UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JUCELINO OSMAN DE ALMEIDA SOBRAL

FUNÇÃO HORÁRIA NO PLANO: ESTUDOS DOS MOVIMENTOS

MONTEIRO
2025

JUCELINO OSMAN DE ALMEIDA SOBRAL

FUNÇÃO HORÁRIA NO PLANO: ESTUDOS DOS MOVIMENTOS

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Orientador: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO
2025

S677f Sobral, Jucelino Osman de Almeida.
Função horária no plano [manuscrito] : estudos dos movimentos / Jucelino Osman de Almeida Sobral. - 2025.
55 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2025.

"Orientação : Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE".

1. Cinemática. 2. Geometria analítica. 3. Função horária. 4. Matemática aplicada. I. Título

21. ed. CDD 516.3

Elaborada por Talita Ramos Bezerra - CRB - 15/970 BSC6

JUCELINO OSMAN DE ALMEIDA SOBRAL

FUNÇÃO HORÁRIA NO PLANO: ESTUDO DOS MOVIMENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 05/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Luiz Lima de Oliveira Junior** (***.533.084-**), em **11/06/2025 20:59:19** com chave **168c4ffa472011f0b22f1a7cc27eb1f9**.
- **Luciano dos Santos Ferreira** (***.565.264-**), em **11/06/2025 18:51:43** com chave **4367c9c6470e11f0af3406adb0a3afce**.
- **Misaelle do Nascimento Oliveira** (***.595.504-**), em **11/06/2025 20:57:21** com chave **d0a25aac471f11f0bfc506adb0a3afce**.

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho só foi possível graças ao apoio e dedicação de muitas pessoas, às quais expresso minha mais sincera gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus pela força e perseverança ao longo desta jornada acadêmica.

À minha família, pelo amor incondicional, paciência e incentivo em todos os momentos. Sem vocês, esta conquista não teria o mesmo significado.

Ao meu Orientador: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, pela orientação precisa, pelas sugestões valiosas e pelo apoio essencial ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para meu crescimento acadêmico. Gostaria de agradecer aos professores que compõem a banca examinadora, o prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior e a profa. Ma. Misaelle do Nascimento Oliveira, que se dispuseram a avaliar meu trabalho e me proporcionar a oportunidade de aprender e crescer.

Aos Ilustríssimos e Digníssimos Professores do Curso da licenciatura plena em Matemática, cuja sólida fundamentação epistemológica, rigor metodológico e domínio dos princípios didático-pedagógicos foram essenciais para a construção do meu arcabouço teórico e para a consolidação da práxis docente. Com absoluta deferência e sincera gratidão, reconheço vossa primorosa dedicação na transmissão dos conceitos matemáticos formais, na estruturação dos raciocínios lógico-dedutivos e na aplicação das abordagens metodológicas que enriquecem o ensino e a aprendizagem da Matemática no contexto acadêmico e profissional.

Agradecemos profundamente à Dra. Ana Emília Victor Barbosa Coutinho e à Dra. Marília Lidiane Chaves da Costa por seu compromisso e dedicação à política de reingresso e conclusão do curso de Matemática na UEPB – Campus Pinto do Monteiro. Seu trabalho tem sido essencial para assegurar oportunidades aos estudantes, promovendo um ambiente acadêmico que fortalece suas trajetórias e reafirma o compromisso com a equidade educacional. Com respeito e gratidão, reconhecemos sua valiosa contribuição para o desenvolvimento da Licenciatura em Matemática.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Muito obrigado(a)!

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."

(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar e descrever a aplicação da matemática, especialmente da geometria analítica, na representação dos movimentos cinemáticos, por meio da função horária no plano cartesiano. A partir de uma abordagem histórica e conceitual, são discutidas as contribuições fundamentais de pensadores como Aristóteles, Galileu, Newton e Einstein, cujas ideias moldaram a compreensão moderna do movimento. A pesquisa evidencia que a cinemática, ramo da física que descreve o movimento sem considerar suas causas, fundamenta-se em conceitos matemáticos como deslocamento, velocidade e aceleração, e se expressa por meio de funções e gráficos. A função horária no plano, por sua vez, permite descrever matematicamente a posição de um corpo ao longo do tempo, representando sua trajetória em um sistema de coordenadas bidimensional. A interseção entre álgebra e geometria possibilita a análise detalhada de movimentos retilíneos e curvilíneos, essenciais para a engenharia, astronomia e física moderna. A partir de sistemas de coordenadas cartesianos, é possível modelar com precisão movimentos no espaço-tempo, seja na mecânica clássica (MRU, MRUV), na relatividade ou na mecânica quântica. O trabalho enfatiza ainda o papel da matemática como linguagem universal das ciências, reforçado por exemplos históricos como o pouso da Apollo 11, em que equações matemáticas foram fundamentais. Assim, conclui-se que a função horária no plano é uma poderosa ferramenta de modelagem matemática e física, permitindo compreender os princípios que regem o movimento dos corpos no universo.

Palavras-chave: Cinemática. Geometria analítica. Função horária. Movimento. Matemática aplicada.

ABSTRACT

Over the centuries, mathematics has played a crucial role in the advancement of physics, especially in the analytical and geometric description of motion. This paper explores how mathematical structures—particularly the Cartesian coordinate system and time-dependent functions—are applied in the study of kinematics. From classical thinkers such as Aristotle and Archytas to modern physicists like Galileo, Newton, and Einstein, the evolution of the concept of motion reveals a deep interconnection between geometry, algebra, and physical observation. The use of mathematical functions allows the modeling of rectilinear and uniform or uniformly accelerated motion through the description of displacement, velocity, and acceleration. Topics such as the position function in the plane, motion under the influence of gravity, free fall, and projectile motion were addressed, with support from analytical geometry and the laws of classical mechanics. Furthermore, this work highlights how mathematical representation transcends theoretical abstraction and provides essential tools for scientific, technological, and engineering development, making mathematics the language of the universe.
 Keywords: Kinematics. Mathematical Functions. Cartesian Plane. Uniform Motion. Classical Mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo do movimento dos corpos sempre despertou o interesse da humanidade e foi fundamental para o avanço da ciência. A cinemática, ramo da física responsável por descrever e analisar os movimentos sem considerar suas causas, surgiu da necessidade de compreender como os objetos se deslocam no espaço e no tempo. Desde os primeiros registros filosóficos na Grécia Antiga até os estudos experimentais de Galileu Galilei, a evolução da cinemática esteve fortemente ligada ao desenvolvimento da matemática como ferramenta essencial para a descrição quantitativa dos fenômenos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar os principais conceitos da cinemática, abordando desde sua origem histórica até as equações que descrevem os diferentes tipos de movimento. Inicialmente, será discutido o conceito de movimento e sua relação com o referencial adotado, seguido da análise do espaço percorrido por um corpo em deslocamento.

Em seguida, serão estudadas as grandezas fundamentais associadas ao movimento, como velocidade escalar média e instantânea, bem como aceleração escalar média e instantânea. Também será apresentada a equação de Torricelli, uma importante ferramenta matemática na análise de movimentos uniformemente variados.

Por fim, o trabalho abordará as funções do movimento de queda livre e o lançamento oblíquo de projéteis, dois exemplos clássicos que ilustram a aplicação das leis da cinemática em situações cotidianas e experimentais. Ao longo dos próximos capítulos, serão apresentados conceitos teóricos, exemplos práticos e aplicações que demonstram a importância da cinemática no contexto científico e tecnológico.

2 ESTUDO DOS MOVIMENTOS RETILÍNEOS

2.1 A História da Cinemática e a Matemática

Nos últimos séculos, a matemática tem desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento da Física e sua linguagem que representa sua compreensão do mundo ao nosso redor. Uma das áreas mais fascinantes e amplamente aplicadas da matemática é a geometria analítica, que permite descrever e analisar fenômenos da cinemática de maneira precisa e sistemática.

Dentro da geometria analítica temos a estrutura algébrica que permite transformar em linguagem representativa a função horária no plano, ferramenta poderosa para descrever o movimento de objetos. Quando se refere a partícula, idealizado um objeto sem dimensões, representado por um ponto com massa, cuja posição é descrita por coordenadas no plano (2D) ou no espaço (3D).

Desde os tempos de Galileu Galilei, Aristóteles, Newton, Descartes e Fermat, sobre o movimento, a geometria analítica tem sido a base para a descrição matemática de fenômenos físicos, desde o movimento dos corpos celestes até o movimento de partículas em sistemas mecânicos.

Na antiguidade, a matemática tem sido utilizada para decifrar a ordem subjacente ao cosmos. Filósofos gregos como Platão, Aristóteles, Arquitas de Tarento e Empédocles buscaram correlacionar formas geométricas perfeitas com elementos naturais e princípios cósmicos, criando um esquema que influenciou até mesmo as idéias de Aristóteles sobre movimento e matéria.

Arquitas de Tarento $(428 - 347a.C.)$ foi um influente matemático e filósofo da tradição pitagórica. É conhecido por ter proposto uma solução geométrica para o problema da duplicação do cubo, um dos desafios clássicos da matemática grega. Além disso, suas contribuições ajudaram a consolidar o estudo das quatro principais disciplinas matemáticas da Antiguidade — aritmética, geometria, astronomia e música (ou acústica) — que mais tarde formariam o chamado quadrivium.

Empédocles $(495 - 430a.C.)$ propôs que toda a matéria do universo era composta por quatro elementos fundamentais: fogo (quente e leve), ar (úmido e móvel), água (fria e fluida) e terra (sólida e estática). Séculos mais tarde, Platão $(427 - 347a.C.)$, influenciado pela geometria pitagórica, associou esses elementos aos sólidos regulares, hoje chamados de sólidos platônicos. Cada elemento foi relacionado a uma forma geométrica: o tetraedro representava o fogo, por sua forma pontiaguda e energética; o octaedro, o ar, por sua leveza; o icosaedro, a água, por sua fluidez; e o cubo, a terra, por sua estabilidade. Platão ainda associou o dodecaedro a um quinto elemento — a quintessência — relacionado ao cosmos e à perfeição celeste. (Beer, 2012).

Aristóteles $(384 - 322a.C.)$ integrou essa cosmologia geométrica à sua teoria do movimento natural, afirmando que cada elemento busca seu lugar próprio no cosmos: Terra e Água movem-se para baixo (em direção ao centro do universo), Ar e Fogo movem-se para cima (em direção à periferia) e o quinto elemento (dodecaedro) compõe os corpos celestes, cujo movimento é circular e eterno, perfeito e imutável, (Strathern, 2002).

Enquanto Aristóteles $(384 - 322a.C)$ baseava suas idéias de movimento em uma visão qualitativa e no contexto da filosofia natural, descrevendo o movimento de duas maneiras qualitativas: Movimento natural e Movimento violento.

Segundo Aristóteles, o movimento natural ocorre espontaneamente, sem ação externa, e depende da natureza do corpo e de sua tendência a buscar seu "lugar natural" no cosmos. Por exemplo, a pedra tende a cair porque seu lugar é embaixo, enquanto o fogo sobe, buscando as regiões superiores.

Já o movimento violento acontece quando uma força externa age sobre o corpo, como no caso de um empurrão ou no lançamento de uma flecha. Aristóteles acreditava que a velocidade desse movimento era proporcional à força aplicada e inversamente proporcional à resistência do meio. Como ele considerava que o movimento só é possível em um meio que oferece resistência, concluía que no vácuo o movimento seria impossível.

Segundo Aristóteles, um corpo em movimento só continua a se mover se uma força constante for aplicada. Na ausência dessa força, o movimento cessa, pois o repouso era visto como o estado natural.

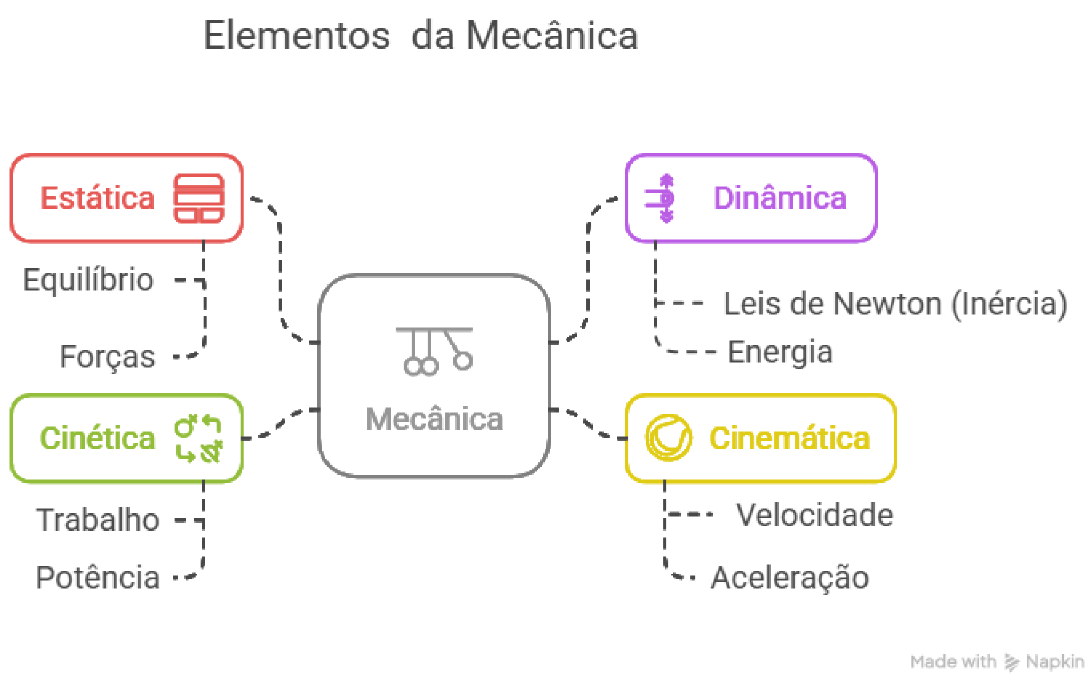
Além disso, Aristóteles estabeleceu uma distinção clara entre o mundo terrestre e o mundo celeste. Na Terra, os movimentos são lineares, imperfeitos e sujeitos à mudança. Nos céus, os movimentos são circulares, perfeitos e eternos, realizados por corpos feitos de éter, uma substância incorruptível, diferente dos quatro elementos da Terra.

Quando relacionamos as idéias de existências dos sólidos regulares de Platão e, a cosmologia dos elementos, como pontes entre o sensível e o inteligível, a matemática e astronomia como a linguagem da criação divina (Gleiser, 1997).

As teorias aristotélicas do movimento natural e movimentos violentos não são o suficiente para fundamentar uma visão matemática do universo que ecoa até na ciência moderna, via os sólidos regulares.

Mas influenciaria as idéias de Galileu $(1564 - 1642)$, que refutou várias idéias de Aristóteles com base em observações experimentais e raciocínio matemático. Numa abordagem experimental, lançou as bases para os elementos da mecânica clássica e as subdivisões: Estática, Dinâmica, Cinética, Cinemática. Sendo a inércia um dos conceitos profundamente enraizados nas leis de formação dos princípios e hipóteses gerais aplicados em toda a mecânica, conforme mapa mental, (Figura 1)

Figura 1 – Mapa Mental dos Elementos da Mecânica Clássica



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

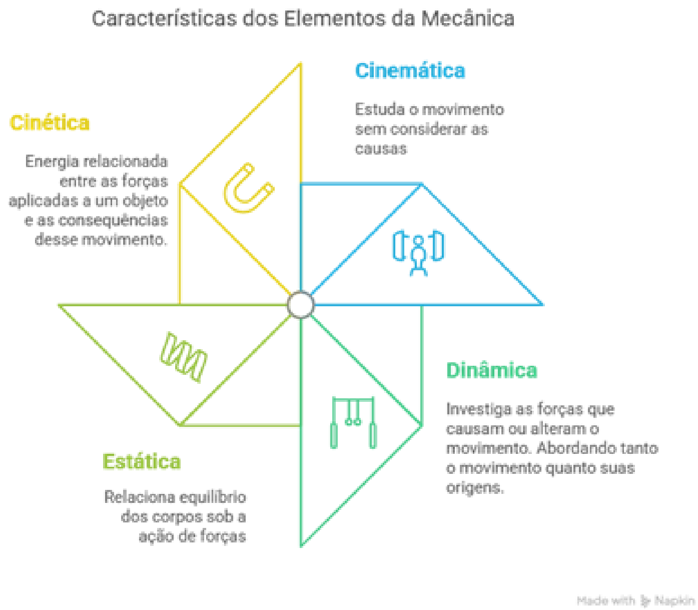
A formulação do conceito de inércia em que um objeto em movimento permanecerá em movimento retilíneo uniforme; "a menos que uma força externa atue sobre ele". Isso contradiz diretamente a idéia de Aristóteles de que seria necessário um agente constante para manter o movimento.

Independente da velocidade do meio, Galileu observou que, no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração, independentemente de suas massas ou formas, refutando a idéia de que objetos mais pesados caem mais rápido.

Na aceleração uniforme pode ser demonstrada ao consideramos a queda livre como um exemplo de movimento uniformemente acelerado, onde a velocidade aumenta de maneira constante com o tempo. Em que os quantitativos enfatiza a medição e a matemática como ferramentas para compreender o movimento das características dos Elementos da Mecânica em cada subdivisão, infográfico, (Figura 2).

Isaac Newton (1643 – 1727) desempenhou um papel crucial ao aperfeiçoar e expandir as idéias de Galileu que havia descoberto a inércia, a tendência dos corpos de permanecer em estado de repouso ou movimento uniforme, a menos que uma força externa atue

Figura 2 – Infográfico com dos Elementos da Mecânica Clássica



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

sobre eles. Newton levou essas idéias adiante e formulou as Três Leis do Movimento que descrevem como os objetos se movem.

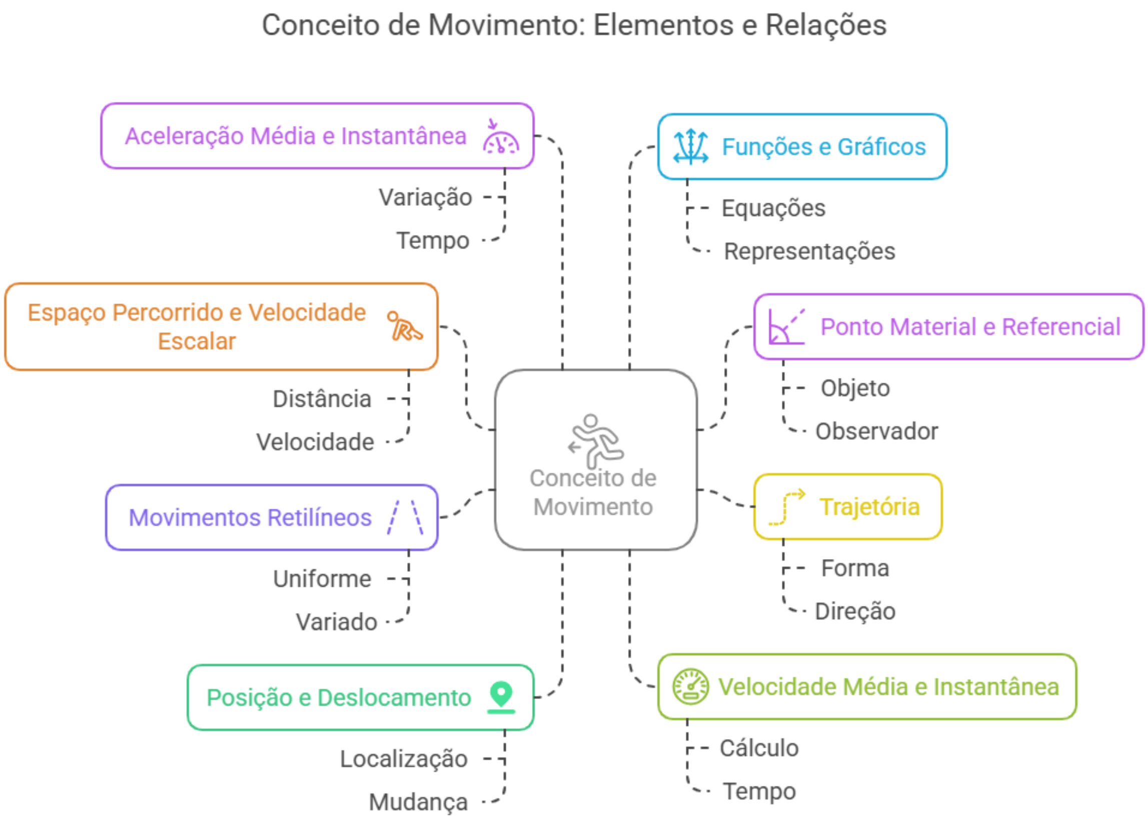
A Primeira Lei de Newton ou Lei da Inércia, é uma extensão das idéias de Galileu. Afirmando que um objeto em repouso permanecerá em repouso e um objeto em movimento continuará em movimento com velocidade constante a menos que uma força externa atue sobre ele. (Brennan, 1997).

Ligado ao estudo dos movimentos dos corpos, que é o foco da cinemática uma das bases teóricas da cinemática, pois descreve o comportamento dos objetos em movimento na ausência de forças externas. No entanto, a cinemática como um todo, estuda o movimento dos corpos, se apoiando em uma série de conceitos como: deslocamento, velocidade, aceleração e trajetória, equação do movimento (MRU, MRUV) e gráficos sem se preocupar com as forças que causam esses movimentos, representado no mapa mental com os Elementos da Cinemática Clássica, (Figura 3).

Na Segunda Lei do Movimento introduz uma relação matemática entre força, massa e aceleração. Permitiu uma compreensão mais precisa de como e por que os objetos se movem. A fórmula ($f = m \cdot a$) força é igual à massa vezes a aceleração tornou-se um dos pilares da física.

A Terceira Lei do Movimento de Newton, que fala sobre ações e reações, elementos da Gravitação Universal é uma relação das idéias de Galileu sobre o movimento dos

Figura 3 – Infográfico com dos Elementos da Cinemática Clássica



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

corpos terrestres com os movimentos celestes, possibilitando a Newton formular a Lei da Gravitação Universal. Propondo que todos os corpos no universo se atraem com uma força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles (Strathern, 2002).

Os três conjuntos de leis ajudaram explicar não apenas os movimentos dos planetas, mas também os fenômenos observados na Terra, desenvolvendo e formalizando as leis que se tornaram fundamentais para a física moderna.

A física moderna rompeu a visão aristotélica ao abandonar conceitos como a quintessência e os "lugares naturais". Galileu, ao introduzir a noção de inércia, e Newton, ao formular a lei da gravitação universal, mostraram que os corpos se atraem mutuamente com uma força que depende apenas de suas massas e da distância entre eles, e não de sua composição ou natureza. Com isso, estabeleceu-se a ideia de que as mesmas leis físicas, expressas em linguagem matemática, regem tanto os fenômenos terrestres quanto os celestes.

Influenciando a filosofia da ciência com sua abordagem empírica e matemática ao estudo da natureza, ajudando a moldar a maneira como Einstein e outros cientistas subsequentes abordaram a pesquisa científica. Bases pela qual Albert Einstein baseou-se para construir suas revolucionárias teorias sobre o movimento, o espaço-tempo e a gravidade.

> O espaço e tempo newtoniano era como entidades absolutas e independentes, um "recipiente imóvel"onde eventos ocorrem, e o tempo fluía uniformemente, sem relação com a matéria. O espaço e tempo unificado de Einstein em um contínuo quadridimensional (espaço-tempo), onde a presença de massa e energia altera sua geometria. Tempo e espaço tornaram-se relativos, dependendo do observador e de sua velocidade, (Silva, 2019)

Na cinemática relativista, desenvolvida a partir da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein (1905), são incorporados os efeitos que ocorrem quando corpos se movem a velocidades próximas à da luz. Essa teoria altera profundamente os conceitos clássicos de espaço e tempo, introduzindo fenômenos como a dilatação do tempo e a contração do espaço, observados em referenciais em movimento relativo. Além disso, estabelece que a velocidade da luz no vácuo é o limite máximo para qualquer interação ou propagação de informação no universo, ver mapa (Figura 4).

A mecânica quântica, voltada para o estudo de partículas em escala subatômica, introduz uma abordagem fundamentalmente probabilística da realidade. Nela, as trajetórias definidas da física clássica são substituídas por funções de ondas, que descrevem a probabilidade deencontrar uma partícula em determinado estado.

As partículas podem existir em superposição de estados, com diferentes posições ou momentos ao mesmo tempo, até que uma medição seja realizada, provocando o colapso da função de onda.

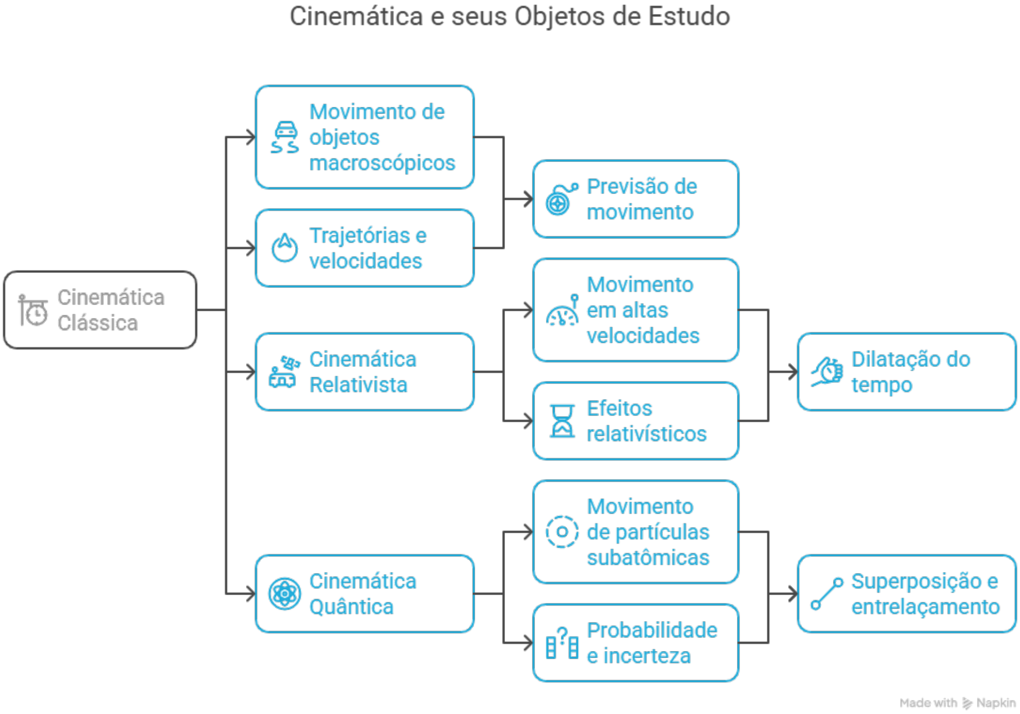
O princípio da incerteza de Heisenberg afirma que não se pode conhecer simultaneamente e com precisão absoluta a posição e o momento de uma partícula, revelando os limites da observação no mundo quântico.

Assim, a mecânica quântica rompe com o determinismo clássico, onde tudo podia ser previsto com base em condições iniciais, e introduz uma realidade governada pela probabilidade e indeterminação, ver mapa (Figura 4).

As concepções clássicas sobre movimento, não apenas fundaram a física matemática, mas também ecoam em desafios modernos. A função horária, que começou como uma simples relação posição-tempo, tornou-se uma ferramenta versátil, adaptando-se desde o MRUV até a descrição de campos quânticos.

Na teoria da relatividade geral, desenvolvida por Albert Einstein ($1879 - 1955$), o conceito de espaço e tempo é unificado em uma única entidade: o espaço-tempo, uma estrutura quadridimensional que pode se curvar na presença de massa e energia.

Figura 4 – Infográfico das teorias da Cinemática Modernas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

A teoria reformula a gravidade não como uma força, mas como o efeito da curvatura do espaço-tempo causada por corpos massivos. Em regiões suficientemente pequenas desse espaço-tempo, é possível adotar referenciais locais inerciais, onde as leis da relatividade restrita se aplicam. Já em referenciais não inerciais, a curvatura e os efeitos gravitacionais devem ser considerados.

Com isso, a relatividade geral estabelece uma nova visão do universo, onde a trajetória de corpos e a passagem do tempo são influenciadas pela geometria do espaço-tempo.

A teoria da relatividade especial, proposta por Albert Einstein em 1905, mostrou que o tempo e o espaço não são absolutos, mas relativos ao estado de movimento do observador. Ela introduziu o conceito de espaço-tempo quadridimensional e estabeleceu que a velocidade da luz é constante em todos os referenciais inerciais, independentemente da velocidade da fonte emissora.

Essa teoria reformulou as noções de simultaneidade, tempo e comprimento, influenciando diretamente a compreensão do movimento em altas velocidades. Mais tarde, com a relatividade geral (1915), Einstein expandiu esses conceitos para incluir a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, superando as limitações da física newtoniana em contextos extremos, como grandes massas ou velocidades próximas à da luz.

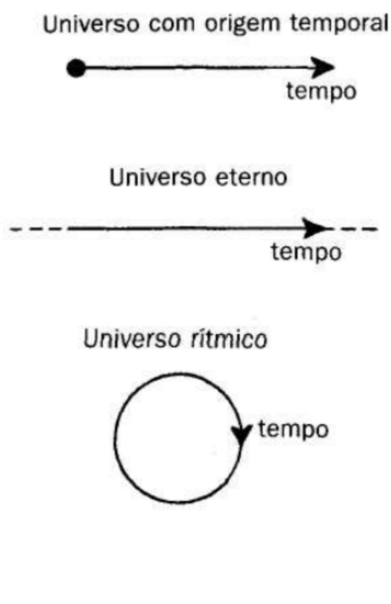
2.1.1 A Matemática nos Estudos do Movimentos

Na obra "A Dança do Universo" de (Gleiser, 1997), aborda os mitos de criação, destacando que a Matemática e a Cinemática podem ser divididos segundo o agente que cria o Universo. A criação ocorre em um momento específico, o que implica que o Universo tem uma idade finita. O tempo, nesse caso, é representado como uma linha reta que começa em um ponto inicial t_0.

Universo pode emergir do cosmos a partir da tensão entre ordem e caos, surgir a partir do Vazio absoluto, sem a intervenção de qualquer entidade divina. Aqui, a existência emerge do nada, e o tempo também é visualizado como uma linha que se origina em um ponto inicial t_0, a partir da tensão entre ordem e caos. Esses mitos refletem diferentes formas de entender a origem do tempo e do espaço, elementos essenciais na cinemática.

Geralmente concebendo o tempo como uma linha reta com um ponto de partida definido, marcando o início do Universo. Esses mitos contrastam com os "mitos sem Criação", nos quais o Universo é eterno ou cíclico, e o tempo pode ser representado como uma linha infinita ou um círculo sem começo nem fim, pode ser definido na (Figura 5).

Figura 5 – Representação do Tempo e Espaço em Linguagem Matemática



Fonte: Gleiser (1997, p. 25)

O tempo tem um início definido, surgem juntos num momento inicial, marcando o começo da linha temporal. Na perspectiva apresentada por (Gleiser, 1997), o tempo se torna uma grandeza relacionada ao espaço quando o universo de posições e trajetórias passa a ser concebido como um sistema dinâmico. Onde espaço e tempo são inseparáveis, seja no contexto mítico (com começo ou eterno) ou no científico, que mostra o espaço-tempo como palco da evolução.

Tempo está intrinsecamente ligado ao espaço, formando um sistema dinâmico e inseparável chamado espaço-tempo, que é o palco da evolução cósmica tanto em perspectivas míticas quanto científicas.

A cinemática, que estuda o movimento dos corpos sem investigar suas causas, é fundamentada em leis da física clássica e moderna, como a mecânica newtoniana e a relatividade, (Gleiser, 1997) usa a metáfora da "dança do Universo" para ilustrar como corpos celestes e partículas seguem trajetórias determinadas por essas leis naturais, evidenciando o movimento e as interações constantes que só a linguagem matemática permite representar.

A associação entre formas geométricas e elementos das equações e funções horárias pode parecer ingênua hoje, mas revela um esforço ancestral de traduzir a natureza em matemática, conforme mapa mental sobre os elementos do movimento representado na matemática, Figura 6.

Figura 6 – Infográfico: Elementos Matemáticos usados na modelagem Cinemática

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

Além disso, o estudo do movimento é essencial em várias áreas do conhecimento, como matemática, física, engenharia e astronomia. A antiga associação entre formas geométricas e elementos cósmicos, embora hoje pareça ingênua, representa um esforço ancestral para traduzir a natureza em termos matemáticos, mostrando a importância da matemática para compreender o movimento no Universo.

A missão Apollo 11, (Figura 22) por exemplo, contou com a geometria e com equações oriundas do cálculo infinitesimal, este por sua vez, um desenvolvimento conceitual da geometria grega para calcular as trajetórias até a Lua. O diálogo entre Armstrong e Buzz Aldrin para posarem na lua na Apolo 11:

Buzz Aldrin: "A luz de velocidade está acesa..." [Nota: indica que há uma discrepância entre a velocidade esperada e a medida — um alerta para a tripulação.]

"540 pés, descendo a 30." [Nota: a nave está a 540 pés (aprox. 165 metros) da superfície, descendo a 30 pés por segundo (9 m/s).]

"400 pés, descendo a 9." [Agora a 122 metros, com velocidade reduzida para 9 pés/seg (2,7 m/s).]

"300 pés, descendo a 3 e meio. 47 para frente." [Altura de 100 metros, descendo a 3,5 pés/seg (1 m/s), e movendo-se 47 pés (14 m) à frente.]

Neil Armstrong: "Ok. Como está o combustível?" [Preocupação com o tempo restante antes do corte automático.]

Buzz Aldrin: "8 por cento." [Só restam 8 por cento de combustível — margem crítica.]

Esse momento histórico só se tornou possível graças à integração de teoremas matemáticos com três grandes formulações da física pré-relativística — a mecânica newtoniana, suas leis e princípios — aliada à precisão da engenharia. Isso reforça o papel da matemática como ferramenta essencial e linguagem universal que conecta todas as ciências.

Na matemática aplicada, a modelagem de fenômenos físicos possibilita a tradução de problemas da Física para uma linguagem matemática, unindo conceitos da física com a matemática no estudo de corpos ou partículas em movimento. A partir da adoção de um sistema de coordenadas para análise (Halliday e Resnick, 2010), é possível quantificar, qualificar e representar definições físicas por meio de entes matemáticos, como funções, expressões, equações e gráficos.

Embora a cinemática de partículas seja parte da dinâmica que inclui a busca no entender das relações existentes entre as forças que atuam sobre um corpo, a massa e seus movimentos.

Na cinemática e a Física em geral, o tempo é visto como uma variável que está intrinsecamente ligada ao comportamento estatístico das partículas. Mostrando que ela mede o número de estados microscópicos, para um estado macroscópico, fundamentando a “seta do tempo ou a flecha do tempo” observada na direção do tempo do passado para o futuro no espaço.

A probabilidade estatística das partículas adquirirem reversibilidade ou irreversibilidade, dependendo da possibilidade de retorno ao estado inicial t_i, sem perda de energia ou alteração do sistema, fornece uma base física para o tempo ter uma direção, pois processos naturais tendem a evoluir para estados de maior desordem, a cinemática o tempo como uma dimensão mensurável das leis da termodinâmica no instante inicial t_i e instante inicial t_f, Figura 5.

A velocidade de degradação, vida útil de matérias, resistência de matérias, assim como as leis do movimento nos fluidos não Newtonianos que diferente de fluídos como água ou óleo a resistência não é constante ao fluxo, mudando de forma a medida que aumenta consistência proporcional ao aumento da força ou da velocidade de aplicação, a exemplo o amido de milho.

Fenômeno comum em fluidos dilatantes, pseudoplasticos, fluido com limite de escoamento: tixotrópicos. Parece estranhos a expressão de [fluídos amplamente treinados], mesmo para física, engenharia e biologia devido as propriedades peculiar desses fluídos, mesmo com uma ampla aplicação nos mais diversos setores, desde a industria de produção de materiais, etc.

Buscaremos compreender o movimento por meio das definições da cinemática e da geometria do movimento, relacionando deslocamento, velocidade, aceleração e tempo em trajetórias retilíneas, sem considerar as causas que o produzem.

Para a cinemática de particular o movimento de corpos tão grandes quanto um automóvel, foguetes ou aviões, sem levar em consideração o tamanho dos corpos. Analisando apenas como partículas em movimento, assim como toda e qualquer rotação em torno de seu centro de massa.

Há casos, entretanto, em que tal rotação não é desprezível, tais movimentos serão analisados como cinemática dos corpos rígidos. Quando considerando o estudo do movimento retilíneo de uma partícula pela cinemática, analisamos a: posição, aceleração, velocidade da partícula.

2.2 Introdução ao Estudo dos Movimentos Retilíneos

Rastros deixados por corpos luminosos nos céus, podem ilustrar uma das características mais significativas dos movimentos - a trajetória. A Polícia Rodoviária Federal (PRF) utiliza uma fórmula matemática para calcular a velocidade de um veículo antes de uma frenagem de emergência. A fórmula é baseada na distância de frenagem e no coeficiente de atrito entre os pneus e a superfície da estrada.

A fórmula básica é:

$V = \sqrt{250 \cdot \mu \cdot D}$.

Aonde:

- V é a velocidade do veículo em km/h.
- μ é o coeficiente de atrito.
- D é a distância de frenagem em metros.

Essa fórmula é útil para determinar a velocidade de um veículo em situações de acidentes, permitindo verificar se o motorista estava dentro do limite permitido ou se o excedia. No entanto, o estudo dos movimentos na Física requer a formulação de diversos outros conceitos, que possibilitam uma descrição matemática mais completa dos fenômenos envolvidos.

O estudo dos movimentos através da física e da matemática possibilitou a criação de nível de simplificação e abstração, usando o estudo de sistemas físicos para descrever e conceituar objetos e partículas em movimento com características distintas.

Quando consideram um objeto como um ponto material sem dimensões, tamanho, forma ou volume , criamos partículas. A análise das dimensões do corpo não influenciam no fenômeno estudado, as propriedades das partículas, como massa e carga, estão concentradas em um único ponto. No estudo do movimento de planetas em órbitas, estes podem ser tratados como partículas, ignorando suas dimensões.

Ao contrário da partícula, um móvel pode ter dimensões, forma, volume e pode até mesmo sofrer deformações dependendo do contexto, não pode ser tratado como uma partícula.

Em 1716, o astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742) descobriu o trânsito de Vênus diante do Sol, por meio do estudo dos movimentos um método para determinar a distância da Terra ao Sol. Não cabe aqui explicar esse método, mas, sim, destacar a importância do estudo dos movimentos que vai iniciar agora.

2.3 Conceito de Movimento

A idéia de movimento, na linguagem cotidiana, tem significado amplo e quase sempre ligado à vida, é difícil imaginar vida sem movimento; freqüentemente “vida” é sinônimo de “movimento”. No entanto, em Física, a palavra movimento, como todas as palavras, adquire significado mais preciso e restrito.

Movimento é sempre um conceito relativo; só faz sentido falar em movimento de um corpo em relação a outro corpo. Por exemplo: um passageiro sentado num ônibus que percorre uma estrada está em movimento em relação a uma árvore junto à estrada, porém está parado em relação ao ônibus.

A idéia de “parado” ou “em movimento” leva em conta a mudança, ou não, da localização do corpo em relação a outro que sirva de referência com o decorrer do tempo. Em outras palavras, um corpo está em movimento quando sua posição, em relação a determinado corpo de referência, varia com o decorrer do tempo.

Sendo utilizado, a expressão corpo de referência em vez de sistema de referência ou referencial, porque, como veremos mais adiante, corpos como poste, carro, árvore não podem ser considerados sistemas de referência. Pois um corpo de referencia é um objeto físico usado como base de observação, enquanto o sistema de referência constituído de ferramentas matemáticas, "coordenadas cartesianas", (x, y) usada para medir e descrever o movimento. O corpo de referência ajuda a definir a origem do sistema, mesmo não sendo o sistema.

Uma pessoa dentro de um trem (corpo de referência), pode usar um sistema de coordenadas (sistema de referência) para medir a posição de um objeto dentro do trem em relação ao chão. O trem é o corpo físico escolhido como base.

Essa é uma definição inicial, provisória, que permite algumas conclusões interessantes. No choque de um carro contra um poste por exemplo: pode-se afirmar que o carro bateu no poste, se o poste for o corpo de referência, ou que o poste bateu no carro se o carro for o corpo de referência, (yong Hugh D., 2010).

O estudo dos movimentos retilíneos constitui um dos alicerces da física clássica, servindo como base para a compreensão de fenômenos mais complexos na cinemática, caracterizados pela trajetória linear, permitindo uma análise detalhada das grandezas fundamentais, como posição, velocidade e aceleração.

A partir de uma abordagem matemática, é possível descrever tais fenômenos por meio de funções horárias e gráficos, tornando-se indispensável para engenheiros, cientistas e estudantes que buscam compreender as leis do movimento.

Nos movimentos retilíneos, duas categorias principais se destacam: o movimento retilíneo uniforme (MRU) e o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). No MRU, a velocidade permanece constante, e a descrição matemática é simplificada pela linearidade da função posição em relação ao tempo (Gaspar, 2016).

Por outro lado, o MRUV introduz a aceleração constante como um elemento adicional, resultando em equações quadráticas que relacionam as variáveis do movimento. Essa diferenciação torna-se essencial para a compreensão e previsão de sistemas físicos mais dinâmicos, (Villate, 2012). A relação entre as representações matemáticas e os fenômenos reais confere ao estudo dos movimentos retilíneos um papel central na formação de modelos teóricos. Por meio do cálculo diferencial e integral, sendo possível analisar a evolução das grandezas físicas, explorando como mudanças na aceleração impactam a velocidade e a posição ao longo do tempo.

Esse tipo de modelagem fornece uma linguagem universal para a descrição do movimento, que é amplamente utilizada em diversas áreas da ciência e da tecnologia. Portanto, o estudo dos movimentos retilíneos não apenas introduz os princípios fundamentais da cinemática, mas também destaca a interseção entre a física e a matemática como uma ferramenta poderosa para a compreensão e previsão de fenômenos naturais.

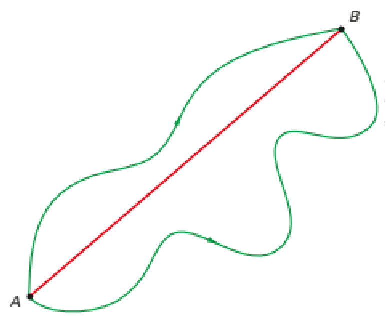
A abordagem sistemática e quantitativa é a base para a exploração de movimentos mais complexos e a aplicação do conhecimento em problemas práticos, como a dinâmica de veículos, o lançamento de projéteis e o estudo de sistemas planetários. No entanto, se uma mosca estiver pousada no capô do carro durante a colisão, ela certamente verá o poste avançando contra o carro.

2.4 Espaço Percorrido e Velocidade Escalar

A definição de movimento nos permite, inicialmente, considerar dois conceitos genéricos e provisórios, mas bastante úteis no cotidiano. O primeiro é o de espaço percorrido, entendido como a medida do comprimento do trajeto realizado por um corpo em movimento.

Essa medida costuma ser obtida com base em duas referências, como os marcos quilométricos de uma estrada. O espaço percorrido corresponde ao comprimento do trajeto realizado pelo móvel ao se deslocar de A até B (como ilustrado na Figura 7). Quanto mais curvas houver nesse caminho, maior será o espaço percorrido — mesmo que a distância em linha reta entre os pontos iniciais e finais permaneçam o mesmo.

Figura 7 – Gráfico do Espaço Percorrido



Fonte: Gaspar (2016, p. 43)

O segundo conceito é o de velocidade escalar, que dá a idéia quantitativa ou numérica da rapidez com que o corpo se movimenta. Para entender o conceito de velocidade escalar, vamos considerar uma situação prática: quando uma alguém está conduzindo uma motocicleta em uma estrada retilínea.

Em alguns momentos do percurso, ela olha para o velocímetro, que indica a velocidade da motocicleta naquele instante. Essa velocidade indicada no velocímetro é denominada velocidade escalar instantânea, pois representa o valor da velocidade em um dado momento, sem considerar variações ao longo do tempo. Tal observação destaca como os conceitos de física podem ser aplicados para interpretar situações cotidianas.

No entanto, se o motorista souber qual a distância percorrida e medir o intervalo de tempo gasto para percorrê-la, ele pode calcular a razão entre essas grandezas e obter a velocidade escalar média da motocicleta, nesse intervalo de tempo.

Portanto, o estudo dos movimentos retilíneos não apenas introduz os princípios fundamentais da cinemática, mas também destaca a interseção entre a física e a matemática como uma ferramenta poderosa para a compreensão e previsão de fenômenos naturais da cinemática. Essa abordagem sistemática e quantitativa é a base para a exploração de movimentos mais complexos e a aplicação do conhecimento em problemas práticos, como a dinâmica de veículos, o lançamento de projéteis e o estudo de sistemas planetários.

A Velocidade Escalar Média (V_m) de um corpo é, por definição, a razão entre o espaço percorrido (Δs; lê-se "delta s") e o intervalo de tempo (Δt) gasto para percorrê-lo. A expressão matemática da Velocidade Escalar Média é:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

O intervalo de tempo Δt (delta t) é obtido pela diferença entre o instante inicial t_1 e o instante final t_2, correspondendo respectivamente do início e ao fim do percurso considerado (estamos considerando intervalo de tempo, Δt, como noção intuitiva, que dispensa definição). Assim, o intervalo de tempo é representado pela expressão:

$$\Delta t = t_2 - t_1. \tag{2.2}$$

A expressão da velocidade escalar média ou instantânea é obtida pela razão entre as unidades de espaço percorrido (comprimento) e de tempo. Como no Sistema Internacional (SI) a unidade de comprimento é o metro (m) e a de tempo é o segundo (s), a unidade de velocidade é o metro por segundo (m/s).

Na prática, entretanto, utilizam-se também outras unidades, como o quilômetro por hora (km/h). A definição de velocidade escalar instantânea é um pouco diferente da velocidade escalar média. A diferença aparece porque para determinar a velocidade escalar instantânea de um corpo, é necessário considerar um intervalo de tempo infinitamente pequeno, um instante.

A Matemática representa esse intervalo de tempo na forma $\Delta t \to 0$ (delta t tendendo a zero) e tem regras especiais para o cálculo de frações em que o denominador tende a zero, distinguir velocidade média de velocidade instantânea. Na situação discutida no início: Se o carro percorre 100 quilômetros em 2 horas, sua velocidade média é única e vale 50 km/h.

Durante esse percurso, no entanto, o veículo certamente apresentou, em determinados momentos, velocidades instantâneas diferentes de 50 km/h, conforme indicadas pelo velocímetro. O velocímetro mede a velocidade escalar instantânea do carro. Já a velocidade escalar média depende da escolha de um intervalo de tempo para ser determinada, e por isso só pode ser calculada posteriormente.

2.4.1 Posição e Deslocamento

A definição de movimento que utilizamos depende de conceitos referente a um corpo ou particula em movimento. Um cometa, um automóvel, o vento, um rio, um relâmpago, um trovão, um elétron? Não é possível estudar o movimento de um cometa ou de um automóvel exatamente como se estuda o movimento de um rio, uma onda sonora ou um raio de luz, pois esses fenômenos envolvem naturezas físicas distintas e requerem abordagens específicas.

Entretanto, é possível fazer analogias e identificar semelhanças dependendo do que está sendo analisado, explorado e as diferentes possibilidades. Para estudar o movimento de um cometa, de um automóvel, movimento de um rio, de uma onda sonora ou de um raio de luz.

Não, um cometa visto da Terra, é quase sempre um pequeno ponto luminoso que ocupa posições perfeitamente definidas em relação ao firmamento coalhado de outros pontos luminosos, aproximadamente fixos entre si.

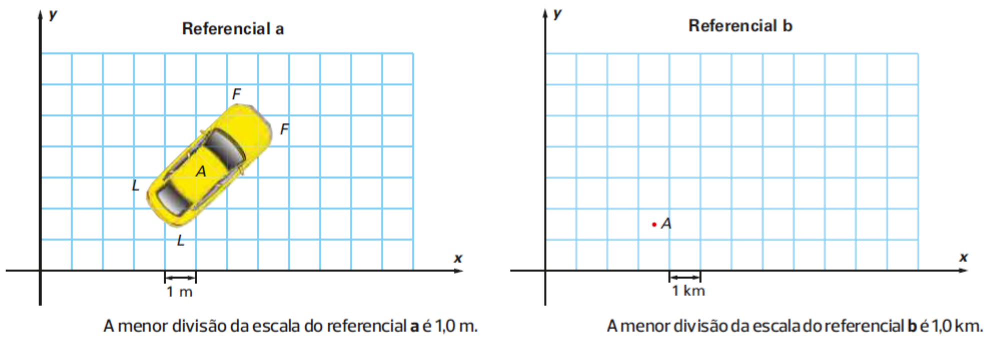
Um automóvel percorrendo uma estrada também pode ser considerado um ponto em relação à estrada, o que permite localizá-lo, a cada instante, com precisão . Porém o mesmo não pode ser feito com um rio, um relâmpago ou um trovão. Como definir posição de um rio, da luz de um relâmpago ou do som de um trovão, (Figura 8).

Outra dificuldade da definição de movimento é o corpo que serve de referência. Não há dúvida de que um carro serve de referência para perceber algo em movimento em relação ao carro. Mas essa é uma avaliação pouco precisa. Não é possível a descrição matemática do movimento utilizando um carro como referência, o movimento de proporcionalidade a um referencial.

Supondo que alguém afirme que um mosquito está, num certo instante, a 50 cm de um carro. É impossível definir a localização desse mosquito em relação ao carro com essa informação, existem infinitas possibilidades para essa localização, (Figura 8).

A posição define a localização da partícula em um determinado instante de tempo.

Figura 8 – Gráfico do Ponto Material e Referencial



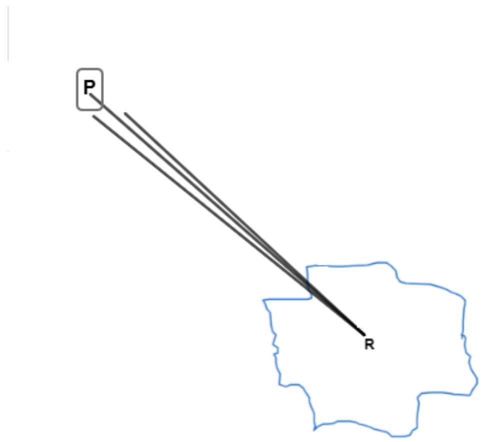
Fonte: Gaspar (2016, p. 48)

A posição de um ponto no plano em função do tempo t pode ser expressa por um par ordenado de posição $p(t)$, que é uma combinação das coordenadas $t(x)$ e $t(y)$ ou $P(x, y)$: Ponto Material ou referencial quando suas dimensões físicas podem ser desprezadas para o estudo de seus movimentos em determinadas situação, (Figura 8).

2.4.1.1 Localizando no Plano e no Espaço

A determinação da posição de um ponto material P é realizado em relação a determinados corpos que recebe o nome de referencial ou Sistemas de Referências R (Figura 9).

Figura 9 – Ponto P na Região R

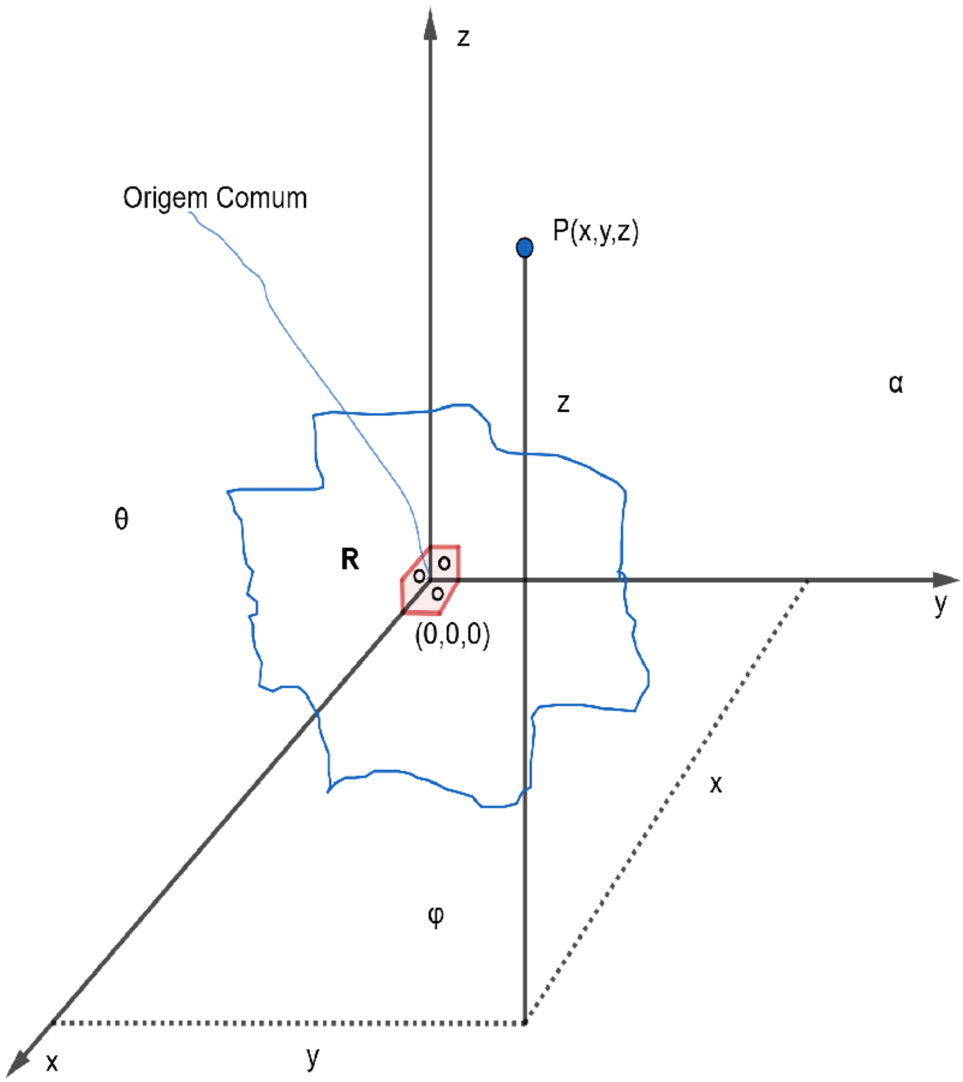


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

A posição de P é determinada em relação ao referencial R. Assim para localizarmos um ponto P, o referencial R, é necessário conhecemos a distancia de P aos pontos de R.

Um modo de se localizar o ponto P é fixar em R um Sistema Cartesiano bidimensional, (Figura 10).

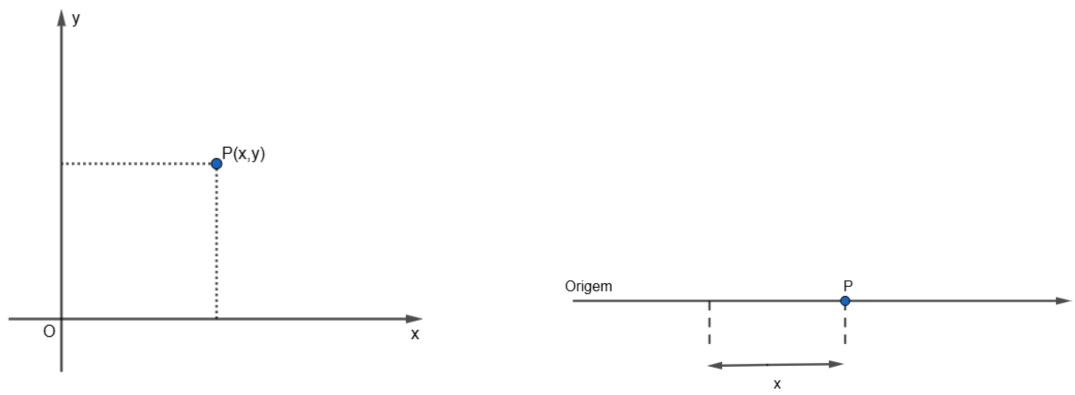
Figura 10 – Gráfico do corpo no Sistema de Referencial



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

Este é constituído de três eixos perpendiculares dois a dois e com uma origem comum. A posição do ponto material P, no espaço é definida pelas suas coordenadas Cartesianas x, y, z mostrada na figura 10, onde x é a abscissa, y é a ordenada e z é a cota de P. Se o ponto P estiver sempre em um plano, sua posição é definida por apenas duas coordenadas: (x, y), Figura 11 (a) e (b).

Figura 11 – Sistema de Referência bidimensional



(a) Sistema de Referência Unidimensional

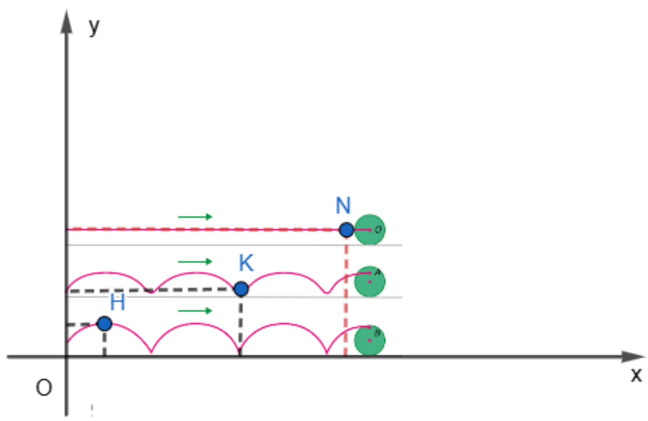
(b) Localizando Partícula no Espaço

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

2.4.2 Trajetória

A ideia de trajetória é aparentemente simples. As linhas luminosas formadas pelos faróis e lanternas de automóveis ou pelo rastro do foguete são exemplos típicos de trajetórias de corpos em movimento. No entanto, essa simplicidade depende também do conceito de ponto material e de referencial, (Figura 13).

Figura 12 – Gráfico de Trajetória no Plano, K, H e N em Movimento

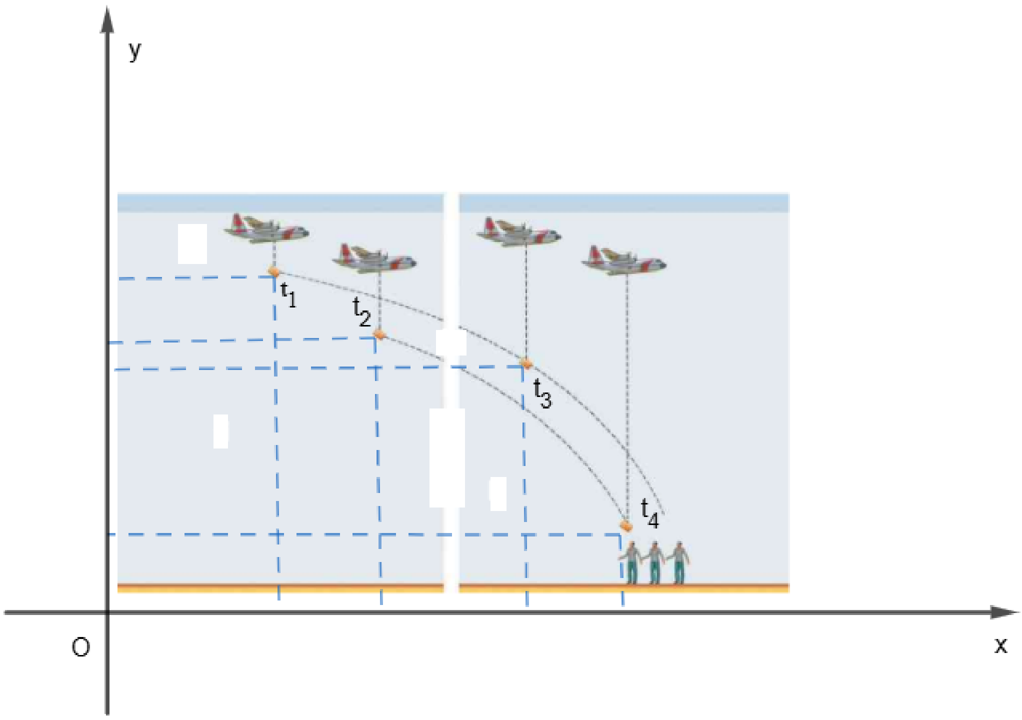


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

Se o ponto P estiver sempre em uma reta sua posição é definida por apenas uma coordenada cartesiana: x, (Figura 12). Não é possível dizer qual é a trajetória da roda em relação ao solo ou a qualquer outro referencial, pois pontos diferentes da roda têm trajetórias diferentes. Só é possível definir a trajetória de um corpo se ele puder ser considerado um ponto material ou, se for um corpo rígido e extenso, se tiver movimento de translação puro, ambos os pontos descrevem trajetórias paralelas.

Na figura 13 podemos observamos que os pacotes enquanto caem, se não forem freados muito rapidamente pela resistência do ar, tendem a manter a mesma velocidade do avião. Cada piloto, caso se mantenha na mesma velocidade e na mesma reta em que voava, verá esses pacotes descreverem uma trajetória quase retilínea e vertical. As pessoas em terra, no entanto, verão os pacotes descreverem uma trajetória parabólica, podemos constatar as ideias na (Figura 14).

Figura 13 – Gráfico de Trajetória com Referencial Parabólico: $t_1 = (x_1, y_1), t_2 = (x_2, y_2), t_3 = (x_3, y_3), t_4 = (x_4, y_4)$



Fonte: Gaspar (2016, p. 50)

2.4.2.1 Localizando a Trajetória

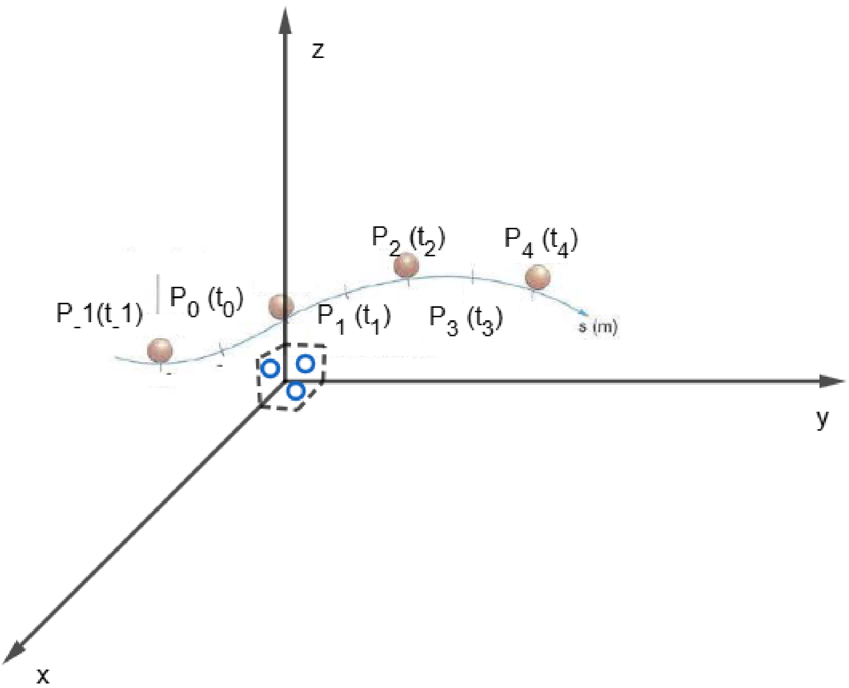
Um ponto material que se move em relação a um determinado referencial ocupa sucessivamente diversas posições, descrevendo uma curva que recebe o nome de trajetória, (Figura 13 e Figura 14). Se um ponto material estiver em repouso em relação a certo referencial, sua trajetória se reduz a um ponto geométrico, (Figura 12).

2.4.3 Movimentos Retilíneos

O estudo de um movimento real não é uma tarefa simples, pois pontos diferentes do mesmo corpo rígido podem ter trajetórias diferentes em relação ao mesmo referencial.

Já os movimentos curvilíneos, bidimensionais — como a trajetória mostrada na (Figura 14) exigem descrições matemáticas mais complexas.

Figura 14 – Gráfico de Trajetórias Diferentes: $P_1 = (x_1, z_1), P_0 = (x_0, z_0), P_2 = (y_0, z_0)$ e $P_4 = (y_4, z_4)$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

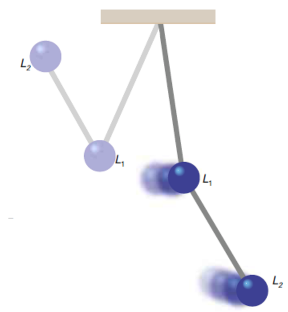
Outros tipos de trajetória, nesta fase inicial do nosso estudo, permitem supor de forma intuitiva a representação esquemática de um pêndulo caótico: L_1 e L_2 são pequenas lâmpadas que geram uma trajetória luminosa, (Figura 15).

Isso porque, nesta fase do estudo, os recursos teóricos de que dispomos tanto em Matemática quanto em Física ainda são bastante limitados para permitir uma representação algébrica precisa de um pêndulo caótico.

Até mesmo no pêndulo de Huygens, onde o tempo de oscilação “período”, varia de acordo com a amplitude da mesma. No caso de pequenas oscilações, o período não se altera, pois o pêndulo isócrono, destacado por característica que possibilita transforma os movimentos oscilatórios, para construir em cronômetros mais precisos que um relógio, através de uma trajetória cicloidal, em vez de uma trajetória circular, como no pêndulo simples, o período é independente da amplitude da oscilação.

Para isso, Huygens restringiu o movimento do corpo por obstáculos que o obrigassem a descrever uma trajetória cicloidal. Ele mostrou, ainda, que os obstáculos também deveriam ter uma forma cicloidal, (Roque, 2012).

Figura 15 – Trajetória Cáoticas



Fonte: Gaspar (2016, p. 51)

A descrição matemática dessa trajetória exige cálculos extremamente complexos. No entanto a entropia, em termos físicos, possibilita a associação do movimento ao grau de desordem ou incerteza de um sistema. Quando aplicada ao movimento, ela pode ser interpretada como uma medida da dispersão ou da irreversibilidade associada ao comportamento de partículas ou corpos no espaço e no tempo.

Então podemos restringir ao estudo de corpos rígidos de dimensões desprezíveis em relação aos referenciais considerados, movimentos de pontos materiais. Desse modo, para um dado referencial será possível definir com precisão a posição do móvel em cada instante e a trajetória por ele descrita. No movimentos de trajetórias retilíneas.

Essa restrição torna possível a utilização de apenas um eixo cartesiano como sistema de referência, o que simplifica consideravelmente o estudo de um movimento, (Figura 10). O ponto 0 é chamado de origem, e a seta indica o sentido positivo. Posições à direita de 0 são positivas e à esquerda são negativas a esquerda, Figura 12.

2.4.3.1 Movimento Progressivo

Quando um móvel se desloca no sentido da orientação positiva da trajetória denominando movimento progressivo (Figura 16). No movimento progressivo os espaços crescem com decorrer do tempo, "A variação de espaço Δs", em qualquer intervalo de tempo sempre positiva, implicando que a velocidade escalar é positiva, (Figura 16).

No estudo do movimento retilíneo, o movimento progressivo é igualmente essencial, pois descreve o deslocamento de um corpo no sentido positivo de um referencial previamente estabelecido. Este tipo de movimento está associado a trajetórias em que o móvel se afasta da origem no sentido crescente da posição.

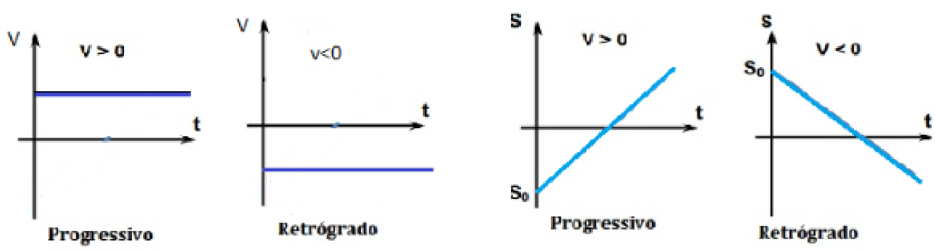
O Movimento Progressivo é a base para a análise do movimento linear por ser o ponto de partida para a compreensão das relações entre posição, velocidade e aceleração em trajetórias retilíneas. A ausência de inversões no sentido do deslocamento simplifica os cálculos iniciais, ajudando no entendimento da cinemática.

A representação em gráficos cartesianos de posição versus tempo $\Delta s \times \Delta t$, o movimento progressivo aparece como uma curva ascendente (com inclinação positiva). No plano permite uma interpretação direta da direção do deslocamento e velocidade do corpo.

Tendo aplicação prática na compreensão do movimento de veículos em rodovias, projéteis em subida ou deslocamentos unidirecionais de objetos, são exemplos práticos de movimento progressivo. Sendo amplamente utilizado em estudos de engenharia, física aplicada e outras áreas onde o comportamento linear é relevante.

A representação gráfica do movimento progressivo aparece como uma reta ou curva ascendente, dependendo do tipo do movimento. Para movimento uniforme, a curva é uma reta com inclinação constante, (Figura 16). No caso do movimento uniformemente variado, a curva da posição em função do tempo é uma parábola voltada para cima. A inclinação positiva dessa curva indica que o móvel se desloca no sentido positivo do eixo Δs.

Figura 16 – Movimento Progressivo no Plano



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

No gráfico da aceleração constante é representada por uma linha horizontal, enquanto aceleração variável aparece como uma curva no plano. No movimento progressivo, a aceleração pode ser positiva ou nula, mas a direção da velocidade permanece positiva.

No conceito Físico Matemático a relação entre grandezas, o movimento progressivo destaca as relações entre a posição Δs, a velocidade v e a aceleração a, possibilitando cálculos diretos, como Função horária da posição: $s(t) = s_0 + v \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ e a Função Horária da velocidade: $v(t) = v_0 + at$.

O movimento progressivo é fundamental para o entendimento inicial da cinemática, é amplamente utilizado para representar fenômenos cotidianos e tecnológicos. Sua análise gráfica em coordenadas cartesianas facilita a visualização e o entendimento das grandezas envolvidas, servindo como base para estudos avançados da dinâmica e da física aplicada.

No cálculo do deslocamento e da distância percorrida, o deslocamento total coincide com a distância percorrida quando o movimento é progressivo, o que simplifica o tratamento matemático. Embora mais simples do que o movimento retrógrado, o movimento progressivo é fundamental para a construção de modelos mais complexos, como aqueles com trajetórias não lineares ou em múltiplas dimensões.

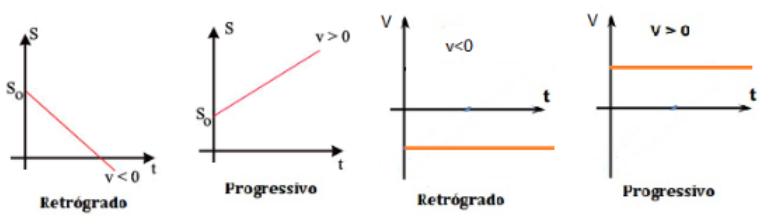
2.4.3.2 Movimentos Retrógrados

No estudo do movimento retilíneo, a consideração do movimento retrógrado é essencial para compreender o comportamento completo de um móvel ao longo de uma trajetória. O movimento retrógrado ocorre quando o corpo se desloca em sentido contrário ao referencial considerado como positivo.

A importância do movimento retrógrado está no fato de ele permitir a descrição de movimentos que ocorrem no sentido oposto ao avanço, ou seja, no sentido negativo da trajetória. Ignorar essas inversões no percurso pode comprometer a análise correta do movimento, afetando diretamente o cálculo de grandezas como o deslocamento e a distância percorrida.

A interpretação física e matemática dos gráficos de posição em função do tempo permite compreender a relação entre espaço e tempo no movimento. No caso do movimento retrógrado, o gráfico de posição versus tempo apresenta um trecho com declive — ou seja, uma linha com inclinação negativa — indicando que o móvel está retornando em direção ao ponto de origem ou movendo-se no sentido oposto ao referencial positivo. Já no gráfico de velocidade em função do tempo, o movimento retrógrado se manifesta por meio de valores negativos de velocidade, evidenciando a inversão no sentido do deslocamento, (Figura 17).

Figura 17 – Movimento Médio Retrógrado no Plano



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

Aplicação prática deste fenômeno é comum em carros em marcha a ré, projéteis que retornam após atingirem o ponto de altura máxima ou movimentos oscilatórios (como em uma mola ou pêndulo) são exemplos de situações em que o movimento retrógrado ocorre. Considerar o movimento retrógrado é crucial para modelagem, como no caso de trajetórias em sistemas de controle ou navegação.

Na representação gráfica, o movimento retrógrado é identificado quando a curva de posição em função do tempo passa a apresentar inclinação negativa. A inclinação da reta tangente à curva em cada ponto representa a velocidade do móvel; assim, uma inclinação negativa indica que a velocidade é negativa, caracterizando o movimento no sentido oposto ao referencial positivo, (Figura 17).

O gráfico da velocidade v se torna negativa durante o movimento retrógrado, criando uma região do gráfico abaixo do eixo t. A área entre o gráfico de v e o eixo t indica o deslocamento, sendo negativa no caso do movimento retrógrado.

Os movimentos retrógrado e retardado diferem quanto à relação entre o sentido da velocidade e da aceleração do corpo. No movimento retardado, a velocidade e a aceleração têm a mesma direção, porém sentidos opostos, o que significa que apresentam sinais contrários. Essa relação está exemplificada na tabela a seguir.

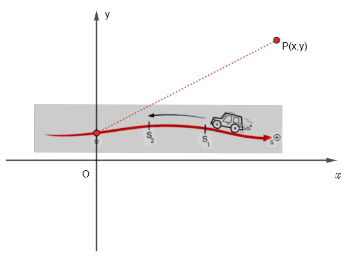
Tabela 1 – Movimento Retrógrado e as Regras de Sinais

Movimento	**Velocidade**	**Aceleração**
Retrógrado e retardado	$-$	$+$
Retrógrado e Acelerado	$-$	$-$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1.

Suas relações com os conceitos físicos matemáticos, diz que a mudança de sentido no instante t, em que a velocidade $v = 0$, pode indicar a transição entre o movimento progressivo e retrógrado (ou vice-versa). Quando o estudo inclui as causas do movimento a conservação de energia e a energia do movimento retrógrado pode ser analisada sob a perspectiva das forças envolvidas, como no caso de oscilações em que a energia potencial e cinética se transforma continuamente.

Figura 18 – Movimento Médio Retrógrado no Plano



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.1

Portanto, o movimento retrógrado e sua representação em gráficos cartesianos são fundamentais para a análise detalhada de qualquer movimento linear, fornecendo uma visão mais rica e completa da dinâmica de sistemas físicos, Figura 18.

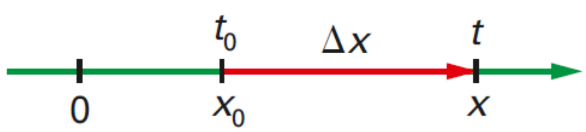
2.4.4 Equação Horária da Posição no Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

O deslocamento é a variação da posição de um corpo em relação a um referencial durante um intervalo de tempo. Trata-se de uma grandeza vetorial, pois possui módulo, direção e sentido. O deslocamento é obtido pela diferença entre a posição final e a posição inicial do corpo.

Sua fórmula é dada por:

$\Delta x = x - x_0$.

Figura 19 – Deslocamento Sobre Sistema e Referência



Fonte: Gaspar (2016, p. 48)

A velocidade escalar média definida na seção 2.4 é dada pela equação abaixo:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.3}$$

Sendo Δt sempre positivo, concluímos que o sinal de V_m e o mesmo de Δs.

$$\text{Regra para Sinais: } \begin{cases} \Delta s > 0 \implies V_m > 0, \\ \Delta s < 0 \implies V_m < 0, \\ \Delta s = 0 \implies V_m = 0. \end{cases}$$

Fazendo $s_1 = s_0$, $s_2 = s$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$ e $V_m = v$ obtemos:

$$v = \frac{s - s_0}{t - 0}, \tag{2.4}$$

ou seja,

$$s = s_0 + vt.$$

A função horária é uma expressão matemática que descreve a posição de um corpo em movimento em função do tempo. Em física, especialmente na cinemática (o estudo do movimento), ela é usada para descrever como a posição de um objeto varia ao longo do tempo, isto é:

$$s(t) = s_o + vt, \tag{2.5}$$

com
$s(t)$: posição no instante t
s_o : posição inicial
v : velocidade constante
t : tempo.
Nesse caso, o objeto se move em linha reta com velocidade constante.

Exemplo 2.1. Um carro parte de uma posição inicial de 10 metros e se desloca com velocidade constante de 20 m/s. Qual será sua posição após 4 segundos?

Solução: Dados: $s_0 = 10m$, $v = 20m/s$ e $t = 4s$. Temos:

$$s(4) = 10 + 20.4 = 10 + 80 = 90m.$$

3 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

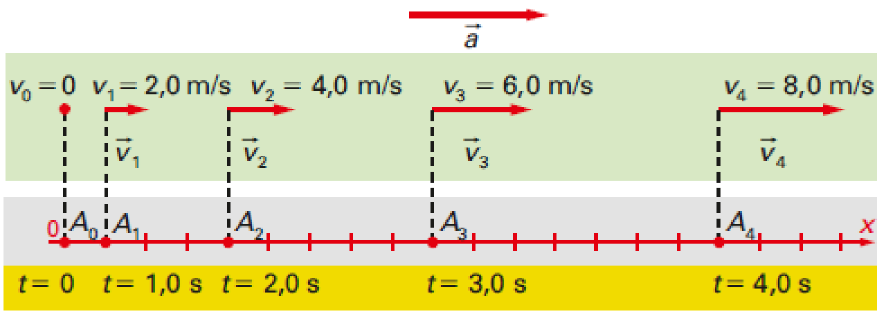
Existe um movimento chamado movimento retilíneo uniforme (MRU) que é muito raro; mesmo quando um carro percorre um trecho retilíneo de uma estrada com velocidade constante, nem sempre se pode caracterizar esse movimento como um MRU, porque quase sempre há subidas e descidas que deixamos de considerar.

Já o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é mais frequente em percursos de curta duração. O estudo deste tipo de movimento se justifica porque, por meio dele, ficamos familiarizados com a descrição matemática de fenômenos físicos, recurso essencial para a construção e a compreensão da Física.

3.0.1 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Um ponto material tem movimento retilíneo uniformemente variado ($MRUV$) quando sua trajetória é retilínea e a velocidade varia de maneira uniforme. Isso significa que o módulo da velocidade aumenta ou diminui valores iguais em intervalos de tempo iguais. Observe na Figura 20 que o módulo da velocidade do ponto material A aumenta $2,0\ m/s$ a cada segundo, ou seja, ele se movimenta com uma aceleração constante de módulo $2,0\ m/s^2$ no sentido do eixo.

Figura 20 – Gráfico do Módulo da Velocidade



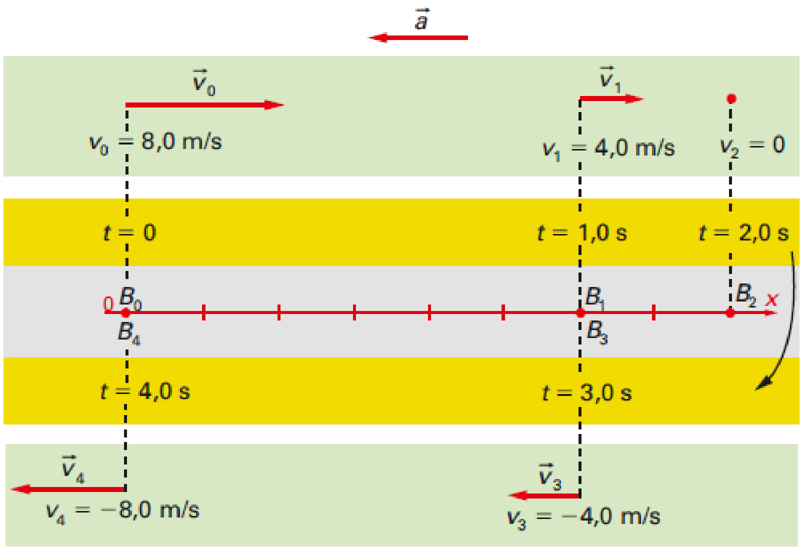
Posições sucessivas do ponto material A.

Fonte: Gaspar (2016, p.66)

Quando a velocidade inicial tem o mesmo sentido do eixo, mas a aceleração tem sentido oposto, a descrição do movimento exige também o uso adequado de sinais. Note que na Figura 21, que a velocidade do ponto material B, considerando módulo e sinal, diminui

$4,0\ m/s$ a cada segundo. Esse ponto material tem desse modo, aceleração constante de módulo $4,0\ m/s^2$, que, precedida do sinal devido ao eixo adotado, é expressa na forma $a = -4,0\ m/s^2$.

Figura 21 – Gráfico do Módulo da Velocidade



Posições sucessivas do ponto material A em MRUV. O eixo x está orientado no mesmo sentido de $\hat{v}_0$, oposto ao sentido de $\hat{a}$.

Fonte: Gaspar (2016, p.66)

Por isso, a partir daí, o módulo da velocidade apesar de aumentar também passa a ser precedido do sinal negativo, pois o sentido da velocidade também passa a ser oposto ao sentido do eixo x.

No MRUV duas grandezas variam com o tempo, a velocidade e a posição, enquanto a aceleração é constante. Portanto, a descrição matemática do MRUV baseia-se, principalmente, nas funções e nos gráficos da velocidade e da posição em relação ao tempo.

3.0.2 Aceleração Escalar

Ao observar situações comuns do nosso dia a dia, como um carro parado no semáforo que, ao abrir o farol, começa a se movimentar cada vez mais rápido, ou outro veículo fazendo uma curva, ou ainda um gato pulando para tentar capturar um rato em fuga, percebemos que a velocidade nesses casos não é constante. Na verdade, na maioria dos movimentos que observamos, há variação de velocidade. Para entender e estudar esses movimentos em que a velocidade muda, utilizamos o conceito de aceleração.

A aceleração está diretamente relacionada à variação da velocidade: sempre que a velocidade de um corpo muda, dizemos que ele está acelerado. No entanto, não basta saber apenas o quanto a velocidade mudou. é fundamental saber em quanto tempo essa mudança ocorreu.

Assim como a velocidade, a aceleração é uma grandeza vetorial, o que significa que possui direção e sentido, exigindo, portanto, um tratamento matemático mais elaborado. No entanto, quando estamos lidando com movimentos retilíneos ou seja, em linha reta, como não há mudança de direção, é possível simplificar a análise considerando apenas os módulos (valores numéricos) da velocidade e da aceleração, tratando-os de forma escalar.

Assim, se a velocidade do ponto material em trajetória retilínea sofre a variação Δv, em módulo, no intervalo de tempo Δt, a aceleração média a_m em módulo pode ser definida pela razão:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.1}$$

3.0.3 Função Horária da Velocidade

Da **equação 3.1** fazendo $v_1 = v_0$, $v_2 = v$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$ e $a_m = a$, obtemos:

$$a = \frac{v - v_0}{t - 0}, \tag{3.2}$$

ou seja,

$$v = v_0 + at.$$

A função horária da velocidade do movimento uniformemente variado é uma expressão matemática que descreve a velocidade de um corpo em movimento em função do tempo. Em física, especialmente na cinemática (o estudo do movimento), ela é usada para descrever como a velocidade de um objeto varia ao longo do tempo, isto é

$$v(t) = v_o + at, \tag{3.3}$$

com
$v(t)$: velocidade no instante t
v_o : velocidade inicial
a : aceleração constante
t : tempo.
Nesse caso, o objeto se move em linha reta com aceleração constante.

Exemplo 3.1. Um carro parte de repouso e acelera com aceleração constante de $5m/s^2$. Qual será sua velocidade após 4 segundos?

Solução: Dados: $v_0 = 0m/s$, $a = 5m/s^2$ e $t = 4s$. Temos:

$$v(4) = 0 + 5.4 = 20m/s.$$

3.0.4 Função Horária da Posição(Movimento Uniformemente Variado – MUV)

Vamos encontrar a função horária da posição do movimento uniformemente variado. Usaremos a **equação 3.3** e também da velocidade média do MUV que é dada pela seguinte equação:

$$v_{med} = \frac{v_0 + v}{2}. \tag{3.4}$$

Substituindo **equação 3.3** na **equação 3.4**, obtemos:

$$v_{med} = \frac{v_0 + (v_o + at)}{2} = \frac{2v_o + at}{2}. \tag{3.5}$$

Usando a equação da velocidade média para $t_1 = 0$ e a **equação 3.5**, obtemos

$$\Delta s = v_{med}.t = \left(\frac{2v_0 + at}{2}\right) t, \tag{3.6}$$

ou seja,

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{3.7}$$

Como $\Delta s = s - s_0$, temos

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{3.8}$$

A função horária da posição no movimento uniformemente variado (MUV) descreve a posição de um corpo em função do tempo, considerando que sua aceleração é constante. Essa função é dada pela equação

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \tag{3.9}$$

com
$s(t)$: posição no instante t
s_o : posição inicial
v_o : velocidade inicial
a : aceleração constante
t : tempo.
Essa equação mostra que, no MUV, a posição varia de forma quadrática com o tempo, devido à presença do termo $\frac{1}{2}at^2$, refletindo a influência da aceleração sobre o movimento.

Exemplo 3.2. Um carro está com velocidade inicial 2 m/s, e a 10 metros da origem, e acelera a $3m/s^2$. Qual sua posição depois de 4 segundos?

Solução: Temos $v_0 = 2m/s$, $s_0 = 10m$, $a = 3m/s^2$ e $t = 4s$. Logo,

$$s(4) = 10 + 2.4 + \frac{1}{2}.3.4^2 = 10 + 8 + 24 = 42m.$$

Exemplo 3.3. Um ciclista está com velocidade inicial 20 m/s e desacelera a $-4m/s^2$. Qual sua posição depois de 4 segundos?

Solução: Temos $v_0 = 20m/s$, $s_0 = 0m$, $a = -4m/s^2$ e $t = 4s$. Logo,

$$s(4) = 0 + 20.4 + \frac{1}{2}.(-4).4^2 = 0 + 80 - 32 = 48m.$$

3.0.5 Expressão da Velocidade em Relação à Posição: Equação de Torricelli

A expressão da velocidade em relação à posição de um ponto material em MRUV é chamada de equação de Torricelli em homenagem ao físico e matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647). Vamos fazer a dedução da equação. Dada a equação

$$v = v_0 + at,$$

isolando t, obtemos

$$t = \frac{v - v_0}{a}. \tag{3.10}$$

Substituindo a **equação 3.10** na **equação 3.7**, obtemos

$$\Delta s = v_0.\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a.\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2.$$

Segue que

$$\Delta s = v_0.\frac{(v - v_0)}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}.$$

Colocando tudo no mesmo denominador, temos:

$$\Delta s = \frac{2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2}{2a}.$$

Agora, desenvolvendo o numerador, teremos:

$$2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 = 2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0v + v_0^2 = v^2 - v_0^2.$$

Portanto:

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Logo, a equação de Torricelli é dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s. \tag{3.11}$$

A equação de Torricelli é uma equação da cinemática usada para relacionar a velocidade, posição e aceleração de um corpo em movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), sem envolver o tempo diretamente.

Exemplo 3.4. Um carro está se movendo a 20 m/s quando o motorista freia bruscamente. Sabendo que a desaceleração é constante e igual a $-5m/s^2$, qual é a distância percorrida até parar?

Solução: Temos $v_0 = 20m/s$, $v = 0m/s$, $a = -5m/s^2$ e $\Delta s =?$. Aplicando a equação de Torricelli, obtemos:

$$0^2 = 20^2 + 2.(-5).\Delta s \Rightarrow 0 = 400 - 10\Delta s,$$

ou seja,

$$10\Delta s = 400 \Rightarrow \Delta s = 40m.$$

4 MOVIMENTO SOBRE A AÇÃO DA GRAVIDADE

Quando um corpo é solto de uma determinada altura, ele adquire um movimento de queda vertical, cuja velocidade aumenta continuamente. Numa queda "livre", isto é, em que a resistência do ar é desprezível, todo corpo, seja qual for seu peso, sejam quais forem suas dimensões, cai sempre no mesmo intervalo de tempos se for solto da mesma altura. Sua velocidade sempre aumenta durante a queda, em intervalos de tempos iguais, essa variação é sempre com a mesma aceleração: a aceleração da gravidade.

Essa é uma afirmação difícil de aceitar, pois contraria nossa experiência cotidiana, sempre observada em condições em que a resistência do ar interfere na queda dos corpos. No entanto, em um ambiente sem ar, como uma câmara de vácuo, uma maçã e uma pena caem juntas, o que demonstra de forma eloquente que, na queda livre, a aceleração da gravidade atua de forma constante sobre todos os corpos, independentemente de sua massa ou forma.

Se não houvesse a resistência do ar, todos os corpos, de qualquer peso ou forma, abandonados da mesma altura, nas proximidades da superfície da Terra, levariam o mesmo tempo para atingir o solo. Esse movimento é conhecido como queda livre. A trajetória é retilínea, vertical, e a aceleração é a da gravidade $\vec{g}$, constante, cujo módulo com dois algarismos significativos é $\vec{g} = 9,8m/s^2$. A rigor, o movimento de queda livre não existe na prática, porque não é possível evitar a influência da resistência do ar.

Em um ambiente como a Lua, por exemplo, onde a atmosfera é praticamente inexistente, isso é possível. Em 2 de agosto de 1971, o astronauta norte-americano David R. Scott, Figura 22 comandante da missão Apollo 15, fez uma experiência interessante que comprovou esse fato.

Ao deixar cair simultaneamente um martelo de 1,32 kg e uma pena de 30 g, o astronauta Scott comprovou que, na ausência de resistência do ar como ocorre na superfície da lua ambos os objetos caem com a mesma aceleração. Isso demonstra que, em queda livre, todos os corpos sofrem a mesma aceleração gravitacional, independentemente de suas massas, já que o martelo e a pena atingiram o solo ao mesmo tempo.

Já na Terra, no entanto, muitas vezes a resistência do ar pode ser considerada e, nesses casos, é possível estudar o movimento, como se ele fosse de queda livre.

4.1 Funções do Movimento de Queda Livre

No movimento de queda livre, a trajetória é retilínea e a aceleração é constante. Trata-se, portanto, de MRUV e, como tal, as funções matemáticas que o descreve são as

Figura 22 – Corpos em Queda Livre

Simulações com mais de um referencial com o astronauta David R. Scott, em 1971 na superfície da Lua e uma foto de dentro da espaçonave.

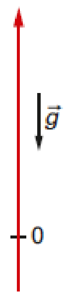
Fonte: Elaborado pelo Autor, 2025.1

mesmas vistas no capítulo anterior. No entanto, para caracterizar o estudo do movimento de queda livre, vamos dar a essas funções características específicas. Vejamos: Como a trajetória é sempre vertical, a variável x, que representa a posição, associada ao eixo horizontal das abscissas, será substituída pela variável y, associada ao eixo vertical das ordenadas.

A aceleração é a da gravidade, portanto vamos adotar sempre $\vec{a} = \vec{g}$, estabelecendo um único sistema de referência: um eixo vertical, orientado para cima, com a origem fixada, em geral, no solo.

Nessas condições, como a aceleração da gravidade é orientada verticalmente para

Figura 23 – Sistema de Referência para o Movimento de Queda Livre



Fonte: Gaspar (2016, p.74)

baixo, seu módulo será sempre precedido de sinal negativo. O deslocamento $\Delta x = x - x_0$ será substituído pela altura h ou Δy, expresso por $\Delta y = y - y_0$. Assim, podemos reunir, na tabela abaixo, as principais funções do MRUV ao lado das correspondentes funções "adaptadas" ao movimento de queda livre, ver (Tabela 2).

Tabela 2 – Relações fundamentais do MRUV e Queda Livre

Expressões, Funções e Equações	**MRUV e Aceleração**	**Queda Livre**
Velocidade em relação ao tempo	$v = v_0 + at$	$v = v_0 - gt$
Posição em relação ao tempo	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Velocidade em relação à posição (Torricelli)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0)$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Exemplo 4.1. Um objeto é solto do repouso do alto de uma torre. Sabendo que a aceleração da gravidade é $9,8m/s^2$, qual é a velocidade com que ele atinge o solo após cair de uma altura de 45 metros?

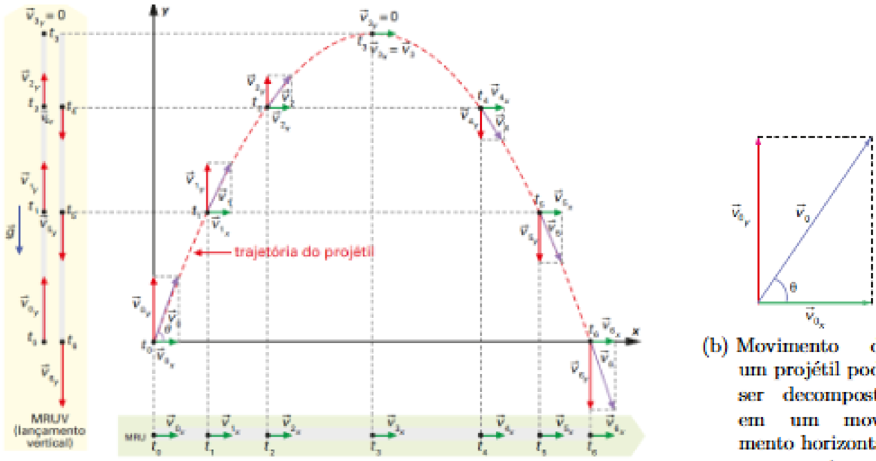
Solução: Temos $v_0 = 0m/s$, $g = 9,8m/s^2$, $\Delta y = 45m$ e $v =?$ Aplicando a equação de Torricelli para queda livre, obtemos:

$$v^2 = 0^2 + 2.(9.8).45 = 882 \Rightarrow v = \sqrt{882} = 29,7m/s.$$

4.1.1 Lançamento Oblíquo de Projetéis

O lançamento oblíquo é um tipo de movimento que ocorre quando um objeto é lançado com uma velocidade inicial formando um ângulo diferente de 0^0 ou 90^0 em relação à horizontal.

Figura 24 – Gráfico do Lançamento Oblíquo de Projéteis.



(a) Detalhadamente do Lançamento

(b) Movimento de um projétil pode ser decomposto em um movimento horizontal e movimento vertical

Movimento de um projétil pode ser decomposto em um movimento horizontal e movimento vertical.
Fonte: Gaspar (2016, p.80)

Utilizando um plano inclinado, Galileu estudou o movimento uniformemente variado e o movimento dos projéteis, concluindo que este tipo de movimento pode ser analisado como a composição de dois movimentos simultâneos e independentes: um movimento uniforme (MU) na direção horizontal e um movimento uniformemente variado (MUV) na direção vertical, sob a ação da gravidade, desconsiderando a resistência do ar. Para essa análise, é necessário decompor a velocidade inicial $(\vec{v_0})$ em dois componentes ortogonais: o horizontal $(\vec{v_0 x})$ e vertical $(\vec{v_0 y})$, que estão diretamente relacionados ao ângulo de lançamento θ.

Dessa forma, pode-se considerar que o movimento de um projétil é composto por dois movimentos simultâneos: um movimento horizontal, com velocidade inicial $(\vec{v_0 x})$ de módulo $v_0x = v_0cos\theta$, e um movimento vertical, com velocidade inicial $(\vec{v_0 y})$ de módulo $v_0y = v_0sen\theta$.

Desprezando-se a resistência do ar, à medida que o projétil sobe os componentes verticais de sua velocidade, em qualquer instante $(\vec{v_0}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6}, ..., \vec{v_n})$, variam apenas por causa da aceleração da gravidade $\vec{g}$. Sendo essa aceleração constante (nas proximidades da superfície da Terra), esses componentes variam uniformemente.

Portanto, o movimento do projétil na direção do eixo y é um MRUV (ver faixa amarela à esquerda da Figura 24). Como a aceleração da gravidade não tem componente horizontal, pode-se concluir que os componentes horizontais de sua velocidade permanecem constantes. Logo, o movimento do projétil na direção do eixo x é um MRU (veja faixa verde na parte inferior da Figura 24).

Pode-se demonstrar que, nessas condições, a trajetória do projétil é uma parábola. Esse movimento usar a sua trajetória real, mas, além de ser um procedimento matemático complexo, só é possível fazê-lo por meio de suas projeções nos eixos x e y: MRU, na direção do eixo x, e MRUV, na direção do eixo y. Assim, a posição do projétil em cada instante t é determinada pelas coordenadas x e y nesse instante. Sendo constante o componente horizontal da velocidade, sua abscissa x é obtida pela função: $x = v_x t$, em que v_x é calculado pela expressão: $v_x = v_0\ cos\theta$.

A ordenada y é obtida a partir da função do lançamento vertical, na qual v_0 foi substituído por v_{0y}:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

em que v_{0y} é calculado pela expressão:

$$v_{0y} = v_0\ sen\boldsymbol{\theta}.$$

Componente $\vec{v_y}$ da velocidade é variável devido à aceleração da gravidade. Seu módulo, a cada instante t, pode ser obtido pela função do lançamento horizontal acrescido do termo v_{0y}, que neste caso, não é nulo. Portanto, temos:

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

O módulo da velocidade $\vec{v}$ do projétil, em certo instante, pode ser determinado graficamente pela soma vetorial dos componentes $\vec{v_x}$ e $\vec{v_y}$, enquanto seu valor numérico pode ser calculado pela expressão do $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Na figura 25, é interessante notar ainda a variação do componente $\vec{v_y}$, sobretudo na altura máxima, quando o módulo de $\vec{v_y}$ é 0. Esse dado, $\vec{v_y} = 0$, colocado na equação de Torricelli, escrita na forma $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$, possibilita a determinação da altura máxima atingida pelo projétil, que é a coordenada y para a qual $v_y = 0$.

Seja H a altura máxima atingida pelo projétil, então pela equação de Torricelli, obtemos

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \tag{4.1}$$

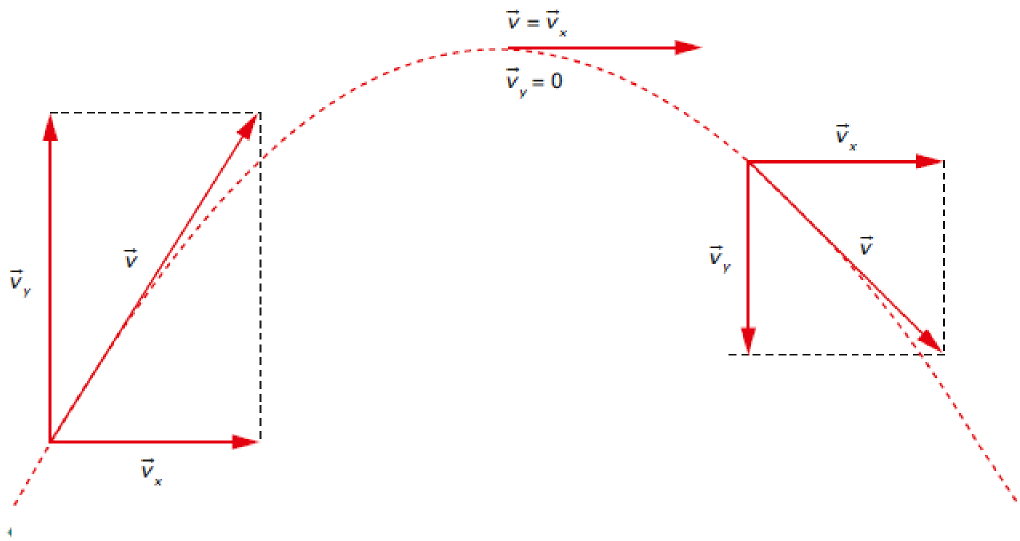
Exemplo 4.2. Um projétil é lançado com velocidade de 20 m/s formando um ângulo de 30° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar e considerando $g = 10m/s^2$, qual é a altura máxima atingida?

Solução: A componente vertical da velocidade inicial é dada por:

$$v_{0y} = v_0 sen\boldsymbol{\theta} = 20sen30° = 20.(0,5) = 10m/s.$$

Figura 25 – Diferentes representações dos vetores $\vec{v}, \vec{v_x}$ e $\vec{v_y}$ em diferentes posições da trajetória do projétil

.



Fonte: Gaspar (2016, p.81)

A altura máxima é dada por:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{10^2}{2.10} = \frac{100}{20} = 5m.$$

Exemplo 4.3. Um projétil é lançado com velocidade de 50m/s formando um ângulo de 60° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar e considerando $g = 10m/s^2$, qual é a altura e a posição horizontal do projétil após 3 segundos?

Solução: Temos:

$$v_{0x} = v_0 cos\boldsymbol{\theta} = 50cos60° = 50.(0,5) = 25m/s$$

e

$$v_{0y} = v_0 sen\boldsymbol{\theta} = 50sen60° = 50.(0,86) = 43m/s.$$

Logo,

$$x = v_{0x}.t = 25.3 = 75m$$

e

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 43.3 - \frac{1}{2}.10.3^2 = 129 - 45 = 84m.$$

5 CONCLUSÃO

A presente pesquisa evidenciou que a matemática, especialmente por meio da geometria analítica e do estudo das funções, desempenha um papel central na compreensão e na representação dos movimentos no plano. A cinemática, como ramo da física que descreve o movimento dos corpos sem considerar suas causas, é sustentada por uma base matemática sólida, permitindo representar com precisão fenômenos como deslocamento, velocidade e aceleração, tanto em situações de movimento uniforme quanto variado.

Os movimentos retilíneos são essenciais para o entendimento da mecânica clássica e possuem inúmeras aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento. A análise detalhada das equações e gráficos que descrevem esses movimentos permite uma melhor compreensão de fenômenos cotidianos e a construção de tecnologias avançadas.

A partir da análise dos conceitos fundamentais — como ponto material, referencial, trajetória, deslocamento, velocidade escalar e aceleração escalar, foi possível compreender como o estudo dos movimentos retilíneos se organiza matematicamente. O uso da equação horária, da função da velocidade em função do tempo e da equação de Torricelli demonstra a eficácia da linguagem matemática na modelagem de situações físicas reais.

Ao longo deste trabalho, destacamos a importância de conceitos como a velocidade escalar média, a aceleração escalar média, e a descrição matemática dos movimentos. Através da exploração do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) e do Movimento sobre a Ação da Gravidade, foi possível entender melhor como esses movimentos se manifestam e são descritos matematicamente.

Além disso, a abordagem dos movimentos sob a ação da gravidade, como a queda livre e o lançamento oblíquo de projéteis, reforça a importância das funções quadráticas na descrição do comportamento dos corpos. A utilização de gráficos e funções como ferramentas de análise permitiu não apenas prever trajetórias e resultados, mas também compreender qualitativamente as transformações envolvidas nos sistemas dinâmicos.

Ao longo do desenvolvimento, a pesquisa também resgatou o legado de pensadores como Aristóteles, Galileu, Newton e Einstein, demonstrando como as ideias históricas foram sendo refinadas até alcançar os modelos matemáticos atuais. A matemática mostrou-se não apenas uma ferramenta técnica, mas a linguagem estruturante do conhecimento físico, sendo indispensável para a ciência moderna.

Conclui-se, portanto, que o estudo da cinemática sob a ótica matemática contribui significativamente para a formação científica, permitindo a compreensão precisa e rigorosa dos fenômenos naturais e consolidando a importância da interdisciplinaridade entre física e matemática na educação e na pesquisa científica.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: dinâmica**. AMGH, 2012. ISBN 978 85 8055143 3. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado na página 15.

BRENNAN, R. P. **Gigantes da Físicas: Uma História da Física Moderna Através de oitos biografias.** Jorge Zahar., 1997. ISBN 978-85-378-0599-2. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado na página 17.

GASPAR, A. **Compreendendo a Física**. Ática., 2016. ISBN 978 85 08 17967 1. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1yItVqFcWTzMg2LCzBZuMiOEEzHnrjjya/view>. Citado nas páginas 26, 27, 30, 33, 35, 39, 41, 42, 49, 50 e 52.

GLEISER, M. **A dança do universo: dos mitos de Criação ao Big Bang**. Companhia das Letras, 1997. ISBN 85-7164-677-5. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado nas páginas 15, 21 e 22.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Jorge Zahar., 2012. ISBN 978-85-378-0909-9. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado na página 35.

SILVA, M. A. S. d. **A gravidade Newtoniana e einsteiniana não é só uma dicotomia conceitual.** nstituto Federal de educação do Rio Grande do Norte, 2019. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado na página 19.

STRATHERN, P. **Aristóteles em 90 minutos.** Jorge Zahar., 2002. ISBN 978-85-378-0447-6. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado nas páginas 15 e 18.

VILLATE, J. E. **Física 1. Dinâmica**. Faculdade de Engenharia Universidade do Porto., 2012. ISBN 978 972 99296b1 7. Disponível em: <http://www.villate.org/livros>. Citado na página 26.

YONG HUGH D., F. **Física 1: Mecânica**. Addison Wesley, 2016., 2010. ISBN 978-85-88639-30-0. Disponível em: <Arquivopessoal>. Citado na página 26.