



**Universidade Estadual da Paraíba**  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

REGINALDO BORGES BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS**  
Ensino, história e conteúdo

Campina Grande/PB  
2010

REGINALDO BORGES BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS**  
Ensino, história e conteúdo

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para Obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Pedro Lúcio Barboza

Campina Grande/PB  
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

B238n      Barbosa, Reginaldo Borges.  
              Números complexos [manuscrito]: ensino, história e  
              conteúdo/ Reginaldo Borges Barbosa. – 2010.  
              43 f. : il.

              Digitado.  
              Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
              Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de  
              Ciências Tecnológicas, 2010.  
              “Orientação: Prof. Me. Pedro Lúcio Barboza,  
              Departamento de Matemática e Estatística”.

              1. Matemática – Ensino. 2. História da Matemática. 3.  
              Números Complexos.    I. Título.

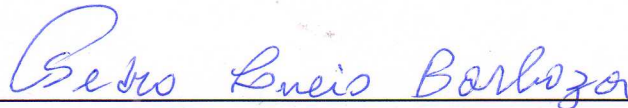
21. ed. CDD 510.7

REGINALDO BORGES BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS**  
Ensino, história e conteúdo

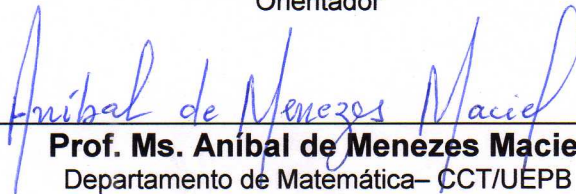
MONOGRAFIA APROVADA EM 10 DE DEZEMBRO DE 2010

BANCA EXAMINADORA:



---

**Prof. Ms. Pedro Lúcio Barboza**  
Departamento de Matemática- CCT/UEPB  
Orientador



---

**Prof. Ms. Aníbal de Menezes Maciel**  
Departamento de Matemática- CCT/UEPB  
Examinador



---

**Prof. Ms. Eduardo Andrade Veloso**  
Departamento de Computação- CCT/UEPB  
Examinador

Para meu avô, João Dionísio Gomes  
(In memoriam).

Para minha avó, Juvenete Borges Gomes.

Para meus irmãos, Referson Gomes Barbosa e Roney Allisson Gomes Barbosa.

Para Rosângela Bezerra Borges, de quem serei eterno cúmplice.

Para meus pais, Luciana Gomes Barbosa e Severino do Ramo Barbosa, para quem  
tenho muita gratidão pela confiança que creditaram a mim.

## AGRADECIMENTOS

À minha amiga e também colega de trabalho Vanderleide Rodrigues Lucena, pela sua disponibilidade para conversas sobre o ensino durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

Ao meu chefe imediato Vladimir Costa Chaves, coordenador da secretaria de agricultura de Campina Grande, que contribuiu para que eu pudesse ter tranquilidade na questão de tempo para produzir este trabalho.

Ao professor e orientador deste trabalho Pedro Lúcio Barboza, que aceitou me dar ajuda mesmo com as condições adversas que apresentei na ocasião do aceite.

*“Os números complexos seriam olhados com maior interesse e mais facilmente compreendidos se acompanhados do relato de como surgiram na prática...”*

**Gilberto Geraldo Garbi**

## RESUMO

Consiste este trabalho num estudo sobre os números complexos. No primeiro capítulo é realizada uma breve introdução a cerca dos números complexos, mostrando um pouco sobre como os professores (as) vêm ministrando as aulas sobre os referidos números. No segundo capítulo é tratado sobre o ensino de matemática, abordando alguns dos problemas que contribuem para o fraco desempenho dos alunos em matemática. Já no terceiro capítulo é feita uma abordagem histórica sobre os números complexos e também apresentada a bibliografia do matemático Carl Friedrich Gauss. Enquanto que no quarto capítulo é reservado ao estudo dos números complexos, sua definição e as operações na forma algébrica e na forma trigonométrica. E no quinto capítulo é discorrido sobre a aplicação dos números complexos na vida cotidiana, evidenciando a importância de apresentar aos alunos (as) de que forma são usados determinados assuntos de matemática estudados na escola. Finalizando com o sexto capítulo apresentando as considerações finais.

**PALAVRAS-CHAVE:** Números Complexos, Forma Algébrica e trigonométrica, Ensino de Matemática.



## **ABSTRACT**

This work consists of a study on the complex numbers. In the first chapter we provide a brief introduction to some of the complex numbers, showing a little about how teachers (as) they see teaching the classes on those numbers. The second chapter treatise on the teaching of mathematics, including some of the problems contributing to poor student performance in mathematics. In the third chapter is made a historical perspective on the complex numbers and also submitted a bibliography of the mathematician Carl Friedrich Gauss. While in the fourth chapter is reserved for the study of complex numbers, definitions, and operations in algebraic form and trigonometric forms. And in the fifth chapter is to discuss the application of complex numbers in everyday life, highlighting the importance of presenting the students (as) how are they used certain subjects studied math in school. Finally the sixth chapter presents the final considerations.

**KEY-WORDS:** Complex Numbers, Algebraic and trigonometric form, Mathematics Teaching.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	9
2 SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA .....	12
2.1 Práticas Pedagógicas do Ensino de Matemática .....	12
2.2 Alguns dos Problemas no Ensino de Matemática .....	15
3 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....	19
2.2 Desenvolvimento histórico dos Números Complexos .....	19
2.3 Bibliografia do Matemático Johann Carl Friedrich Gauss .....	23
4 NÚMEROS COMPLEXOS .....	25
4.1 Conjunto dos Números Complexos .....	25
4.2 A Unidade Imaginária .....	25
4.3 Número Complexo .....	25
4.4 Número Imaginário Puro e Número Real .....	26
4.5 Igualdade de Números Complexos .....	26
4.6 Números Complexos Conjugados .....	26
4.7 Operações na Forma Algébrica .....	27
4.8 As Potências de $i$ .....	29
4.9 Representação Cartesiana de um Número Complexo .....	30
4.10 Forma Trigonométrica ou Polar .....	32
4.11 Operações na Forma Trigonométrica .....	33
4.12 Equações Binômias e Trinômias .....	35
5 APLICAÇÃO DOS ASSUNTOS DE MATEMÁTICA NA VIDA COTIDIANA .....	37
5.1 Duas Matemáticas: a Escolar e a da Vida Cotidiana .....	37
5.2 Duas Aplicações dos Números Complexos .....	39
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	41
REFERÊNCIAS .....	42

## 1 INTRODUÇÃO

No 9º ano do ensino fundamental quando uma equação do 2º grau tem o discriminante menor do que zero diz-se que “a equação não admite raízes reais”, obviamente tal afirmação é correta. Erro mesmo acontece quando é dito que a equação do 2º grau não admite solução quando o discriminante é um número negativo. Falta, neste caso, a afirmativa “não tem solução no conjunto dos números reais”. É preciso prestar atenção a esses “detalhes”.

Em algum momento o professor diz que “não existe nenhum número inteiro que seja raiz de número inteiro negativo”. O problema que acontece é quando os estudantes interiorizam que “não existe raiz quadrada de número negativo” e mais tarde “descobrem” que existe sim, são os números complexos.

Mas é a partir do 3º ano do ensino médio que o conjunto dos números complexos é estudado. E, de início, surge um problema: como introduzir nas aulas o assunto conjunto dos números complexos?

Geralmente os professores de matemática iniciam os assuntos, principalmente no ensino médio, diretamente nas questões práticas, no conteúdo propriamente dito, não considerando, ou apenas falando brevemente, das questões históricas. Além disso, as aulas são extremamente expositivas, mecanizadas, transmitindo a idéia de uma matemática pronta e acabada e se tratando de números complexos, se as aulas não forem bem ministradas, esse conceito de matemática é fortalecido; isso porque se trata de um assunto bem afastado da realidade daqueles que não se identificam com a matemática.

Alguns assuntos necessitam de uma maior atenção nas questões históricas, seja para conquistar a atenção dos alunos, seja para que o assunto ganhe mais sentido; o conjunto dos números complexos, sem dúvidas, merece que se dê atenção ao seu desenvolvimento histórico e algumas de suas aplicações por esses dois motivos.

Os números complexos foram inventados para resolvermos as equações do segundo grau? Porque os números complexos também foram/são chamados de números imaginários? As respostas a essas perguntas devem ser respondidas fazendo um estudo histórico do desenvolvimento dos números complexos. Não se trata de transformar as aulas de matemática em aulas de história da matemática, mas sim de dar mais atenção a parte histórica da disciplina.

Os números complexos têm como característica a possibilidade de admitirem diferentes formas de representação: forma algébrica, forma de pares ordenados, forma de vetores, forma trigonométrica e forma matricial. Normalmente o dilema, para iniciar o estudo do assunto propriamente dito, fica entre: “apresentar inicialmente os números complexos como sendo “números da forma  $a + bi$  onde  $i^2 = -1$ ” ou “pares ordenados de números reais sujeitos a operações a serem definidas”? Na introdução do assunto a primeira forma tem prevalecido, até mesmo pela facilidade de demonstrar as propriedades dos complexos.

Os números complexos não são usados no cotidiano como os outros conjuntos; não podemos, por exemplo, medir o comprimento de um objeto usado no dia a dia com números complexos. Mas existem algumas medidas que são perfeitamente calculadas utilizando os números complexos, exemplo disso é o campo eletromagnético.

Não faz sentido o aprofundamento do estudo da aplicação dos números complexos quando o assunto é estudado no ensino médio, mas sem dúvidas é importante mostrar que tais números têm várias aplicações e são usados por físicos, engenheiros, químicos...

O problema da pequena aprendizagem dos alunos em matemática está relacionado a vários fatores, mas sem dúvidas quando os métodos pedagógicos são baseados em modelos do passado, no ensino tradicional, as aulas perdem muito em qualidade. O ensino tradicional não dá mais conta da necessidade atual de aprendizagem.

Qual a maneira mais eficiente de introduzir o ensino do conjunto dos números complexos? A relação entre história, aplicações e o conteúdo é uma alternativa as aulas que partem diretamente para o “vamos ver”.

É comum os professores iniciarem o estudo dos números complexos apresentando diretamente sua definição e logo depois as suas propriedades, ignorando a parte histórica e as suas aplicabilidades no mundo real; quando o faz, no máximo, no linguajar dos alunos e professores, é “dada uma pincelada na parte histórica e na aplicabilidade do assunto”.

Também é comum nos livros didáticos que a introdução dos números complexos, segundo Rosa (1998, p. 24), seja:

... como números do tipo  $a + bi$ , com  $a$  e  $b$  sendo números reais e  $i^2 = -1$ , em outros, é proposta a resolução de uma equação do 2º grau do tipo  $x^2 + 1 = 0$ , afirmando-se que a solução dessa equação é um número  $i$ , tal que  $x^2 = -1$ , em outros ainda, eles são definidos com pares ordenados  $(a, b)$ .

Mas para que os alunos possam compreender a importância do estudo do conjunto dos números complexos, é significativo que os professores mostrem como se deu o seu desenvolvimento histórico, assim como as suas aplicações.

Nos atuais livros didáticos de matemática observa-se certa melhoria na questão da história da matemática, mas da maneira como é apresentada fica a impressão da inclusão da história por mera formalidade ou para “não passar em branco”, ou seja, não é dado o devido valor.

Antes de buscar melhorias no ensino de qualquer disciplina, existe uma situação global que afeta diretamente a qualidade das aulas de qualquer conteúdo, são fatores que se não forem superados prejudicam não apenas as aulas de números complexos, mas o ensino como um todo. Quando se trata de conteúdos de matemática ensinados nas salas de aula, não se pode esquecer que existe outra questão para enfrentar: a situação do ensino como um todo. Mas a tentativa de melhorar a educação escolar e o ensino de matemática não significa esquecer os trabalhos elaborados para melhorar o conhecimento em determinados assuntos. A seguir, antes de adentrar no estudo dos números complexos, no seu aspecto histórico e “conteudístico”, iremos abordar um pouco sobre o ensino de matemática.

## 2. SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

### 2.1 Práticas Pedagógicas do Ensino de Matemática

Não é apenas nessa ou naquela disciplina do ensino básico que podemos perceber dificuldades que impedem avanços quanto ao acesso da população brasileira a conhecimentos essenciais. Além de questões que atingem a educação como um todo, cada disciplina escolar tem seus problemas próprios e no caso do ensino de matemática aflora a necessidade de soluções para superar dúvidas pedagógicas que insistem em existir nas salas de aulas das escolas brasileiras, além de causas materiais ligadas diretamente a falta de investimento na educação.

Nas escolas do nosso país encontramos no ensino de matemática situações insatisfatórias de toda natureza. É fato que constantemente surgem novas propostas de recursos didáticos na tentativa de promover melhorias no processo ensino/aprendizagem, no entanto, por diversos fatores, as práticas ditas tradicionais permanecem, fato mais evidenciado no ensino de matemática. Esses e outros fatores levam ao fracasso escolar em matemática. Sobre isso, Rodriguez (1993 apud CHAGAS, p. 242) diz que:

Ao longo dos anos, a causa deste fracasso tem sido atribuída aos alunos, o que levou os professores a procurarem diversas estratégias e alternativas metodológicas que motivassem e facilitassem a compreensão dos conteúdos. No entanto, esta procura tem provocado a conscientização da influência de uma base teórica para fundamentar a prática, pois ainda observamos professores de matemática com posturas e rigores científicos, supervalorizando a memorização de conceitos e, principalmente, o domínio de classe.

A situação de “mecanização da matemática” acarreta em aulas excessivamente expositivas dos conteúdos em detrimento de um pensar matemático de forma ampla e capaz de promover melhores condições para formação de cidadãos conscientes dos seus direitos e deveres numa sociedade que pretende ser democrática. Medeiros (1988, p. 13) já falava que:

Na situação tradicional de ensino da matemática, a ação prática tem ocupado lugar de primazia onde a filosofia, um pensar no que é essencial, não tem tido uma maior atenção.

Infelizmente tal situação sustenta-se até os dias de hoje e tudo indica que por mais alguns anos teremos “atraso pedagógico” nas aulas de matemática, isso contrapondo o fato de que novas tecnologias são produzidas a todo o momento, mas quando colocadas a disposição nas aulas de matemática não são usadas de forma adequadas para vencer as amarras do ensino tradicional.

Chagas (2004, p. 242) nos diz que:

Não é raro encontrarmos, dentro do trabalho cotidiano das escolas, professores de matemática ensinando esta disciplina de forma “rotineira”, onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e a exercícios de fixação ou de aprendizagem.

A matemática é uma disciplina temida por muitos alunos, as práticas de professores colaboram para reforçar esse medo; está aí um dos motivos que faz a matemática receber o rótulo de “bicho de sete cabeças” e também, na fala de Chagas (2004, p. 2):

Uma das disciplinas que mais reprova, retendo os alunos sucessivas vezes na mesma série e, portanto, causando grande número de evasões escolares, especialmente no ensino fundamental.

Sobre a questão do “modo de ensinar do professor de matemática”, podemos destacar o papel importantíssimo dos cursos de licenciatura. É certo que não é apenas por culpa da “má” formação dos professores de matemática que as suas aulas deixam muito a desejar, isso porque existem outros fatores, mas sem dúvidas o que é “aprendido” na universidade pode determinar o *Modus operandi* dos futuros professores.

Para ensinar matemática é necessário saber matemática, mas não apenas isso, pois é preciso também saber ensinar matemática. Nos cursos de licenciatura, os graduandos devem ter a oportunidade de aprimorar esses dois campos, ou seja, saber o conteúdo que vai ensinar e saber ensinar. Nessa questão, os cursos de licenciatura em matemática não estão cumprindo a contento a sua função.

Frase que pode parecer polêmica, ainda mais vinda de professores, da conta de que na verdade “não são os estudantes que não aprendem, são os professores que não ensinam” (Ferreira e Camargo, 2003), é encontrada no artigo “um cálculo no meio do caminho”. Realmente, muitos professores não dominam os assuntos que ensinam, e essa falta deveria ter sido sanada em disciplinas específicas durante a graduação. Porque fica complicado ensinar o que não se sabe. “É necessário encarar primordialmente as deficiências de conteúdo dos que lecionam matemática” (Druck, 2003, p.1). De fato, essa é uma realidade que necessita ser revertida.

Por outro lado, na atualidade, para tentar melhorar o ensino de matemática, existem exageros pedagógicos. É o que afirma Druck (2003, p. 2):

Nos últimos 30 anos, implementou-se no Brasil a política da supervalorização de métodos pedagógicos em detrimento do conteúdo matemático na formação dos professores. Comprovamos, agora, os efeitos danosos dessa política sobre boa parte de nossos professores. Sem entender o conteúdo do que lecionam, procuram facilitar o aprendizado utilizando técnicas pedagógicas e modismos de mérito questionável.

Talvez a busca desenfreada para tentar superar o ensino tradicional venha provocando a supervalorização de métodos pedagógicos. Não há dúvidas de que a pedagogia representa ferramenta crucial para que os professores tenham bom desempenho na profissão, mas a preocupação exagerada com técnicas pedagógicas pode fazer dos professores de matemática reféns de métodos pedagógicos.

De um lado, falta conhecimento do conteúdo; de outro a deficiência na questão pedagógica. Também professores com métodos pedagógicos demais e conteúdo de menos ou então conteúdo de mais e métodos pedagógicos de menos. É preciso equilibrar as coisas, e a universidade pode contribuir bastante, adequando o curso observando essa realidade.

Mas se esse fosse o único problema do ensino de matemática, mudar a grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática provavelmente resolveria a deficiência do ensino de matemática, bastaria oferecer as disciplinas pedagógicas e aquelas “recheadas” de conteúdos do ensino básico. Mas não é



“somente” esse problema que afeta o ensino de matemática no ensino básico no nosso país.

No entanto existe essa questão para trabalhar, e um dos caminhos está dentro da universidade, na conscientização dos graduandos de que o ensino de matemática não pode ser “mecanizado” com a preocupação única de “passar o conteúdo” nem tão pouco exagerado nas doses de métodos pedagógicos, pois estes acabam por fazer os professores negligenciarem conteúdos que os alunos devem aprender para interiorizar novos conhecimentos e também dar continuidade nos novos saberes em séries posteriores.

## **2.2 Alguns dos Problemas no Ensino de Matemática**

Não é difícil escutar alunos e alunas chamando a matemática de “bicho de sete cabeças” ou mesmo dizendo que a matemática é uma disciplina chata e complicada. São muitos os fatores que contribuem para reforçar esses e outros estigmas fincados nessa disciplina; uns são evidentes, outros nem tanto, mas todos têm prejudicado bastante o ensino de matemática.

Segundo Barboza (1999, p.93):

Alguns elementos têm contribuído para a pequena aprendizagem, sem ser percebido pelos professores de matemática. E o ensino dessa disciplina requer a superação desses problemas. Um deles é a sua linguagem mais exigente que a linguagem do cotidiano.

Essa linguagem mais difícil afasta estudantes do gosto pela matemática e para combater essa consequência os professores e professoras precisam conhecer a realidade dos alunos e alunas, desta forma estratégias podem ser colocadas em prática. Fazer os alunos e alunas incorporarem a linguagem matemática é importante para que possam melhor compreender as aulas e assim aprender com mais facilidade.

A realidade socioeconômica dos alunos e alunas é determinante para o seu desenvolvimento intelectual. Quanto mais preocupações extraclasse, menos possibilidade de dedicação aos estudos, e como no caso da matemática exige-se

uma linguagem particular, se não for dada a devida atenção a esse aspecto torna-se difícil dar continuidade as aprendizagens dos conteúdos da disciplina.

Quanto a isso, é preciso professores e professoras com visão ampla da matemática, mas o que se tem visto nas escolas com relação à disciplina representa estagnação, onde o ensino tradicional insiste continuar nas salas de aula numa época em que as exigências de aprendizagem são diferentes daquelas onde a matemática não era vista com a dinâmica que é exigida na atualidade.

D' Ambrosio diz que (1993, p.35):

Há uma necessidade de os novos professores compreendam a matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas.

De fato, o papel dos professores e professoras nessa ruptura das práticas tradicionais para as práticas alinhadas às necessidades atuais está intimamente relacionado com a compreensão e concepção que cada educador e educadora tem da disciplina.

Outro fator que prejudica o ensino de matemática, que trás dificuldades para o professor vencer os costumes das aulas expositivas e melhor preparar seus alunos e alunas para vida, é a falta de conhecimento sobre metodologias e todo um leque de ferramentas que podem ser usadas para favorecer a aprendizagem. Segundo, Barboza (1999, p. 95):

É preciso reconhecer que, se o professor dominasse o conhecimento das metodologias, algumas delas poderiam ser implementadas no ensino de matemática sem a necessidade da participação do Estado. São aqueles recursos que o professor pode improvisar com o auxílio de sucatas.

Não se trata de deixar de cobrar as responsabilidades que o Estado tem com a educação, mas sim fazer aquilo que trás mais possibilidades de aprendizagem; até porque o próprio ato de improvisar é educativo quando para promover conquistas.

Um ótimo recurso que o professor e a professora de matemática têm a disposição é a resolução de problemas. Mas a resolução de problemas nas escolas tem sido fora do que é teoricamente discutido, pois os procedimentos

para resolução de problemas têm sido apenas feitos com receitas tipo “palavra chave”.

Quase sempre existe uma “técnica” ou processo mecânico para se encontrar as respostas dos problemas propostos; antes de a turma receber os problemas existe uma preparação no sentido de difundir procedimentos mecânicos para que seja possível resolver os problemas. E nesse caso o objetivo principal dos alunos acaba sendo o de encontrar a resposta certa. Mas esse não pode e nem deve ser o objetivo principal da resolução de problemas nas aulas de matemática. É claro que responder corretamente é objetivo, mas a intenção de colocar a turma para resolver problemas deve ser mais ampla.

O que deve ser feito é introduzir vários problemas, resolver junto com a turma, utilizar várias estratégias; sempre deixando claro que é preciso usar a criatividade na hora da resolução de problemas. Incentivar a criatividade é uma das atitudes que cada professor e professora devem ter, pois isso faz diferença nas aulas de resolução de problemas e na vida de todos.

O medo e o ódio dos alunos e das alunas com relação à matemática, as suas realidades socioeconômicas, a exigência da linguagem matemática, a falta de conhecimento de metodologias por parte dos professores (as) e a aplicação errada da resolução de problemas são alguns dos fatores que colaboram para o fraco desempenho dos alunos (a) na aprendizagem de matemática. Esses não são, em hipótese alguma, os únicos desafios dos professores e as professoras de matemática. Mas para o professor e professora comprometido com a educação, não é preciso conquistar um salário digno que merece a profissão para lutar contra fatores que prejudicam o processo ensino e aprendizagem. Sobre isso Barboza (1999, p. 95) fala sobre duas frentes de luta:

... é necessário que o professor tenha sua ação voltada para duas frentes: uma na busca das condições reais e objetivas de trabalho, que o poder público tem negado; outra, na construção de práticas que contribuam para uma aprendizagem efetiva.

Em relação à primeira frente, a união entre os profissionais da educação é o primeiro passo para conquistas, como por exemplo o piso salarial dos professores e condições de trabalho; em relação a segunda frente também existe a necessidade da união, mas as práticas nas salas de aula são individuais e a

autonomia dos professores e professoras na direção de suas aulas é essencial, trabalhando com material específico ou improvisado.

O fracasso dos alunos em matemática acontece porque existem problemas no ensino de matemática e na educação escolar; as duas frentes citadas por Barboza contemplam os caminhos para melhorias na educação escolar como um todo.

### 3 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

#### 3.1 O Desenvolvimento Histórico dos Números Complexos

A definição usual de números complexos são todos os números da forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$ , a unidade imaginária, é um número tal que seu quadrado é  $-1$ . Isso não dá uma visão de onde estes vieram, nem por que eles foram inventados. De fato, a evolução desses números levou cerca de 300 anos.

Em 1545 Jerome Cardano, um matemático italiano, médico, jogador, filósofo e publicou um livro chamado *Ars Magna* (A Grande Arte). Nesse ele descreveu um procedimento algébrico para resolução de equações cúbicas e quárticas. Ele escreveu um problema que propunha encontrar valores que somado davam 10 e multiplicado davam 40. O resultado dos cálculos desse problema dão  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ . De fato, somando esses dois valores o resultado é 10 e multiplicando, utilizando o conhecido "produto da soma pela diferença de dois termos", o resultado é 40:

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 5 + 5 + \sqrt{-15} - \sqrt{-15} = 10$$

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 + (\sqrt{-15})^2 = 25 + \sqrt{(-15)^2} = 25 + \sqrt{225} = 40$$

ele não fez muito mais com isso e concluiu que o resultado foi "tão sutil quanto inútil." Os números complexos não surgiram a partir deste exemplo, mas em conexão com a solução de equações cúbicas.

A "fórmula cúbicos", geralmente conhecida como fórmula de Cardano, deu soluções para cúbicos da forma  $x^3 = ax + b$  e foi dada como:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Quando esta fórmula foi usado para resolver o exemplo clássico  $x^3 = 15x + 4$ , resultou em:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Quando isso aconteceu, Cardano alegou que a fórmula geral não é aplicável para este caso (por causa da raiz quadrada de -121). Mas perguntas tinham de ser respondidas, afinal, esta equação tem as soluções reais  $x = 4$  e  $x = -2 + \sqrt{3}$ . Nessa altura, Cardano já tinha conhecimentos suficientes para afirmar que a mencionada equação tinha uma e uma só raiz positiva. Nesse caso, 4 é a única raiz positiva e  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  é positiva. Ou seja, coisas estranhas acontecendo!

O desafio de descobrir esse problema foi assumida pelo engenheiro hidráulico Rafael Bombelli (1526-1572) quase 30 anos após o trabalho de Cardano foi publicado.

Para isso, teve o que ele mesmo chamou de “idéia louca”, pois toda a questão “parecia apoiar-se em sofismas”. Os dois radicandos das raízes cúbicas que resultam da fórmula usual diferem apenas por um sinal. Já sabia-se que 4 era a única positiva da equação mencionada, e também que ao usar a fórmula usual chegava-se a  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ; de alguma forma uma “coisa” e igual a outra.

Bombelli estudou profundamente o *ars Magna*, principalmente os casos irreduzíveis das equações cúbicas, que levaram as raízes de números negativos.

Em 1572, Bombelli publicou *l'Algebra*, obra na qual ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro e na qual considera a equação  $x^3 = 15x + 4$ . Ao aplicar a fórmula de Cardano, chega, como era de se esperar, ao mesmo resultado de Cardano, obtendo  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Também, assim como Cardano, percebe que 4 é, de fato, uma raiz, e única positiva, da equação proposta, ou seja.  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$ . Para Bombelli, era preciso saber o que estava acontecendo.

Então ele concedeu a existência de expressão da forma  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$  que possam ser consideradas, respectivamente, como  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ .

Substituindo as expressões na igualdade acima, ele escreveu  $(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4$ .

Neste ponto, felizmente, as quantidade “não existentes” se cancelam e obtemos  $a = 2$ . Com esse resultado, pode-se voltar à equação  $(a + \sqrt{(-b)})^3 = 2 + \sqrt{-121}$  e deduzir que  $b = 1$ . Assim, ele obteve que:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2 + \sqrt{121}} &= 2 + \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{121}} &= 2 - \sqrt{-1} \\ x &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4\end{aligned}$$

O método deu-lhe uma solução correta para a equação e o deixando convencido de que havia alguma validade em suas idéias. Mas na época a observação não ajudou muito na operação efetiva de resolver equações cúbicas, pois era preciso saber de forma antecipada o valor de uma das raízes.

Bombelli lançou as bases para os números complexos. Ele passou a desenvolver algumas regras e trabalhou com exemplos que envolvem adição e multiplicação de números complexos.

Durante anos, depois do trabalho de Bombelli, muitos ainda pensavam números complexos como um desperdício de tempo, mas houve outros que usaram números complexos em seus estudos. E foi a partir daí que os matemáticos passaram a estudar e trabalhar com raízes quadradas de números negativos de forma cada vez mais sistematizada.

O símbolo  $\sqrt{-1}$  para a raiz quadrada de -1, introduzido pelo francês Albert Girard (1595-1632) em *Invention nouvelle en L'Algebre* de Girard, de 1629, só passou a ser representado pela letra  $i$  a partir de 1777, pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Foi René Descartes, em 1637, com a obra *La Géométrie* de Descartes, quem introduziu os termos parte real e parte imaginária.

A expressão "números complexos" foi usada pela primeira vez por Gauss (1831), que viria ainda a demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra - "toda a equação polinomial de grau  $n$ , admite exatamente  $n$  raízes reais ou complexas" - em 1798, mas já anteriormente conjecturado por Girard, Descartes e Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783).

Jean Robert Argand e Caspar Wessel, independentemente motivados pela geometria e pela topografia, representaram geometricamente, de maneira intuitiva e prática, os complexos como pontos (e como vectores) num plano cartesiano.

Gauss definiu então os números complexos na forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i^2 = -1$ .

Hamilton definiu os complexos como o conjunto dos pares ordenados (vetores)  $(a, b)$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais, e associou a multiplicação  $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$  a uma operação envolvendo a rotação de vectores em torno da origem. E aferiu ainda que multiplicar por  $i$  envolve uma rotação de 90 graus, multiplicar por  $i^2$  envolve uma rotação de 180 graus, multiplicar por  $i^3$  envolve uma rotação de 270 graus, etc.

Curiosamente, o significado geométrico dos números negativos surgiu com a representação geométrica dos complexos.

Euler, em 1748, formulou a Identidade de Euler ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ) que deu significado aos logaritmos de números negativos, ou seja, os logaritmos de números negativos são números imaginários puros. Basta substituir na *Identidade de Euler*,  $\theta = \pi$  e aplicar logaritmos "neperianos" a ambos os membros que vem:  
 $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi \Leftrightarrow \ln(e^{i\pi}) = \ln(-1) \Leftrightarrow i\pi = \ln(-1)$

### 3.2 Bibliografia do Matemático Johann Carl Friedrich Gauss



Figura 1 - Gauss



Johann Carl Friedrich **Gauss** (1777 - 1855) foi um matemático e cientista alemão, que contribuiu significativamente para diversas áreas , incluindo a teoria dos números, estatísticas, análise, geometria diferencial, geodesia, geofísica, eletrostática, astronomia e ótica.

Ele teve uma influência notável em muitos campos da matemática e ciência e está classificado como um dos matemáticos mais influentes da história. Ele se refere a matemática como "a rainha das ciências."

Gauss foi uma criança prodígio, pois começou sua história com a matemática logo cedo, ainda na infância. Filho de camponeses pobres, mas teve apoio de sua mãe e de seu tio para estudar, apesar das objeções paterna. Aos três anos de idade, Gauss já realizava algumas operações aritméticas, tendo, por tanto, desenvolvido precocemente as suas façanhas matemáticas.

Conte-se que, segundo Boyer (1996, p. 343):

Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instrução para que cada um colocasse sua ardósia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa, dizendo: 'ai está!' O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5050.

Gauss tinha 10 anos de idade.

Espantou o seu mestre, Buttner, quando inicio os estudos de aritmética mostrando resolver com facilidade operações matemáticas consideradas complicadas. Buttner tinha, nessa época, um jovem assistente, de 17 anos, Johann Martin Bartels, apaixonado pela matemática, a quem entregou a tarefa de ensinar ao precoce Gauss. Entre os dois moços firmou-se sólida amizade, que durou até a morte de Bartels.

Um dos frutos dessa amizade foi o caminho que Bartels abriu para Gauss, pois o fez conhecido do duque de Braunschweig, Carl Wilhelm Ferdinand, este se tornou protetor de Gauss e lhe proporcionou condições de estudo.

No ano de 1792, Gauss se matriculou no colégio Carolinum, permanecendo três anos. Estudou profundamente as obras de Leonhard Euler, Joseph-Louis de Lagrange e Isaac Newton. Nesta época Gauss iniciou as suas investigações

sobre aritmética superior, que o tornaria imortal e lhe daria o título de “príncipe da matemática”.

Gauss deixou o Collegium Carolinum em outubro de 1795, para entrar na Universidade de Göttingen. Em 1796 define suas preferências definitivamente, decidindo dedicar-se à matemática. No dia 30 de março desse ano, Gauss começa a redigir um diário científico, anotando as suas descobertas. Esse diário só foi divulgado 43 anos após a morte de Gauss, quando, para isso, a Sociedade Real de Göttingen obteve a permissão do neto de Gauss. O diário contém 146 anotações, breves exposições dos descobrimentos feitos pelo seu autor no período de 1796 a 1814.

Os três anos passados em Göttingen foram dos mais prolíficos de sua vida. As idéias que vinha recolhendo desde os 17 anos, foram, nessa época, ordenadas e esmiuçadas, resultando, em 1798, as *Indagações Aritméticas*, por muitos considerada a obra-prima de Gauss.

Sobre sua relação com os números complexos, abriu novos rumos com a invenção de um tipo novo de números, os *inteiros complexos gaussianos*, da forma  $a+bi$ , em que "a" e "b" são inteiros racionais e "i" a unidade imaginária.

## 4 NÚMEROS COMPLEXOS

### 4.1 Conjunto dos Números Complexos

Antes de iniciar o estudo dos números complexos, quando alguma equação exigia raízes quadradas, quartas, sextas, de números negativos, a solução era impossível dentro do conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Por isso os matemáticos idealizaram um número imaginário ( $i$ ), e a partir deste, surgiram novos números, constituindo o conjunto dos números complexos ( $\mathbb{C}$ ).

### 4.2 A Unidade Imaginária

Para ampliar o conceito de número, de modo que torne possível a radiciação seja sempre possível, defini-se o número  $i$ , não-real, denominado **unidade imaginária** que satisfaz à seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

### 4.3 Número Complexo

Chama-se número complexo todo número da forma  $z = a + bi$ , na forma algébrica, onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$  (Unidade Imaginária).

Ex.:

$$z = 3 + 5i$$

Temos que:

$$z = a + bi \rightarrow \begin{cases} a = \text{Re}(z) \rightarrow \text{Parte Real de } z \\ b = \text{IM}(z) \rightarrow \text{Parte imaginária de } z \end{cases}$$

Ex.:

$$z = 3 + 5i \rightarrow \begin{cases} 3 = \operatorname{Re}(z) \rightarrow \text{Parte Real de } z \\ 5 = \operatorname{Im}(z) \rightarrow \text{Parte imaginária de } z \end{cases}$$

#### 4.4 Número Imaginário Puro e Número Real

Dado o número complexo  $z = a + bi$ , pode-se ter:

$a = 0$  e  $b \neq 0$ , então  $z$  é um imaginário puro

$b = 0$ , então  $z$  é um número real.

Ex.:

$z = -8i$ ,  $z$  é imaginário puro

$z = 0$ ,  $z$  é número real

$z = 3$ ,  $z$  é número real

#### 4.5 Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos:  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  são iguais se, e somente se, suas partes reais e imaginárias forem as mesmas.

$$z = w \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \text{ ou } a = c \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w) \text{ ou } b = d \end{cases}$$

#### 4.6 Números Complexos Conjugados

O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  é o número complexo  $\bar{z} = a - bi$ .

Ex.:

$$\begin{cases} z = 5 - 3i \rightarrow \bar{z} = 5 + 3i \\ z = -3 + i \rightarrow \bar{z} = 3 - i \\ z = 5 \rightarrow \bar{z} = 5 \\ z = -i \rightarrow \bar{z} = i \end{cases}$$

## 4.7 Operações na forma algébrica

### (a) Adição

Dados os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , chama-se soma de  $z$  e  $w$  o número:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

Ex.:

$z = -2 + 8i$  e  $w = 1 - 6i$ , então:

$$z + w = -1 + 2i$$

### (b) Subtração

Dados os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , chama-se diferença de  $z$  e  $w$ , nesta ordem, o número:

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

Ex.:

$z = -2 + 8i$  e  $w = 1 - 6i$ , então:

$$z - w = -2 + 2i$$

### (c) Multiplicação

Para multiplicar os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , usa-se as regras de multiplicação de polinômios.

$$z \cdot w = (a \cdot c - db) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Ex.:

$z = 5 - 2i$  e  $w = -3 + 4i$ , então:

$$z \cdot w = -7 + 26i$$

### (c) Divisão

Para se efetuar uma divisão entre números complexos, basta multiplicar o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}$$

Ex.:

$z = 1 + i$  e  $w = 1 + 2i$ , então:

$$\frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{3 + i}{5}$$

Propriedades

- a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- b)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- c)  $z + \bar{z} = 2a$
- d)  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- e)  $\overline{\overline{z}} = z$

## 4.8 As potências de $i$

Vamos determinar os valores de  $i^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Temos:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Observa-se, pelos resultados acima que as potências sucessivas de  $i$  vão se repetindo de quatro em quatro unidades, na seguinte seqüência:  $1, -i, 1, -i$ .

Assim:

$$i^0 = i^4 = i^8 = \dots = i^{4n} = 1$$

$$i^1 = i^5 = i^9 = \dots = i^{4n+1} = i$$

$$i^2 = i^6 = i^{10} = \dots = i^{4n+2} = -1$$

$$i^3 = i^7 = i^{11} = \dots = i^{4n+3} = -i$$

Para calcular-se o resultado de  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , basta dividir o expoente por 4 e considerar o resto dessa divisão, dado pela tabela a seguir:

Tabela 1 – valor das potências

resto	$i^{\text{resto}}$	valor da potência
0	$i^0$	1
1	$i^1$	$i$
2	$i^2$	-1
3	$i^3$	- $i$

Sendo  $r$  o resto da divisão de  $n$  por 4, mostra-se que  $i^n = i^r$ .

Temos:

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\therefore n = 4 \cdot q + r$$

Pela igualdade de potência, podemos escrever:  $i^n = i^{4q+r}$ .

Pelas regras de potenciação, temos:

$$i^n = i^{4q} \cdot i^r$$

$$i^n = (i^4)^q \cdot i^r$$

Como  $i^4 = 1$ , então  $i^n = 1^q \cdot i^r$

De onde  $i^n = i^r$

Ex.:

Seja  $i^{79}$ , temos:

$$79 = 4 \cdot 19 + 3, \text{ então:}$$

$$i^{79} = i^3 = -i$$

#### 4.9 Representação Cartesiana de um Número Complexo

Um número complexo é caracterizado por um par ordenado de números reais  $(a, b)$ ; logo, pode-se representá-lo num plano cartesiano, da seguinte maneira:

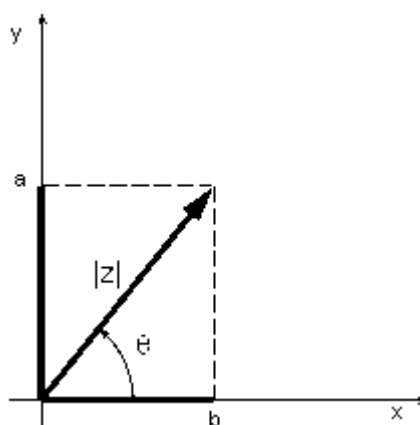


Figura 2 – representação do número complexo no plano cartesiano



O sistema de eixos cartesianos ortogonais utilizados para representar números complexos recebe o nome de **diagrama de Argand-Gauss**, e nele, como pode-se ver na figura acima, temos:

Ox: eixo real

Oy eixo Imaginário

P: corresponde a  $(a,b)$  e recebe o nome afixo do complexo  $z=a+bi$ .

$\theta$  : argumento de  $z$

$|z|$ : módulo de  $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se  $z$  é um número complexo  $a+bi$ , não nulo, então tem-se um ângulo entre Ox e Oy:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

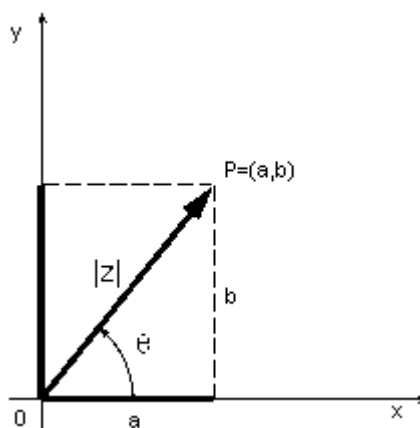


Figura 3 – argumento  $\theta$

Daí,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .

Decorre que:

$$a = |z| \cdot \cos \theta \text{ e } b = |z| \cdot \sin \theta$$



Figura 4 – Jean Robert Argand (1768-1822)

Matemático suíço, estudou os números complexos e realizou importantes investigações no campo da Geometria Moderna.

#### 4.10 Forma Trigonométrica ou Polar

Considere o complexo  $z = a + bi$ , representado pelo ponto  $P(a,b)$ , indicado na figura:

Chamando  $|z|$  de  $\rho$ , isto é:  $|z| = \rho$

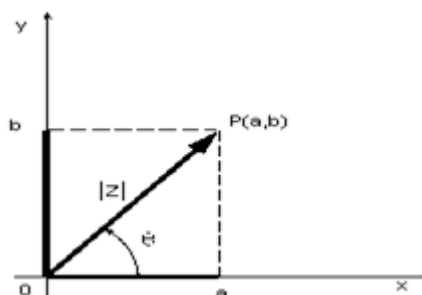


Figura 5 – forma trigonométrica

Da figura, temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \sin \theta$$

Substituindo em  $z = a + bi \Rightarrow z = \rho \cdot \cos \theta + \rho \sin \theta \cdot i$

$$\therefore z = \rho(\cos \theta + \sin \theta \cdot i)$$

#### 4.11 Operações na Forma Trigonométrica

**(a) Multiplicação**

Sejam os números complexos:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Efetuada-se o produto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Desenvolvendo os parênteses, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1)$$

Podemos escrever:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Vimos, então, que o produto de dois números complexos tem para o módulo o produto dos módulos e para argumento a soma dos argumentos dos fatores.

**(b) Divisão**

Dados os números complexos:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e}$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

O quociente é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

**(c) Potenciação**

Dado o número complexo:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e o número } n, \text{ então:}$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \text{ (Primeira fórmula de Moivre)}$$

**(d) Radiciação**

Dado o número complexo:

$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ , então:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Onde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$

(Segunda fórmula de Moivre)



Figura 6 – Abraham de Moivre (1667-1754)

Matemático inglês nascido na França. Contribuiu para o aperfeiçoamento da teoria das probabilidades com a elaboração dos princípios que a determinam. É autor de *A Doutrina das Probabilidades* (1718).

#### 4.12 Equações Binômias e Trinômias

Qualquer equação que possa ser reduzida à forma:

$ax^n + b = 0$  (com  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ ) é chamada de *equação binômica*.

Para resolvê-la, isola-se  $x^n$  no primeiro membro e aplica-se a segunda fórmula de Moivre:

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = \frac{-b}{a}$$

Essa equação admite **n** raízes enésimas de  $\frac{-b}{a}$ .

Ex.:

Resolver  $x^3 + 27 = 0$

- $x^3 = -27$

$$z = -27 \Rightarrow |z| = 27$$

$$\theta = \arg(z) = \pi$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$z_0 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} i$$

$$z_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = -3$$

$$z_2 = 3 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{3} i$$

A solução é, por tanto:

$$S = \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{3} i \right)$$

Outro tipo muito comum de equação que envolve números complexos é o que se pode reduzir à chamada *equação trinômia*:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \text{ (com } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Para resolvê-la, faz-se a mudança de variável,  $x^n = y$ , obtendo uma equação do 2º grau:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Cujas soluções são  $y'$  e  $y''$ .

Consideram-se as equações anteriores, pois  $y' = x^n$  e  $y'' = x^n$ .

Resolvendo-as, têm-se as raízes da equação inicial.

Ex.:

Resolver a equação  $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$

Fazendo a mudança de variável  $x^3 = y$ , temos:

$$y^2 + 26y - 27 = 0 \Rightarrow y' = 1 \text{ e } y'' = -27$$

Agora, resolvendo as equações binômias  $x^3 = 1$  e  $x^3 = -27$ , tem-se:

$$S = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 3, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

## 5. APLICAÇÃO DOS ASSUNTOS DE MATEMÁTICA NA VIDA COTIDIANA

### 5.1 Duas matemáticas: A Escolar e a da Vida Cotidiana

Alguns conteúdos de matemática aprendidos na escola não têm destaque de forma direta na vida das pessoas, já assuntos como porcentagem, números naturais, unidades de medida e tantos outros são facilmente defendidos pelos professores de matemática, pois são assuntos que as pessoas precisam conhecer porque fazem parte do cotidiano, estão presentes em muitos momentos e são ferramentas necessárias para inclusão social do indivíduo.

Faz sentido, por tanto, dar prioridade a uns assuntos, em detrimento de outros; mas sem dúvidas nenhuma o progresso da ciência não depende apenas dos conhecimentos práticos da matemática, pelo contrário, é preciso que todo conhecimento matemático seja colocado a disposição, sejam eles de fácil aplicação no cotidiano ou não; e uma das formas de fomentar o desenvolvimento do conhecimento humano é justamente divulgar o que já foi descoberto.

Além do mais, como diz Lobachevsky (1792 – 1856), numa conhecida frase: *“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”* Se bem que todos os assuntos de matemática apresentado nas escolas têm aplicação, uns de forma evidente, enquanto outros somente os mais apegados aos números percebem, através dos estudos, sua importância e aplicação.

Os números complexos figuram entre os assuntos que, de certa forma, não tem aplicação direta na vida da maioria das pessoas. Se fosse feita uma lista onde os alunos (as) colocassem os assuntos sem importância, provavelmente o conjunto dos números complexos estaria relacionado.

É importantíssimo relacionar o conteúdo com o cotidiano, mas também mostrar que mesmo aqueles assuntos que não são usados no dia a dia, pela maioria das pessoas, têm papel fundamental para a atualidade e descoberta de novidades que venham a surgir. Nas aulas de matemática alguns assuntos estão bem próximos da realidade das pessoas, outros nem tanto; mas todos têm algum significado que os professores (as) não devem deixar “passar em branco”. O

termo “passar em branco” seria não exemplificar alguma utilidade do assunto, mesmo que tal conteúdo não faça parte da vida cotidiana dos alunos (as).

Sobre essa questão, Giardinetto (1999, p. 4) aponta que:

... para algumas pesquisas, a ausência de relação entre matemática escolar e a matemática da vida cotidiana, é apontada como o fator determinante da dificuldade hoje encontrada pelos alunos na apropriação do conhecimento matemático escolar. Para justificar isso, essas pesquisas argumentam que os conceitos escolares, na medida em que não apresentam relação imediata com a vida dos alunos, são regidos por procedimentos de ensino arbitrário, como que um amontoado de regras sem anexos que são impostas aos alunos.

Isso sugere diferenciação da forma como os assuntos da matemática escolar e o da matemática da vida cotidiana são tratados na sala de aula pelos professores. E essa atitude depende principalmente de uma questão: a praticidade do assunto.

De fato, é muito mais simples e mais cômodo para os professores (as) quando determinado assunto não gera tantos questionamentos, isso acontece quando o assunto não faz parte do cotidiano dos alunos (as). Não se vende produtos no comércio por  $2 + 4i$ , nem tão pouco promoções relâmpagos na forma trigonométrica. Mas sem dúvidas muitas mordomias na atualidade surgiram ou são aprimoradas a partir do conhecimento dos números complexos.

As amarras do ensino tradicional de matemática são mais fortes justamente nos conteúdos que, na sala de aula, não são relacionados com a vida dos alunos (as). É muito mais complicado ensinar números complexos de forma contextualizada do que geometria espacial. E na falta de alternativas, o “assunto difícil” cabe perfeitamente numa aula nos moldes do ensino tradicional.

O fato é: Na matemática têm assuntos que são “contextualizados por natureza”, outros mais ou menos e alguns praticamente são impossíveis de ter sentido prático na vida dos alunos (as) que não tem interesse pela área de exatas. Essa é uma realidade que deve ser encarada, sobretudo para formulação de caminhos a seguir, como por exemplo, assumir as prioridades de determinados assuntos, não se esquecendo de valorizar e estudar os de menos praticidade.



## 5.2 Duas Aplicações dos Números Complexos

No livro didático de Dante, cujo título é “Matemática, contexto e aplicações”, o autor menciona duas aplicações dos números complexos: Aplicação à geometria e aplicação à Engenharia elétrica. Os assuntos são abordados nos enunciados de questões, ou seja, na parte de exercícios.

Sobre a aplicação dos números complexos à geometria, Dantas (2008, p. 609) mostra que:

Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é possibilitar a rotação de coordenadas no plano. Esse papel pode ser desempenhado pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplica-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto  $(a, b)$  deve ser rotacionado, em relação a origem, em  $\alpha$  graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo  $a + bi$  pelo  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

Já com respeito na aplicação à Engenharia elétrica:

Em circuito de corrente alternada, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio de números complexos, que facilita muito os cálculos. A relação  $U = Ri$ , estudada em Física no ensino médio e que utiliza dos números reais, torna-se  $U = Zi$ , em que  $U$  é a tensão,  $Z$  é a impedância e  $i$  é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre  $i$ , símbolo da corrente elétrica, e  $i$ , unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam  $j$  como unidade imaginária na representação algébrica  $a + bj$ . Além disso, usam a notação  $|w| \angle \theta$  para a forma trigonométrica  $|w|(\cos \theta + i \sin \theta)$  do número complexo  $w$ .

O que se pode afirmar em relação a essa pequena, mais importante abordagem no livro de Dante, é que “não passou em branco” à aplicabilidade dos números complexos. Os alunos (as), principalmente para aqueles que não gostam das exatas, precisam dessas “pinceladas” na parte de aplicação do assunto, assim, se no início de um conteúdo é importante abordar a parte histórica, no final é importante ter um momento para mencionar as aplicações do conteúdo aprendido. Não que somente no final do conteúdo seja tratado sobre aplicações, mas mesmo que durante o desenvolvimento do conteúdo tenha sido tratada sobre as aplicações, uma boa conversa sobre a aplicabilidade do assunto estudado, tanto nas situações do cotidiano, quando possível, como também no

desenvolvimento da ciência, não deve faltar no fechamento do estudo do conteúdo propriamente dito.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos assuntos de matemática são considerados de difícil aprendizagem e/ou considerados sem importância. Esses assuntos merecem uma atenção diferenciada, sobretudo na questão histórica e sua aplicação na atualidade. O estudo do conjunto dos números complexos é um desses assuntos, por isso a necessidade de, como foi dito no desenvolvimento deste trabalho, apresentar como se deu o seu desenvolvimento histórico e também algumas de suas aplicações.

Apresentar o contexto histórico e a aplicação do assunto, através de uma abordagem paralela ao conteúdo propriamente dito, numa introdução fazendo uma recapitulação de todos os conjuntos números, pode fazer os alunos (as) darem mais atenção ao estudo do conjunto dos números complexos.

Além de fazer os alunos (as) perceberem a importância do assunto na atualidade, principalmente no campo da ciência, desperta outras curiosidades referentes a outros assuntos que não fazem parte da realidade das pessoas que não estão relacionadas diretamente com a ciência e tecnologia. Daí a aprendizagem ganha significado e os alunos (as) percebem a importância do que foi estudado.

## REFERÊNCIAS

BARBOZA, P. L. Busca de rupturas no ensino de matemática. *Revistas temas em educação*, João Pessoa, N<sup>os</sup> 7/8, p. 93 – 104, 1998-1999.

BIANCHINE, E. Matemática, 5<sup>a</sup> série. São Paulo: Moderna, 2002.

\_\_\_\_\_. Matemática, 8<sup>a</sup> série. São Paulo: Moderna, 2002.

BOYER, C. B. História da Matemática, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2<sup>a</sup> edição. – São Paulo: Bucher, 1996.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. História dos Números Complexos. Disponível em <<http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>>. Acessado em 01 de outubro de 2010.

CHAGAS, M. P. F. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: PROBLEMÁTICAS E POSSÍVEIS SOLUÇÕES, Millenium, Revista do ISPV, n 29, p. 240 – 248, Junho de 2004. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/default.htm>. Acesso em: 01 set. 2010.

D' AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio. Pro-Posições, V. 4, n<sup>o</sup> 1[10], p. 35-41, 1993.

DANTE, L. R. Matemática, contextos e aplicações. São Paulo: Editora ativa, 2008.

DRUCK, S. O drama do ensino da matemática. Acesso em: 29 de set. de 2010 <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>>

FERREIRA, F. CAMARGO, P. Um cálculo no meio do caminho. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u307.shtml>>. Acesso em: 01 de out de. De 2010.

GARBI, G.G. **O Romance das equações algébricas**, 2. Ed ver. E ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**, Campinas, SP: Autores Associados, 1999. (Coleção polêmicas do nosso tempo: V. 65).

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*, Ed. 2, SP: Autores Associados, 2008, p. 152.

MILLIES, F. C. P. A Introdução dos Números Complexos. Disponível em <<http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/complexos.html>>. Acesso em 15 de outubro de 2010.

OLIVEIRA, C. N. C. de. Números Complexos: Um estudo dos registros de representação e dos aspectos gráficos. 2010, 191 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROSA, M. S. Números Complexos: “Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito”. 1998, 173 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

WATANABE, R.; Uma introdução ao estudo dos Números Complexos. Disponível em <[http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotide/disciplinas/html/complexos\\_algebra-web/introducao\\_estudo\\_numeros\\_complexos.pdf](http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotide/disciplinas/html/complexos_algebra-web/introducao_estudo_numeros_complexos.pdf)>. Acesso em 01 de outubro de 2010.