UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JACKSON JARDEL PEREIRA DA SILVA

MÁXIMOS E MÍNIMOS: APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

CAMPINA GRANDE/PB
2010

JACKSON JARDEL PEREIRA DA SILVA

MÁXIMOS E MÍNIMOS: APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de conclusão de Curso Apresentado no Curso de Licenciatura Plena em matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às Exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande/PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S586m Silva, Jackson Jardel Pereira da.

Máximos e Mínimos [manuscrito]: Aplicações Geométricas / Jackson Jardel Pereira da Silva. – 2010.

48 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2010.

"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática e Estatística".

1. Geometria. 2. Cálculo. I. Título.

21. ed. CDD 516

JACKSON JARDEL PEREIRA DA SILVA

MÁXIMOS E MÍNIMOS: APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Núbia do Nascimento Martins

Prof. Esp. Núbia do Nascimento Martins
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 22 de Dezembro de 2010.

Dedico a minha mãe Vilma

(in memorian).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela realização deste trabalho, aos meus familiares, colegas de curso, e ao professor Fernando Luiz Tavares da Silva, por ter aceitado me orientar neste trabalho.

RESUMO

Após apresentarmos um breve relato histórico sobre a evolução do Cálculo e selecionarmos criteriosamente o conteúdo teórico necessário ao desenvolvimento do tema em tela, apresentamos no seu decorrer, aplicações do Cálculo Diferencial, mais precisamente, o estudo de *Máximos e Mínimos*, à elementos da Geometria Plana e da Geometria Espacial.

Um outro aspecto que gostaríamos de salientar, diz respeito às aplicações desenvolvidas, que em sua grande maioria são exercícios propostos pelos autores, ou seja, não se encontram resolvidos na bibliografia consultada, excetos alguns poucos, que nos serviram de parâmetros durante todo o decorrer desse trabalho.

Palavras-chave: Cálculo, Máximos e Mínimos, Geometria, Aplicações

ABSTRACT

After presenting a brief historical account on the development of Calculus and carefully selecting the academic content necessary to develop the subject in depth, in its present course, applications of differential calculus, more precisely, the study of *Maxima and Minima*, the elements of plane geometry Space and Geometry.

Another aspect that we wish to highlight relates to the applications developed, which mostly are exercises proposed by the authors, or are not resolved in the bibliography, but a few of the parameters that have served us throughout the course of this work.

Keywords: Calculus, Maxima and Minima, Geometry, Applications

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Não é difícil encontrar questionamentos vindos de alunos, qualquer que seja o nível educacional em que se encontrem, sobre a aplicação e para que servem determinados conteúdos, assim como não encontramos com tanta facilidade, professores das mais diversas titulações, que saibam responder tais questionamentos.

Este trabalho tem o intuito de mostrar, gradativamente, um número razoável de demonstrações e resultados que podemos obter no estudo da Geometria, ao aplicarmos o conteúdo *Máximos e Mínimos*, geralmente ministrado no componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral de algumas graduações, a exemplo de; Bacharelado em Matemática, Engenharia Civil, Ciências da Computação, etc.

Basicamente, o trabalho se divide em três etapas:

- Abordagem histórica sobre a evolução do Cálculo Diferencial e Integral;
- Resumo teórico que sirva de suporte ao desenvolvimento do tema em tela;
- Aplicações: determinação de Áreas e Volumes.

Durante o seu desenvolvimento, podemos perceber claramente que adotados as estratégias escolhidas, tais como: uma boa revisão, escolha dos referenciais teóricos que realmente serão utilizados e somando a tudo isso, uma boa dose de dedicação, os resultados surgem com mais facilidade, e diante de tal êxito, passam a agir como elementos estimuladores na obtenção e correção de rumo para outros tantos.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

A diferenciação se originou de problemas geométricos de tangência a curvas e determinação de máximos e mínimos, onde os gregos já trabalhavam nessas questões. Euclides (cerca de 300 a. C.) provou que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto é perpendicular ao raio. Problemas de movimento e velocidade, básicos para o nosso entendimento de derivadas, também surgiram com os gregos, embora tenham sido tratados mais filosoficamente que matematicamente, como por exemplo, os paradoxos de Zenon que se apoiavam em dificuldades para entender velocidade instantânea sem ter uma idéia de derivada. Porém, o primeiro uso do método diferencial se encontra em algumas idéias de Fermat (1601-1665), tanto que "e tão grande foi o avanço alcançado, e tão perto chegou da invenção da análise infinitesimal que, ambos, J. Lagrange e P.S. Laplace elegeram o compatriota P. Fermat, como o primeiro inventor do assunto"(CAJORI, 2007, p.285). Fermat desenvolveu vários procedimentos algébricos para determinação de pontos máximos e mínimos, determinou tangentes às curvas: elipse, ciclóide, conchóide, quadratriz entre outras, como também desenvolveu trabalhos sobre integração.

Dentre outros matemáticos, Descartes (1596-1650), inventou um procedimento de dupla raiz para encontrar a normal e então a tangente a uma curva. Por sua vez John Wallis (1616-1703) obteve um resultado equivalente a formula $ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$ do comprimento de arco de uma curva. Esses dois deram suas contribuições no Cálculo Diferencial e Integral, porém duas personalidades se destacam na história do Cálculo. Uma delas, pode se dizer a mais importante, é Issac Newton (1642-1727), que fez grandes pesquisas em Óptica, Teoria da Gravitação e o Teorema do Binômio generalizado. Mas sua principal descoberta foi o método dos fluxos, escrita na obra Principia (1687). Nesse trabalho uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Sendo assim, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Com seu método, Newton fez grandes aplicações determinando máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade, concavidade de curvas, aplicando-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas. A outra foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que desenvolveu o seu cálculo entre 1673 e 1676. Graças a Leibniz, o cálculo ganhou uma notação bem mais flexível e manipulável de que o cálculo desenvolvido por Newton, publicado no artigo: New methods for maximums and minimums, as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantities, and a remarkable calculus for them (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles) em 1684.

Infelizmente, nossos dois principais heróis no que diz respeito ao cálculo, entraram em conflito. Para quem iria o mérito da invenção do cálculo? “A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados.” (EVES, 2004, p. 444). As descobertas dos dois são sem dúvida as mais importantes para o cálculo, mas devemos observar que vários matemáticos tinham antes, como vimos ao longo desse texto, dado suas cooperações. “O cálculo Diferencial, portanto, não foi, muito uma descoberta individual, mas, antes, o grande resultado de descobertas sucessivas feitas por diferentes cabeças”(CAJORI, 2007, p. 265).

Daí por diante surgiram várias obras a respeito do Cálculo. O primeiro livro foi Analysis of infinitely Small Quantities for the Understanding of Curved Lines (Análise de quantidades infinitamente pequenas para o entendimento de curvas) do Marquês de L’Hospital(1661-1704) publicado em 1696.

3. DERIVADA

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre os conceitos de derivada, faremos algumas considerações, necessárias ao desenvolvimento que segue. Considere a figura 1

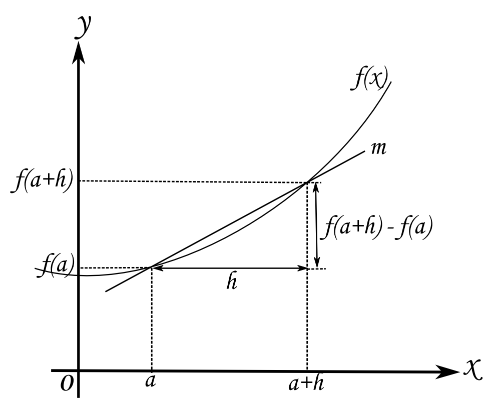

Figura 1

Nela observa-se que:

1 - O coeficiente angular m, da reta r no ponto $(a, f(a))$, dado por

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2 - A taxa de variação instantânea de f no ponto $(a, f(a))$, dado por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Agora, vamos a definição de derivada.

Definição 1 - Seja $a \in Dm(f)$ de uma função f. Se existe o limite $L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, diremos que f é derivável no ponto a e que sua derivada neste ponto é $f'(a) = L$. O que também pode ser representada por $Df(a)$, $\frac{d}{dx} f(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Pelo exposto, a derivada nada mais é do que, obtermos o coeficiente angular de uma reta tangente a um ponto numa função f, ou a sua taxa de variação instantânea num ponto.

O quociente $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ é chamado de quociente de diferenciação, razão incremental ou quociente de Newton.

O limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(x)}{h}$ pode ser escrito como:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ou ainda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.

Exemplo: Seja $f(x)=3x-2$, calcule $f'(2)$.

Solução:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-2-(3.2-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6+3h-2-6+2}{h}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$$

Definição 2 - Seja $f:A\to R$ uma função derivável. A função $f':A\to R$ que a cada ponto $a\in A$ associa o número real $f'(a)$, é chamada função derivada primeira de f.

Exemplo: Dada $f(x)=x^2-3$, encontre $f'(x)$.

Solução:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3-(x^2-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-3-x^2+3}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)\Rightarrow f'(x)=2x$$

3.1 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Vimos até então, que a derivada de uma função é o limite do quociente de diferenciação, por definição. Neste tópico, obteremos regras que nos permitirão calcular com facilidade a derivada de várias funções sem recorrer ao uso da definição.

Teorema 1- *(Regra da função constante)* Se $f(x) = c$, onde $c \in R$, então $f'(x) = 0$ para todo x.

Demonstração: Seja $f(x) = c$, onde $c \in R$, pela definição temos:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \frac{0}{c} = 0.$$

Exemplo: Dado $f(x) = 4$, a derivada é $f'(x) = 0.$

Teorema 2 - *(Regra da Potência)* Se $f(x) = x^n$, onde n pertence aos naturais, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração: Seja $f(x) = x^n$, com $n \in N$, então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h},$$

Desenvolvendo $(x+h)^n$ pela fórmula do Binômio de Newton, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[x^n + \binom{1}{n} x^{n-1}h + \binom{2}{n} x^{n-2}h^2 + ... + h^3 - x^n \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h(nx^{n-1} + \binom{2}{n} x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \binom{2}{n} x^{n-2}h + ... + h^{n-1})$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^5$, encontre $f'(x)$.

Solução: $f'(x) = 5x^{5-1}$, logo $f'(x) = 5x^4$.

Teorema 3 – Sejam u e v funções deriváveis com o mesmo domínio e c uma constante, então:

a) $f(x) = c.u(x)$ é derivável e $f'(x) = c.u'(x)$;

b) *(Regra da soma)* $f(x) = u(x) + v(x)$ é derivável e $f'(x) = u'(x) + v'(x)$;

c) *(Regra do produto)* $f(x) = u(x).v(x)$ é derivável e $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$;

d) *(Regra do quociente)* $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ é derivável e $f'(x) = \dfrac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$;

Demonstração:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c.u(x+h) - c.u(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} c.\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$

$f'(x) = c.\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = c.u'(x).$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} + \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x).$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$, adicionando $-u(x).v(x+h) + u(x).v(x+h)$ ao numerador, temos:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x+h) + u(x).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h)[u(x+h) - u(x)] + u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} v(x+h).\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} u(x).\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}$, portanto

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \left(\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)} \right)$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{u(x+h).v(x)-u(x).v(x+h)}{v(x+h).v(x)}$, adicionando $-u(x).v(x)+u(x).v(x)$ ao numerador, temos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{u(x+h).v(x)-u(x).v(x)+u(x).v(x)-u(x).v(x+h)}{v(x+h).v(x)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h).v(x)}\frac{v(x)[u(x+h)-u(x)]-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h).v(x)}\left[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

Logo,

$$f'(x)=\frac{1}{[v(x)]^2}.[v(x).u'(x)-u(x).v'(x)]$$

$$f'(x)=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Corolário- Se $f(x)=x^{-n}$, $n\in N$, então $f'(x)=-nx^{-n-1}$.

Demonstração:

Sabemos que $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, ou seja, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, assim

Pelo item d do Teorema 3 obtemos

$$f'(x)=\frac{x^n.0-1.nx^{n-1}}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}\Rightarrow f'(x)=-nx^{-n-1}$$

Teorema 4 - *(Derivada da função composta – Regra da cadeia)*- Se f e u são funções tais que a imagem de u está contida no domínio de f, então $f\circ u$ é derivável e $(f\circ u)'(x)=f'(u(x))\cdot u'(x)$.

Omitiremos a demonstração desse teorema, pois aborda conhecimentos que fogem do nosso foco.

3.2 DERIVADA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Antes de calcularmos as derivadas das funções trigonométricas, vamos calcular o limite da função $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ que será útil nas nossas demonstrações.

Vejamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cox-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2x}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}-\frac{senx}{x}\cdot\frac{senx}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

Teorema 5 - Sejam as funções trigonométricas, temos que:

a) Se $f(x)=senx$ então $f'(x)=\cos x$.

b) Se $f(x)=\cos x$ então $f'(x)=-senx$.

c) Se $f(x)=tgx$ então $f'(x)=\sec^2 x$.

d) Se $f(x)=ctgx$ então $f'(x)=-\cos\sec^2 x$.

e) Se $f(x)=\sec x$ então $f'(x)=tgx\cdot\sec x$.

Demonstração:

a) Seja $f(x)=senx$, temos que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx\cdot\cosh+senh\cdot\cos x-senx}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{senx\cdot(\cosh-1)+senh\cdot\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[senx\cdot\frac{\cosh-1}{h}+\frac{senh}{h}\cdot\cos x\right]$$

$$f'(x)=senx\cdot 0+1\cdot\cos x=\cos x$$

b) análoga ao item a).

c) Seja $f(x)=tgx$, vamos usar a relação $tgx=\dfrac{senx}{\cos x}$, e pelo o teorema 3 na regra do quociente, obtemos:

$$f(x)=\frac{senx}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-senx\cdot(-senx)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+sen^2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

d) Seja $f(x) = ctgx$, usando a relação $ctgx = \dfrac{\cos x}{senx}$, temos:

$$f'(x) = \frac{senx \cdot (-senx) - \cos x \cdot \cos x}{sen^2 x} = \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x} = -\cos\sec^2 x.$$

e) Seja $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, obtemos:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-senx)}{\cos^2 x} = \frac{senx}{\cos^2 x} = \frac{senx}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = tgx \cdot \sec x\,.$$

f) Seja $f(x) = \cos\sec x$, temos:

$$f'(x) = \frac{1}{senx} = \frac{senx \cdot 0 - 1 \cdot \cos x}{sen^2 x} = -\frac{\cos x}{sen^2 x} = -\frac{\cos x}{senx}.\frac{1}{senx} = -ctgx.\cos\sec x\,.$$

Observação: Se no caso da função trigonométrica o arco for uma função, $u = u(x)$, usa-se a regra da cadeia. Assim temos:

a) $f(x) = sen(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(u(x)).u'(x)$

b) $f(x) = \cos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -sen(u(x)).u'(x)$

c) $f(x) = tg(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \sec^2(u(x)).u'(x)$

d) $f(x) = ctg(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -\cos\sec^2(u(x)).u'(x)$

e) $f(x) = \sec(u(x)) \Rightarrow f'(x) = tg(u(x)).\sec(u(x)).u'(x)$

f) $f(x) = \cos\sec(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -ctg(u(x)).\cos\sec(u(x)).u'(x)$

Exemplo: calcule a derivada de $f(x) = \sec(x^2 - 3x)$.

Solução:

$$f'(x) = tg(x^2 - 3x) \cdot \sec(x^2 - 3x) \cdot (2x - 3x)$$

3.3 DERIVADAS SUCESSIVAS

Na definição 2 definimos a função derivada primeira, caso $f' : A \to R$ seja derivável, define-se a sua derivada $f'' : X \to R$ por $f''(x) = (f')'(x)$, que é chamada função derivada segunda de f. Sucessivamente, temos que $f^n(x)$ para $n \in N$, é a função derivada n-ésima de f.

Exemplo: calcule a derivada terceira de $f(x) = 7x^8 - 2x^2 - x$.

Solução:

$f'(x) = 56x^7 - 4x - 1$

$f''(x) = 392x^6 - 4$

$f'''(x) = 2352x^5$

4. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Algumas funções apresentam comportamento irregular. Elas crescem até um determinado valor (ponto máximo), e em seguida decrescem até um outro (ponto mínimo), voltando a crescer. Esses pontos constituem agora o foco da nossa análise.

Definição 1 - Seja $f : X \to R$ uma função. Dizemos que f tem um máximo absoluto num ponto $c \in X$ quando $f(x) \leq f(c), \forall x \in X$.

Definição 2 - Seja $f : X \to R$ uma função. Dizemos que f tem um mínimo absoluto num ponto $c \in X$ quando $f(c) \leq f(x), \forall x \in X$.

Definição 3 - Seja $f : X \to R$ uma função. Dizemos que f tem um máximo local (ou relativo) num ponto $c \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in X \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Definição 4 - Seja $f : X \to R$ uma função. Dizemos que f tem um mínimo local (ou relativo) num ponto $c \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \leq f(x), \forall x \in X \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Na figura 2 mostra-se o comportamento de uma função f no intervalo $[0,+\infty]$.Note que $f(a)$ é maior que qualquer outro vizinho, ou seja, $f(x) \leq f(a), \forall x$, logo $f(a)$ máximo absoluto de ; $f(a)$ é o ponto mais baixo de f, ou seja, $f(b) \leq f(x), \forall x$, é o ponto mínimo absoluto. E os pontos $(c, f(c))$ e $(d, f(d))$ são pontos máximo e mínimo locais, respectivamente.

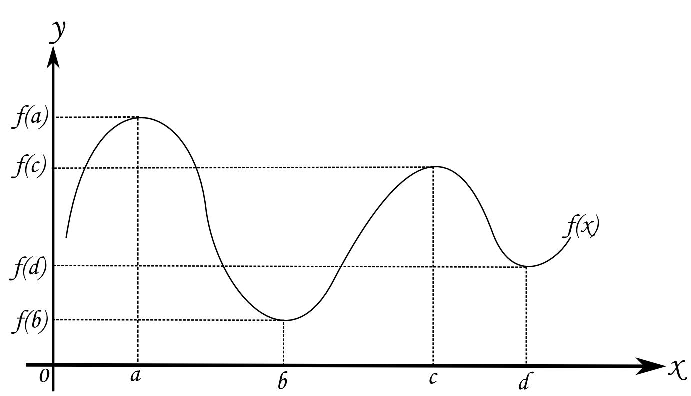

Figura 2

Teorema 1 – Seja $f:(a,b)\to R$ uma função e $c\in(a,b)$ um ponto de máximo (ou mínimo) local para f. Se f for derivável no ponto c, então $f'(c)=0.$

Demonstração:

Seja c um ponto de máximo local para f. Então existe $\delta>0$ tal que

$f(x)\le f(c)$ ou $f(x)-f(c)\le 0$

Para todo $x\in(c-\delta,c+\delta).$ Logo, para todo $x\in(c,c+\delta)$, temos

$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$, o que fornece $f'(c^{+})=\lim\limits_{x\to c^{+}}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0;$ e

Para todo $x\in(c-\delta,c+\delta)$ temos $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0,$ o que garante

$f'(c^{-})=\lim\limits_{x\to c^{-}}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0.$ Sendo f derivável, devemos ter então

$f'(c^{-})=f'(c^{-})=f'(c^{+})=0,$ o que conclui a demonstração.

Para o ponto mínimo local a demonstração é análoga.

Teorema 2 - Suponhamos que $f:(a,b)\to R$ seja derivável com $f'(c)=0$ para algum ponto $c\in(a,b).$ Se existe $f''(c),$ então:

a) $f''(c)<0\Rightarrow c$ é ponto máximo local para f;

b) $f''(c)>0\Rightarrow c$ é ponto mínimo local para f.

5. ESTRATÉGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Passo 1. Compreendendo o Problema. Leia o problema atentamente. Identifique as informações necessárias para resolvê-lo. O que é desconhecido? O que é dado? O que é pedido?

Passo 2. Desenvolva um Modelo Matemático para o Problema. Desenhe figuras e indique as partes que são importantes para o problema. Introduza uma variável para representar a quantidade a ser maximizada ou minimizada. Utilizando essa variável, escreva uma função cujo valor extremo forneça a informação pedida.

Passo 3. Determine o Domínio da Função. Determine quais valores da variável tem sentido no problema. Se possível, esboce o gráfico da função.

Passo 4. Identifique os Pontos Críticos e as Extremidades. Determine onde a derivada é zero ou não existe. Utilize aquilo que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função e sobre a física do problema. Use a primeira e a segunda derivada para identificar e classificar pontos críticos (onde $f' = 0$ ou não existe).

Passo 5. Interprete a Solução. Traduza seu resultado matemático de volta para a linguagem original do problema e decida se o resultado tem sentido ou não. (FINNEY, 2002, p.275).

Essa estratégia vai nos dar uma direção de aplicar o que estudamos até então, para a resolução dos exemplos do próximo capítulo.

6. APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

6.1 GEOMETRIA PLANA

6.1.1 RETÂNGULO

Exemplo 1 - Entre todos os retângulos inscritos em um círculo de raio R, o de área maior é o quadrado de lado $R\sqrt{2}$.

Seja x a base e y a altura do retângulo inscrito em uma circunferência de raio R, conforme a Figura 3. Calculando a área do retângulo temos:

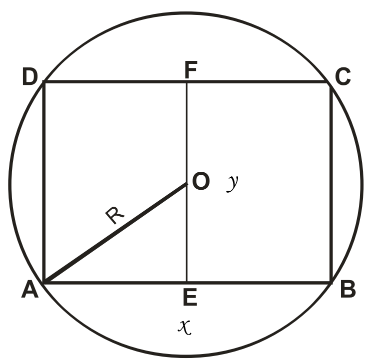

Figura 3

$$A_{retângulo} = x.y \quad \text{mas, } R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

$$A_{\text{Re}\,tângulo} = x\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Sendo assim, vamos encontrar o máximo para a função $A(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, cujo a derivada é:

$$A'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + \frac{1}{2}(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x).x$$

$$A'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Fazendo $A'(x) = 0$, temos:

$$\sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0$$

$$\sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

$$4R^2 - x^2 = x^2$$

$$x = R\sqrt{2}$$

Agora, vamos verificar se esse ponto é máximo ou mínimo. Para isso vamos derivar novamente:

$$A''(x) = \frac{-x(4R^2 - x^2) - 8R^2x + x^3}{\sqrt{4R^2 - x^2}(4R^2 - x^2)}$$

$$A''(x) = \frac{-12R^2x + 2x^3}{\sqrt{4R^2 - x^2}(4R^2 - x^2)}$$

$$A''(x) = \frac{-12R^2(R\sqrt{2}) + 2(R\sqrt{2})^3}{\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}(4R^2 - (R\sqrt{2})^2)}$$

$$A''(R\sqrt{2}) = -4 < 0$$

Como a derivada a segunda em $x = R\sqrt{2}$ é negativa, o Teorema 2 de Máximos e Mínimos garante que é máximo, e

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}$$

$$y = R\sqrt{2}$$

Portanto, os lados do retângulo são $x = y = r\sqrt{2}$, o que prova a demonstração.

Exemplo 2 - Entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado.

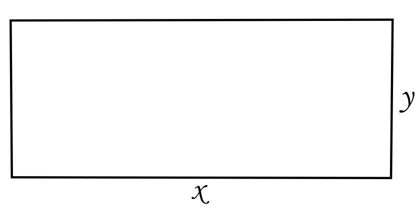

Figura 4

Na figura 4, tomando x, y e P como comprimento, largura e perímetro, respectivamente do quadrado:

Temos as relações:

$A = x \cdot y$ e $P = 2x + 2y$

Ora, $y = \dfrac{P - 2x}{2}$ substituindo em A:

$$A = x \cdot \frac{P - 2x}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{Px - 2x^2}{2}$$

Fazendo $A'(x) = 0$,

$$A'(x) = \frac{P - 4x}{2}$$

O ponto crítico será:

$$\frac{Px - 4x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$$

Vamos verificar se o ponto crítico em questão é máximo, derivando novamente:

$A''\left(\dfrac{P}{4}\right) = -2,$ logo $x = \dfrac{P}{4}$ é máximo e

$$y = \frac{P - 2x}{2}$$

$$y = \frac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2}$$

$$y = \frac{P}{4}.$$

Exemplo 3 - Vamos obter o retângulo de área máxima, inscrito em um dado triângulo, ΔABC.

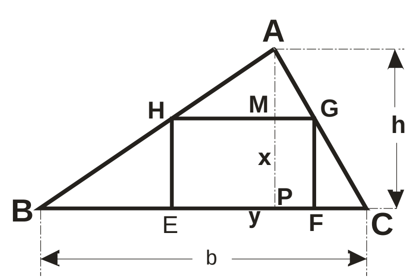

Figura 5

Na figura 5, y a base do retângulo e x a altura.

Então $A = xy$. Ora, $\frac{HG}{BC} = \frac{AM}{AP}$ ou $y = \frac{b}{h}(h - x)$. Assim $A = x \cdot \frac{b}{h}(h - x)$, o que devemos achar as derivadas da função:

$A(x) = bx - \frac{b}{h}x^2$

Logo,

$A'(x) = b - \frac{2b}{h}x$ e $A''(x) = -\frac{2b}{h}$

O ponto crítico será $b - \frac{2bx}{h} = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{2}$. Como a derivada segunda é negativa, temos um máximo e

$$y = \frac{b}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{b}{2}$$

Portanto o retângulo de área máxima será o retângulo de lados $\frac{h}{2}, \frac{b}{2}$ e área $A = \frac{bh}{4}$

6.1.2 TRAPÉZIO

Exemplo 1 - Obter o trapézio isósceles, de área máxima, inscrito em um semicírculo dado, e tendo o diâmetro como base maior.

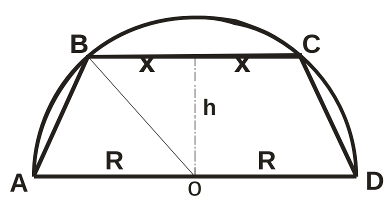

Figura 6

Observando a figura 6 ao lado, temos a base menor $b = 2x$, a base maior $B = 2R$ e a altura $h = \sqrt{R^2 - x^2}$,obtida pelo teorema de Pitágoras.

A área do trapézio $ABCD$ é:

$$A = \frac{(2R-2x)}{2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow A(x) = (R+x) \cdot \sqrt{R^2 - x}$$

Derivando:

$$A'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \cdot (x+R)$$

$$A'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2 + Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = -\frac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Os pontos críticos serão:

$-\dfrac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$. Basta portanto, encontrar as raízes da equação $2x^2 + Rx - R^2 = 0$, que são $x' = -R$ e $x'' = \dfrac{R}{2}$. Como não faz sentido a primeira raiz, x', vamos verificar a segunda:

$$A''(x) = \frac{(4x+R) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \cdot (2x^2 + Rx - R^2)}{R^2 - x^2}$$

$$A''(x) = \frac{\dfrac{(4x+R) \cdot (R^2 - x^2) + 2x^3 + Rx^2 - R^2 x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2}$$

$A''(x) = -\dfrac{3R^2 x - 2x^3 + R^3}{(R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}$, substituindo $x = \dfrac{R}{2}$:

$A''\left(\dfrac{R}{2}\right) = -\dfrac{3R^2 \cdot \frac{R}{2} - 2 \cdot \frac{R^3}{8} + R^3}{\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} \Rightarrow A''\left(\dfrac{R}{2}\right) = -2\sqrt{3} < 0$, logo é máximo

Portanto, o trapézio isósceles de área máxima terá a base maior duas vezes a base menor.

6.1.3 TRIÂNGULO

Exemplo 1 - Vamos obter qual entre todos os triângulos retângulos de mesma hipotenusa a tem a maior área.

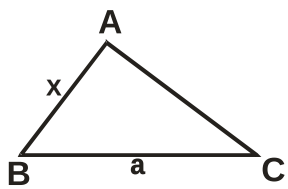

Figura 7

Na figura 7, seja a, a hipotenusa do triângulo retângulo, e x um dos catetos. Pelo teorema de Pitágoras temos que o outro cateto vale, $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Assim temos que, $A_{triângulo} = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$ o que devemos achar o valor máximo da função $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

Sendo,

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x).x$$

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Fazendo $f'(x) = 0$

$$\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a^2 - x^2 = x^2$$

$$a^2 - 2x^2 = 0$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Calculando a derivada de 2ª ordem, temos:

$$f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)(a^2 - 2x^2)}{a^2 - x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-3a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2 - x}^{2}\,(a^2 - x^2)}$$

Vamos verificar se o ponto crítico é máximo:

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-3a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)-2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}\left(a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}$$

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\frac{-3a^3\sqrt{2}}{2}-\frac{4a^3\sqrt{2}}{8}}{\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}\left(a^2-\frac{2a^2}{4}\right)}$$

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-a^3\sqrt{2}}{\frac{a^3}{2\sqrt{2}}}$$

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=-8<0$$

Assim, o outro cateto também será $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, pois

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}\Rightarrow\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}\Rightarrow\sqrt{\frac{a^2}{2}}\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o triângulo é isósceles e

$$A_{Triângulo}=\frac{1}{2}x.y$$

$$A_{Triângulo}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{Triângulo}=\frac{a^2}{4}$$

Agora, ao invés de considerarmos a mesma hipotenusa, vamos considerar o perímetro.

Exemplo 2 - Obter qual entre todos os triângulos retângulos com o mesmo perímetro $2p$ tem maior área.

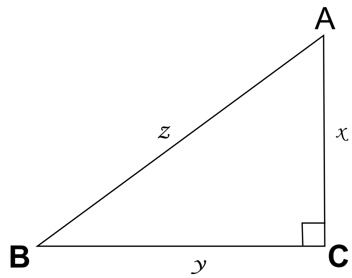

Figura 8

Na figura 8, tomando x e y para os catetos, e $z=\sqrt{x^2+y^2}$ para hipotenusa, figura 8, e o perímetro $2p=x+y+z$.

Substituindo $z=2p-x-y$ em $z=\sqrt{x^2+y^2}$, temos:

$$2p-x-y=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(2p-x-y)^2=x^2+y^2$$
$$4p^2-2px-2py-2px+x^2+xy+y^2=x^2+y^2$$
$$4p^2-4px-4py+2xy=0$$
$$2xy-4py=4px-4p^2$$
$$y(2x-4p)=4p(x-p)$$
$$y=\frac{4p(x-p)}{2(x-2p)}$$
$$y=\frac{2p(x-p)}{x-2p}$$

Substituindo o valor de y em $A_{Triângulo}=\frac{xy}{2}$, temos a função:

$$A(x)=\frac{x\left(\frac{2p(x-p)}{x-2p}\right)}{2}.$$

$$A(x)=\frac{px^2-p^2x}{x-2p}$$

Calculando $A'(x)$ temos:

$$A'(x)=\frac{(2px-p^2)(x-2p)-(px^2-p^2x)}{(x-2p)^2}$$

$$A'(x)=\frac{2px^2-4p^2x-p^2x+2p^3-px^2+p^2x}{(x-2p)^2}$$

$$A'(x) = \frac{px^2 - 4p^2x + 2p^3}{(x-2p)^2}$$

Fazendo $A'(x) = 0$:

$$\frac{px^2 - 4p^2x + 2p^3}{(x-2p)^2} = 0 \Rightarrow px^2 - 4p^2x + 2p^3 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = (2-\sqrt{2})p$ e $x_2 = (2+\sqrt{2})p$, são os pontos críticos de $A(x)$, agora vamos verificar qual deles é o máximo. Derivando novamente:

$$A''(x) = \frac{(2px - 4p^2)(x-2p)^2 - 2(x-2p)(px^2 - 4p^2x + 2p^3)}{(x-2p)^4}$$

$$A''(x) = \frac{(x-2p)\left[(2px-4p^2)(x-2p) - 2px^2 + 8p^2x - 4p^3\right]}{(x-2p)^4}$$

$$A''(x) = \frac{2px^2 - 4p^2x - 4p^2x + 8p^3 - 2px^2 + 8p^2x - 4p^3}{(x-2p)^3}$$

$$A''(x) = \frac{4p^3}{(x-2p)^3}$$

Substituindo x_1 temos:

$$A''((2-\sqrt{2})p) = \frac{4p^3}{(2p - p\sqrt{2} - 2p)^3} \Rightarrow \frac{4p^3}{-2p^3\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\sqrt{2} < 0$$

E para x_2:

$$A''((2+\sqrt{2})p) = \frac{4p^3}{(2p + p\sqrt{2} - 2p)^3} \Rightarrow \frac{4p^3}{2p^3\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} > 0$$

Assim, temos que x_1 é o máximo, e finalmente, os outros lados do triângulo são:

$$y((2-\sqrt{2})p) = \frac{2p((2-\sqrt{2})p - p)}{(2-\sqrt{2})p - 2p}$$

$$y((2-\sqrt{2})p) = -\frac{2p(p - p\sqrt{2})}{p\sqrt{2}}$$

$$y((2-\sqrt{2})p) = (2-\sqrt{2})p$$

$$x + y + z = 2p$$

$$(2-\sqrt{2})p + (2-\sqrt{2})p + z = 2p$$

$$2p - p\sqrt{2} + 2p - p\sqrt{2} + z = 2p$$

$$z = 2p\sqrt{2} - 2p$$

$$z = (\sqrt{2} - 1)2p$$

Portanto, o triângulo de maior área é um triângulo isósceles de lados $x = y = (2-\sqrt{2})p$ e $z = (\sqrt{2}-1)2p$.

Exemplo 3 – Obter o triângulo retângulo dentre todos com a mesma base b e perímetro $2p$ o de área máxima.

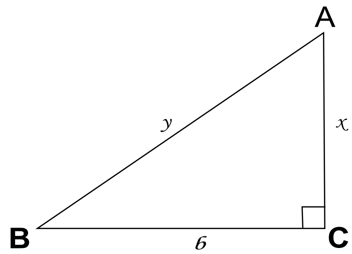

Figura 9

Seja o triângulo ΔABC, de lados x, y e base b. O seu perímetro é dado por $2p = x + y + b$ e pela formula de Herão, sua área será:

$$A(x,y) = \sqrt{p(p-b)(p-x)(p-y)}$$

Isolando y na primeira relação e substituindo na segunda, temos:

$$A(x) = \sqrt{p(p-b)(p-x)(p-2p+x+b)}$$

$A(x) = \sqrt{p(p-b)} \cdot \sqrt{(p-x)(x+b-p)}$, vamos chamar $k = \sqrt{p(p-b)}$, para facilitar nossos cálculos. Agora vamos achar o ponto crítico e verificar se é máximo:

$$A(x) = k\sqrt{(p-x)(x+b-p)}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot k\left[(p-x)(x+b-p)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[-1.(x+b-p) + (p-x)\right]$$

$$A'(x) = \frac{k}{2} \cdot \frac{2p-2x-b}{\sqrt{(p-x)(x+b-p)}}$$

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{2p-2x-b}{\sqrt{(p-x)(x+b-p)}} = 0 \Rightarrow 2p-2x-b = 0 \Rightarrow 2x = 2p-b \Rightarrow x = \frac{2p-b}{2}$$

$$A''(x) = \frac{k}{2}\left[\frac{-2\sqrt{(p-x)(x+b-p)} - \frac{1}{2}\left[(p-x)(x+b-p)\right]^{-\frac{1}{2}}(2p-b-2x)(2p-b-2x)}{(p-x)(x+b-p)}\right]$$

$A''(x) = \dfrac{k}{4}\left[\dfrac{p^2}{\sqrt{(p-x)(x+b-p)} \cdot (p-x)(x+b-p)}\right]$, substituindo $x = \dfrac{2p-b}{2}$ em $A''(x)$, obtemos:

$A''\left(\dfrac{2p-b}{2}\right) = -\dfrac{2kp^2}{b^3} < 0$, logo é máximo, e

$$y = 2p - x - b$$

$$y = 2p - \frac{2p-b}{2} - b$$

$$y = \frac{2p-b}{2}$$

Portanto, o triângulo é isósceles de lados $\frac{2p-b}{2}, \frac{2p-b}{2}$ e b.

Exemplo 3 - Entre todos os triângulos retângulos com o mesmo perímetro p, qual é o de menor hipotenusa?

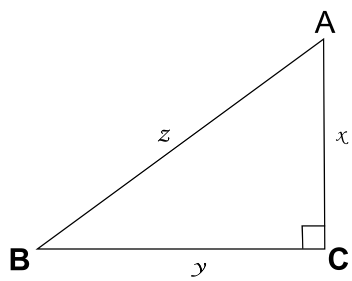

Figura 10

Sejam z, x e y, Figura 10, a hipotenusa e os catetos, do Triângulo ΔABC, temos as seguintes relações:

$z^2 = x^2 + y^2$ e $p = x + y + z \Rightarrow y = p - x - z$, o qual vamos substituir na primeira relação.

$$(p - x - y)^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = x^2 + p^2 - px - pz - px + x^2 + xz - pz + xz + z^2$$

$$2pz - 2xz = 2x^2 + p^2 - 2px$$

$$z(2p - 2x) = 2x^2 - 2px + p^2$$

$$z = \frac{2x^2 - 2px + p^2}{2(p - x)}$$

$$z = \frac{x^2 - px + \frac{1}{2}p^2}{p - x}$$

Agora vamos derivar a função $z(x) = \dfrac{x^2 - px + \frac{1}{2}p^2}{p - x}$, para encontrar o ponto mínimo:

$$z'(x) = \frac{(2x - p)(p - x) - (-1)(x^2 - px + \frac{1}{2}p^2)}{(p - x)^2}$$

$$z'(x) = \frac{2px - 2x^2 - p^2 + px + x^2 - px + \frac{1}{2}p^2}{(p-x)^2}$$

$$z'(x) = -\frac{x^2 - 2px - \frac{1}{2}p^2}{(p-x)^2}$$

fazendo $z'(x) = 0$, temos:

$$-\frac{x^2 - 2px + \frac{1}{2}p^2}{(p-x)^2} = 0$$

de onde retem:

$$x_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p \text{ e } x_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p.$$

Derivando novamente,

$$z''(x) = -\frac{(2x-2p)(p-x)^2 - p(p-x)(-1)(x^2 - 2px + \frac{1}{2}p^2)}{(p-x)^4}$$

$$z''(x) = -(p-x)\frac{\left[(2x-2p)(p-x) + 2x^2 - 4px + p^2\right]}{(p-x)^4}$$

$$z''(x) = -\frac{2px - 2x^2 - 2p^2 + 2px + 2x^2 - 4px + p^2}{(p-x)^3}$$

$$z''(x) = -\frac{-p^2}{(p-x)^3} \Rightarrow z''(x) = \frac{p^2}{(p-x)^3}$$

Substituindo x_1 e x_2 em $z''(x)$, temos:

$$z''(x_1) \Rightarrow z''\left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right) = \frac{p^2}{\left(p - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)^3} \Rightarrow \frac{p^2}{\left(-\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)^3} \Rightarrow \frac{p^2}{-\frac{2p^3\sqrt{2}}{8}} \Rightarrow -\frac{4}{p\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{p} < 0$$

$$z''(x_2) \Rightarrow z''\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right) = \frac{p^2}{\left(p - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)^3} \Rightarrow \frac{p^2}{\left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)^3} \Rightarrow \frac{p^2}{\frac{2p^3\sqrt{2}}{8}} \Rightarrow \frac{4}{p\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right) = \frac{2\sqrt{2}}{p} > 0$$

Sendo assim, x_2 é o mínimo de $z(x)$.

Logo,

$$z\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)=\frac{\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)^2-p\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)+\frac{1}{2}p^2}{p-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p}$$

$$z\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)=\frac{p^2-\frac{2p^2\sqrt{2}}{2}+\frac{2p^2}{4}-p^2+\frac{p^2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}p^2}{p-p+\frac{p\sqrt{2}}{2}}$$

$$z\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)=\frac{2p^2}{p\sqrt{2}}\Rightarrow z\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p\right)=p\sqrt{2}$$

Portanto, o triângulo será o de hipotenusa $p\sqrt{2}$. Mas não será isósceles como nos exemplos anteriores.

Exemplo 4 - Entre todos os triângulos isósceles, inscritos em um círculo de raio dado, obter o de área máxima.

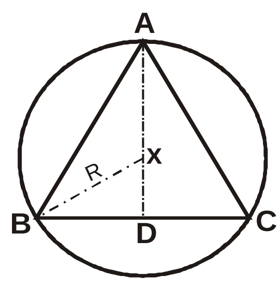

Figura 11

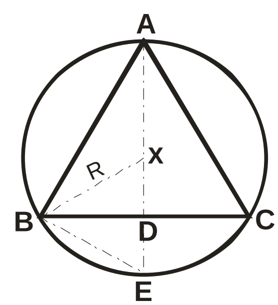

Figura 12

Seja o triângulo ABC isósceles inscrito no círculo de Raio R e x sua altura (Figura 11). A área do triângulo será $A=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{2}$, mas $\frac{\overline{BC}}{2}=\overline{BD}$, Daí $A=\overline{AD}\cdot\overline{BD}$.

Note que o segmento $\overline{BD}$ de acordo com as relações métricas no triângulo retângulo (Figura 12) tem por expressão $\overline{BD}^2=x(2R-x)$ e a área do triângulo será $A=x\sqrt{x(2R-x)}$.

Assim devemos encontrar o valor máximo da função $A(x)=x\sqrt{x(2R-x)}$, derivando:

$$A'(x) = \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{1}{2}(2Rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2R - 2x)x$$

$$A'(x) = \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{Rx - x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{3Rx - 2x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

Note que para $x_1 = 0$ dará uma indeterminação, assim vamos verificar para $x_2 = \frac{3R}{2}$.

Derivando novamente:

$$A''(x) = \frac{(3R - 4x)\sqrt{2Rx - x^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(2Rx - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2R - 2x\right) \cdot \left(3Rx - 2x^2\right)}{2Rx - x^2}$$

$$A''(x) = \frac{\left(3R - 4x\right)\sqrt{2Rx - x^2} - \frac{\left(R - x\right) \cdot \left(3Rx - 2x^2\right)}{\sqrt{2Rx - x^2}}}{2Rx - x^2}$$

$A''(x) = \dfrac{3R^2 x - 6Rx^2 + 2x^3}{\left(2Rx - x^2\right)\sqrt{2Rx - x^2}}$, substituindo

$$A''\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R^2\left(\frac{3R}{2}\right) - 6R\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3R}{2}\right)^3}{\left(2R \cdot \frac{3R}{2} - \left(\frac{3R}{2}\right)^2\right)\sqrt{2R\left(\frac{3R}{2}\right) - \left(\frac{3R}{2}\right)^2}}$$

$$A''\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{\frac{9R^3}{2} - \frac{27R^3}{2} + \frac{27R^3}{4}}{\left(3R^2 - \frac{9R^2}{4}\right)\sqrt{3R^2 - \frac{9R^2}{4}}}$$

$$A''(x) = \frac{-\frac{9R^3}{4}}{\frac{3R^2}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}} = -\frac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$$

Portanto, o triângulo isósceles de área máxima será o de altura $x = \frac{3R}{2}$ e sua área é

$$A = x\sqrt{x\left(2R - x\right)} \Rightarrow \frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3R}{2}\left(2R - \frac{3R}{2}\right)} \Rightarrow \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

6.2 GEOMETRIA ESPACIAL

6.2.1 PARELELEPÍPEDO

Exemplo 1- Dado um quadrado de lado a. Tirar nos quatro vértices um quadrado de lado x, de modo que o volume do sólido formado seja máximo.

Dada a Figura 13 temos que a expressão do volume é:

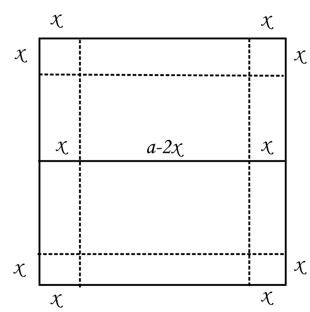

Figura 13

$V(x) = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x$

$V(x) = (a - 2x)^2 x$

Derivando:

$V'(x) = 2(a - 2x) \cdot (-2) \cdot x + 1 \cdot (a - 2x)^2$

$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$

Os pontos críticos são:

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$

$x_1 = \dfrac{a}{2}$ e $x_2 = \dfrac{a}{6}$

Derivando novamente:

$V''(x) = 24x - 8ax$

Para $x_1 = \dfrac{a}{2}$, temos $V''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 8a > 0$ (mínimo)

Para $x_2 = \dfrac{a}{6}$, temos $V''\left(\dfrac{a}{6}\right) = -4a < 0$ (máximo)

Portanto, obtemos o paralelepípedo de volume máximo, tomando $x = \dfrac{a}{6}$.

6.2.2 CILINDRO

Exemplo 1 - Vamos obter os cilindros inscritos em uma esfera de raio R, de área lateral máxima e o de volume máximo.

Considere as Figuras 14 e 15.

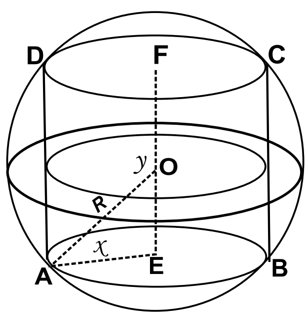

Figura 14

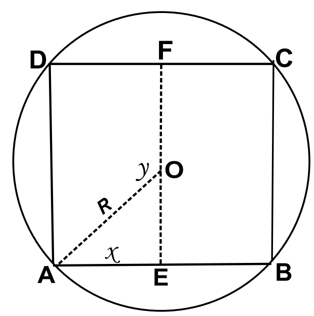

Figura 15

Seja $\overline{AE} = x$ o raio da base do cilindro e $\overline{EF} = y$ a altura do cilindro temos as expressões:

$A = 2\pi xy$ e $V = \pi x^2 y$

Ora $\overline{EF} = 2\overline{OF}$ e $R^2 = x^2 + \overline{OF}^2 \Rightarrow \overline{OF} = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

Assim, temos as funções:

$A(x) = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$ e $V(x) = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$

a) Área lateral máxima

$$A(x) = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\text{ , derivando:}$$

$$A'(x) = 4\pi\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right)\cdot 4\pi x$$

$$A'(x) = \frac{4\pi R^2 - 8\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Igualando a zero:

$$\frac{4\pi R^2 - 8\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

$$4\pi R^2 - 8\pi x^2 = 0$$

$$x = \pm\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

A derivada a segunda é

$$A''(x) = \frac{-12\pi R^2 x + 8\pi x^3}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}} \text{ e } A''\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = -16\pi < 0 \text{ (máximo)}$$

Então:

$$y = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$y = R\sqrt{2}$$

Sendo a altura do cilindro igual a $R\sqrt{2}$ e o diâmetro $d = 2\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

Concluímos que o cilindro de maior área lateral inscrito em uma esfera será um cilindro equilátero.

b) Cilindro de volume máximo

$$V(x) = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2} \text{ , derivando:}$$

$$V'(x) = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2\pi x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$V'(x) = \frac{4\pi R^2 x - 6\pi x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Igualando a zero:

$\frac{4\pi R^2 x - 6\pi x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$, tendo as raízes $x_1 = 0, x_2 = -R\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $x_3 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Como x_1 e x_2 não fazem sentido vamos verificar x_3.

A derivada a segunda é

$$V''(x) = \frac{4\pi R^4 - 18\pi R^2 x^2 + 12\pi x^4}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Sendo

$$V''\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -132\pi\sqrt{3}R < 0 \text{ (máximo)}$$

Portanto, o cilindro de volume máximo será o de raio $x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ e altura

$$y = 2\sqrt{R^2 - \left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Exemplo 2 - Temos um cilindro circular reto inscrito em um cone, vamos obter o cilindro de área lateral máxima e o de volume máximo.

Na figura 16, x e y correspondem ao raio e altura do cilindro, respectivamente, R e $h = \overline{OA}$ são o raio e a altura do cone, nesta ordem.

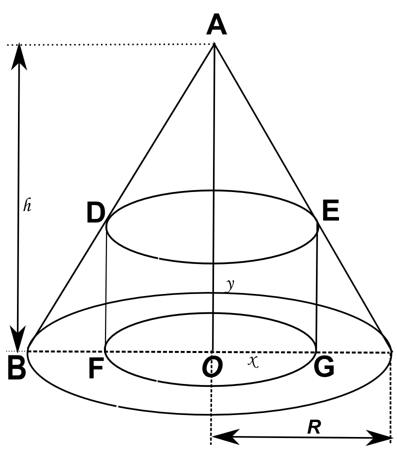

Figura 16

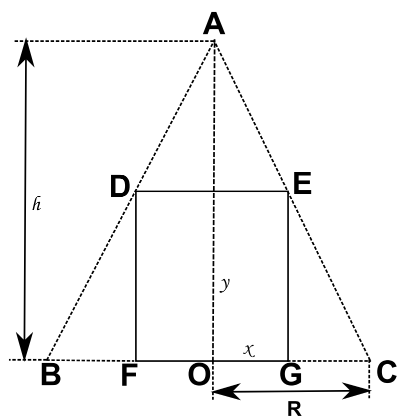

Figura 17

A Figura 17 corresponde ao plano que passa pelo centro do cone.

a) Área lateral máxima:

A expressão da área é:

$A = 2\pi xy$

Mas note que, pela figura 17 os triângulos ΔAOC e ΔEGC são semelhantes, então:

$$\frac{y}{h}=\frac{R-x}{R}\Rightarrow y=\frac{h}{R}(R-x)$$

$$A(x)=\frac{2\pi h}{R}x(R-x)\text{, derivando:}$$

$$A'(x)=\frac{2\pi h}{R}(R-2x)$$

$$\frac{2\pi h}{R}(R-2x)=0$$

$$x=\frac{R}{2}\text{ (ponto crítico)}$$

Como,

$$A''(x)=-\frac{4\pi h}{R}\Rightarrow A''\left(\frac{R}{2}\right)=-\frac{4\pi h}{R}<0\text{ (máximo)}$$

Portanto, o cilindro de área lateral máxima tem dimensões:

$$x=\frac{R}{2}\text{ e } y=\frac{h}{R}\left(R-\frac{R}{2}\right)\Rightarrow y=\frac{h}{2}$$

b) Volume máximo

A expressão do volume é $V=\pi x^2 y$

Pela semelhança de triângulos, a expressão vai ficar:

$$V=\frac{h\pi}{R}\left(Rx^2-x^3\right)$$

Derivando a função $V(x)=\frac{h\pi}{R}\left(Rx^2-x^3\right)$:

$$V'(x)=\frac{h\pi}{R}\left(2Rx-3x^2\right)$$

As raízes da equação $\frac{h\pi}{R}\left(2Rx-3x^2\right)=0$ são $x_1=0$ e $x_2=\frac{2}{3}R$

Sendo

$$V''(x)=\frac{h\pi}{R}(2R-6x)\text{ e } V''\left(\frac{2}{3}R\right)=-2h\pi<0\text{ (máximo)}$$

A altura será:

$$y = \frac{h}{R}\left(R - \frac{2}{3}R\right) \Rightarrow y = \frac{h}{3}$$

Portanto, a altura do cilindro será $\frac{1}{3}$ da altura do cone.

Exemplo 3 - Dado o cilindro circular reto, obter o cone circunscrito de volume mínimo.

Neste exemplo vamos inverter as variáveis para melhor definir a função que representa o volume.

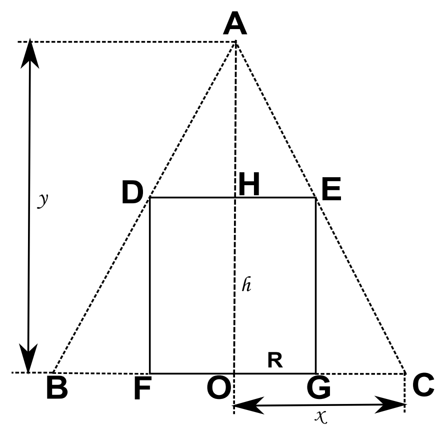

Figura 18

Na Figura 18, h e R correspondem a altura e o raio da base do cilindro respectivamente, e sejam x e y o raio e a altura do cone circunscrito, Temos:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Note que os triângulos ΔAOC e ΔAHE são semelhantes, então:

$$\frac{y}{y-h} = \frac{x}{R} \Rightarrow y = \frac{hx}{x-R}$$

Substituindo na expressão do volume, temos:

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{x^3}{x-R}$$

Vamos procurar o mínimo da função $V(x) = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{x^3}{x-R}$:

$$V'(x) = \frac{\pi h}{3} \cdot \left[\frac{3x^2(x-R) - 1.x^3}{(x-R)^2}\right]$$

$$V'(x)=\frac{\pi h}{3}\cdot\left[\frac{2x^3-3Rx^2}{(x-R)^2}\right]$$

$$\frac{2x^3-3Rx^2}{(x-R)^2}=0\Rightarrow x_1=0, x_2=0 \text{ e } x_3=\frac{3R}{2}.$$

Derivando novamente:

$$V''(x)=\frac{\pi h}{3}\cdot\left[\frac{(6x^2-6Rx)(x-R)^2-2(x-R)(1)(2x^3-3Rx^2)}{(x-R)^4}\right]$$

$$V''(x)=\frac{\pi h}{3}\cdot\left[\frac{2x^3-6Rx^2+6R^2x}{(x-R)^3}\right]$$

Sendo

$V''\left(\frac{3R}{2}\right)=6\pi h<0$, logo é mínimo

Portanto, o cilindro de volume mínimo será o de raio $x=\frac{3R}{2}$ e altura

$$y=\frac{h\cdot\frac{3R}{2}}{\frac{3R}{2}-R}\Rightarrow y=3h$$

6.2.3 CONE

Exemplo 1 - Vamos obter o cone de revolução inscrito em uma esfera de raio R de área lateral máxima e volume máximo.

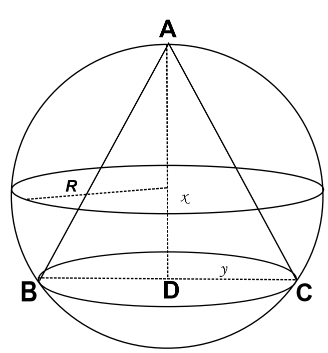

Figura 19

Com base na figura 19, sejam:

$x =$ altura do cone

$y =$ raio do cone

$g =$ geratriz do cone

a) Área lateral máxima

A área lateral do cone

$A = \pi y g$, onde g é a geratriz do cone

Da mesma forma que estudamos em um exemplo anterior de geometria plana, vimos que:

$\overline{BD}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DE}$

$y^2 = x(2R - x)$ e $g = \sqrt{x^2 + y^2}$

Substituindo na expressão da área do cone e derivando:

$A = \pi \sqrt{x(2R - x)} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow A(x) = \pi \sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}$

$A'(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \left[\dfrac{8R^2x - 6Rx^2}{\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}} \right]$, igualando a zero:

$\dfrac{\pi}{2} \cdot \left[\dfrac{8R^2x - 6Rx^2}{\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}} \right] = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = \dfrac{4}{3}R$

Como a derivada a segunda é:

$A''(x) = \dfrac{9R^2x - 16R^3}{(4R^2 - 2Rx)\sqrt{4R^2 - 2Rx}}$ e $A''\left(\dfrac{4}{3}R\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0$ (máximo)

Portanto, será o cone de altura igual $\dfrac{4}{3}R$.

b) Volume máximo

Sabemos que a expressão do volume é $V = \dfrac{1}{3}\pi y^2 x$ e como:

$\overline{BD}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DE}$

$y^2 = x(2R - x)$. Assim:

$V(x) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(2Rx^2 - x^3\right)$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\left(4Rx - 3x^2\right)$$

Igualando a zero:

$\frac{1}{3}\pi\left(4Rx - 3x^2\right) = 0$ as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{4}{3}R$ que são os pontos críticos.

Derivando novamente:

$$V''(x) = \frac{1}{3}\pi\left(4R - 6x\right)$$

E sendo

$$V''\left(\frac{4}{3}R\right) = -\frac{4}{3}\pi R < 0 \,(\text{máximo})$$

O raio será:

$$y^2 = \frac{4}{3}R\left(2R - \frac{4}{3}R\right)$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

Portando, o cone de volume máximo será o de altura $x = \frac{4}{3}R$ e raio $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com todos estes exemplos selecionados e resolvidos neste trabalho, acreditamos que o estudo do Cálculo não pode nem deve se prender apenas a definições, demonstrações e obtenção de resultados através do uso de fórmulas. Evidente que tais etapas tem a sua relevância, no entanto, sabemos perfeitamente, embora não nos seja mostrado em sala de aula, que o Cálculo através das suas técnicas, está exageradamente ligado ao ambiente que está a nossa volta. Está presente em grande parte das áreas de conhecimento. Suas aplicações envolvem tomadas de decisões e ajudam a mover a sociedade.

O aprendizado em Cálculo não se dá da mesma forma como ocorre na Aritmética, Álgebra ou Geometria. O Cálculo envolve as mesmas técnicas e habilidades necessárias a todos esses ramos da Matemática, mas cria outras, de alta precisão e em nível mais profundo.

Acreditamos que o hábito da leitura, estudar com regularidade, assistir com atenção as aulas, dentre outros, são atributos que contribuem sobre maneira para uma aprendizagem significativa, não só em Cálculo, mas em qualquer disciplina. No entanto, se aprender Cálculo não é tarefa tão, simples, ensinar, também não é.

Como citamos bem no início desse trabalho, um momento que consideramos importante se deu ao iniciarmos a resolução das atividades propostas e verificarmos com satisfação, um índice significativo de acertos nos resultados obtidos, o que nos deixa à vontade para afirmar que muitos e muitos outros poderiam ter sido resolvidos.

Evidente que suas resoluções não serão em muitas das vezes, tarefas tão simples e diretas, como talvez alguns dos leitores venham a interpretar diante das afirmações que aqui deixamos. Não é isso que queremos dizer. No entanto, não podemos deixar de falar daquilo que realmente vivenciamos durante esse estudo, que diga-se de passagem, foi desenvolvido entre quatro e seis meses, aproximadamente. Uma boa revisão em conteúdos que servem de suporte ao tema desenvolvido, o bom uso das definições e dos teoremas relativos ao estudo em tela, bem como a observação dos exemplos existentes, aliados à aspectos como a vontade, o esforço, o hábito de ler e estudar, a perseverança, dentre outros, são fatores que com certeza conduzirão ao sucesso na maioria das vezes.

Por fim, entendemos que a motivação que deve existir em um aluno ou em toda uma turma, deve existir primeiramente em quem ensina Cálculo, ou seja, no Professor.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAJORI, FLORIAN. Uma História da Matemática. V. único. Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2007.

EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática/ Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FINNEY, ROSS L. Cálculo de George B. Thomas Jr., volume 1/ Ross L. Finney, Maurice D. WEIR, Frank R. Giordano; tradução Paulo Boschcov. São Paulo. Addison Wesley, 2002.

KUHLKAMP, NILO. Cálculo 1. 3ª edição revisada e ampliada. Florianópolis: Editora da UFSC, 2006.

SERRÃO, A.N. Exercícios e problemas de álgebra para o ciclo colegial e exames vestibulares às escolas superiores. Vol.2, Rio de Janeiro: Ao livro técnico AS, 1970.