa equação se transforma por uma translação paralela dos eixos. Suponhamos que os eixos de coordenadas sejam deslocados paralelamente a si mesmos, de modo que a origem das coordenadas se mova para um ponto $S(x_0, y_0)$. Designemos por $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ as novas coordenadas de um ponto qualquer do plano, e por x e y as antigas coordenadas do mesmo ponto. Teremos então:

$$x = \widetilde{x} + x_0, \quad y = \widetilde{y} + y_0. \tag{3.21}$$

Substituindo as antigas coordenadas na equação pelas expressões obtidas em função das novas coordenadas, obtemos:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= \\ A(\widetilde{x} + x_0)^2 + 2B(\widetilde{x} + x_0)(\widetilde{y} + y_0) + C(\widetilde{y} + y_0)^2 + 2D(\widetilde{x} + x_0) + 2E(\widetilde{y} + y_0) + F &= \\ A\widetilde{x}^2 + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y}^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)\widetilde{x} + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)\widetilde{y} &+ \\ (Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F). & \end{aligned} \tag{3.22}$$

Observamos que, nas novas equações de coordenadas, os coeficientes dos termos de segundo grau permanecem inalterados. No entanto, os coeficientes dos termos de primeiro grau e o termo constante se alteram. Introduzimos as seguintes designações:

$$\widetilde{D} = Ax_0 + By_0 + D, \tag{3.23}$$

$$\widetilde{E} = Bx_0 + Cy_0 + E, \tag{3.24}$$

$$\widetilde{F} = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \tag{3.25}$$

A equação da curva será então reduzida à forma seguinte:

$$A\widetilde{x^2} + 2B\widetilde{xy} + C\widetilde{y^2} + 2\widetilde{D}\widetilde{x} + 2\widetilde{E}\widetilde{y} + \widetilde{F} = 0. \tag{3.26}$$

Tentemos escolher o ponto S de modo que, na equação transformada, os termos que compreendem as coordenadas correntes de primeiro grau sejam eliminados, ou seja, de maneira que $\widetilde{D} = 0$ e $\widetilde{E} = 0$. Para isso, é necessário que as antigas coordenadas do ponto S satisfaçam o sistema de equações:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Encontraremos o ponto S se o sistema (3.27) for compatível, isto é, se este sistema tiver uma solução. Depois de transferir a origem das coordenadas para o ponto S, a equação da curva considerada assume a forma:

$$A\widetilde{x^2} + 2B\widetilde{xy} + C\widetilde{y^2} + \widetilde{F} = 0. \tag{3.28}$$

Dessa forma, as soluções (x_0, y_0) de (3.27) determinam o centro da curva no sistema de coordenadas.

Vamos denotar por δ o determinante de (3.27)

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}. \tag{3.29}$$

Calculando o determinante da matriz, obtemos $\delta = AC - B^2$, o qual é composto pelos coeficientes dos termos de segundo grau da equação (3.20).

Se $\delta \neq 0$, o sistema (3.27) é compatível e determinado, ou seja, o sistema tem uma única solução.

Uma curva de segundo grau que possui apenas um centro é chamada de curva central (ou cônica com centro), a qual é designada pela desigualdade $\delta \neq 0$, podendo ser expressas pelas fórmulas:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \quad e \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{3.30}$$

O termo de zero grau $\widetilde{F}$ na equação (3.28) é expresso pela fórmula (3.25) Com efeito, o agrupamento dos Termos do o membro certo da fórmula dá-nos:

$$\widetilde{F} = (Ax_0 + By_0 + D)x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_0 + (Dx_0 + Ey_0 + F). \tag{3.31}$$

Por (3.27),

$$\widetilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F. \tag{3.32}$$

Substituindo (3.30) em (3.32) , obtemos

$$\widetilde{F} = \frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{3.33}$$

O numerador da fracção obtida pode ser inscrito em forma de um determinante de terceira ordem, o qual definiremos por Δ:

$$\Delta = D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{3.34}$$

Em virtude das igualdades (3.34) e (3.29), (3.33) pode ser escrita como:

$$\widetilde{F} = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{3.35}$$

A equação (3.28) reduz-se, portanto, à forma:

$$A\widetilde{x^2} + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y^2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{3.36}$$

Na igualdade (3.29), consideremos $I = A+C$, que representa o traço da matriz associada ao discriminante δ.

Agora, nosso objetivo é mostrar a relação dos possíveis casos para (3.35). Suponhamos que $\delta = AC - B^2 \neq 0$. O sistema (3.27) possui uma único solução bem definida (x_0, y_0). Coloquemos a origem de um novo sistema de coordenadas no ponto $(x_0; y_0)$, ou seja, no centro da curva dada, e transformemos a equação (3.20) segundo as equações (3.21) e (3.28).

As simplificações subsequentes são obtidas por rotação dos novos eixos de coordenadas. Rotacionemos os eixos de coordenadas ao redor da nova origem por um ângulo qualquer

α. As coordenadas de um ponto qualquer no plano se transformam então segundo as fórmulas:

$$\tilde{x} = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \tilde{y} = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha, \tag{3.37}$$

onde x' e y' são as coordenadas do mesmo ponto em relação aos eixos após rotação. Substituímos no membro esquerdo da equação (3.28) as variáveis $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ pelas expressões (3.37),

$$A\widetilde{x^2} + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y^2} + \widetilde{F} = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha\right)^2 + 2B\left(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha\right)\left(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha\right) +$$

$$C\left(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha\right)^2 + \widetilde{F} = 0$$

.

Desenvolvendo os cálculos, obtemos:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \widetilde{F} = 0. \tag{3.38}$$

onde A', B' e C' designam as expressões entre parênteses. Consequentemente,

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + C \operatorname{sin}^2\alpha, \tag{3.39}$$

$$B' = -A \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + B\cos^2\alpha - B \operatorname{sin}^2\alpha + C \operatorname{sin}\alpha \cos\alpha, \tag{3.40}$$

$$C' = A \operatorname{sen}^2\alpha - 2B \operatorname{sin}\alpha \cos\alpha + C\cos^2\alpha. \tag{3.41}$$

Para simplificar a equação, temos que escolher o ângulo α de forma que o termo misto seja eliminado, isto é, $B' = 0$. Então, podemos escrever a equação (3.38) da seguinte forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \widetilde{F} = 0. \tag{3.42}$$

Busquemos então este ângulo α. Supondo $B' = 0$, pela equação (3.40), obteremos:

$$-A \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + B\cos^2\alpha - B \operatorname{sen}^2\alpha + C \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 0,$$

ou ainda

$$B \operatorname{sen}^2\alpha + (A - C) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - B\cos^2\alpha = 0. \tag{3.43}$$

Supondo $B \neq 0$, segue então da equação (3.43) que $\cos\alpha \neq 0$ (pois quando $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{sen}^2\alpha = 1$, o que contradiz a condição $B \neq 0$ na equação (3.43)) Ao dividir todos os termos da equação (3.43) por $\cos^2\alpha$, obtemos:

$$B \operatorname{tg}^3\alpha + (A - C) \operatorname{tg}\alpha - B = 0, \tag{3.44}$$

ou ainda

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C - A \pm \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}. \tag{3.45}$$

Dado $(C-A)^2 + 4B^2 \geq 0$, resulta que $\operatorname{tg}\alpha$ é um valor real. Consequentemente, qualquer equação da forma (3.28) pode ser reduzida à forma (3.42).

Nota 3.1 A equação (3.44) permite determinar a $\operatorname{tg}\alpha$. Assim, é possível calcular $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, para as relações (3.37), usando as fórmulas trigonométricas conhecidas

$$sen\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}. \tag{3.46}$$

A única precaução é ajustar os sinais das raízes quadradas dessas fórmulas de acordo com o sinal de $\operatorname{tg}\alpha$. Por exemplo, se $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ devem ter sinais opostos. Já se $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ devem ter o mesmo sinal.

Nosso objetivo imediato é identificar quais números podem ser associados às formas geométricas descritas pela equação (3.42). Para isso, podemos expressar A', B', C' em termos de A, B, C, conforme indicado pelas equações (3.39), (3.40) e (3.41)

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2. \tag{3.47}$$

Chamaremos a equação de segundo grau elíptica se $\delta > 0$, hiperbólica se $\delta < 0$ e parabólica se $\delta = 0$.

Considerando a equação reduzida (3.42), podemos afirmar que $A'C' = \delta$. Dessa forma, a equação (3.42) é classificada como elíptica quando $A'C' > 0$ e hiperbólica quando $A'C' < 0$. Nosso objetivo agora é modificar a estrutura da equação (3.42). Ao transferir o termo $\widetilde{F}$ para o lado direito da equação, definindo ao membro direito $(-\widetilde{F})$ a letra H e eliminando os índices, teremos

$$\begin{aligned} A'x'^2 + C'y'^2 + \widetilde{F} &= 0 \\ \Rightarrow A'x'^2 + C'y'^2 &= -\widetilde{F} \\ \Rightarrow A'x'^2 + C'y'^2 &= H \\ \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 &= H. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Suponhamos que a equação (3.48) seja elíptica. Isso implica que $AC > 0$, ou seja, os coeficientes A e C possuem o mesmo sinal. A princípio, consideramos que esse sinal é positivo. Para o termo H, existem três possibilidades: $H > 0$, $H < 0$ e $H = 0$. Vamos analisar cada um desses casos.

1. No caso de $H > 0$, a equação (3.48) descreve uma elipse. Para demonstrar isso, modificamos a forma da equação (3.48) e a reescrevemos da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{\frac{H}{A}} + \frac{y^2}{\frac{H}{C}} = 1. \tag{3.49}$$

Como $\frac{H}{A}$ e $\frac{H}{C}$ são valores positivos, os números $+\sqrt{\frac{H}{A}}$ e $+\sqrt{\frac{H}{C}}$ são reais. Denominamos o primeiro de a e o segundo de b:

$$a = +\sqrt{\frac{H}{A}}, \quad b = +\sqrt{\frac{H}{C}}. \tag{3.50}$$

Assim,

$$\frac{H}{A} = a^2, \quad \frac{H}{C} = b^2. \tag{3.51}$$

Substituindo (3.51) em (3.49), chegamos à

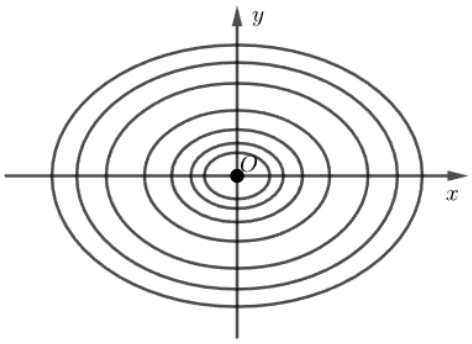
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.52}$$

que é a equação canônica da elipse.

2. No caso de $H = 0$, a equação (3.48) é satisfeita apenas pelo par de valores reais $x = 0$ e $y = 0$. Assim, quando $H = 0$, a equação (3.48) descreve um único ponto, que corresponde à origem do sistema de coordenadas.

Quando $H = 0$, a equação (3.48) é habitualmente denominada como a equação de uma elipse degenerada. Se $H \to 0$ (sendo maior que 0), vê-se, as fórmulas da equação (3.50) indicam que $a \to 0$ e $b \to 0$, o que significa que a elipse definida pela equação (3.48) gradualmente se reduz a um único ponto (Figura 13).

Figura 13 – Elipse Degenerada



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

3. Se $H < 0$, a equação (3.48) não define nenhuma figura geométrica sobre o plano, sendo habitualmente chamada de equação de uma elipse imaginária.

Suponhamos agora que a equação (3.48) seja hiperbólica. Nesse caso, $AC < 0$, o que significa que os coeficientes A e C possuem sinais opostos. A princípio, vamos supor que $A > 0$ e $C < 0$. Em relação a H, podemos ter três situações: $H > 0$, $H < 0$ ou $H = 0$. Vamos analisar cada um desses cenários separadamente.

1. Se $H > 0$ ou $H < 0$, a equação (3.48) representa uma hipérbole. Para provar isso, alteremos a forma da equação (3.48) e a reescrevamos da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{\frac{H}{A}} + \frac{y^2}{\frac{H}{C}} = 1. \tag{3.53}$$

Partindo do fato que $A > 0$ e $C < 0$, no caso em que $H > 0$, temos $\frac{H}{A} > 0$ e $\frac{H}{C} < 0$. Assim, $\sqrt{\frac{H}{A}}$ e $\sqrt{-\frac{H}{C}}$ são números reais. Denominando esses valores por a e b, respectivamente,

obtemos:

$$\frac{H}{A} = a^2, \quad \frac{H}{C} = -b^2. \tag{3.54}$$

Substituindo (3.54) na equação (3.53) pelos valores correspondentes, encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.55}$$

que é a equação canônica da hipérbole (com o eixo transverso sendo Ox).

Se $H < 0$, temos:

$$\frac{H}{A} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{H}{C} > 0. \tag{3.56}$$

Introduzindo as notações:

$$\sqrt{-\frac{H}{A}} = a, \quad \sqrt{\frac{H}{C}} = b, \tag{3.57}$$

obtemos

$$\frac{H}{A} = -a^2, \quad \frac{H}{C} = b^2. \tag{3.58}$$

Com essas novas igualdades, a equação (3.53) se transforma em:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.59}$$

que também é a equação canônica da hipérbole (com o eixo transverso sendo Oy)

2. No caso em que $H = 0$, a equação (3.48) assume a forma:

$$Ax^2 + Cy^2 = 0$$

,

ou seja,

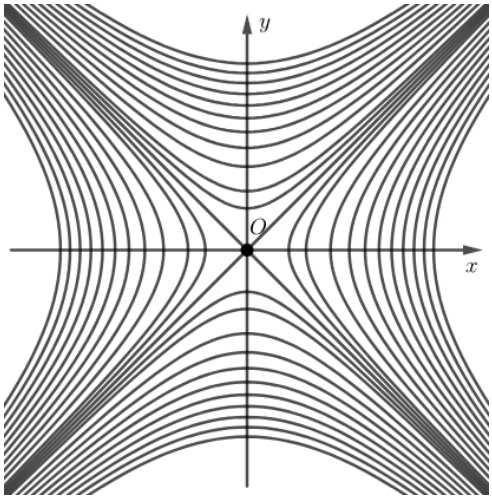
$$(\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y)(\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y) = 0 \tag{3.60}$$

visto que, como $A > 0$ e $C < 0$, os números $\sqrt{A}$ e $\sqrt{-C}$ são reais.

A partir da equação (3.60), podemos escrever $\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y = 0$ ou $\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y = 0$ que representam retas que passam pela origem do sistema de coordenadas. Assim, podemos concluir que, quando $H = 0$, a equação hiperbólica (3.48) define um par de retas que se cruzam na origem.

3. Para $H = 0$, a equação (3.48) é chamada de hipérbole degenerada.

Figura 14 – Hipérbole degenerada



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Para valores constantes de A e C, e diferentes valores de H, a equação (3.48) descreve várias hipérboles (Figura 14). Observa-se pelas equações (3.54) e (3.58) que a razão $\frac{a}{b}$ permanece constante, o que significa que todas essas hipérboles compartilham as mesmas assíntotas. Quando $H \to 0$, $a \to 0$ $b \to 0$. Portanto, à medida que $H \to 0$, a hipérbole representada pela equação (3.48) se aproxima cada vez mais das assíntotas fixas, transformando-se, no limite, em um par de retas que se cruzam.

Portanto, qualquer equação de uma cônica com centro ($\delta \neq 0$) pode ser classificada como elíptica ($\delta > 0$) ou hiperbólica ($\delta < 0$). Toda equação elíptica pode ser a equação de uma elipse ordinária, uma elipse degenerada ou uma elipse imaginária. Da mesma forma, toda equação hiperbólica pode ser a equação de uma hipérbole ordinária ou de uma hipérbole degenerada

Suponhamos que a equação (3.20) seja uma equação parabólica, isto é, aquela que satisfaz a condição $\Delta = AC - B^2 = 0$. Ao substituir as expressões das relações (3.37) na equação (3.20) e realizar um procedimento similar ao utilizado para encontrar as relações (3.39), (3.40) e (3.41), chegamos ao resultado

$$D' = D\cos\alpha + E\,\mathrm{sen}\,\alpha, \tag{3.61}$$

$$E' = -D\,\mathrm{sen}\,\alpha + E\,\mathrm{sen}\,\alpha, \tag{3.62}$$

$$F' = F. \tag{3.63}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o ângulo α de tal maneira que, após a rotação dos eixos de um ângulo α, teremos $B' = 0$. Esse ângulo é determinado pela equação (3.45). Desse modo, $A'C' - B'^2 = AC - B^2$, de onde $A'C' = \delta$, e como $\delta = 0$, obtemos $A'C' = 0$. Concluímos da última igualdade que ou $A' = 0$, ou $C' = 0$.

Assim, por uma rotação apropriada dos eixos, toda equação parabólica (3.20) se reduz à forma:

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{3.64}$$

onde $A' \neq 0$, ou à forma

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{3.65}$$

onde $C' \neq 0$.

Tomemos qualquer uma das equações, por exemplo, a equação (3.65). A equação pode ser estabelecida da seguinte forma:

$$C'\left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y'\right) + 2D'x' = -F'. \tag{3.66}$$

Em seguida, modificando a expressão entre parênteses para obter um quadrado perfeito (e transformando, em consequência, o membro direito da equação), teremos:

$$C'\left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y' + \frac{E'^2}{C'^2}\right) + 2D'x' = -F' + \frac{E'^2}{C'}. \tag{3.67}$$

Designemos todo o membro direito por H'. Teremos:

$$C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 + 2D'x' = H'. \tag{3.68}$$

Nesse sentido, dois casos podem se apresentar.

1. Se $D' \neq 0$, então a equação (3.68) pode ser transcrita como:

$$C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 + 2D'\left(x' - \frac{H'}{2D'}\right) = 0. \tag{3.69}$$

Desloquemos paralelamente os eixos de $\frac{H'}{2D'}$ na direção do eixo $O'x'$ e de $-\frac{E'}{C'}$ para o eixo $O'y'$. As coordenadas de todos os pontos do plano mudarão então conforme as fórmulas:

$$x' = x'' + \frac{H'}{2D'} \quad \text{e} \quad y' = y'' - \frac{E'}{C'}. \tag{3.70}$$

Ao passar para as novas coordenadas na equação (3.69), obtemos:

$$\begin{aligned} C'y''^2 + 2D'x'' &= 0, \\ \Rightarrow y''^2 &= -2\frac{D'}{C'}x''. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Ao colocar $\frac{-D'}{C'} = \pm p$, encontramos

$$y'^2 = 2px' \quad \text{ou} \quad y'^2 = -2px', \tag{3.72}$$

que são as equações canônicas da parábola.

2. Se $D' = 0$, então a equação (3.68) toma a forma:

$$C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 = H'. \tag{3.73}$$

Desloquemos os eixos de coordenadas por uma translação paralela ao eixo Oy' de uma quantidade $-\frac{E'}{C'}$. As coordenadas de todos os pontos do plano se modificarão conforme as fórmulas:

$$x' = x'' \quad e \quad y' = y'' - \frac{E'}{C'}. \tag{3.74}$$

Ao passar para as novas coordenadas na equação (3.73), obtemos:

$$C'y''^2 = H' \tag{3.75}$$

$$\Rightarrow y'' = \pm\sqrt{\frac{H'}{C'}}. \tag{3.76}$$

Suponhamos que $C' > 0$. A equação (3.75) pode ser analisada em três casos distintos, dependendo do valor de H':

1. Para $H' > 0$, a equação define um par de retas paralelas, dispostas de forma simétrica em relação ao novo eixo das abscissas, com uma distância de $\sqrt{\frac{H'}{C'}}$ entre elas.

2. Para $H' = 0$, a equação se reduz a $y' = 0$, o que corresponde a uma única reta, que é o próprio eixo das abscissas. Em alguns casos, essa equação também pode representar duas retas coincidentes.

3. Para $H' < 0$, o termo à direita da equação se torna imaginário, impossibilitando a definição de qualquer figura geométrica real.

Dessa forma, ao considerar $D' = 0$, a equação (3.68) pode definir duas retas paralelas, duas retas coincidentes, ou, em certos casos, nenhuma figura geométrica. Contudo, é comum na geometria analítica referir-se a essa situação como uma "parábola degenerada".

Por fim, se $\Delta = 0$ e $\delta \neq 0$, a equação (3.36) é escrita como

$$A\widetilde{x^2} + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y^2} = 0. \tag{3.77}$$

Se a equação (3.77) for elíptica, os coeficientes A e C possuirão o mesmo sinal, ou seja, $AC > 0$. Nesse caso, adotaremos o sinal positivo.

Agora temos duas situações a analisar.

1. Para $B = \sqrt{AC}$, temos:

$$(\sqrt{A}\widetilde{x} + \sqrt{C}\widetilde{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{A}\widetilde{x} + \sqrt{C}\widetilde{y} \Rightarrow \widetilde{y} = -\sqrt{\frac{A}{C}}\widetilde{x}. \tag{3.78}$$

2. Para $B = -\sqrt{AC}$, temos:

$$(\sqrt{A}\widetilde{x} - \sqrt{C}\widetilde{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{A}\widetilde{x} - \sqrt{C}\widetilde{y} \Rightarrow \widetilde{y} = \sqrt{\frac{A}{C}}\widetilde{x}. \tag{3.79}$$

Dessa forma, as equações (3.78) e (3.79) correspondem a duas retas.

Caso B seja nulo, teríamos $A = 0$ ou $C = 0$, resultando na existência de apenas um ponto.

Por outro lado, se $B < 0$, então $\sqrt{AC} < 0$, o que é um absurdo. Assim, a única possibilidade seria o conjunto vazio.

3.5 Aplicação do Teorema

Nesta seção, exploraremos algumas aplicações do Teorema 3.2 por meio do processo algébrico.

Identifique a cônica representada pelas seguintes equações:

1. $4x^2 + 3y^2 - 6xy + 12x - 8y + 5 = 0$.

Solução: Sabemos que a equação geral de uma cônica é dada por:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Comparando os coeficientes da equação dada com a equação geral, temos:

$$A = 4, \quad B = -3, \quad C = 3, \quad D = 6, \quad E = -4, \quad F = 5.$$

Agora, calculamos os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -13 \neq 0, \tag{3.80}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0. \tag{3.81}$$

Calculando I, temos:

$$I = A + C = 4 + 3 = 7 > 0.$$

Com isso, aplicamos as condições de classificação:

$$\Delta \neq 0, \quad \delta > 0, \quad \Delta \cdot I < 0, \quad A \neq C \quad \text{e} \quad B \neq 0.$$

Portanto, a cônica descrita é uma **elipse**. □

2. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 8y + 3 = 0$.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio, temos:

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 4, \quad D = -3, \quad E = 4, \quad F = 3.$$

Calculando os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \tag{3.82}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.83}$$

e

$$I = A + C = 1 + 4 = 5.$$

Com isso,

$$\Delta \neq 0, \quad \delta = 0.$$

Logo, a cônica descrita é uma **parábola**. □

3. $2x^2 - 3y^2 + 4xy - 5x + 6y - 7 = 0$.

Solução: Identificando os valores dos coeficientes:

$$A = 2, \quad B = 2, \quad C = -3, \quad D = -\frac{5}{2}, \quad E = 3, \quad F = -7.$$

Calculando os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -3 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 3 & -7 \end{vmatrix} = \frac{163}{4} \neq 0, \tag{3.84}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10 < 0, \tag{3.85}$$

e

$$I = A + C = 2 + (-3) = -1.$$

Desse modo,

$$\Delta \neq 0, \quad \delta < 0.$$

Portanto, trata-se de uma **hipérbole**. □

4. $x^2 - 4x - y^2 + 4y = 0$.

Solução: Identificando os valores dos coeficientes:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad D = -2, \quad E = 2, \quad F = 0.$$

Calculando os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.86}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \tag{3.87}$$

Calculando I, temos:

$$I = A + C = 1 + (-1) = 0.$$

Com isso, a equação apresenta **duas retas** ou um **ponto**. Para descobrir, vamos agrupar os termos de x e y e completar quadrados:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x) - (y^2 - 4y) &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)^2 - 4 - [(y-2)^2 - 4] &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)^2 - (y-2)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 2 - (y-2))(x - 2 + (y-2)) &= 0 \\ \Rightarrow (x-y)(x+y-4) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a fatoração resulta em **duas retas**:

$$x - y = 0 \quad \text{ou} \quad x + y - 4 = 0.$$

□

5. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 20 = 0$.

Solução: Temos aqui:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = -2, \quad E = -3, \quad F = 20.$$

Calculando os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 20 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \tag{3.88}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0. \tag{3.89}$$

Calculando I, temos:

$$I = A + C = 1 + 1 = 2.$$

Com isso, aplicamos as condições de classificação:

$$\Delta \neq 0, \quad \delta > 0 \quad \text{e} \quad \Delta \cdot I > 0.$$

Portanto, a equação não possui soluções reais e representa o **conjunto vazio**. □

4 O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS CÔNICAS

Nesta seção, vamos fazer uma introdução sobre o software GeoGebra. Em seguida, elaboramos no GeoGebra o passo a passo completo para a construção da elipse, parábola e hipérbole. Além disso, disponibilizamos um link com essa construção detalhada, permitindo que outros professores utilizem esses recursos em suas aulas.

Por fim, abordaremos a identificação das cônicas por meio da equação geral e disponibilizaremos um link com uma atividade interativa no GeoGebra sobre esse tema, auxiliando no entendimento e aplicação desse conceito.

4.1 O software GeoGebra

Segundo Hohenwarter (2009), professor da Universidade de Salzburg e criador do GeoGebra, "O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo ". Desenvolvido para auxiliar no ensino e aprendizado da matemática nas escolas, o software permite que os usuários explorem conceitos matemáticos de forma interativa. Essa abordagem favorece uma compreensão mais profunda dos conteúdos e facilita a interpretação de suas propriedades.

Considerando a utilização da versão online, a interface principal do GeoGebra é composta por diferentes áreas que se complementam:

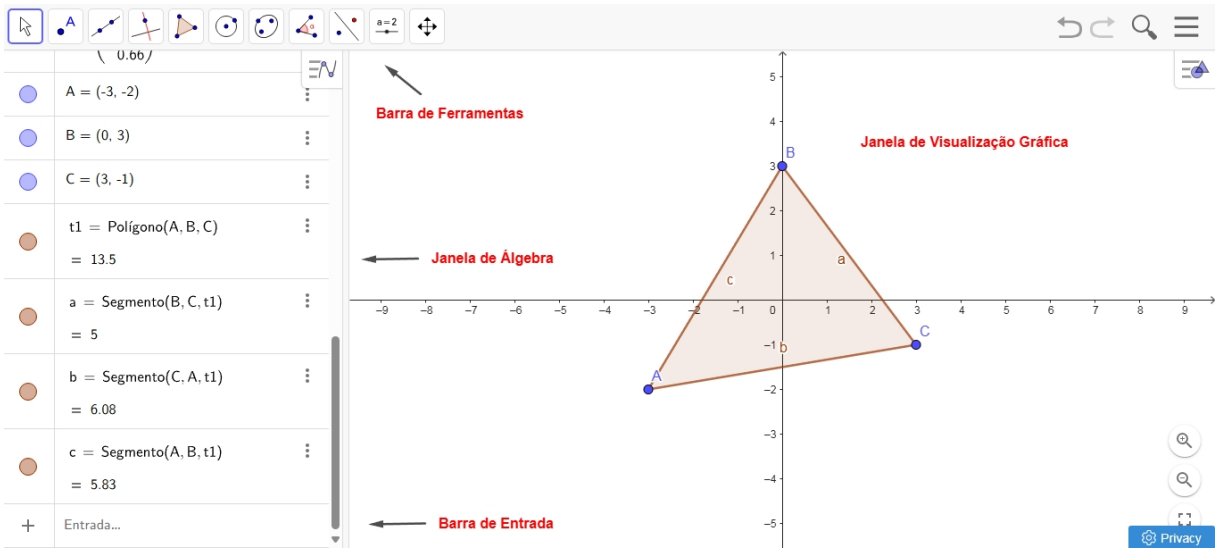
1. **Janela de Visualização Gráfica:** onde são construídas e manipuladas figuras geométricas de forma dinâmica e interativa.

2. **Janela de Álgebra:** exibe as expressões algébricas correspondentes aos objetos criados na Janela Gráfica, permitindo a visualização simultânea das representações algébrica e geométrica.

3. **Barra de Entrada:** possibilita a digitação direta de comandos, equações e expressões matemáticas, facilitando a criação de construções com maior precisão.

4. **Barra de Ferramentas:** reúne diversos recursos para a criação e manipulação de elementos como pontos, retas, segmentos, circunferências, transformações geométricas, entre outros.

Figura 15 – Interface do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

No contexto do ensino das seções cônicas, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta essencial, proporcionando uma experiência de aprendizagem mais visual e intuitiva. Nosso objetivo é oferecer uma alternativa ao ensino tradicional, utilizando esse recurso tecnológico para despertar o interesse dos alunos e tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico.

Rossi (2010) enfatiza que as inovações tecnológicas estão transformando o ensino da matemática, revolucionando a forma como essa disciplina é aprendida e ensinada. Essas inovações incluem desde ferramentas digitais interativas até metodologias de ensino baseadas em dados, todas voltadas para tornar o aprendizado mais atrativo, eficiente e acessível.

Nesse sentido, os recursos de animação do GeoGebra possibilitam que os alunos visualizem com clareza as propriedades e características das três cônicas. Acreditamos que essa abordagem torna o aprendizado mais acessível e envolvente, permitindo que os estudantes realizem atividades que, com métodos tradicionais, seriam significativamente mais complexas. Com isso, buscamos integrar a tecnologia como um meio eficaz para potencializar a construção do conhecimento matemático.

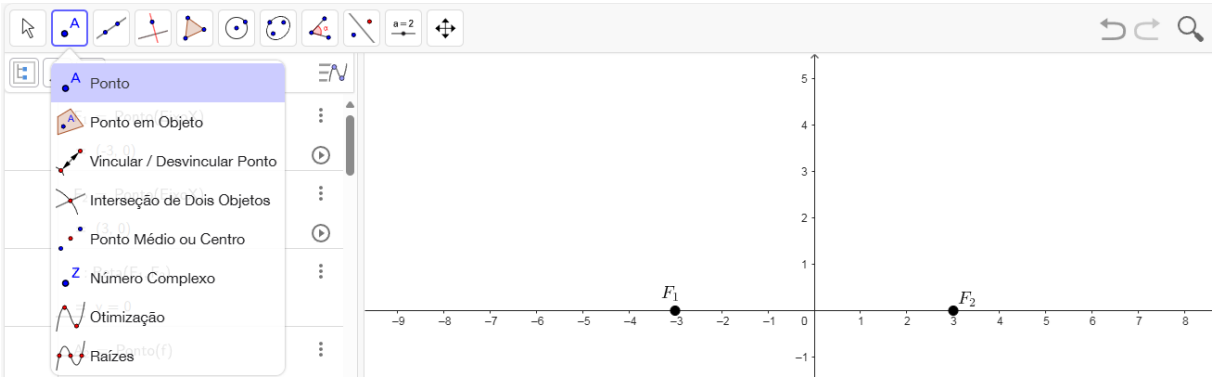
4.2 Construção da Elipse no GeoGebra

Nesta seção, apresentaremos um passo a passo simples e objetivo para construir uma elipse utilizando o software GeoGebra. Esse procedimento poderá ser utilizado pelos professores em sala de aula como recurso didático, facilitando a visualização e a compreensão das propriedades da elipse.

Segue o passo a passo:

Passo 1: Primeiramente, na Barra de Ferramentas, clique na ferramenta **Ponto** e escolha dois pontos arbitrários no plano cartesiano. Esses pontos serão designados como os focos da elipse, denominados F_1 e F_2.

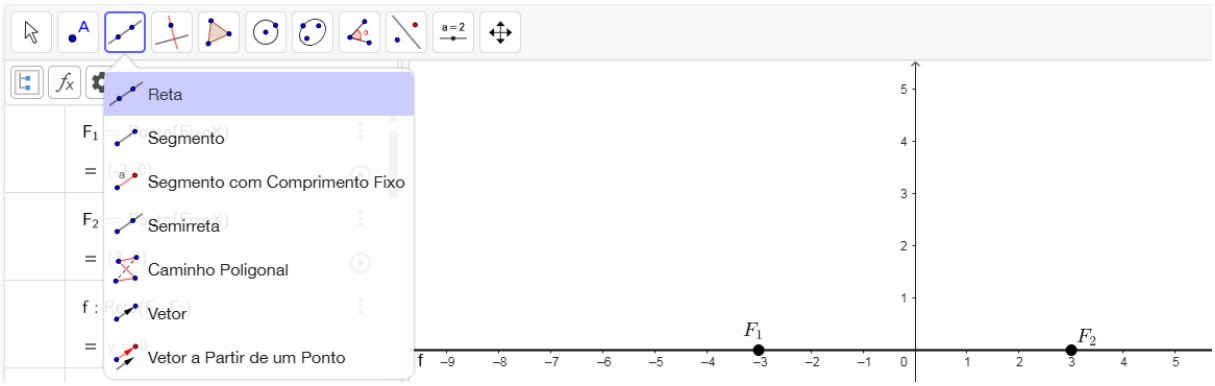
Figura 16 – Focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 2: Em seguida, na ferramenta de **Reta**, trace uma reta que passa pelos focos F_1 e F_2.

Figura 17 – Reta passando pelos focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

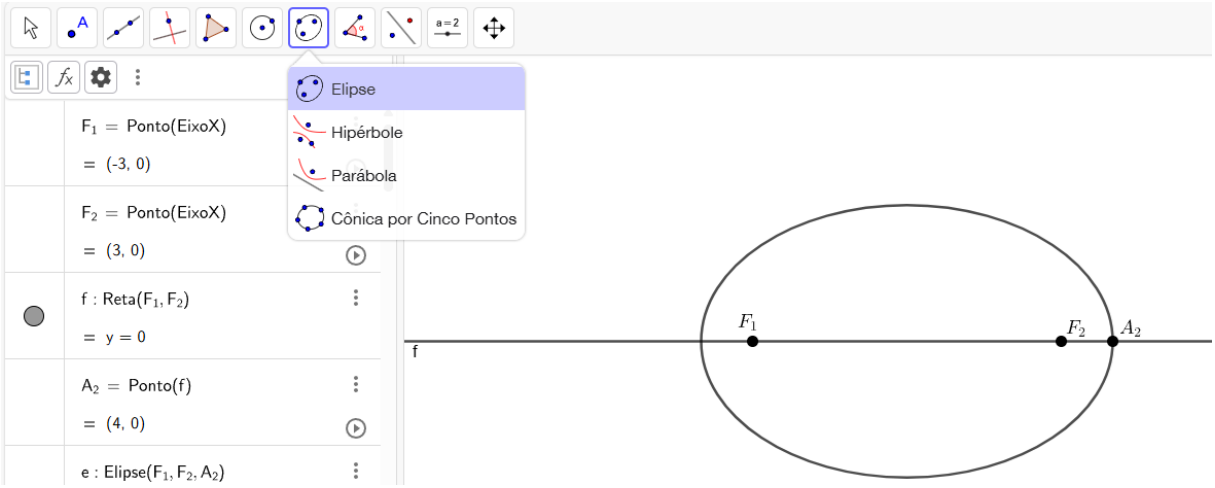
Passo 3: Depois, escolha um ponto qualquer sobre essa reta, exceto entre os focos, para definir um dos vértices da elipse, por exemplo A_2.

Figura 18 – Vértice A_2 da elipse

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 4: Na Barra de Ferramentas, selecione a opção **Elipse**. Em seguida, clique nos focos F_1 e F_2 e no vértice A_2 para definir a elipse.

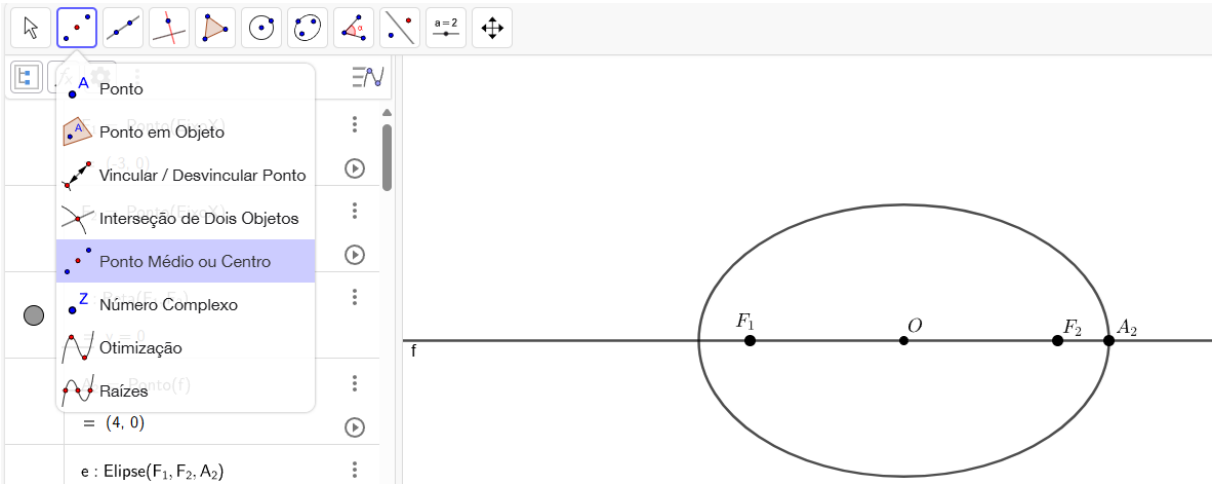
Figura 19 – Elipse formada pelos focos F_1 e F_2 e pelo vértice A_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 5: Em seguida, selecione a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clique na elipse para determinar seu centro O.

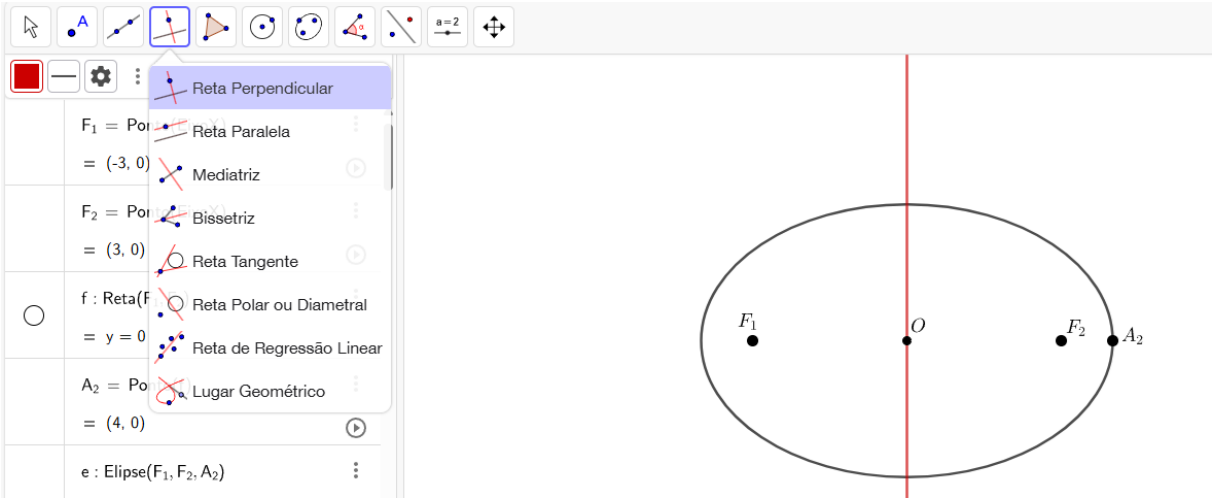
Figura 20 – Centro O da elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 6: Na ferramenta de **Reta Perpendicular**, trace uma reta perpendicular àquela que passa pelos focos, passando pelo centro O.

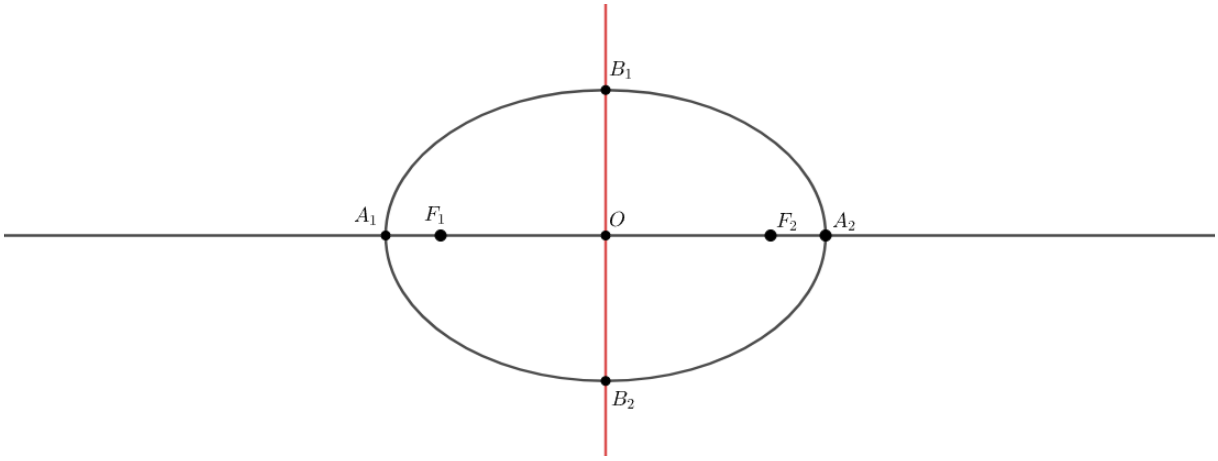
Figura 21 – Reta perpendicular à reta que passa pelos focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 7: Em seguida, marque os demais vértices da elipse: A_1, B_1 e B_2.

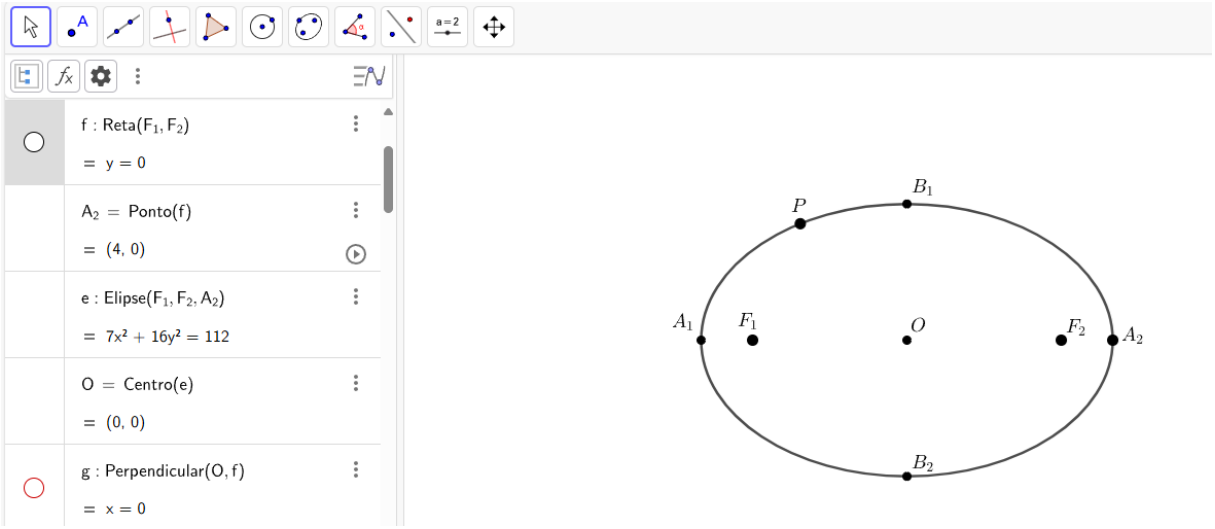
Figura 22 – Vértices A_1, B_1 e B_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 8: Na Janela de Álgebra, desative a exibição das duas retas e, em seguida, selecione um ponto P qualquer sobre a elipse.

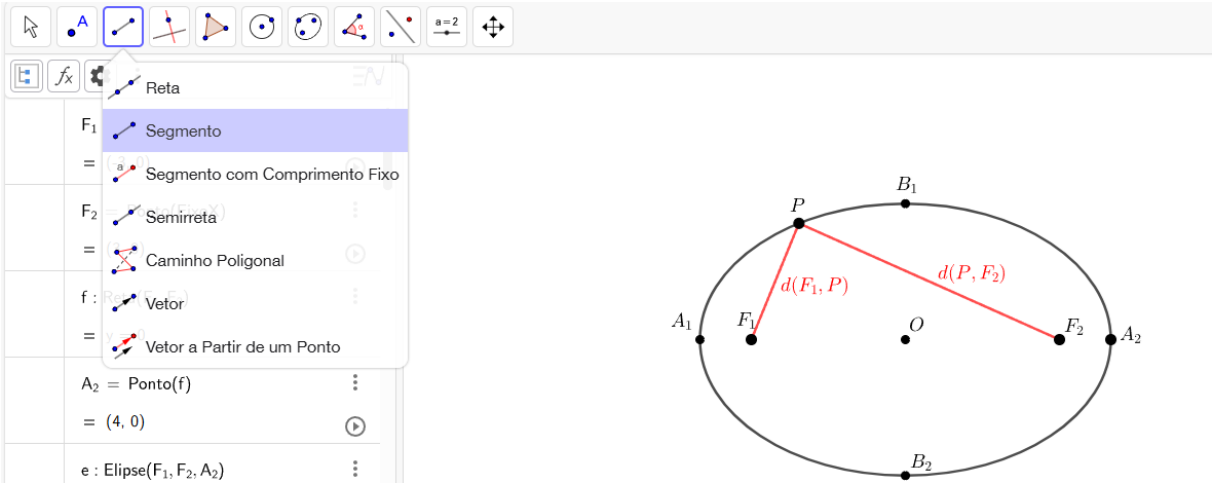
Figura 23 – Ponto P sobre a elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 9: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F_1 à P e outro ligando P à F_2, de modo que a soma de seus comprimentos seja igual a $2a$.

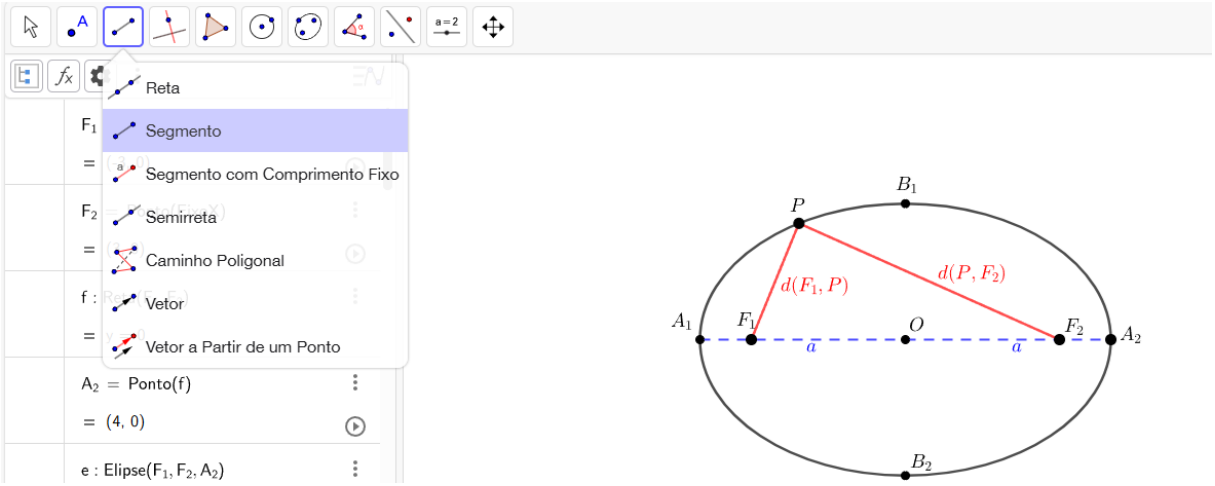
Figura 24 – Distâncias de F_1 à P e de P à F_1



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 10: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando A_1 ao centro O e outro ligando O à A_2, formando assim o eixo maior que é igual a $2a$.

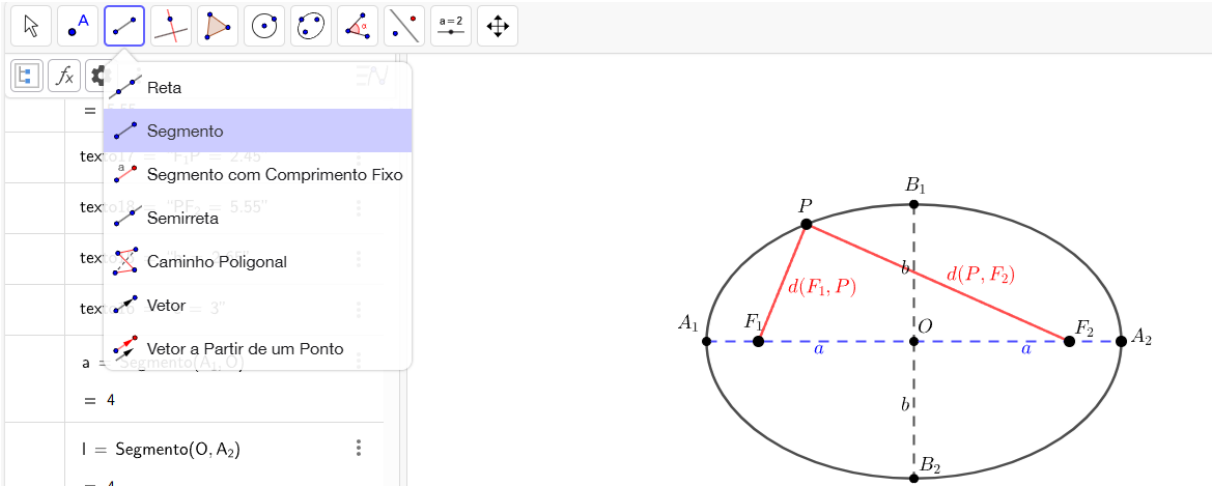
Figura 25 – Eixo maior



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 11: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando B_1 ao centro O e outro ligando O à B_2, formando assim o eixo menor que é igual a $2b$.

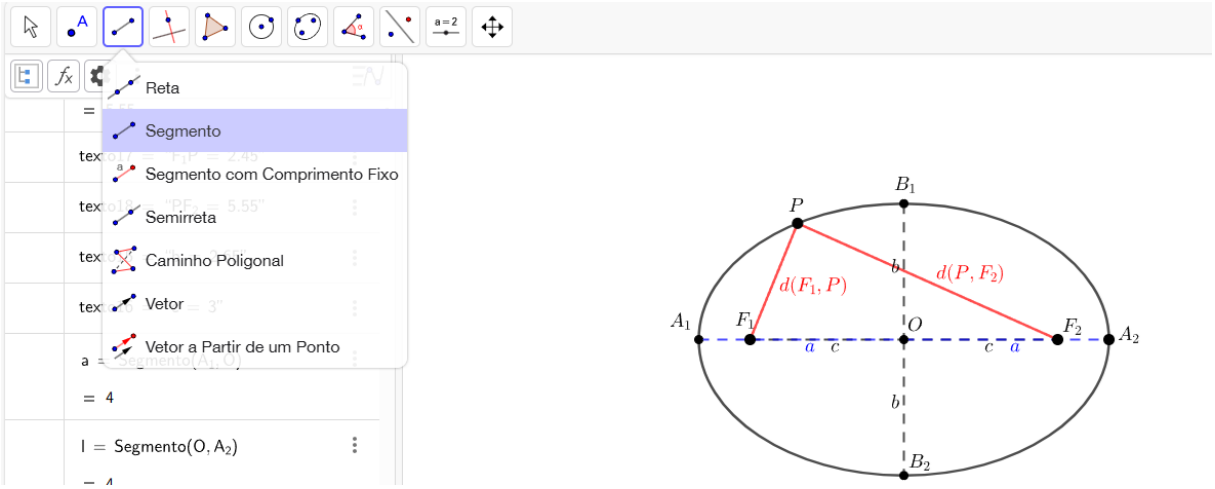
Figura 26 – Eixo menor



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 12: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F_1 ao centro O e outro ligando O à F_2, formando assim a distância focal que é igual a $2c$.

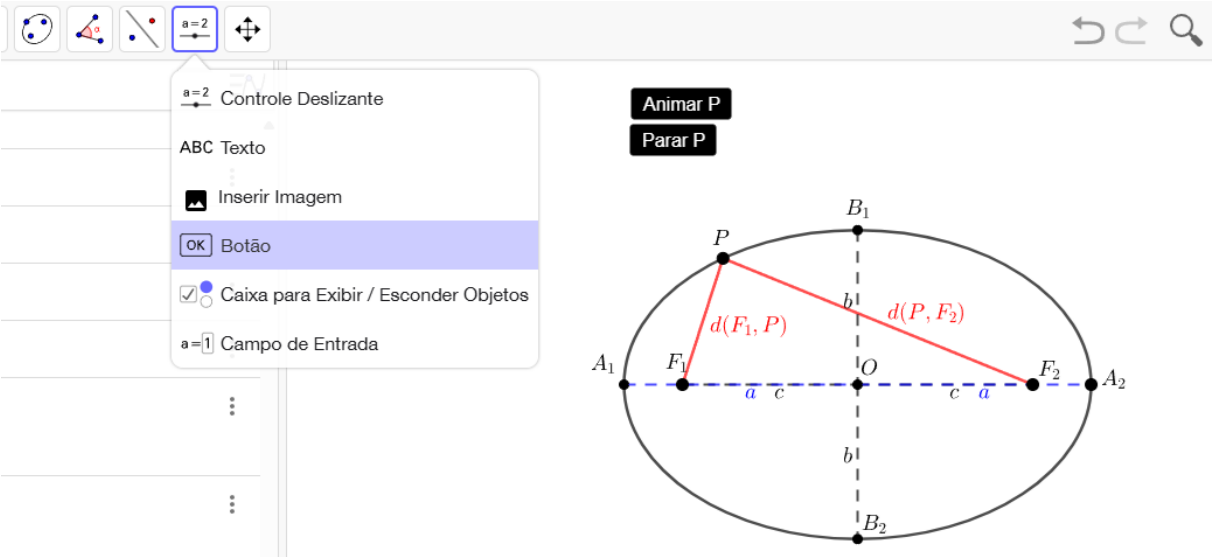
Figura 27 – Distância focal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 13: Utilize a ferramenta **Botão** para adicionar comandos que controlem a animação do ponto P. Para iniciar a animação, insira o comando "StartAnimation(P)", e para interrompê-la, utilize "StartAnimation(P, false)".

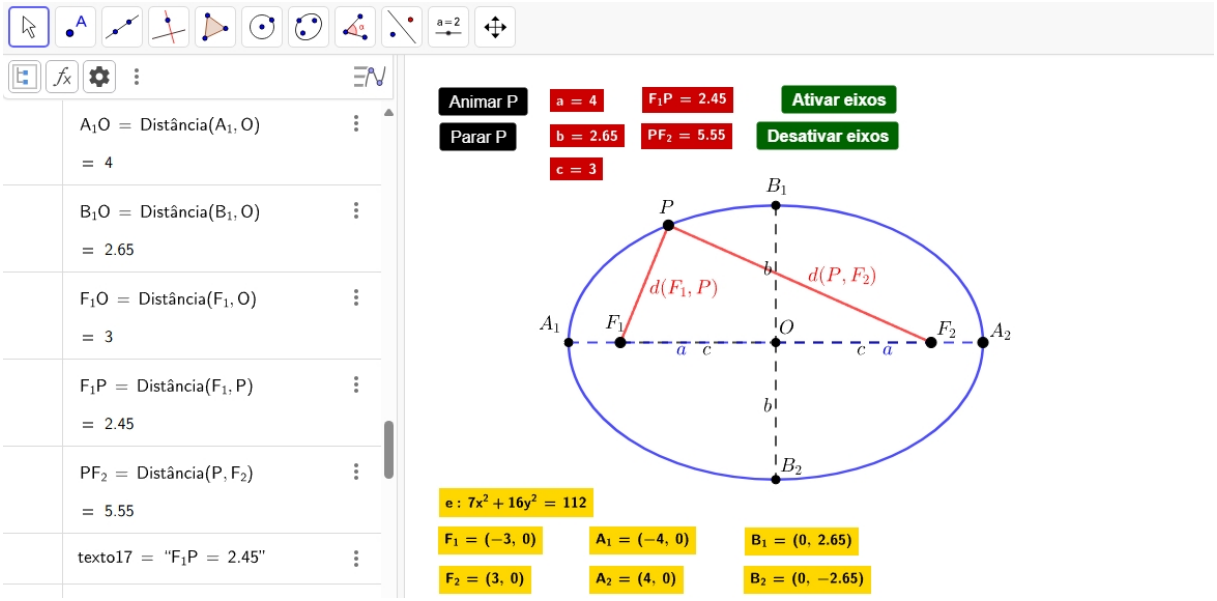
Figura 28 – Animação do ponto P



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 14: Na Caixa de Entrada, insira o comando de **Distância** e adicione as principais medidas relacionadas às propriedades da elipse, como a, b, $\overline{F_1P}$, entre outras. Posteriormente, arraste o resultado das distâncias para a Janela de Visualização. Arraste também os outros elementos da elipse.

Figura 29 – Distâncias entre os pontos principais da elipse



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Para encerrar essa seção, disponibilizamos a seguir um link contendo um tutorial detalhado para a construção da elipse no GeoGebra:

(Construção da Elipse no GeoGebra).

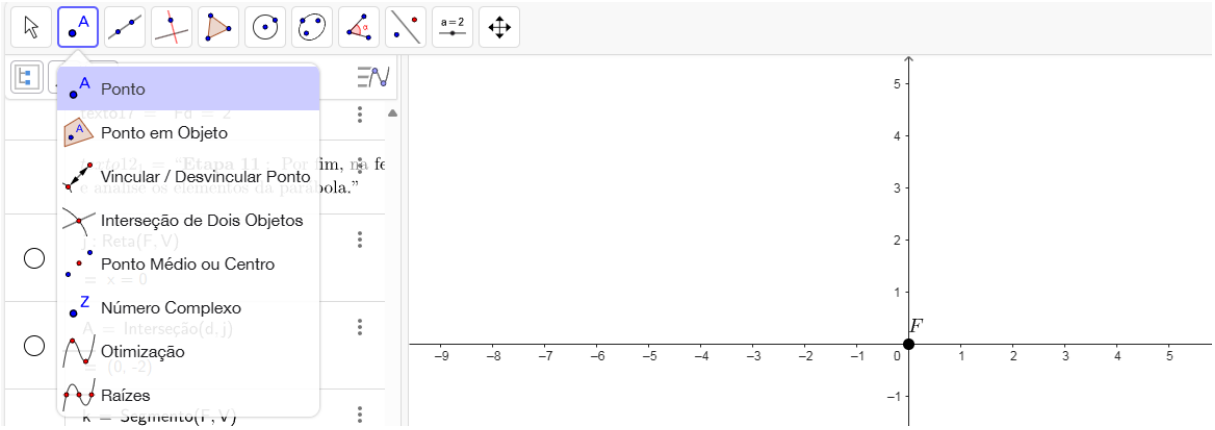
4.3 Construção da Parábola no GeoGebra

Dando continuidade ao estudo das cônicas, apresentamos agora o passo a passo para a construção da parábola no GeoGebra. Assim como na elipse, o objetivo é oferecer aos professores um recurso didático que possibilite explorar, em sala de aula, as propriedades e o formato dessa curva.

Segue o passo a passo:

Passo 1: Primeiramente, na Barra de Ferramentas, clique na ferramenta **Ponto**, escolha um ponto arbitrário no plano e designe-o como o foco F.

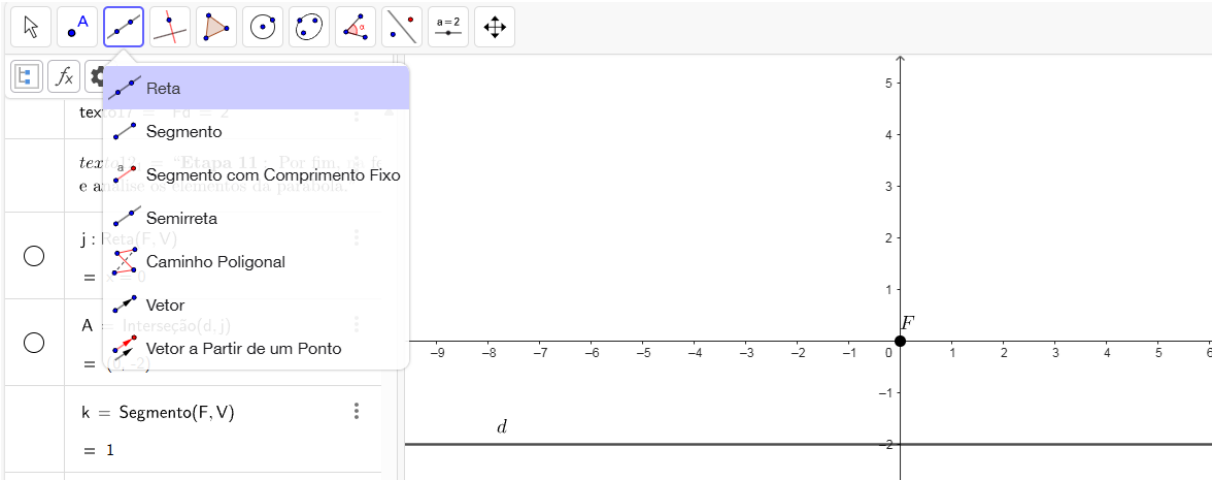
Figura 30 – Foco F



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 2: Em seguida, na ferramenta de **Reta**, trace uma reta d qualquer (chamada de reta diretriz) que não passe pelo foco F.

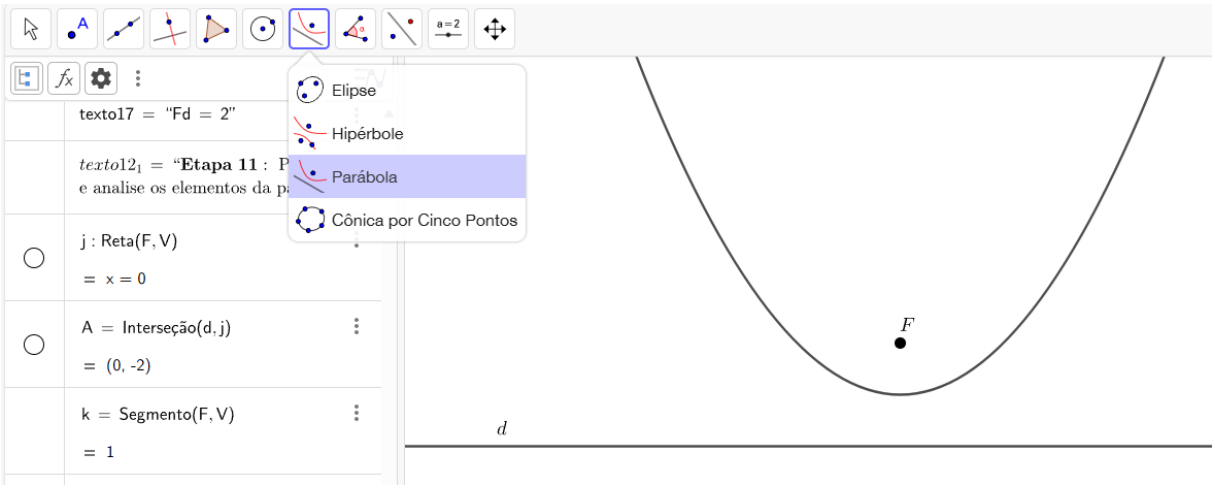
Figura 31 – Reta diretriz d



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 3: Na Barra de Ferramentas, selecione a opção **Parábola**. Em seguida, clique no foco F e na reta diretriz d para definir a parábola.

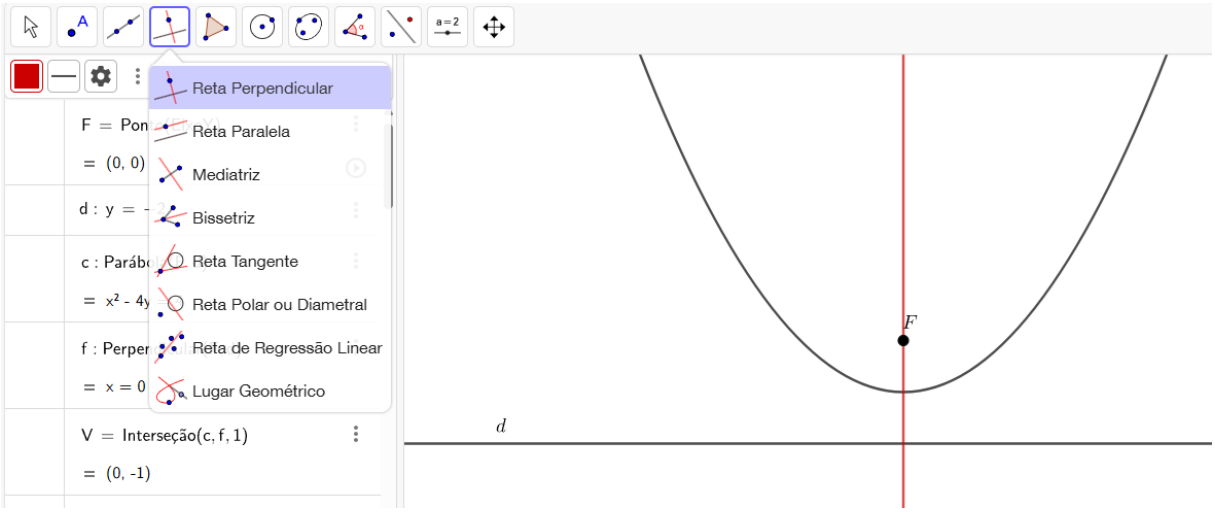
Figura 32 – Parábola formada pelo foco F e pela reta diretriz d



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 4: Na ferramenta de **Reta Perpendicular**, trace uma reta perpendicular à reta d passando por F.

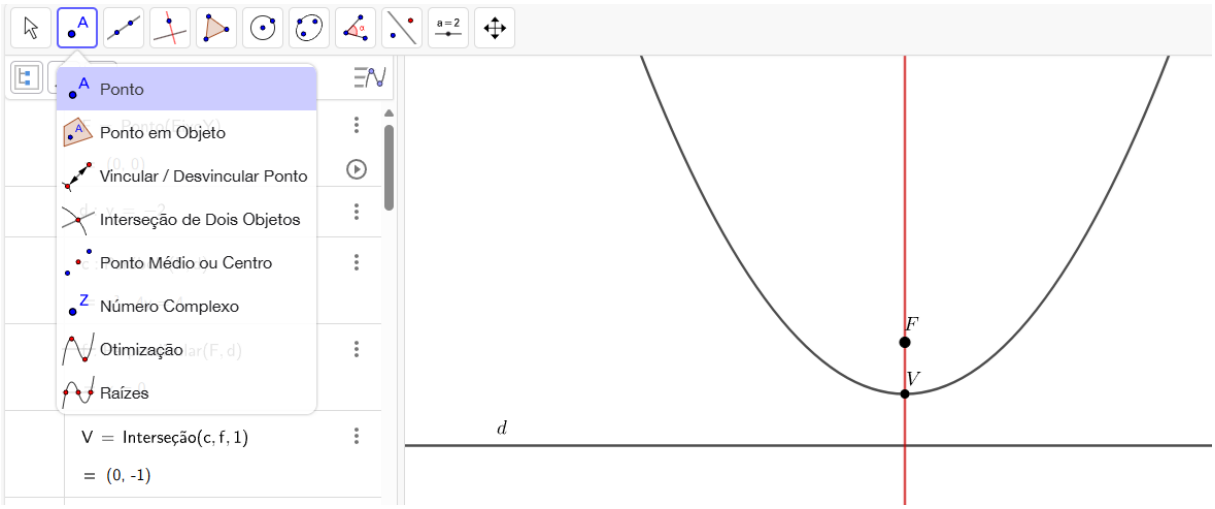
Figura 33 – Reta perpendicular à reta d passando por F



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 5: Na ferramenta **Ponto**, marque o vértice V da parábola.

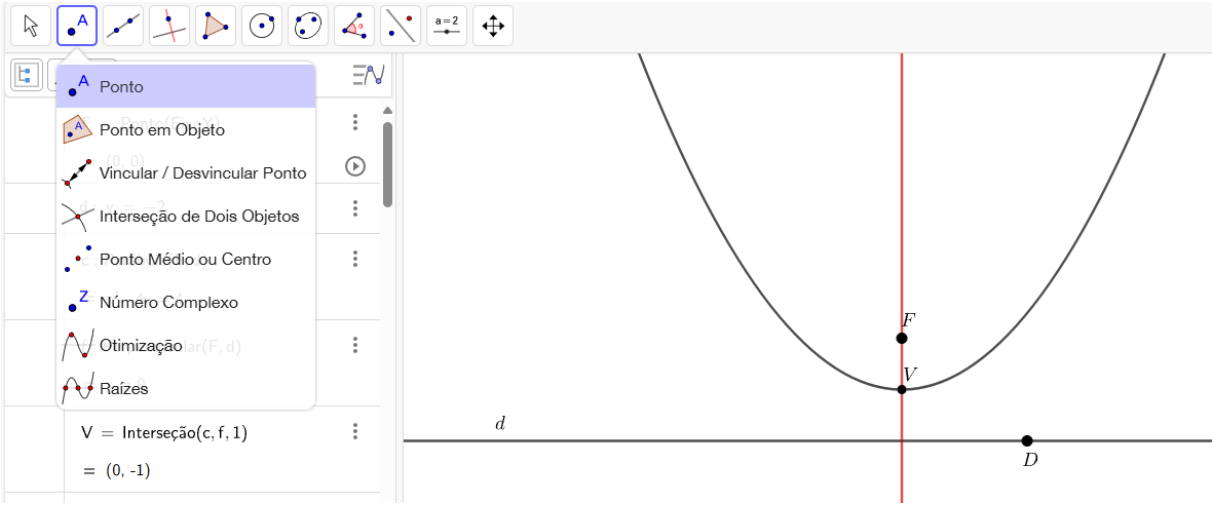
Figura 34 – Vértice V



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 6: Selecione um ponto D qualquer na reta diretriz.

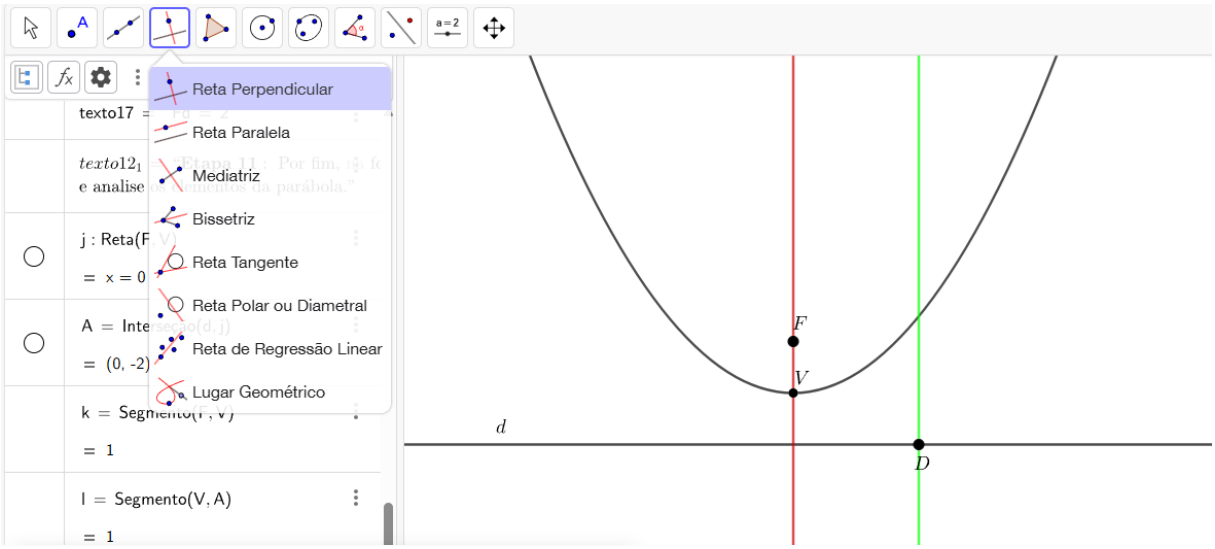
Figura 35 – Ponto D



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 7: Trace outra reta perpendicular à reta d passando por D.

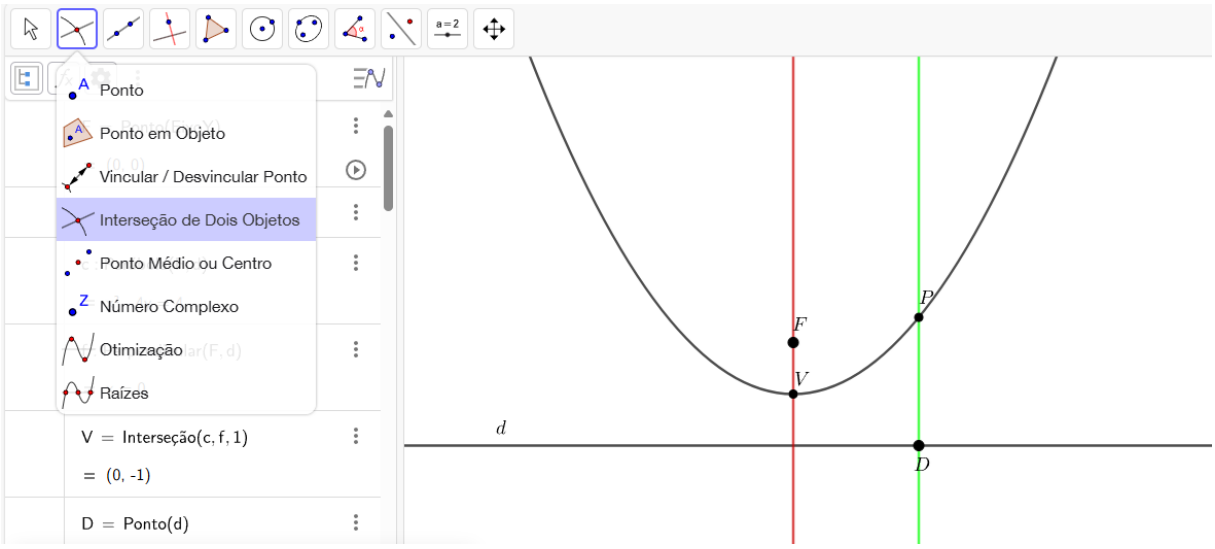
Figura 36 – Reta perpendicular à reta d passando por D



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 8: Clique na ferramenta **Interseção de Dois Objetos**. Posteriormente, clique na reta perpendicular feita no passo anterior e na parábola para marcar um ponto P qualquer da parábola.

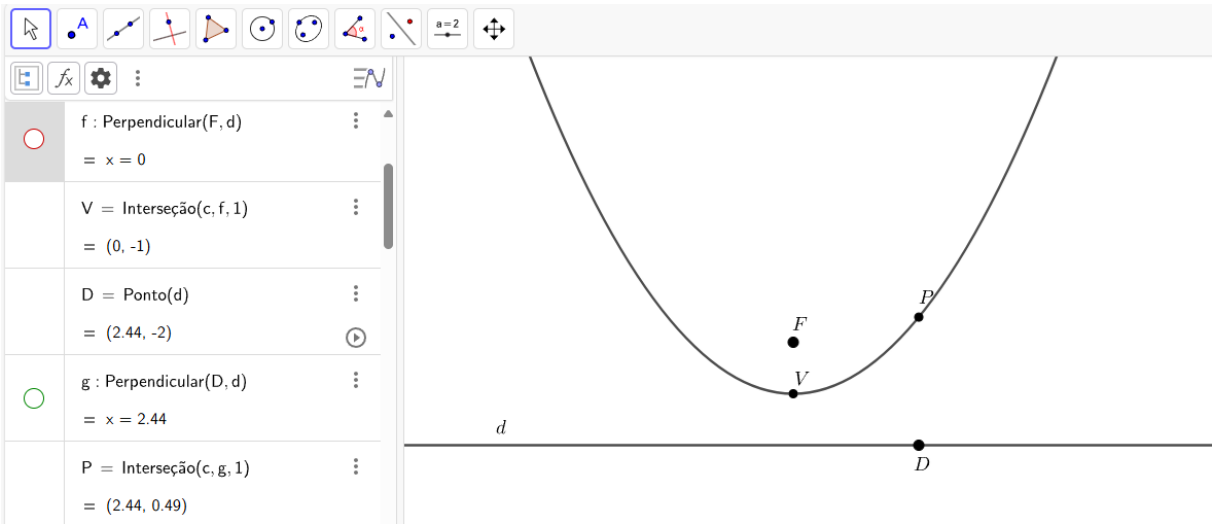
Figura 37 – Ponto P qualquer da parábola



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 9: Na Janela de Álgebra, desative a exibição das duas retas perpendiculares à d.

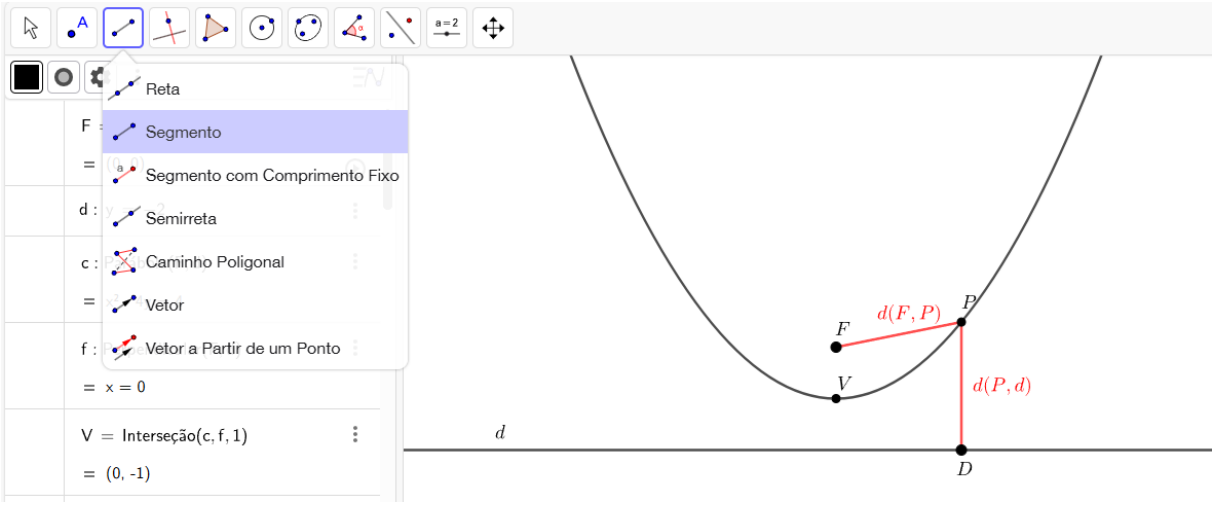
Figura 38 – Desativação das retas perpendiculares à d



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 10: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F à P e outro ligando P à reta d.

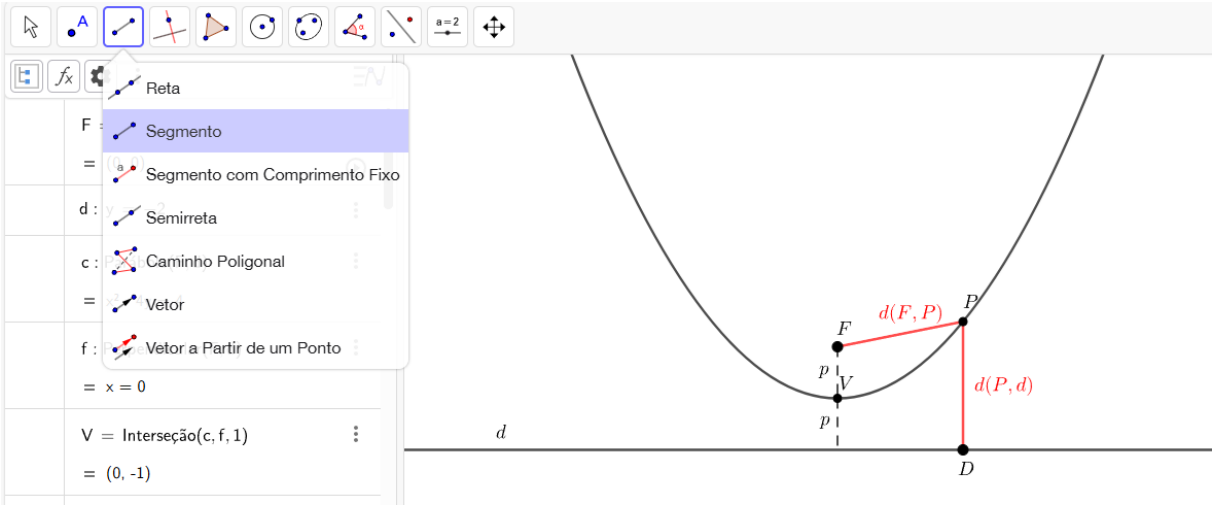
Figura 39 – Distâncias de F à P e de P à d



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 11: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F à V e outro ligando V à d (perpendicular à d), formando assim o parâmetro que é igual a $2p$.

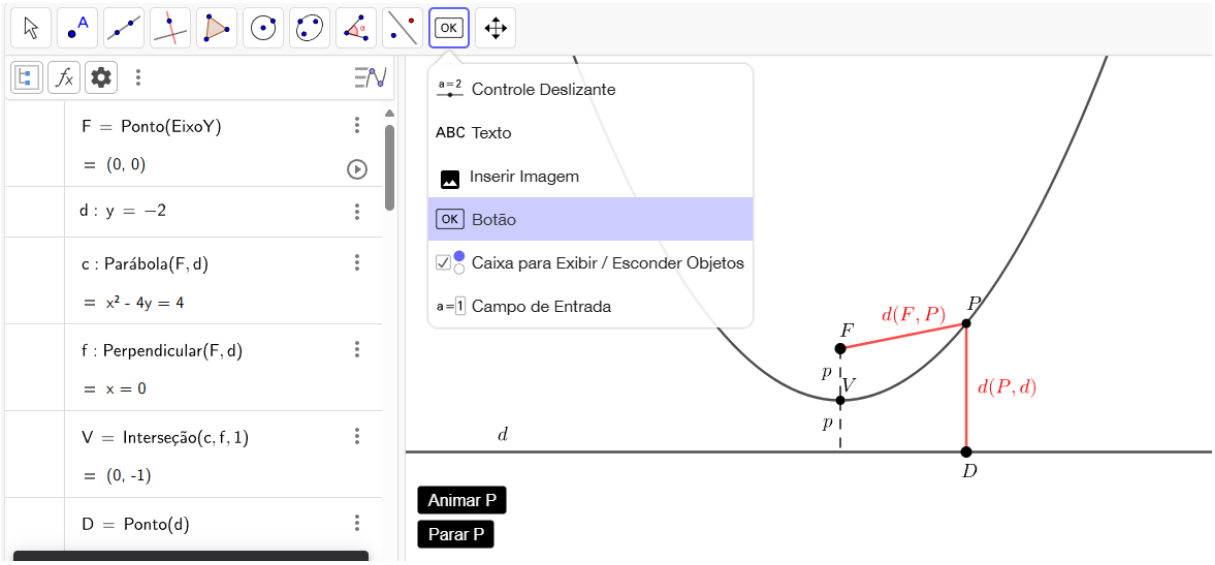
Figura 40 – Parâmetro $2p$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 12: Utilize a ferramenta **Botão** para adicionar comandos que controlem a animação do ponto P. Para iniciar a animação, insira o comando "StartAnimation(P)", e para interrompê-la, utilize "StartAnimation(P, false)".

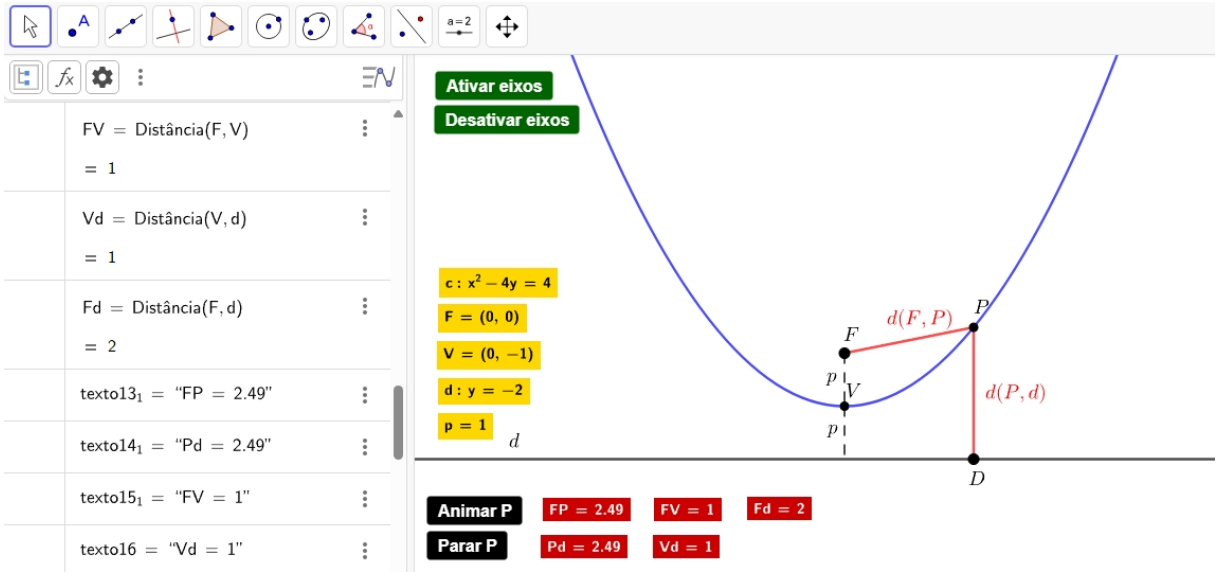
Figura 41 – Animação do ponto P



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 13: Na Caixa de Entrada, insira o comando de **Distância** e adicione as principais medidas relacionadas às propriedades da parábola, como $\overline{FP}$, $\overline{Pd}$, $\overline{Fd}$, entre outras. Posteriormente, arraste o resultado das distâncias para a Janela de Visualização. Arraste também os outros elementos da parábola.

Figura 42 – Distâncias entre os pontos principais da parábola



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A seguir, disponibilizamos um link com um tutorial detalhado para a construção da parábola no GeoGebra, permitindo uma melhor visualização de suas propriedades e características.

(Construção da Parábola no GeoGebra).

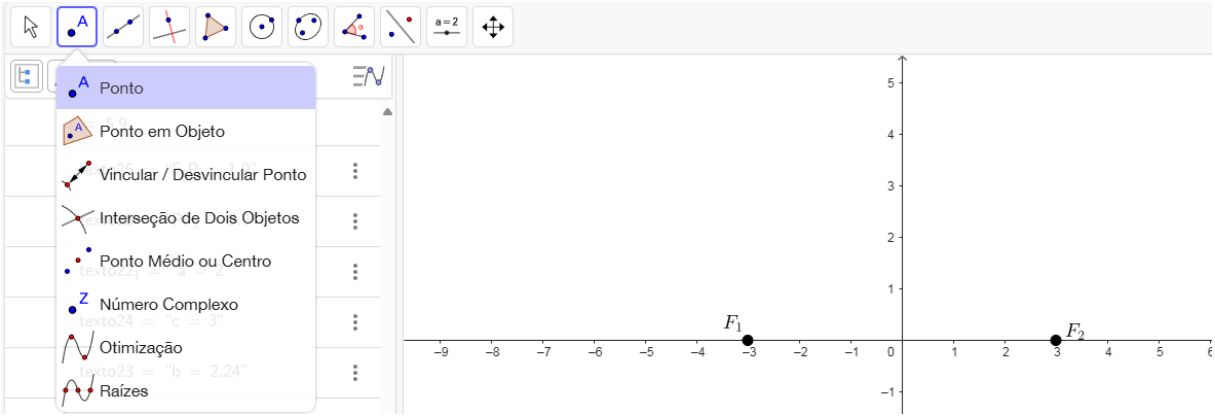
4.4 Construção da Hipérbole no GeoGebra

Finalizando a sequência de construções das cônicas, apresentamos a seguir o passo a passo para a construção da hipérbole no GeoGebra. Esse procedimento também pode ser utilizado como apoio pedagógico, permitindo que os alunos observem dinamicamente as características dessa curva.

Segue o passo a passo:

Passo 1: Primeiramente, na Barra de Ferramentas, clique na ferramenta **Ponto** e escolha dois pontos arbitrários no plano cartesiano. Esses pontos serão designados como os focos da hipérbole, denominados F_1 e F_2.

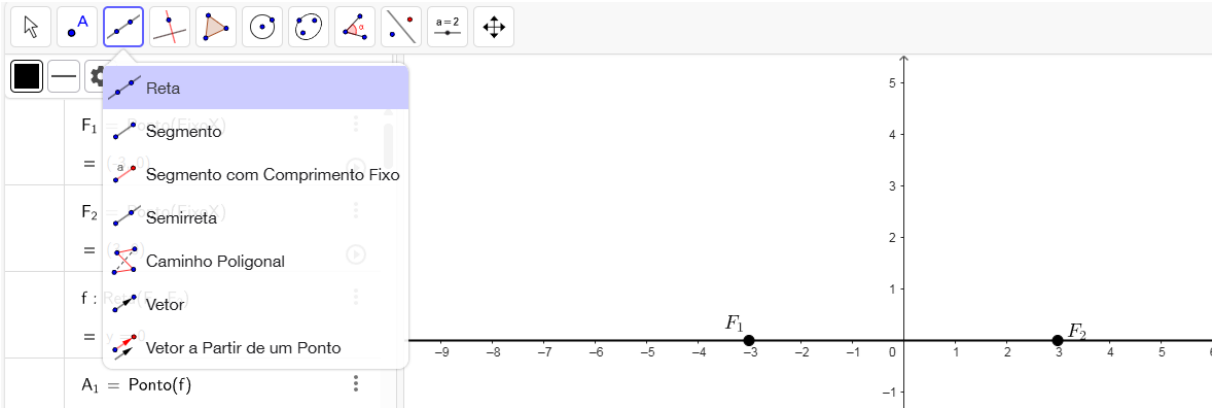
Figura 43 – Focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 2: Em seguida, na ferramenta de **Reta**, trace uma reta que passa pelos focos F_1 e F_2.

Figura 44 – Reta passando pelos focos F_1 e F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

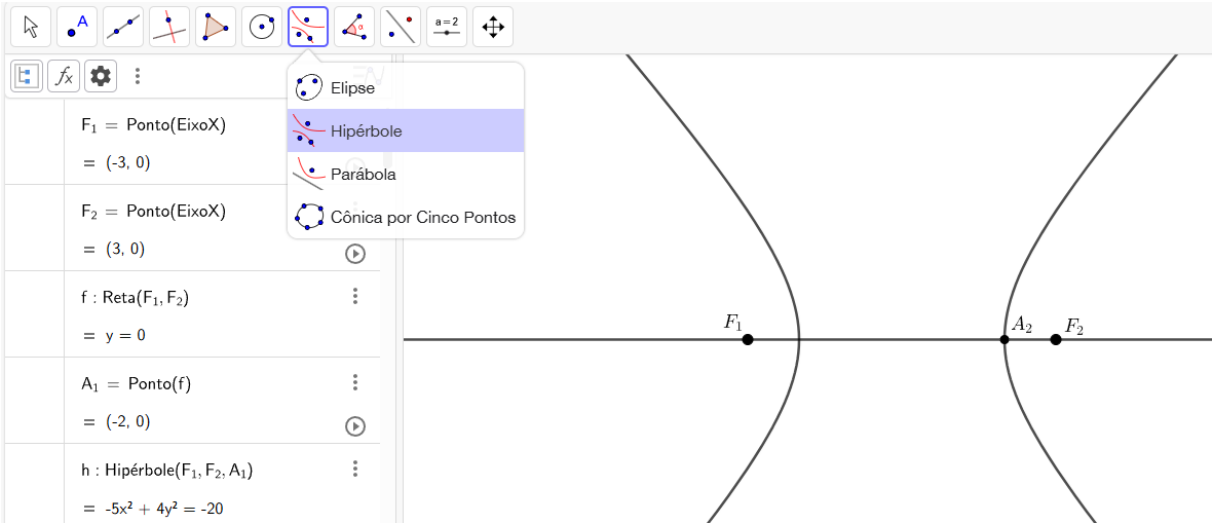
Passo 3: Depois, escolha um ponto qualquer sobre essa reta, entre os focos, para definir um dos vértices da hipérbole, por exemplo A_2.

Figura 45 – Vértice A_2 da hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 4: Na Barra de Ferramentas, selecione a opção **Hipérbole**. Em seguida, clique nos focos F_1 e F_2 e no vértice A_2 para definir a hipérbole.

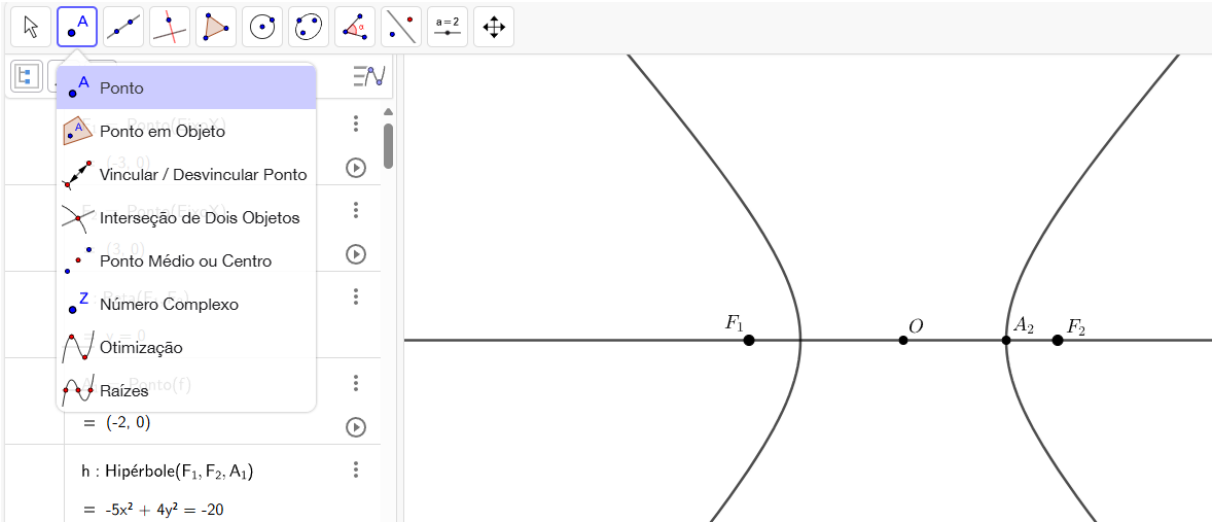
Figura 46 – Hipérbole formada pelos focos F_1 e F_2 e pelo vértice A_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 5: Em seguida, selecione a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clique na hipérbole para determinar seu centro O.

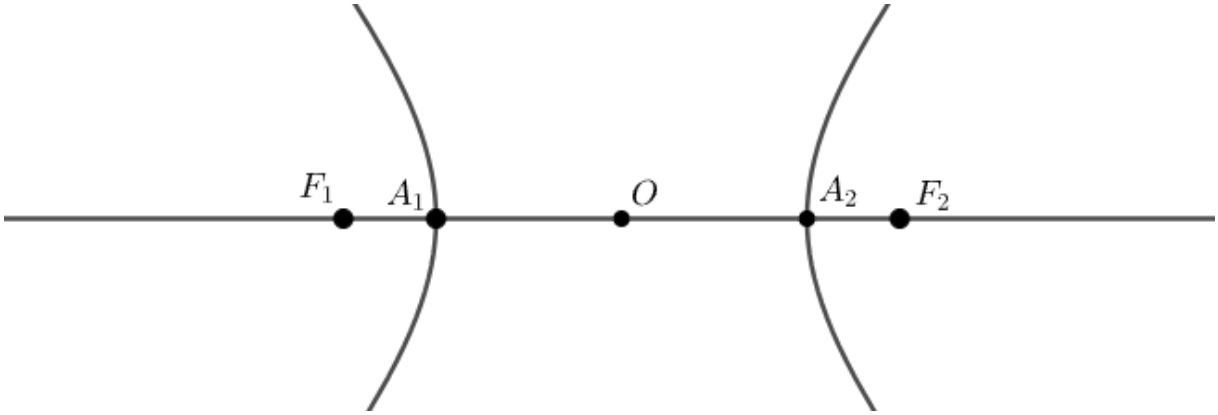
Figura 47 – Centro O da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 6: Na ferramenta **Ponto**, marque o outro vértice A_1 do eixo real da hipérbole.

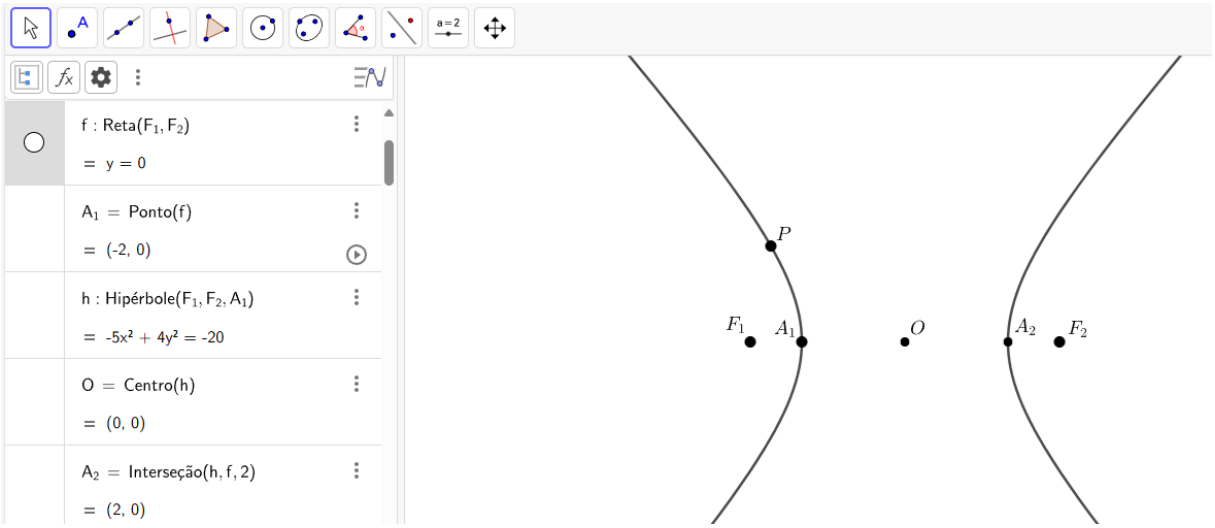
Figura 48 – Vértice A_1 da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 7: Na Janela de Álgebra, desative a exibição da reta e, em seguida, selecione um ponto P qualquer sobre a hipérbole.

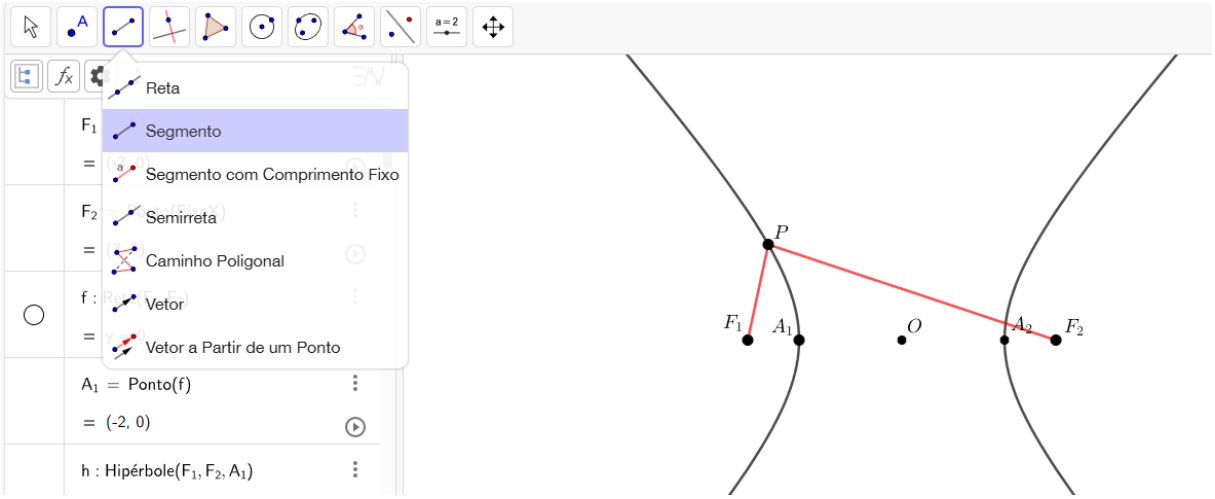
Figura 49 – Ponto P sobre a hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 8: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F_1 à P e outro ligando P à F_2, de modo que o módulo da diferença de seus comprimentos seja igual a $2a$.

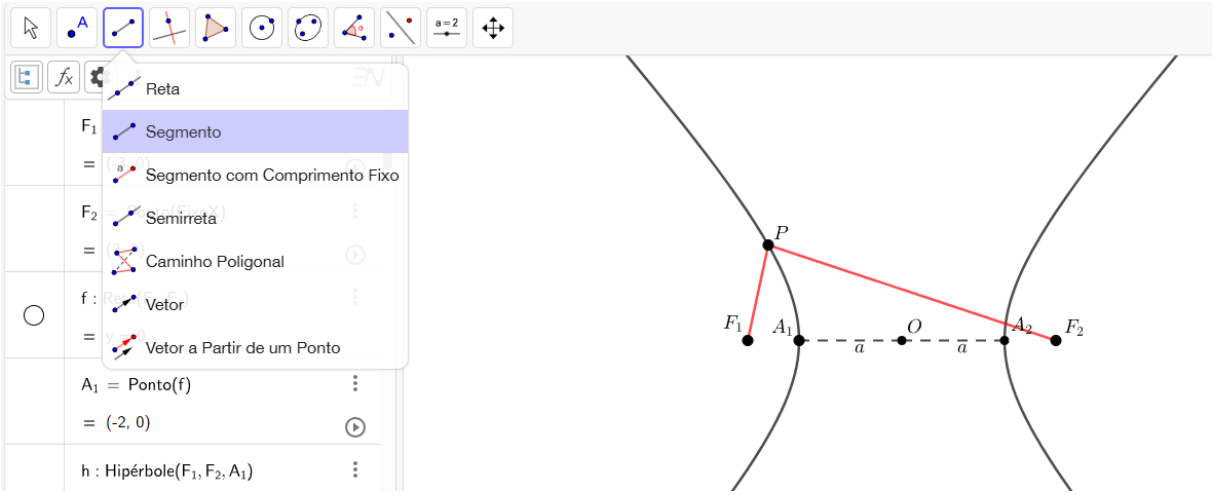
Figura 50 – Distâncias de F_1 à P e de P à F_2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 9: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando A_1 ao centro O e outro ligando O à A_2, formando assim o eixo real que é igual a $2a$.

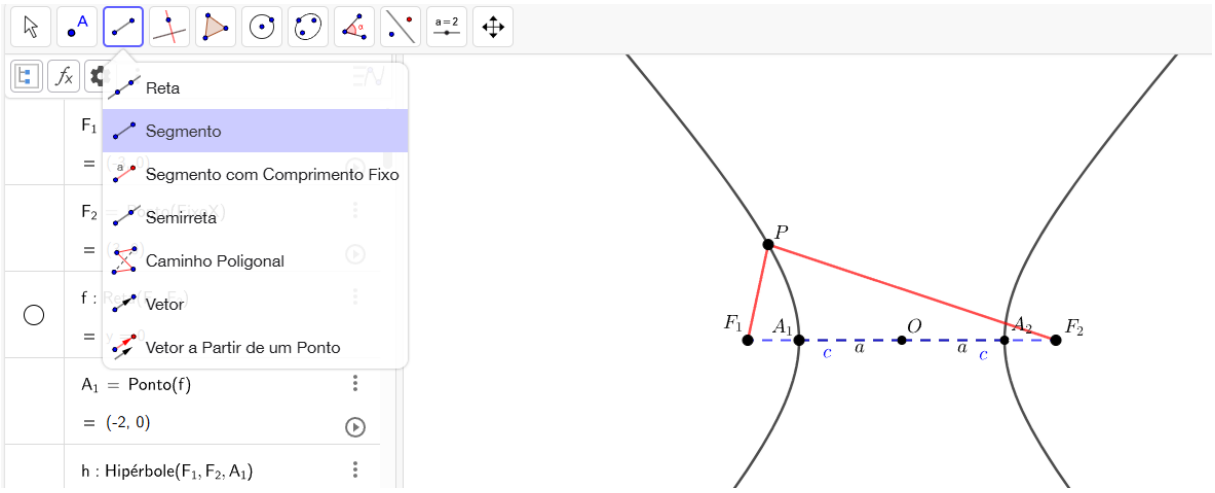
Figura 51 – Eixo real



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 10: Na ferramenta de **Segmento**, trace dois segmentos de reta: um ligando F_1 ao centro O e outro ligando O à F_2, formando assim a distância focal que é igual a $2c$.

Figura 52 – Distância focal

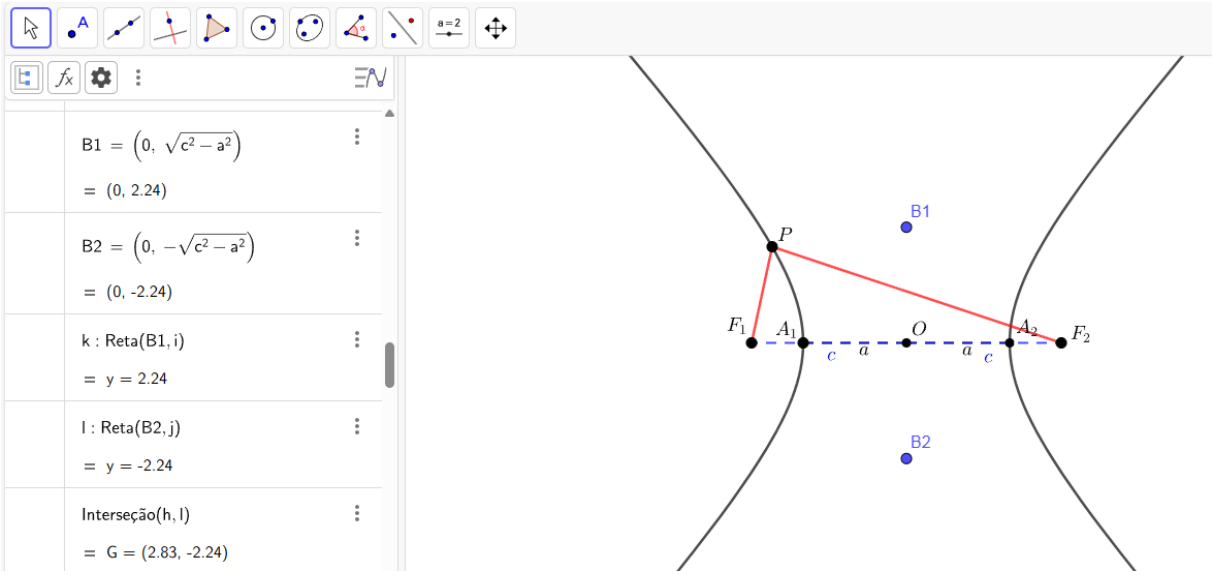


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 11: Para colocar o eixo imaginário, o processo é mais complexo. Digite na Caixa de Entrada os comandos: $B1 = (0, \sqrt{c^2 - a^2})$ e $B2 = (0, -\sqrt{c^2 - a^2})$ para encontrar os vértices do eixo imaginário.

Obs.: Este passo serve apenas para determinar as coordenadas dos vértices B_1 e B_2 do eixo imaginário, que serão construídos apenas no **Passo 18**. Será necessário, pois isso permitirá que o segmento $\overline{B_1B_2}$ acompanhe corretamente o comportamento da hipérbole ao ser movida.

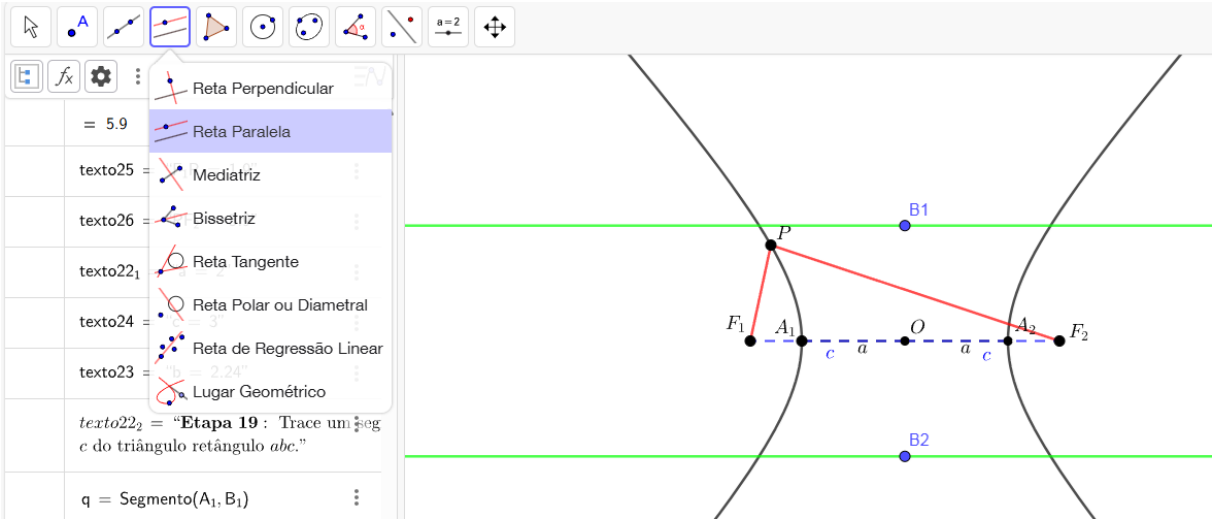
Figura 53 – Vértices do eixo imaginário



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 12: Na ferramenta de **Reta Paralela**, trace duas retas paralelas ao eixo focal passando por $B1$ e $B2$.

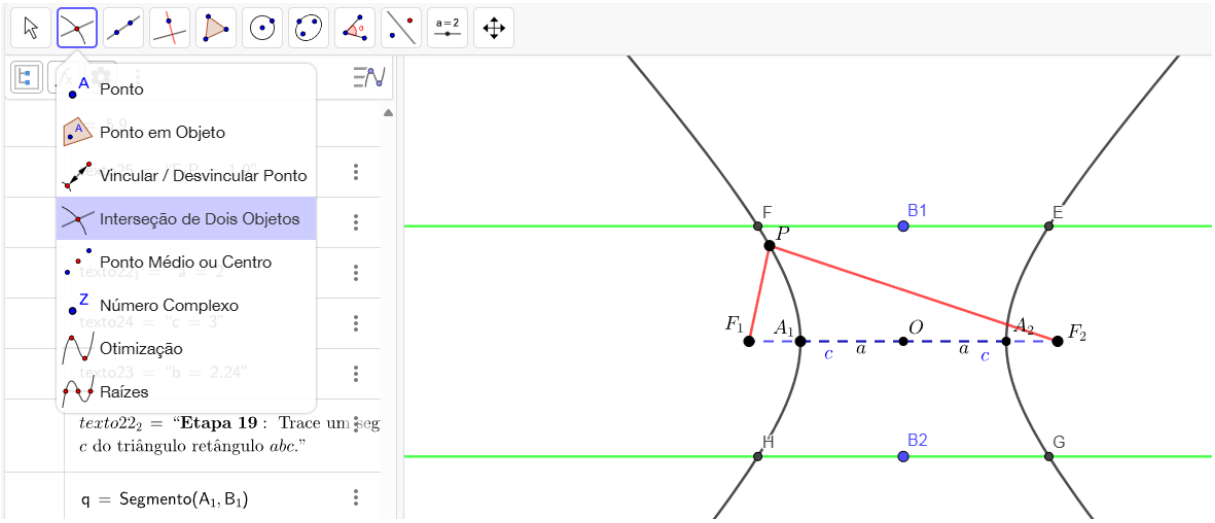
Figura 54 – Retas paralelas ao eixo focal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 13: Posteriormente, clique na ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e selecione a hipérbole e as duas retas para marcar os pontos de interseção.

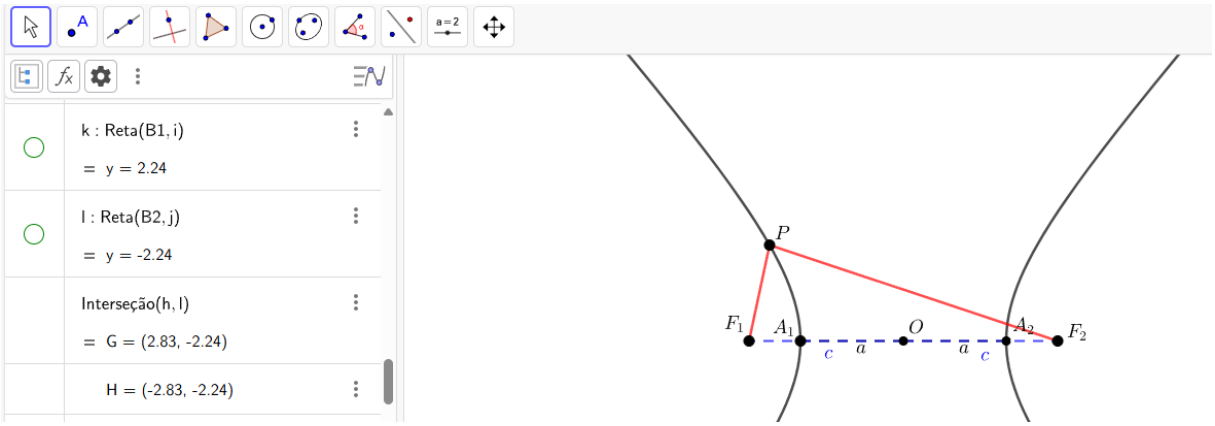
Figura 55 – Interseções da hipérbole com as duas retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 14: Na Janela de Álgebra, desative a exibição de $B1$, $B2$, das duas retas e dos pontos de interseção das retas com a hipérbole.

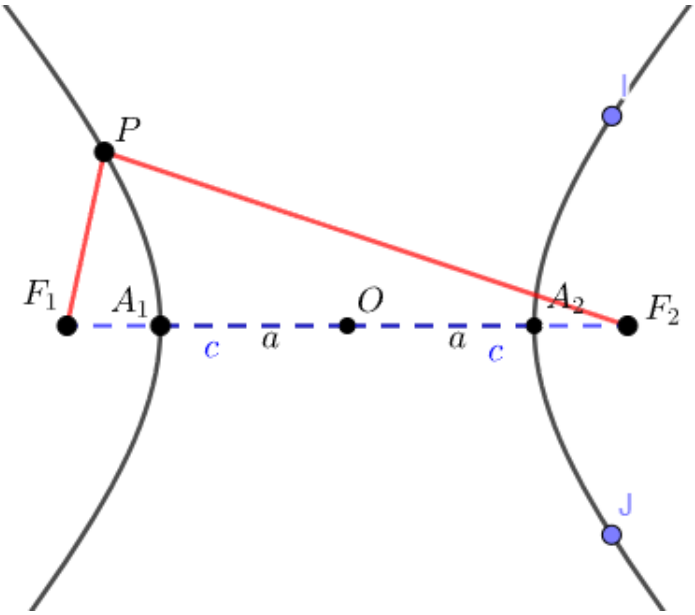
Figura 56 – Desativação dos elementos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 15: Selecione dois pontos sobre a hipérbole com as mesmas coordenadas dos pontos de interseção feita nos passos anteriores, um de cada reta.

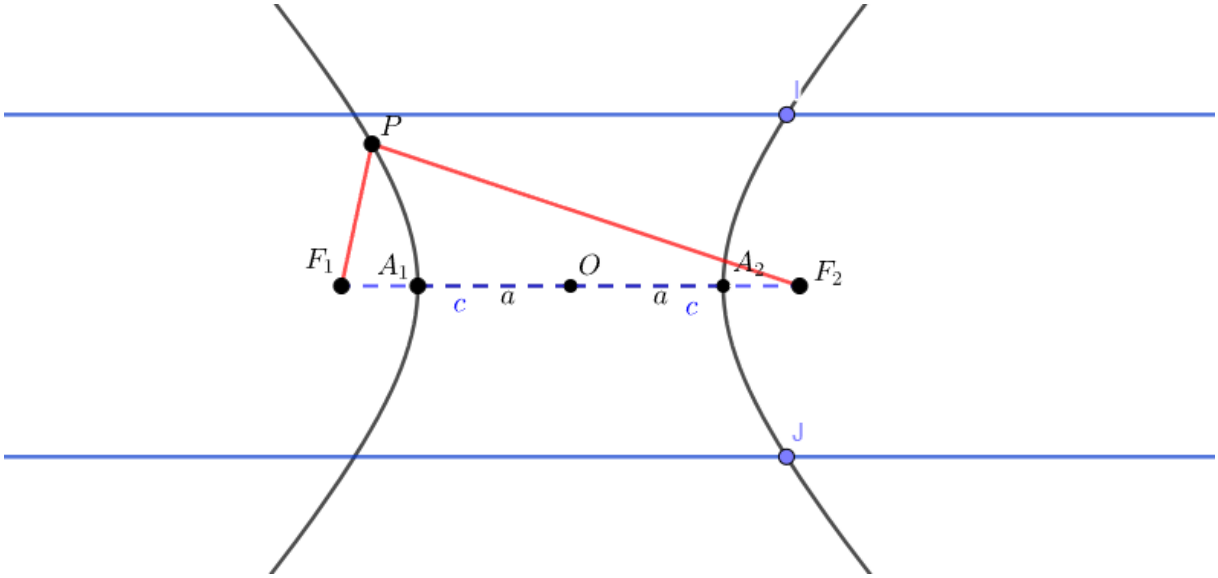
Figura 57 – Pontos sobre a hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 16: Trace duas retas paralelas ao eixo focal passando por esses dois novos pontos.

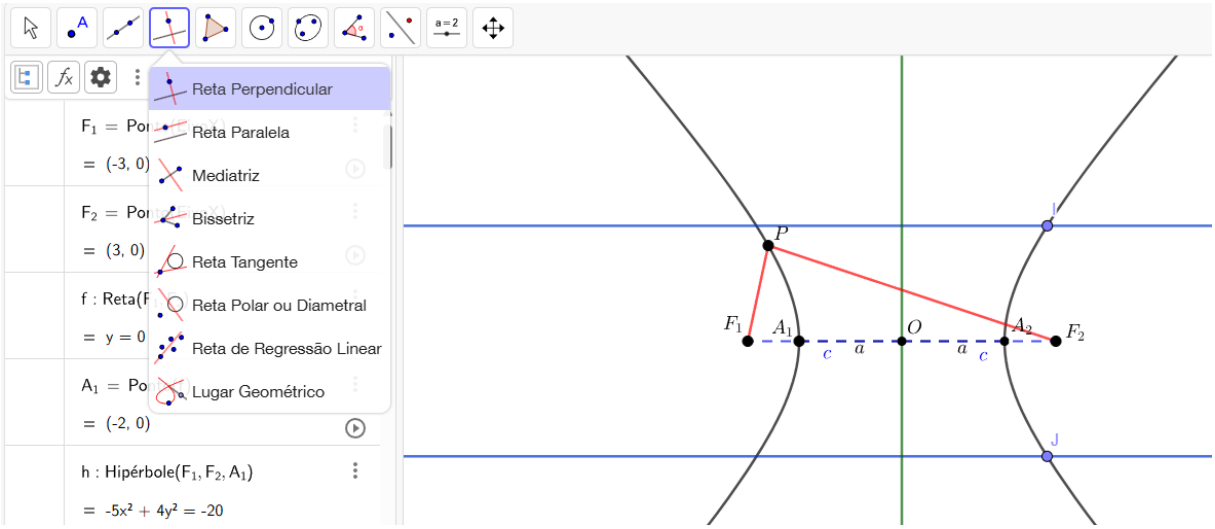
Figura 58 – Retas paralelas ao eixo focal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 17: Na ferramenta de **Reta Perpendicular**, trace uma reta perpendicular a uma dessas retas paralelas, passando pelo centro O.

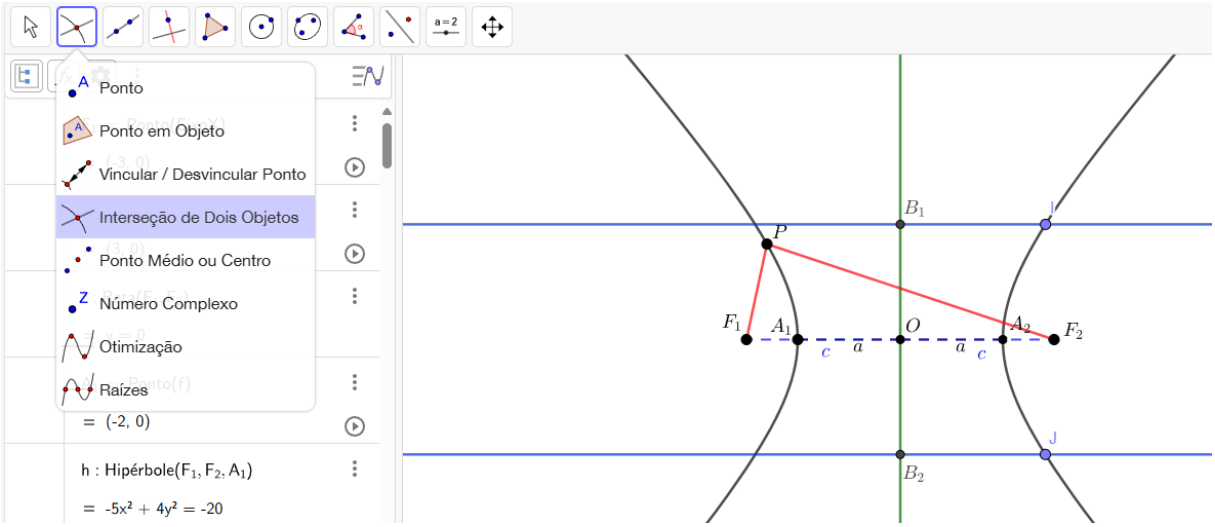
Figura 59 – Reta perpendicular à uma das retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 18: A interseção das três retas será os vértices do eixo imaginário, B_1 e B_2. Selecione-os.

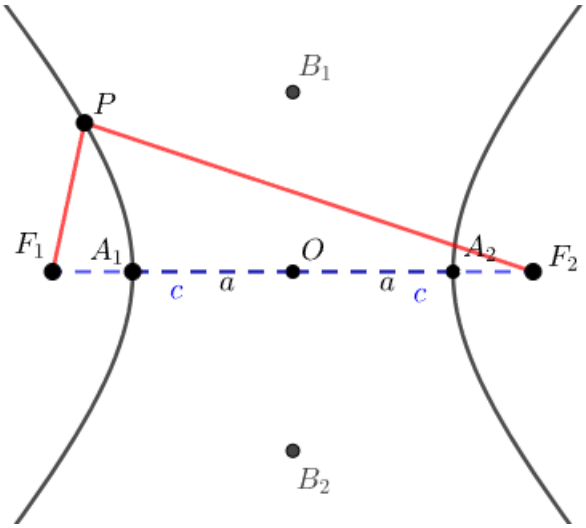
Figura 60 – Reta perpendicular à uma das retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 19: Desative a exibição das três retas e dos pontos de interseção entre as duas retas paralelas ao eixo focal e a hipérbole.

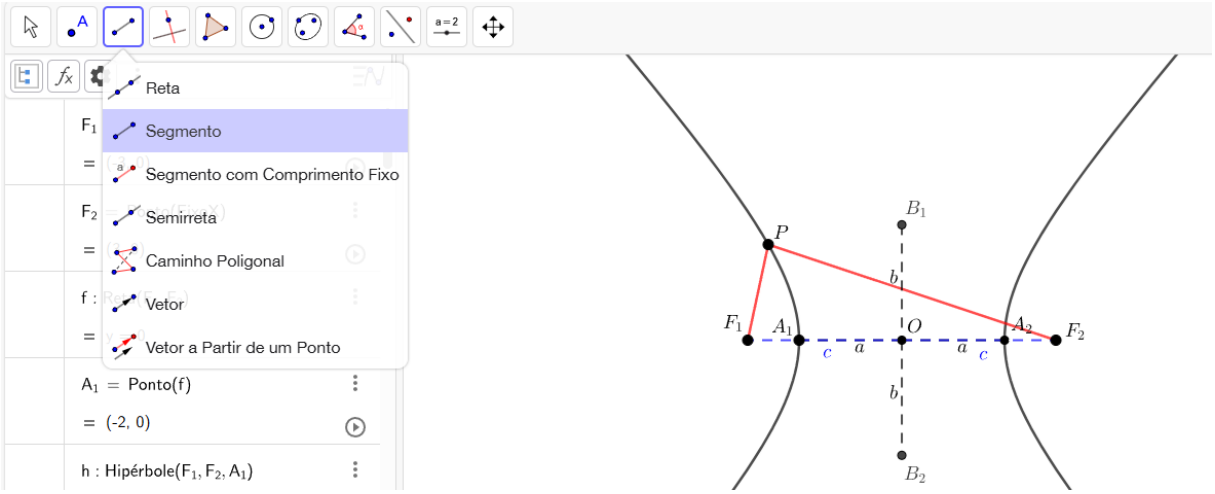
Figura 61 – Desativação dos elementos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 20: Trace dois segmentos de reta: um ligando B_1 ao centro O e outro ligando O à B_2, formando assim o eixo imaginário que é igual a $2b$.

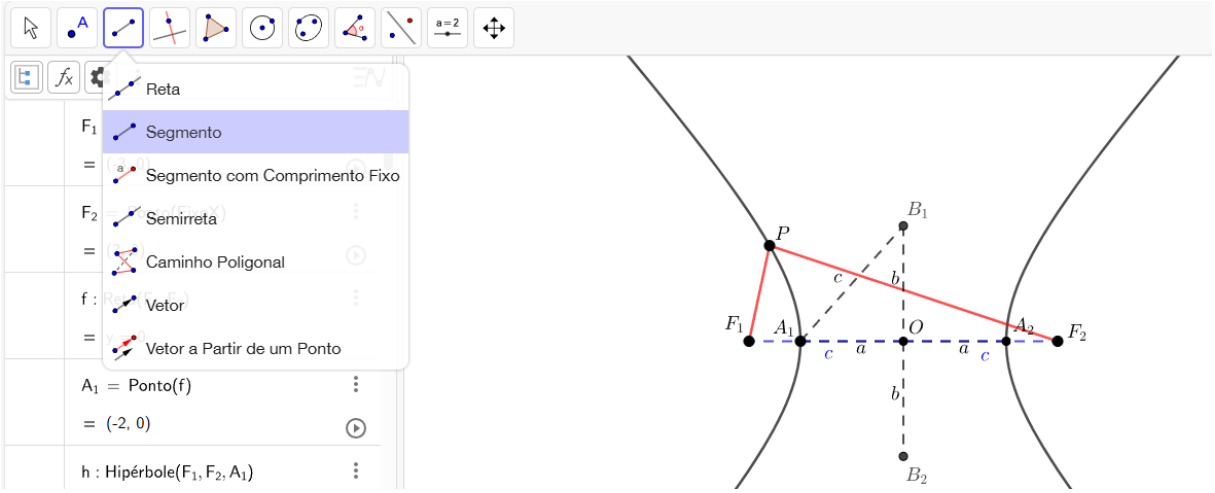
Figura 62 – Eixo imaginário



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 21: Trace um segmento de reta ligando A_1 à B_1, formando assim a hipotenusa que mede c do triângulo retângulo abc.

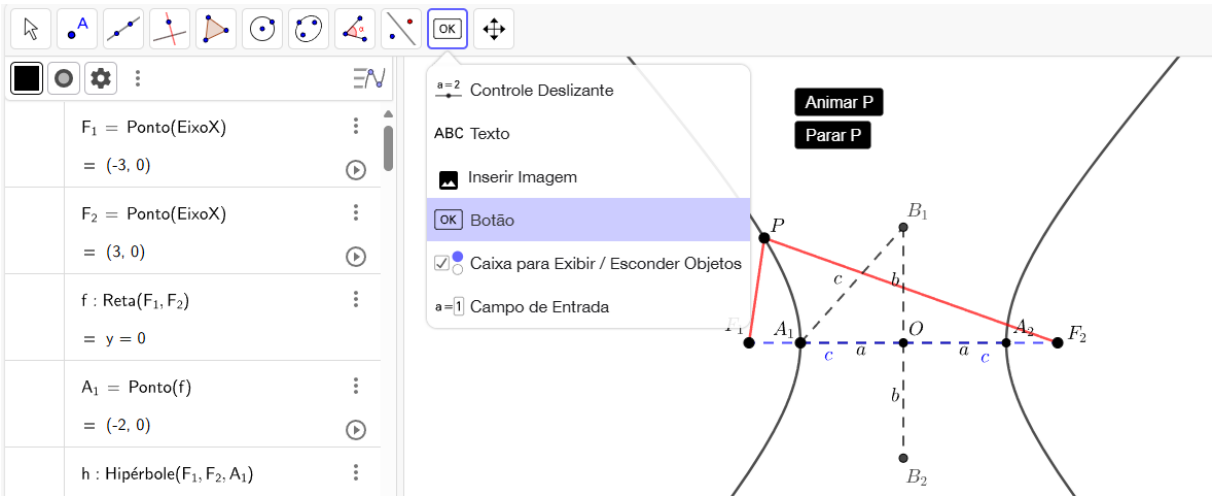
Figura 63 – Triângulo retângulo abc



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 22: Utilize a ferramenta **Botão** para adicionar comandos que controlem a animação do ponto P. Para iniciar a animação, insira o comando "StartAnimation(P)", e para interrompê-la, utilize "StartAnimation(P, false)".

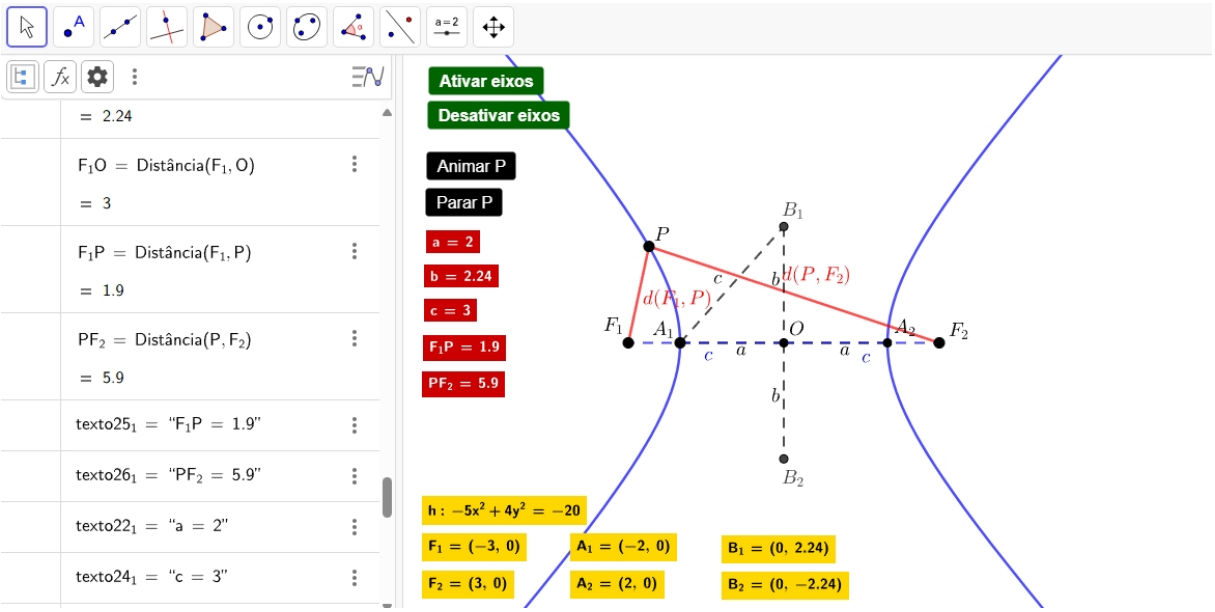
Figura 64 – Animação do ponto P



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Passo 23: Na Caixa de Entrada, insira o comando de **Distância** e adicione as principais medidas relacionadas às propriedades da hipérbole, como $\overline{FP}$, $\overline{Pd}$, $\overline{Fd}$, entre outras. Posteriormente, arraste o resultado das distâncias para a Janela de Visualização. Arraste também os outros elementos da hipérbole.

Figura 65 – Distâncias entre os pontos principais da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Assim como a elipse e a parábola, logo abaixo disponibilizamos um link com um tutorial animado para a construção da hipérbole no GeoGebra.

(Construção da Hipérbole no GeoGebra).

4.5 Identificação das Cônicas no GeoGebra

Nesta seção, seguindo a referência (LIMA, 2015), estudaremos a equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4.1}$$

a qual permite classificar as cônicas com base em seus coeficientes. Utilizando o GeoGebra, é possível explorar de forma visual e interativa a relação entre os coeficientes da equação geral do segundo grau e o formato das cônicas. Ao final desta seção, propomos uma atividade em que os estudantes poderão manipular controles deslizantes para alterar os coeficientes da equação e observar, em tempo real, como essas mudanças afetam a curva gerada. A proposta visa favorecer a identificação e a compreensão das cônicas de maneira dinâmica e envolvente.

4.5.1 Principais casos

A identificação das cônicas depende da relação entre os coeficientes da equação. A depender do tipo de cônica, diferentes coeficientes influenciam sua forma e posição no plano. Inicialmente, consideramos $B = D = E = 0$, o que simplifica a equação para:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \tag{4.2}$$

Diante disso, temos os seguintes casos:

1. Se $A = C$ e ambos são positivos, temos um **círculo**. Neste caso, o coeficiente F determina o raio, de modo que se $F < 0$, temos um círculo real, e se $F = 0$, o círculo reduz-se a um **ponto na origem**.

2. Se $A \neq C$ e ambos são positivos, temos uma **elipse**. O valor de F influencia seu tamanho, pois se $F < 0$, a elipse existe e sua forma depende de A e C, enquanto se $F = 0$, a elipse degenera em um **ponto**. O eixo maior da elipse é determinado pelos coeficientes A e C, sendo que se $A < C$, o eixo maior está sobre o eixo x, e se $A > C$, o eixo maior está sobre o eixo y.

3. Se $A < 0$ e $C > 0$, temos uma **hipérbole**. O eixo real da hipérbole depende do coeficiente F, pois se $A < 0$ e $F < 0$, o eixo real está sobre o eixo y, e se $C < 0$ e $F < 0$, o eixo real está sobre o eixo x. Além disso, se $F = 0$, a hipérbole degenera em **duas retas concorrentes**.

4. Se $A > 0$, $C = 0$ e $F < 0$, obtemos **duas retas paralelas ao eixo** y. Por outro lado, se $A = 0$, $C > 0$ e $F < 0$, obtemos **duas retas paralelas ao eixo** x.

5. Se $F > 0$ e $A, C > 0$, não há solução real, caracterizando um **conjunto vazio**.

6. Considerando agora somente $B = 0$, a **parábola** ocorre quando um dos coeficientes quadráticos é nulo, ou seja, tem a forma

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{4.3}$$

ou

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4.4}$$

Se $A \neq 0$ e $C = 0$, com $E \neq 0$, temos uma parábola com sua reta diretriz paralela ao eixo x. Da mesma forma, se $C \neq 0$ e $D \neq 0$, com $A = 0$, também obtemos uma parábola com sua reta diretriz paralela ao eixo y.

Vale destacar que a classificação das cônicas pode envolver outros critérios e abordagens mais aprofundadas, como vimos no capítulo 3, onde o cálculo é feito através de determinantes de matrizes. O objetivo deste texto é oferecer um guia prático para facilitar a identificação dessas curvas utilizando o GeoGebra.

Para concluir esta seção, sugerimos uma atividade interativa que utiliza a equação (4.1). Através de controles deslizantes, os alunos poderão ajustar os coeficientes e observar como essas alterações influenciam a forma da curva, identificando se ela representa uma parábola, elipse ou hipérbole. Para acessar essa atividade, visite o seguinte link:

(Identificação das Cônicas no GeoGebra).

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo apresenta a proposta de uma sequência didática elaborada com o objetivo de favorecer o ensino das cônicas. A estrutura dessa proposta baseia-se em um encadeamento intencional de atividades que visam promover a aprendizagem de maneira contextualizada e progressiva. Para respaldar essa elaboração, são consideradas as contribuições de autores como Lisiane Peretti (2013) e Antoni Zabala (1998), cujas definições de sequência didática orientam a organização e a coerência das atividades propostas.

5.1 Definição de Sequência Didática

No contexto educacional contemporâneo, buscar estratégias eficazes para o planejamento do ensino tem sido uma constante entre professores e pesquisadores. A simples transmissão de conteúdos já não é suficiente; é preciso organizar o ensino de maneira que desperte o interesse, promova a participação ativa e contribua para a construção do conhecimento de forma progressiva e contextualizada. Para isso, é fundamental contar com instrumentos que orientem e sistematizem essa prática pedagógica, e é nesse contexto que entra o que chamamos de sequência didática.

Embora o termo *sequência didática* seja amplamente utilizado no meio educacional, ele pode gerar confusão para leitores que não estão familiarizados com conceitos pedagógicos. Por isso, neste trabalho, considera-se sequência didática como:

> "Sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido."(PERETTI; COSTA, 2013)

Segundo Zabala (1998), as atividades ou tarefas representam a unidade básica do processo de ensino-aprendizagem. No entanto, quando organizadas de forma intencional e articulada, essas atividades se transformam em uma sequência significativa, o que ele chama de *sequência didática*.

Para o autor, utilizar sequências didáticas como referência central na análise da prática pedagógica permite não apenas planejar o ensino, mas também aplicá-lo e avaliá-lo de forma processual. Esse encadeamento favorece a compreensão do aprendizado e está diretamente ligado à função social do ensino.

Zabala (1998) também destaca a importância de diversos elementos nesse processo: o papel de professores e alunos, a organização da aula, a gestão do tempo e do espaço, a estruturação dos conteúdos, os materiais curriculares e os critérios de avaliação. To-

dos esses fatores são fundamentais para o êxito de uma sequência didática bem elaborada.

5.2 Sequência Didática Proposta

Apresentamos a seguir uma sequência didática sobre o estudo das cônicas, elaborada com o intuito de servir como sugestão para professores que desejam abordar esse conteúdo em sala de aula. A proposta contempla momentos teóricos, práticos e tecnológicos, buscando tornar o ensino mais dinâmico e acessível aos estudantes. O referencial teórico adotado foi o livro didático de Chavante e Prestes (2020), cujas orientações nortearam o desenvolvimento desta etapa, complementada por uma aula expositiva sobre a equação geral das cônicas, além da utilização do GeoGebra como ferramenta didática.

- **Tema:** Estudo das cônicas e suas propriedades.
- **Público alvo:** Alunos do 3° ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos:** Seções cônicas e suas classificações; Estudo da elipse, parábola e hipérbole; Equações reduzidas e geral das cônicas.
- **Objetivo Geral:** Promover a compreensão das seções cônicas como lugares geométricos por meio de uma abordagem histórica, algébrica, geométrica e tecnológica, possibilitando aos alunos identificar, representar, analisar e aplicar as cônicas no plano cartesiano e no cotidiano, com o apoio do software GeoGebra.
- **Objetivos Específicos:**

    1. Entender como as cônicas são obtidas por meio da superfície cônica circular reta de duas folhas.
    2. Compreender as cônicas como lugares geométricos.
    3. Identificar os principais elementos de uma curva cônica.
    4. Identificar e classificar as cônicas a partir de suas equações.
    5. Representar graficamente as cônicas e relacioná-las às suas equações algébricas.

- **Tempo estimado:** 11 aulas de 45 minutos cada.
- **Desenvolvimento:** A proposta será desenvolvida em uma sequência de onze momentos, iniciando com uma abordagem histórica sobre as seções cônicas e suas aplicações no cotidiano. Em seguida, os alunos estudarão a elipse, a parábola e a hipérbole, compreendendo suas definições como lugares geométricos, seus elementos principais e suas equações reduzidas. Também será abordada a análise da equação geral das cônicas.

Após o estudo teórico, os alunos serão introduzidos ao uso do GeoGebra, aprendendo a construir dinamicamente as cônicas a partir de suas definições geométricas. Atividades avaliativas serão aplicadas antes e depois das construções, possibilitando a fixação dos conteúdos e a verificação do aprendizado.

- **Avaliação:**
  — *Formativa:* Perguntas e respostas durante as aulas; Observação da participação dos alunos; Atividades feitas em sala.

  — *Somativa:* Aplicação de duas atividades individuais, sem consulta, compostas por 10 questões abertas cada, abordando os conteúdos estudados.

1° Momento: Abordagem histórica sobre seções cônicas, com questionamentos iniciais e discussão sobre aplicações das cônicas no cotidiano.

Neste primeiro momento, os alunos serão introduzidos ao estudo das cônicas por meio de uma abordagem histórica. O professor poderá apresentar a origem das seções cônicas na Grécia Antiga, destacando os trabalhos de matemáticos como Apolônio de Perga, Arquimedes e Euclides, que contribuíram significativamente para a compreensão dessas curvas.

Além da contextualização histórica, será discutido como as cônicas surgem a partir da interseção de um plano com um cone duplo, originando a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole. Essa introdução permitirá que os alunos percebam a relação entre as diferentes curvas e compreendam sua importância matemática.

Para ilustrar o impacto das cônicas no cotidiano, poderão ser apresentados exemplos concretos, como antenas parabólicas, trajetórias de satélites, lentes ópticas e construções arquitetônicas baseadas em suas propriedades geométricas.

2° Momento: Estudo da Elipse.

No segundo momento, os alunos serão introduzidos ao estudo da elipse, explorando sua definição, propriedades, elementos e equação reduzida. O objetivo é que eles desenvolvam uma visão clara dessa cônica, analisando suas características e sua representação matemática.

Serão discutidos seus principais elementos, como focos, centro, eixo maior, eixo menor e vértices, destacando a importância de cada um na construção e compreensão dessa cônica. Além disso, será analisada a equação reduzida da elipse, mostrando como os parâmetros influenciam sua forma e posição no plano cartesiano.

A depender da aula, o professor poderá também abordar a circunferência como um caso particular da elipse, ou seja, quando $a = b$ na sua equação reduzida.

3° Momento: Estudo da Parábola.

No terceiro momento, os alunos terão a oportunidade de conhecer a parábola, explorando seus elementos fundamentais, propriedades e equação reduzida. O objetivo será compreender como essa cônica se comporta e quais fatores determinam sua forma e posição no plano cartesiano.

A aula abordará os principais componentes da parábola, como o vértice, o foco, a reta diretriz e o eixo de simetria, analisando a função de cada um na construção da curva. Além disso, será apresentada sua equação reduzida, destacando como as variações nos coeficientes alteram a abertura, a orientação e a posição da parábola.

4° Momento: Estudo da Hipérbole.

No quarto momento, os alunos serão introduzidos ao estudo da hipérbole, investigando suas propriedades, elementos e equação reduzida. O objetivo é que compreendam as características dessa cônica e como suas particularidades a diferenciam das demais curvas estudadas.

Durante a aula, serão apresentados seus principais elementos, como focos, vértices, eixos transversal e conjugado, além das assíntotas, que orientam o comportamento da hipérbole. Também será explorada sua equação reduzida, analisando como os coeficientes determinam a posição e a orientação da curva no plano cartesiano.

5° Momento: Estudo da Equação Geral da circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

No quinto momento, os alunos irão estudar a equação geral das cônicas, expressa por:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

O objetivo será identificar, com base nessa forma algébrica, qual figura geométrica está representada.

Para isso, o professor poderá utilizar o teorema (3.2), que fornece os critérios já apresentados para a classificação das cônicas.

Com base nos cálculos, os alunos poderão determinar se a equação representa uma **circunferência**, **elipse**, **parábola**, **hipérbole**, **duas retas**, **um único ponto** ou até mesmo o **conjunto vazio**, de acordo com as relações entre os coeficientes.

6° Momento: Aplicação da Atividade I.

No sexto momento, os alunos realizarão a Atividade I, que será utilizada como atividade avaliativa, com o objetivo de consolidar os conteúdos trabalhados nos encontros anteriores sobre as seções cônicas.

A atividade propõe questões que abrangem a identificação das cônicas a partir de suas definições geométricas, o reconhecimento e o cálculo de elementos importantes como focos,

centro, eixos e vértices, além da análise de equações reduzidas e gerais de elipse, parábola e hipérbole. Também serão abordadas situações-problema contextualizadas, conectando a teoria com aplicações práticas.

Os alunos deverão resolver a atividade individualmente. O professor acompanhará o desenvolvimento, esclarecendo dúvidas e orientando na interpretação dos enunciados.

O conteúdo dessa atividade encontra-se detalhado no Apêndice A, intitulado Atividade I, que reúne as questões a serem aplicadas e servirá como referência para a aplicação desse momento avaliativo.

7° Momento: Introdução ao GeoGebra.

No sétimo momento, os alunos serão introduzidos ao GeoGebra. O objetivo deste momento é familiarizar os alunos com a interface do programa e apresentar suas funcionalidades básicas, preparando-os para as construções geométricas que serão realizadas nos encontros seguintes.

Durante a aula, o professor poderá demonstrar como navegar pelo ambiente do GeoGebra, explicando os principais painéis (algébrico, gráfico e de entrada), além das ferramentas mais utilizadas, como ponto, reta, interseção, polígono, entre outras. Também será abordado como inserir equações, utilizar comandos e manipular objetos.

Essa introdução é fundamental para que os alunos se sintam à vontade com a ferramenta e consigam utilizá-la de maneira eficiente nas construções das cônicas.

8° Momento: Construção da Elipse no GeoGebra.

No oitavo momento, os alunos construirão a elipse no GeoGebra seguindo o passo a passo da seção (4.2). A proposta será desenvolvida em sala de aula, com orientação do professor em cada etapa do processo. Essa experiência permitirá uma visualização clara e interativa da definição da elipse, reforçando o entendimento de seus elementos e propriedades.

Ao final da construção, os alunos poderão manipular a figura livremente, alterando a posição dos focos e do ponto móvel, observando a distância entre os principais pontos no plano cartesiano, visualizando sua equação algébrica e identificando os elementos fundamentais da elipse, como os focos, eixo maior, eixo menor, vértices e o centro. Além disso, será possível animar a construção, facilitando a compreensão da geração da curva e permitindo uma análise dinâmica de seu comportamento geométrico.

9° Momento: Construção da Parábola no GeoGebra.

No nono momento, os alunos darão continuidade ao uso do GeoGebra, agora com foco na construção da parábola a partir de sua definição geométrica. Utilizando o passo a passo apresentado na seção (4.3), os estudantes desenvolverão uma construção baseada

na propriedade que caracteriza a parábola: o conjunto dos pontos equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz).

A atividade será realizada com acompanhamento do professor, que auxiliará na interpretação da definição e na aplicação das ferramentas necessárias do software.

Ao final, os alunos poderão experimentar diferentes posições do foco, verificando como essa alteração afeta a forma da parábola. Também terão a oportunidade de observar a equação gerada automaticamente pelo GeoGebra, analisar a posição e as distâncias entre os pontos principais, como o foco, o vértice e a diretriz, além de poder fazer a animação de um ponto P qualquer da parábola.

10° Momento: Construção da Hipérbole no GeoGebra.

No décimo momento, os alunos finalizarão a série de construções das seções cônicas no GeoGebra com a hipérbole. A atividade será guiada pelo passo a passo apresentado na seção (4.4). Assim como na elipse e na parábola, o professor irá auxilar os alunos na sua construção.

Ao concluir a atividade, os alunos poderão interagir com a figura, modificando a posição dos focos e do ponto P, observando as variações na equação da hipérbole e analisando a posição e as distâncias entre os principais elementos, como focos, vértices, eixo transversal, eixo conjugado e assíntotas. O GeoGebra também permitirá a animação do ponto móvel, tornando a visualização da curva ainda mais dinâmica e facilitando a compreensão do comportamento geométrico da hipérbole.

11° Momento: Aplicação da Atividade II.

Neste momento, será aplicada a Atividade II (disponível no Apêndice B), que tem como objetivo avaliar o entendimento dos alunos sobre as construções realizadas no GeoGebra e a identificação das cônicas a partir de suas equações gerais. A ideia é resolver a atividade com o apoio do software.

A atividade propõe novas construções da elipse, parábola e hipérbole no GeoGebra, agora utilizando equações reduzidas previamente definidas, seguidas de questionamentos sobre suas características geométricas (centro, vértice, focos, diretriz, eixos) e a observação de como as curvas se comportam ao mover seus elementos (focos e vértices). Além disso, há exercícios de identificação de cônicas a partir da equação geral e também um exercício de reflexão sobre o uso do GeoGebra no aprendizado.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo propor uma abordagem didática para o ensino das seções cônicas no ensino médio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de apoio pedagógico. A proposta foi estruturada com base na integração entre os aspectos geométricos, algébricos e históricos das curvas, de forma a favorecer uma aprendizagem mais eficaz.

Diante das dificuldades recorrentes na abordagem das cônicas em sala de aula, especialmente no que se refere à abstração dos conceitos e à ausência de conexões com aplicações práticas, o uso do GeoGebra mostrou-se um recurso promissor. Ao possibilitar construções dinâmicas e interativas, o software contribui para ampliar a compreensão dos estudantes e estimular o interesse pelo conteúdo, além de estar em consonância com as diretrizes da BNCC, que incentivam o uso pedagógico das tecnologias digitais.

A sequência didática apresentada visa colaborar com a prática docente, oferecendo uma alternativa acessível e eficaz para o trabalho com as cônicas no contexto escolar. Espera-se que essa proposta não apenas facilite o processo de ensino-aprendizagem, mas também auxilie na preparação dos alunos para avaliações externas, como o ENEM, que demandam competências relacionadas à interpretação gráfica e ao raciocínio geométrico.

Como desdobramento, sugere-se que futuras pesquisas e práticas investiguem a aplicação dessa proposta em contextos reais de sala de aula, considerando diferentes perfis de turmas e recursos disponíveis, de modo a avaliar sua efetividade e adaptabilidade às diversas realidades educacionais.

REFERÊNCIAS

ANTAR, A. N. et al. *Noções de Matemática à Geometria Analítica*. [S.l.]: Editora Moderna, 1980. v. 6.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante Matemática e suas tecnologias – Sistemas lineares e geometria analítica*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

EFIMOV, N. *Elementos de geometria analítica*. Belo Horizonte: Livraria Cultura Brasileira Editora, 1972.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

HANSEN, V. L. *Sombras do círculo: das seções cônicas ao movimento planetário*. 2. ed. Nova Jersey: World Scientific, 2024.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. *Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2*. Lisboa: [s.n.], 2009. Tradução e adaptação para português de Portugal por António Ribeiro.

LIMA, E. F. d. S. *Uma proposta para o ensino das cônicas com o auxílio do software Maple*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Estadual da Paraíba, PROFMAT, Campina Grande, 2015.

LOPES, J. F. *Cônicas e Aplicações*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

NASCIMENTO, K. F. d. *Luz, cônicas, reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. d. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, 2013.

REIS, G. L. d.; SILVA, V. V. d. *Geometria Analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

ROSSI, G. d. R.; BISOGNIN, E. Explorando arte e geometria num ambiente computacional. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*. Bahia: SBEM, 2010.

SMITH, D. E. *História da Matemática*. [S.l.]: Dover Publications, 1958. v. 2. (Livros de Matemática da Dover).

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

APÊNDICE A – ATIVIDADE I

Professor(a): _____

Aluno(a): _____

1. Identifique a curva correspondente a cada definição abaixo:

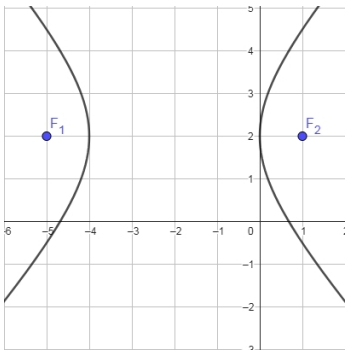
   a) O conjunto de todos os pontos P em um plano, cuja soma das distâncias de P aos dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante e maior que a distância entre os focos F_1 e F_2, sendo essa soma igual a $2a$, onde a é uma constante positiva.

   b) O conjunto de todos os pontos P em um plano, cuja distância de P a um ponto fixo (foco) é sempre igual à distância de P a uma reta fixa (reta diretriz).

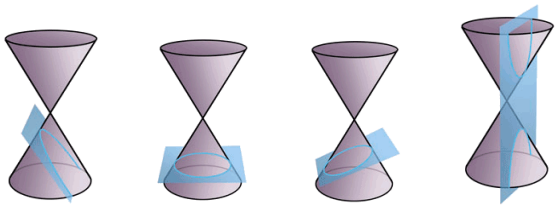
2. Seja a elipse de equação $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$, determine:

   a) seus focos;
   b) a medida do eixo maior;
   c) a medida do eixo menor;
   d) sua distância focal;
   e) seu centro.

3. Escreva a equação reduzida da hipérbole representada abaixo:



4. Observe as imagens a seguir, nas quais um cone circular duplo é cortado por diferentes planos. Para cada uma das figuras, identifique qual cônica está sendo gerada:



a) b) c) d)

5. Considere uma parábola com equação $y^2 = 4px$, em que p é uma constante positiva. Responda:

   a) Qual é o foco dessa parábola?

   b) Qual é a equação da reta diretriz associada a essa parábola?

6. Sabendo que a equação geral de uma cônica é dada por

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

   e considerando a equação

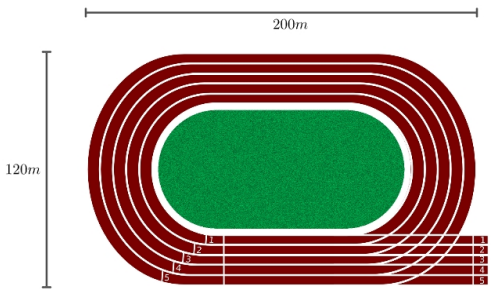
$$4x^2 + 2xy - 4y^2 + y + 2 = 0.$$

   Responda:

   a) Identifique os coeficientes A, B, C, D, E e F.
   b) Classifique o tipo de cônica representada por essa equação.

7. Encontre a equação da parábola com vértice na origem e que passa pelo ponto $(2, 8)$, sendo o eixo de simetria paralelo ao eixo y.

8. Um arquiteto está projetando uma pista de corrida elíptica para um parque. O comprimento da pista ao longo do eixo maior será de 200 metros, e ao longo do eixo menor será de 120 metros. O centro da pista será localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, com o eixo maior paralelo ao eixo x.



Com base nessas informações, assinale a alternativa que apresenta corretamente a equação reduzida da elipse que representa o contorno da pista de corrida.

a) $\dfrac{x^2}{10000} + \dfrac{y^2}{3600} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{3600} + \dfrac{y^2}{10000} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{40000} + \dfrac{y^2}{14400} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{14400} + \dfrac{y^2}{40000} = 1$

9. Considere a equação da hipérbole abaixo, centrada na origem:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Determine as coordenadas dos vértices.
b) Encontre as equações das assíntotas.
c) Esboce o gráfico da hipérbole no plano cartesiano, indicando seus vértices, assíntotas e a concavidade.

10. Ao acender um abajur próximo a uma parede, observa-se que a sombra projetada pela borda da luz forma uma hipérbole. Esse fenômeno ocorre devido à forma como os raios de luz se espalham e são bloqueados, criando uma região iluminada separada por duas curvas abertas.

A forma matemática dessa sombra pode ser representada por uma equação do tipo:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Com base nessa equação, responda:

a) Quais são os valores de a e b dessa hipérbole?
b) Qual é a distância entre os focos dessa hipérbole?
c) O eixo real dessa hipérbole está sobre qual eixo do plano cartesiano? Justifique.

APÊNDICE B – ATIVIDADE II

Professor(a): _____

Aluno(a): _____

1. Utilizando o GeoGebra, construa a elipse definida pela seguinte equação reduzida:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Após realizar a construção, responda:

a) Qual é o centro da elipse?

b) Quais são os comprimentos do eixo maior e do eixo menor?

c) A elipse está orientada horizontalmente ou verticalmente? Justifique.

2. Com base na construção da elipse feita no GeoGebra, descreva como a equação algébrica da elipse se altera à medida que os focos se afastam ou se aproximam entre si?

3. Utilizando o GeoGebra, construa a parábola definida pela seguinte equação reduzida:

$$x = -\frac{(y+1)^2}{6}.$$

Após realizar a construção, responda:

a) Qual é o vértice da parábola?

b) Qual é a coordenada do foco dessa parábola?

c) Qual é a equação da reta diretriz?

d) A parábola está orientada na direção horizontal (para a esquerda ou para a direita) ou vertical (para cima ou para baixo)? Justifique.

4. Ao mover o foco na construção da parábola, como o formato da curva é afetado? Registre sua observação no GeoGebra e descreva a mudança percebida.

5. Utilizando o GeoGebra, construa a hipérbole definida pela seguinte equação reduzida:

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Após realizar a construção, responda:

a) Qual é a distância entre os vértices do eixo real?

b) Quais são as coordenadas dos focos dessa hipérbole?

c) Qual é o valor de c (distância do centro a cada foco)?

6. No GeoGebra, ao construir a hipérbole e manipular os focos e os vértices, observe como a forma da curva se altera. Com base nessa exploração, responda:

a) De que maneira o afastamento dos focos influencia a abertura e o formato dos ramos da hipérbole?

b) O que acontece com a forma da hipérbole quando os vértices ficam mais próximos entre si? Descreva como essa mudança afeta a aparência da curva.

7. Dada a equação:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 11 = 0$$

Use o GeoGebra para identificar qual cônica essa equação representa e justifique com base nos coeficientes.

8. Considere a equação:

$$2x^2 - 9xy + 4y^2 - 20x + 10y = 0.$$

Justifique por que essa equação representa duas retas.

9. Escolha uma das construções e ative a animação de um ponto móvel. O que você observa sobre a definição da curva durante a animação? Faça um breve relato.

10. Como o uso do GeoGebra ajudou no seu entendimento das cônicas? Cite um exemplo específico de cada construção (elipse, parábola e hipérbole) que tenha contribuído para sua compreensão.

APÊNDICE C – QUESTÕES SOBRE CÔNICAS - ENEM

QUESTÃO 160

O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação $(p + a)(v + b) = K$, com a, b e K constantes.

Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas $(p\ ;\ v)$. Admita que $K > 0$.

Disponível em: http://rspb.royalsocietypublishing.org. Acesso em: 14 jul. 2015 (adaptado).

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

A) semirreta oblíqua.
B) semirreta horizontal.
C) ramo de parábola.
D) arco de circunferência.
E) ramo de hipérbole.

QUESTÃO 176

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 1

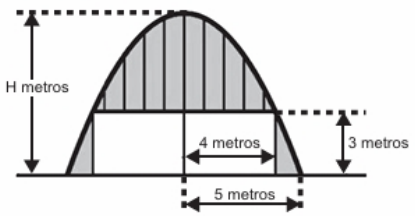


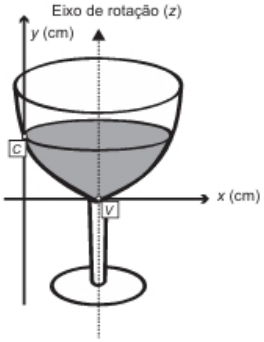
Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

A) $\frac{16}{3}$
B) $\frac{31}{5}$
C) $\frac{25}{4}$
D) $\frac{25}{3}$
E) $\frac{75}{2}$

QUESTÃO 136

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.



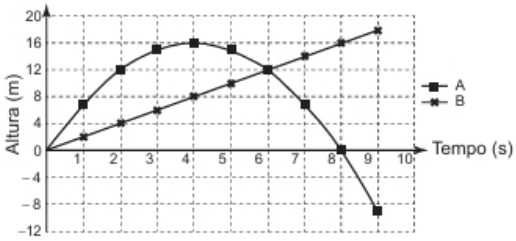
A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde *C* é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto *V*, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo *x*.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

QUESTÃO 136

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



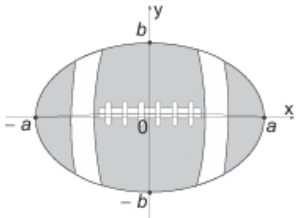
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

A) diminuir em 2 unidades.
B) diminuir em 4 unidades.
C) aumentar em 2 unidades.
D) aumentar em 4 unidades.
E) aumentar em 8 unidades.

QUESTÃO 137

A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$.

O volume dessa bola, em função apenas de *b*, é dado por

A) $8b^3$
B) $6b^3$
C) $5b^3$
D) $4b^3$
E) $2b^3$

QUESTÃO 152

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo *x* e *y* medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18
B) 20
C) 36
D) 45
E) 54

Fonte: Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos