



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

Mirenia Kalina Teixeira da Silva

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E COMPUTAÇÃO NUMÉRICA
APLICADA AO TRANSPORTE DE CALOR EM SÓLIDOS COM GEOMETRIA
ESFÉRICA**

CAMPINA GRANDE – PB
2014

Mirenia Kalina Teixeira da Silva

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E COMPUTAÇÃO NUMÉRICA
APLICADA AO TRANSPORTE DE CALOR EM SÓLIDOS COM GEOMETRIA
ESFÉRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento aos requisitos necessários para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vital Araújo Barbosa de Oliveira

CAMPINA GRANDE – PB
2014

S586e Silva, Mirenia Kalina Teixeira da.

Equações diferenciais parciais e computação numérica aplicada ao transporte de calor em sólidos com geometria esférica [manuscrito] / Mirenia Kalina Teixeira da Silva. - 2014.

59 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Vital Araújo Barbosa de Oliveira, Departamento de Matemática".

1. Transferência de calor. 2. Resfriamento. 3. Solução exata. 4. Esfera. I. Título.

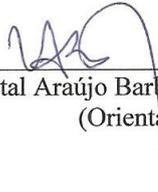
21. ed. CDD 536.7

Mirenia Kalina Teixeira da Silva

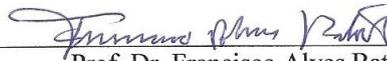
**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E COMPUTAÇÃO NUMÉRICA
APLICADA AO TRANSPORTE DE CALOR EM SÓLIDOS COM GEOMETRIA
ESFÉRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura Plena em Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em
cumprimento aos requisitos necessários para
obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

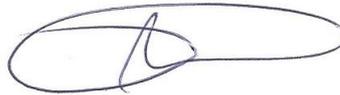
Aprovada em: 25 de fevereiro de 2014.



Prof. Dr. Vital Araújo Barbosa de Oliveira / UEPB
(Orientador)



Prof. Dr. Francisco Alves Batista / UEPB
(Examinador)



Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima / UFCG
(Examinador)

"Não temas, porque eu estou contigo; Não te assombres,
porque eu sou teu Deus: eu te esforço, e te ajudo,
e te sustento com a destra da minha justiça."

IS 41, 10

Dedico este trabalho aos meus queridos pais: Arlindo Tranquilino da Silva e Severina Teixeira da Silva, pelo apoio e amor durante todo momento. A Deus, por me ensinar e me permitir sonhar e ao meu amado esposo, Danilo Brito Teixeira de Almeida por sonhar junto comigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelas vitórias que tenho alcançado com êxito em minha vida profissional, e pelo conhecimento que obtive durante o decorrer da Graduação.

Ao meu esposo, Danilo Brito Teixeira de Almeida que sempre me apoiou e ajudou, em todo o momento, nos bons e nos ruins.

Ao meu pai Arlindo Tranquilino da Silva, por ser um batalhador e nunca deixar faltarme nada.

A minha mãe Severina Teixeira da Silva, uma mulher guerreira que em meio a palavras de amor, de apoio, de conforto e de orações me ajudou a me tornar essa mulher que sou hoje.

De forma muito especial, agradeço ao professor Dr. Vital Araújo Barbosa de Oliveira por ter me concedido a honra de estar orientando-me nesse trabalho.

Ao professor Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima que tenho como referência, e que me auxiliou no decorrer da minha graduação, me dando força e incentivo.

Aos professores do Curso de Graduação da UEPB, em especial, ao professor Dr. Francisco Alves Batista que aceitou com muito carinho ser um dos examinadores deste trabalho.

A Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, pela infraestrutura e formação acadêmica.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

Por fim e com muita satisfação, ao PIBIC/UEPB/CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Grandes empresas já se depararam muitas vezes com a necessidade de ter dados que especifique o momento certo de resfriamento ou aquecimento de seus produtos. A transferência de calor é de fato de vital importância, e para isso o estudo da mesma tem facilitado, reduzido custos e contribuído para o crescimento de empresas. A transferência de calor é vastamente ampla em termo de pesquisas. Para calcular a transferência de calor que ocorre dentro de um corpo é necessário equações matemáticas, e envolve tanto a ciência física como a matemática, assim como uso de métodos variados para chegar a uma solução exata. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático para o problema de transporte de calor em esfera, baseado na lei de Fourier, considerando propriedades termo - físicas constantes e condições de contorno de 3ª espécie. A qual todo o formalismo matemático e solução analítica da equação diferencial parcial que compõe o modelo referenciado são apresentadas. Para obtenção de resultados, um código computacional no ambiente do Mathematica foi desenvolvido. Resultado da distribuição de temperatura e cinética de resfriamento de uma esfera para diversos tempos de processo e para várias condições convectivas são apresentadas e discutidas. Verificou-se que a temperatura do sólido decresce radialmente para cada tempo de processo e que quando se varia o número de Biot, mais rápido é o processo de resfriamento do sólido esférico.

PALAVRAS-CHAVE: Transferência de calor. Resfriamento. Solução exata. Esfera.

ABSTRACT

Great companies often already dealt with the need to have data specifying the correct time cooling or heating of their products. The heat transfer is, in fact, of fundamental importance and study it has facilitated, saved money and it been helping in some way to the growth of industries. The heat transfer is broad in terms of research. To calculate the heat transfer which occurs in a solid mathematical equations is necessary and involves both physics science and mathematics, as well as the use of varied methods to get to an exact solution. In this sense, the aim of this work is to develop a mathematical model for the problem of heat transport in sphere, based on the Fourier law, considering constant thermophysical properties and boundary conditions of third species and present all the mathematical formalism and analytical solution of the equation partial differential that makes up the referenced model. To achieving results, a computational code in the Mathematica softwre environment was developed. Results of the temperature distribution and kinetics cooling of a sphere for various process times and for various convective conditions are presented and discussed. It was found that the temperature of the solid decreases radially for each process time, and that when the Biot number varies, faster is cooling process of the solid spherical.

KEYWORDS: Transfer of heat. Cooling. Exact Solution. Esphera.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Transferência de calor por condução	16
FIGURA 2 – Transferência de calor por convecção	16
FIGURA 3 – Transferência de calor por radiação	16
FIGURA 4 – Sólido com forma arbitrária	17
FIGURA 5 – Superfície isotérmica num certo instante de tempo	18
FIGURA 6 – Elemento diferencial para a análise de condução de calor	21
FIGURA 7 – Superfície submetida a temperatura constante	24
FIGURA 8 – Superfície submetida a fluxo de calor conhecido	25
FIGURA 9 – Superfície submetida a condição de contorno convectiva	25
FIGURA 10 - Superfície submetida a condição de contorno mista	26
FIGURA 11 – Domínio das condutividades térmicas de alguns estados da matéria em temperaturas e pressões normais	30
FIGURA 12 – Sólido esférico com fluido escoando sobre ele	36
FIGURA 13 – Temperatura em função do raio para Biot = 0.01	44
FIGURA 14 - Temperatura em função do raio para Biot = 0.05	46
FIGURA 15 - Temperatura em função do raio para Biot = 1.00	48
FIGURA 16 - Temperatura em função do raio para Biot = 5.00	50
FIGURA 17 - Temperatura em função do raio para Biot infinito	52
FIGURA 18 – Temperatura final do processo para diferentes valores de Biot	54
FIGURA 19 – Temperatura média em função de Fourier para diferentes Biot	56

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Condutividade térmica (k) para diferentes materiais de cobertura	31
TABELA 2 – Calor específicos de algumas substâncias	33
TABELA 3 – Densidade de algumas substâncias	34
TABELA 4 – Temperatura em função do raio para Biot = 0.01	43
TABELA 5 – Temperatura em função do raio para Biot = 0.05	45
TABELA 6 - Temperatura em função do raio para Biot = 1.00	47
TABELA 7 - Temperatura em função do raio para Biot = 5.00	49
TABELA 8 - Temperatura em função do raio para Biot infinito	51
TABELA 9 – Temperatura final do processo para diferentes valores de Biot	53
TABELA 10 – Temperatura média em função de Fourier para diferentes Biot	55

LISTA DE SÍMBOLOS

k – Condutividade térmica	(W/mK)
q_x'' - Taxa de transferência de calor por unidade de área na direção x	(W/m ²)
q'' - Fluxo de calor convectivo	(W/m ²)
t – Tempo	(s)
T – Temperatura	(°C)
q_n'' – Fluxo térmico numa direção normal a uma linha isotérmica	(W/m ²)
α – Difusividade térmica	(m ² /s)
q''' – Taxa de geração de energia por unidade de volume	(W/m ³)
∇^2 – Operador Laplaciano	(-)
q_s'' – Calor por radiação	(W/m ²)
C – Capacidade calorífica	(J/kg)
Q – Quantidade de calor	(J ou cal)
ρ – Densidade	(kg/m ³)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	(13)
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	(15)
	2.1 Transferência de calor	(15)
	2.2 Condução de calor	(17)
	2.2.1 Campo de temperatura e superfícies isotérmicas	(17)
	2.2.2 Lei de Fourier na condução de calor	(19)
	2.2.3 A equação na condução de calor	(20)
	2.2.3.1 Condições iniciais de contorno	(23)
	2.2.3.2 Método de solução da equação de difusão	(26)
	2.2.3.3 A equação diferencial em qualquer sistema de coordenadas	(27)
	2.2.4 As propriedades térmicas da matéria	(30)
	2.2.4.1 Condutividade térmica	(30)
	2.2.4.2 Calor específico	(32)
	2.2.4.3 Densidade	(33)
	2.2.4.4 Difusividade térmica	(35)
3	METODOLOGIA	(36)
	3.1 O modelo diferencial	(36)
	3.2 Solução analítica	(37)
	3.3 Métodos numéricos	(41)
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	(42)
	4.1 Análise para $Bi=0,01$	(43)
	4.2 Análise para $Bi=0,01$	(45)
	4.3 Análise para $Bi=0,01$	(47)
	4.4 Análise para $Bi=0,01$	(49)
	4.5 Análise para $Bi=0,01$	(51)
	4.6 Análise para $Bi=0,01$	(52)
5	CONCLUSÕES	(58)
6	REFERÊNCIAS	(59)

1. INTRODUÇÃO

Pode-se perceber no dia-dia, que há vários meios de aquecer-se ou resfriar-se, como quando se esta perto de um forno ou quando se toca uma panela quente, ou quando recebe-se calor vindo do sol. Com esses casos percebe-se que se esta recebendo calor, mas como e de onde? Por meio de que? Para responder a esta pergunta, pretende-se com esta pesquisa mostrar como se pode descobrir a variação de temperatura que ocorre dentro de um sólido especificamente num corpo esférico.

Estudos mostram e comprovam que a transferência de calor é ocorrida quando dois corpos (ou mais) com temperaturas térmicas diferentes (um mais quente que o outro) estão próximos. Há uma doação de calor do quente para o frio deixando a temperatura de ambos igualmente distribuídos. Existem três tipos de transferências de calor que são por condução, convecção e por radiação. O interesse maior desta pesquisa é a transferência de calor por condução em uma determinada matéria. Neste trabalho apresentam-se modelos matemáticos a partir de equações diferenciais parciais aplicadas ao transporte de calor em sólidos com formas variadas, e de sua solução analítica via método clássico de separação de variáveis.

De acordo com Incropera e DeWitt (1992) *na linhagem dos dias de hoje, a transferência de calor é, na realidade, uma questão relevante, além de ser uma parte fascinante das ciências da engenharia, esses fenômenos apresentam papel importante em muitos problemas industriais e ambientais. Os processos de transferência de calor são também importantes na poluição da atmosfera e das águas e influenciam fortemente o clima local e o clima do globo.* Nas indústrias, por exemplo, precisa-se saber a temperatura ideal para secar produtos, pois se o aquecimento não for no ponto certo pode ocorrer a perda de alta quantidade do produto, e então acarretar uma perda econômica para a empresa. Esse é apenas um exemplo entre tantos da importância do estudo da transferência de calor.

Nesta pesquisa, tem-se como objetivo geral mostra teoricamente e analiticamente o resfriamento que ocorre dentro de um sólido esférico através das equações diferenciais parciais e com o auxílio da computação numérica via programa Mathematica. Como objetivos específicos pode-se citar:

- Desenvolver um modelo matemático para o problema de transporte de calor em **esfera**, baseado na lei de Fourier, considerando propriedades termo - físicas constantes e condições de contorno de 3^a espécie;

- Apresentar todo o formalismo matemático e solução analítica da equação diferencial parcial que compõe o modelo referenciado;
- Simular a distribuição de temperatura no interior de sólidos com geometria esférica e suas respectivas cinéticas de aquecimento/resfriamento;
- Avaliar o efeito do coeficiente de transferência de calor sobre a taxa de resfriamento do sólido;
- Analisar a estabilidade e comportamento da solução analítica sob o ponto de vista numérico (análise numérica);

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentado um estudo mais amplo sobre a transferência de calor, com um detalhamento sobre os meios de transferência (condução, convecção e radiação) e um aprofundamento sobre a condução de calor que é o interesse maior.

2.1 Fundamentos da Transferência de calor

Segundo Incropera e DeWitt (1990), a transferência de calor é definida como sendo o “trânsito de energia provocado por uma diferença de temperatura”. Esse fenômeno pode acontecer por três processos diferentes que são: condução (que é o principal foco deste trabalho), convecção e radiação.

Na condução, a transferência de calor ocorre por meio da propagação do calor de partícula a partícula, neste caso, os átomos “quentes” colidem com os “frios” ocorrendo uma transferência de calor de uma partícula para outra. O melhor exemplo desse fenômeno seria pegar uma barra de metal e aquecer uma das pontas; com um tempo o calor percorreria toda a barra até a outra extremidade, então o material seria aquecido e ficaria quente por meio da condução (Figura 1).

A convecção só ocorre através de gases e líquidos. Ela consiste na transferência de calor dentro de um fluido através de movimentos do próprio fluido. Um exemplo fácil de convecção é quando se coloca uma panela com água no fogo, e percebe-se que o fluido quando esta sendo aquecido começa a se movimentar; o líquido frio desce e o quente sobe devido à densidade (Figura 2).

De acordo com Incropera e DeWitt (1992), a radiação térmica é a energia emitida pela matéria que estiver numa temperatura finita. Essa energia do campo de radiação é transportada pelas ondas eletromagnéticas sem precisar de um meio material para se transferir. Como exemplo, pode-se citar a radiação que o sol emite sobre a terra (Figura 3).

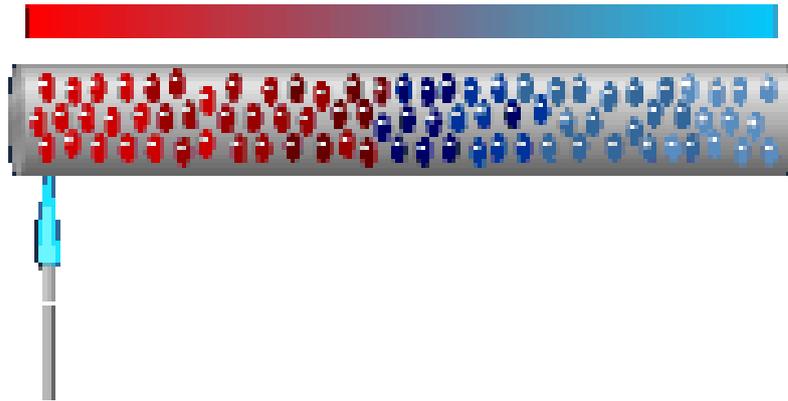


Figura 1 - Transferência de calor por condução.

Fonte: STENSMANN, B. H. W., Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física (2010).

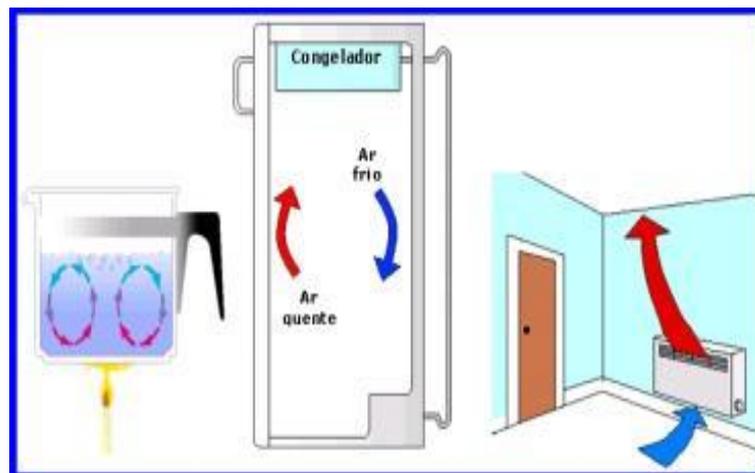


Figura 2 - Transferência de calor por convecção.

Fonte: <http://rogeriofisica.wordpress.com>

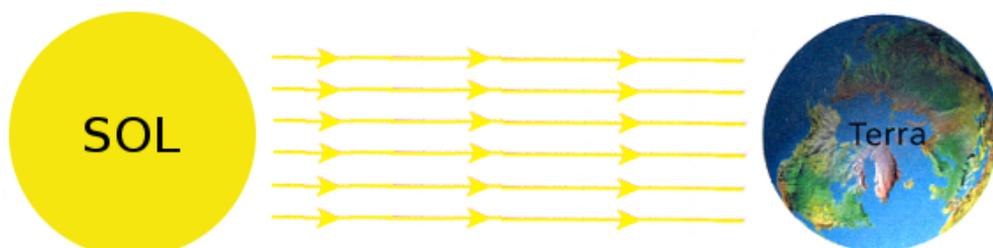


Figura 3

Figura 3 - Transferência de calor por radiação.

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>

2.2 Condução de calor

Como foi mencionado anteriormente, a transferência de calor por meio de condução se dá através de partículas. É como se tivesse partículas mais energéticas de uma substância se chocando e transmitido calor para partículas menos energéticas. Isto se dá devido à perturbação das partículas e o atrito entre elas. Como exemplo, pode-se citar o que acontece no nosso dia-dia, ao se preparar uma papa numa panela. Ao levá-la ao fogo e mexe-la com uma colher toda de metal, por meio de condução a colher esquentará por completo rapidamente, porém, se a colher for de madeira isso ocorrerá minimamente. Tem-se muitos exemplos que pode-se citar onde ocorre condução de calor.

Pode-se quantificar o processo de transferência de calor em termos da equação da taxa apropriada. Essa equação pode ser usada para calcular a energia transferida por unidade de tempo. Na condução de calor a equação da taxa é conhecida como a Lei de Fourier.

2.2.1 Campo de temperatura e superfícies isotérmicas

Considere um sólido com a distribuição (ou campo) de temperatura num tempo T dada por $T = f(x, y, z, t)$, conforme ilustra a Figura 4.

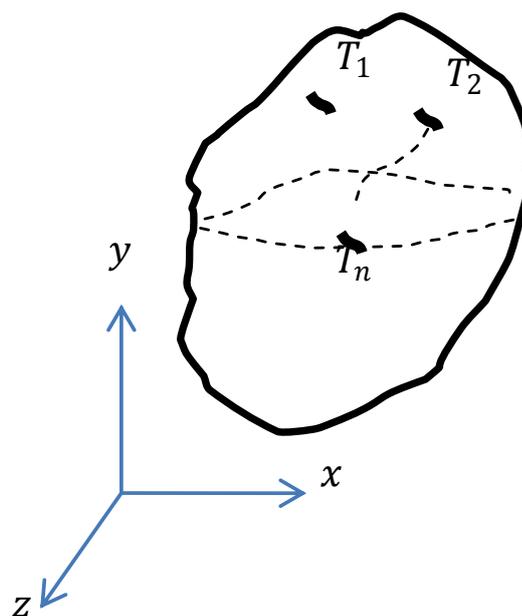


Figura 4 - Sólido com forma arbitrária.

Se o campo em regime permanente (ou regime permanente), tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = f(x, y, z) \quad (1)$$

Se o processo for em regime transiente, então:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow T = f(x, y, z, t) \quad (2)$$

Ao trata-se de um problema físico bidimensional transiente, pode-se escrever:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \Rightarrow T = f(x, y, t) \quad (3)$$

Caso seja um problema unidimensional transiente, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \Rightarrow T = f(x, t) \quad (4)$$

Por outro lado considere-se uma superfície descrita neste sólido, tal que em qualquer ponto $T = \text{cte}$, num certo instante de tempo. Neste caso, diz-se que a superfície isotérmica é, conforme ilustra a Figura 5.

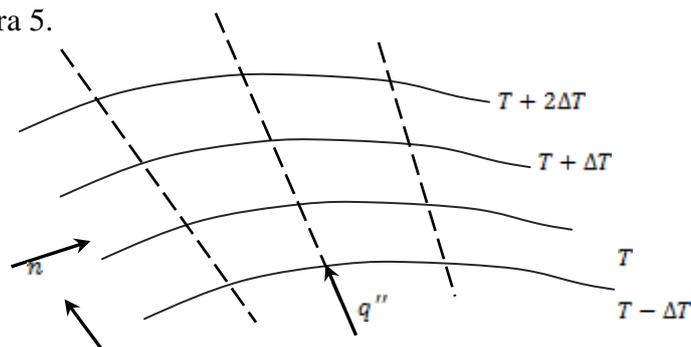


Figura 5 - Superfície isotérmica num certo tempo.

Assim tem-se:

$$\nabla T = \text{Grad}T = \vec{n} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \quad (5)$$

onde \vec{n} é um vetor unitário, ou ainda:

$$\nabla T = \text{Grad}T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6)$$

2.2.2 Lei de Fourier na condução de calor

A lei de Fourier foi desenvolvida pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph, em 1811, conhecido como Barão de Fourier. A lei de Fourier constitui uma lei empírica, isto é, estabelecida a partir da experiência, e descreve a teoria da condutibilidade calorífica em regimes de temperaturas estacionárias e variáveis e resolve diversos problemas: parede, barra, esfera, entre outros. Considere uma barra maciça de um dado material, com secção reta constante de área A e comprimento L., imagine ainda que a superfície lateral da barra está termicamente isolada, não havendo portanto trocas de calor com o exterior através dela. A lei de Fourier permite quantificar a transmissão de calor entre os extremos da barra em regime permanente (estacionário), em função das dimensões da barra, das características do material de que ela é feita e ainda das temperaturas nos seus extremos (www: <URL: [http://www.infopedia.pt/\\$lei-de-fourier](http://www.infopedia.pt/$lei-de-fourier)>).

Pode-se dizer que, o fluxo de calor por unidade de área é proporcional a intensidade do campo de temperatura ou o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura. Assim, a Lei de Fourier é dada por:

$$q'' = -k \nabla T \quad (7)$$

onde k é a condutividade térmica.

A condutividade térmica é uma propriedade física de um corpo caracterizado pela sua habilidade para transferir calor:

- $k = f$ (composição química, estrutura e estado do material)

ou ainda:

- $k = f(T, \varepsilon, P, \text{composição, e estado do material, posição dentro do campo, etc.})$

Assim numa formulação mais geral, para matérias anisotrópicas, tem-se:

$$q'' = -k_{i,j} \frac{\partial T}{\partial n_j} = -k_{1,1} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{1,2} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{1,3} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8)$$

Se $k_{ij} = 0, i \neq j$, então $k_{1,1} = k_1 \Rightarrow$ material ortotrópico.

Se $k_{1,1} = k_{2,2} = k_{3,3} = k \Rightarrow$ material isotrópico. Neste caso, pode-se escrever:

$$q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9)$$

$$q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (10)$$

$$q''_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11)$$

2.2.3 A equação de condução de calor

Para demonstrar a equação diferencial de calor no sistema de coordenadas cartesianas, considere a Figura 6, a seguir:

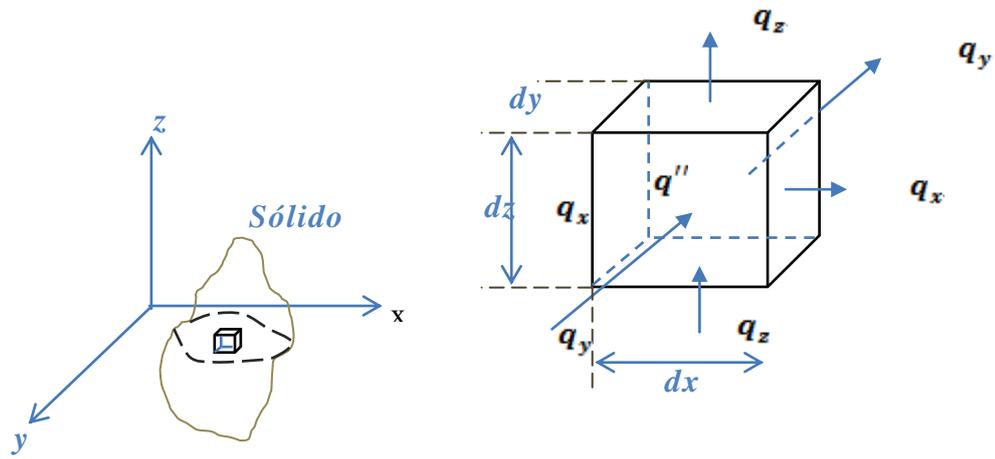


Figura 6 - Elemento diferencial para a análise de condução de calor.
Fonte: Incropera e DeWitt (1992)

A quantidade q_{i+di} é uma função desconhecida de i . Expandindo em série de Taylor onde somente os 2 primeiros termos da série são considerados, tem-se:

$$q_{x+dx} \cong q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (12)$$

$$q_{y+dy} \cong q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (13)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (14)$$

Aplicando a conservação de energia no volume de controle diferencial, tem-se:

$$(q_x - q_{x+dx}) + (q_y - q_{y+dy}) + (q_z - q_{z+dz}) + q'' dV = mC_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (15)$$

Desenvolvendo a equação (15), obteve-se:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q'' dx dy dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (16)$$

Como:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz \quad (17)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} dxdz \quad (18)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} dxdy \quad (19)$$

Substituindo-se na equação (16), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (20)$$

que é a equação de difusão de calor na sua forma tridimensional, transiente com geração interna de energia, aplicada para um sólido no sistema cartesiano.

Numa forma mais simplificada, pode-se:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' \quad (21)$$

Se:

a) Propriedades termofísicas k , ρ e C_p são constantes, pode-se escrever:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + \frac{q'''}{\rho C_p} \quad (22)$$

ou ainda

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q'''}{\rho C_p} \quad (23)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano e $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ é a difusividade térmica do material.

b) Se o regime é permanente, tem-se:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + q''' = 0 \quad (24)$$

c) Se o problema é sem geração interna de energia, pode-se escrever:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (25)$$

d) Caso seja regime permanente bidimensional e sem geração de energia, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

2.2.3.1 Condições iniciais de contorno

Para se resolver a equação de condução de calor, necessita-se de condições iniciais e contorno. Na equação (20), tem-se

- 2ª ordem na posição: 2 condições de contorno na posição para cada coordenada, são necessárias.
- 1ª ordem no tempo: 1 condição de contorno no tempo se faz necessária.

a) Condição inicial

Descreve a distribuição de temperatura dentro do sólido no momento inicial do processo. Isto é:

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad (27)$$

No caso simples, tem-se:

$$T(x, y, z, 0) = cte \quad (28)$$

b) Condição de contorno

Existe 4 tipos de condições de contorno:

- De 1ª espécie $\Rightarrow T$ conhecida \Rightarrow condição de contorno de Dirichlet

Neste caso,

$$T_s(x, y, z, t) = f(t) \text{ na superfície do campo} \quad (29)$$

O caso particular ocorre quando $T(x, y, z, t) = T_s = cte$, conforme ilustrado na figura 7.

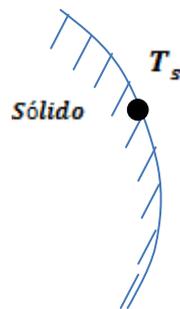


Figura 7 - Superfície submetida a temperatura constante.

- De 2ª espécie $\Rightarrow q$ conhecido \Rightarrow condição de contorno de Newman

Neste caso, $q_s = f(t)$. Então:

$$\Rightarrow -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s} = q_s \quad (30)$$

No caso simples, tem-se $q_s(t) = q = cte$, conforme Figura 8.

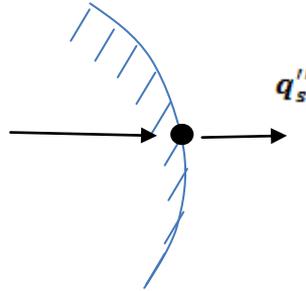


Figura 8 - Superfície submetida a fluxo de calor conhecido.

- De 3ª espécie \Rightarrow convecção na superfície.

Neste caso tem-se:

$$q_s'' = h(T_s - T_\infty) \quad (31)$$

ou ainda,

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = h(T_s - T_\infty) \quad (32)$$

conforme ilustra a Figura 9.

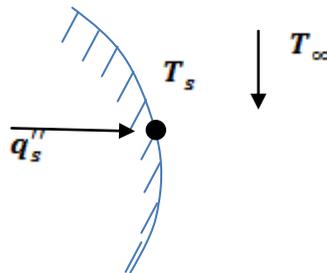


Figura 9 - Superfície submetida à condição de contorno convectiva.

- Combinação de convecção e efeito de fluxos.
-

Neste caso, tem-se:

$$h(T_s - T_\infty) + q_s'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s} \quad (33)$$

onde q_s'' é o calor por radiação, por exemplo, conforme a Figura 10.

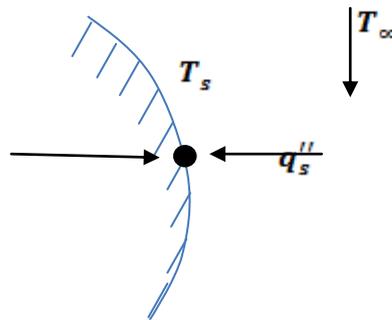


Figura 10 - Superfície submetida à condução de contorno mista.

2.2.3.2 Método de solução da equação de difusão

Para solução da equação de condução de calor pode-se usar técnicas analíticas e numéricas.

a) Analítica

Podem ser:

- Separação de variáveis:

$$T(x, y, z, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot \tau(t) \quad (34)$$

- Transformada de Laplace (Transformada Integral):

$$\bar{x}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (35)$$

- Reflexão e superposição.
- Produto de soluções para problemas simples:

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, t)T_2(y, t)T_3(z, t)\tau(t) \quad (36)$$

ou ainda outras soluções aproximadas:

b) Soluções numéricas

Podem ser:

- Elementos finitos;
- Elementos de fronteiras ou de contorno;
- Diferenças finitas;
- Volumes finitos.

Entre outras técnicas.

2.2.3.3 A equação diferencial em qualquer sistema de coordenadas

A equação (20) é usada para corpos retangulares. Para se trabalhar com sólidos com forma arbitrária, para $T = T(\mathcal{E}, \eta, z, t)$, pode-se escrever a equação (21) na forma:

$$h_\varepsilon h_\eta h_z \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\left(\frac{h_\eta h_z}{h_\varepsilon} \right) k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{h_\varepsilon h_z}{h_\eta} \right) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{h_\varepsilon h_\eta}{h_z} \right) k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q''' \quad (37)$$

onde h_ε , h_η e h_z são coeficientes métricos, dados por:

$$h_\varepsilon = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (38)$$

$$h_\eta = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (39)$$

$$h_z = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (40)$$

Como nesta pesquisa, o objetivo é sólido esférico, apresentar-se a seguir a obtenção da equação de difusão no sistema de coordenadas esféricas. Neste sistema, $T = (r, \theta, \Phi, t)$. Desde que, as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas são:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \Phi \quad (41)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi \quad (42)$$

$$z = r \cos \theta \quad (43)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} h_r &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[(\operatorname{sen} \theta \cos \phi)^2 + (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi)^2 + (\cos \theta)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \theta \right]^{1/2} \\ &= \left[\operatorname{sen}^2 \theta (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) + \cos^2 \theta \right]^{1/2} \\ &= \left[\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \quad (44)$$

$$h_\theta = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[(r \cos \phi \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 + (-r \operatorname{sen} \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= [\text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}} \\
&= [r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) + r^2 \text{sen}^2 \theta]^{\frac{1}{2}} \\
&= [r^2 (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta)]^{\frac{1}{2}} \\
&= (r^2)^{\frac{1}{2}} = r
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
h_\phi &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [(-r \text{sen} \theta \text{sen} \phi)^2 + (r \text{sen} \theta \cos \phi)^2 + 0]^{\frac{1}{2}} \\
&= [r^2 \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi + r^2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}} \\
&= [r^2 \text{sen}^2 \theta]^{\frac{1}{2}} \\
&= r \text{sen} \theta
\end{aligned} \tag{46}$$

Assim pela equação (37), pode-se escrever:

$$h_r h_\theta h_\phi \rho C_p \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{h_\theta h_\phi}{h_r} \right) k \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{h_\phi h_r}{h_\theta} \right) k \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{h_r h_\theta}{h_\phi} \right) k \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \right] + q''' \tag{47}$$

Então por substituição direta, dos coeficientes métricos na equação (47), obtém-se:

$$(1 \cdot r \cdot r \text{sen} \theta) \rho C_p \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r r \text{sen} \theta}{1} k \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{r \text{sen} \theta 1}{r} k \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1 r}{r \text{sen} \theta} k \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \right] + q''' \tag{48}$$

ou,

$$r^2 \text{sen} \theta \rho \cdot C_p \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \text{sen} \theta k \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{sen} \theta k \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{\text{sen} \theta} k \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \right] + q''' \tag{49}$$

ou ainda,

$$\rho C_p \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 k \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{sen} \theta \cdot k \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[k \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \right] + \frac{q'''}{r^2 \text{sen} \theta} \tag{50}$$

2.2.4 As propriedades térmicas da matéria

Para usar-se a Lei de Fourier precisa-se saber a condutividade térmica da matéria. Esta propriedade é conhecida como uma propriedade de transporte. É com ela que pode-se saber a taxa de transferência de energia através do processo de difusão.

2.2.4.1 Condutividade térmica

Foi visto anteriormente,

$$q' = -k\nabla T \quad (51)$$

Segue-se então, que para um gradiente de temperatura definido, o fluxo de condução aumenta com a elevação da condutividade térmica. A condutividade térmica se diferencia de acordo com a matéria. Por exemplo, a condutividade de um sólido é maior que a de um líquido, que por sua vez é maior que a de um gás.

Na Figura 11 ilustra-se algumas faixas de valores da condutividade térmica de diferentes materiais, nos diferentes estados físicos da matéria.

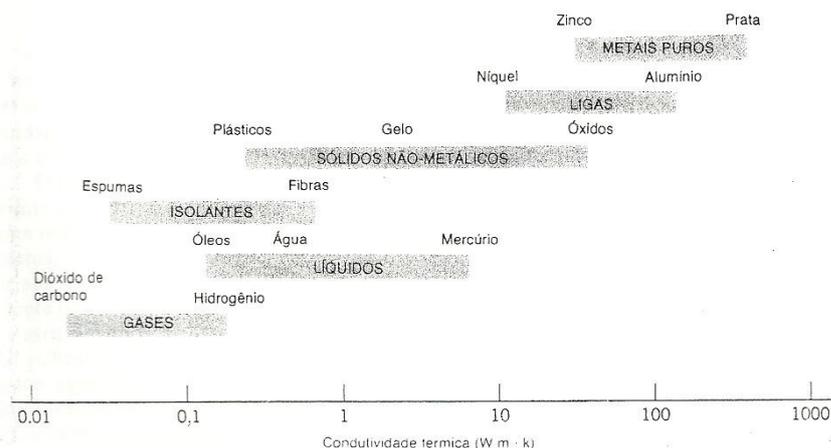


Figura 11-Domínio das condutividades térmicas de estados da matéria em temperaturas e pressões normais.

Fonte: INCROPERA, F. P., DeWITT, D. P., 1992

- O estado sólido: De acordo com Incropera e Dewitt (1990), um sólido é considerado como constituído por elétrons livres e por átomos ligados a uma disposição espacial periódica, denominada rede. Assim, o transporte de energia térmica deve-se a dois

efeitos: a migração dos elétrons livres e as ondas vibracionais da rede. Estes efeitos são aditivos, de modo que a condutividade térmica k é a soma da componente eletrônica k_e e da componente da rede k_p ($k = k_e + k_p$).

- **Sistemas isolantes:** Os isolamentos térmicos são constituídos por materiais que possuem baixa condutividade térmica; São combinados a fim de se conseguirem condutividades térmicas baixa para o sistema. Nos isolamentos térmicos constituídos por fibras, por pós ou por escamas, o material sólido está finamente disperso num espaço cheio de ar. Estes sistemas caracterizam-se por uma condutividade térmica efetiva, que depende da condutividade térmica e das propriedades radiativas da superfície do material sólido, e também da natureza e da fração volumar do ar ou do espaço vazio. Um parâmetro especial do sistema é densidade mássica (massa do sólido/volume total), que depende bastante da maneira pela qual o material sólido está ligado.

Material	K(w/m.°C)
Alumínio	230
Aço	47
Concreto	1,74
Tijolo maciço	0,81
Fibrocimento	0,76
Água	0,64
Palha	0,12
Lã de vidro	0,036
Poliestireno expandido	0,035
Ar	0,023

Tabela 1 - Valores de condutividades térmicas (K) para diferentes materiais de cobertura.

Fonte: Adaptada de Kreith e Kreider (1978).

- **O estado fluido:** Uma vez que o espaçamento intermolecular é muito maior no estado fluido que no estado sólido, e que o movimento das moléculas é mais caótico no primeiro do que no segundo estado, o transporte de energia térmica no estado fluído é menos efetivo. É devido a isso que a condutividade térmica dos gases e dos líquidos é menor do que a dos sólidos.

2.2.4.2 Calor específico

Calor específico é uma grandeza física que define a variação térmica de determinada substância ao receber determinada quantidade de calor. Também é chamado de capacidade térmica mássica. É constante para cada substância em cada estado físico. Pode-se dizer que o calor específico caracteriza uma substância (em determinado estado físico).

A unidade no SI é J/(kg.K) (joule por quilogramas por Kelvin). Uma outra unidade mais usual para calor específico é cal/(g.°C) (caloria por grama por grau Celsius).

O calor específico (c) é a quantidade de calor que cada grama de uma substância necessita trocar para variar sua temperatura em 1°C. Quanto menor o calor específico de uma substância, mais facilmente ela pode sofrer variações em sua temperatura. O calor específico depende da substância e não da quantidade da mesma. Diferente da capacidade térmica.

Suponha que dois blocos B_1 e B_2 sejam constituídos da mesma substância e tenham massas m_1 e m_2 . Verifica-se experimentalmente que, aquecidos durante um mesmo intervalo de tempo, na mesma fonte de calor, o bloco de maior massa sofre menor variação de temperatura e vice-versa. Assim, se a massa m_1 do bloco B_1 é duas, três ou n vezes maior que a massa m_2 do bloco B_2 , a capacidade calorífica C_1 do bloco B_1 é duas, três ou n vezes maior do que a capacidade calorífica C_2 do bloco B_2 . Em outras palavras, a capacidade calorífica (C) de corpos constituídos da mesma substância é diretamente proporcional à massa (m) de cada corpo. Pode-se, portanto escrever:

$$C = mc \tag{52}$$

onde c é uma constante de proporcionalidade que depende da substância de que é constituído o corpo. Essa constante é, por definição, chamada de calor específico dessa substância.

O conceito de calor específico permite obter expressões mais abrangentes para a quantidade de calor, pois não se restringe mais a corpos determinados, mas a substâncias.

Assim, substituindo a relação $C = mc$ na expressão $Q = C\Delta T$, pode-se obter a expressão:

$$Q = mc\Delta T \tag{53}$$

que permitem determinar a quantidade de calor Q absorvida pelo corpo de massa m , constituído por determinada substância de calor específico c quando sofre acréscimo de temperatura ΔT . A Tabela 2 apresenta alguns valores típicos de calor específico para alguns materiais.

Substância (sólidos e líquidos)	Calor específico (a 25°C e pressão normal)	
	(J/kg.°C)	(cal/g.°C)
Água	4200	1,0
Álcool etílico	2400	0,58
Alumínio	900	0,22
Chumbo	130	0,031
Cobre	390	0,092
Concreto	840	0,20
Ferro	450	0,11
Gelo (a - 5°C)	2100	0,50
Mercúrio	140	0,033
Ouro	130	0,031
Prata	230	0,056

Tabela 2 - Calor específico de algumas substâncias.

Fonte: <http://celemfisica2v2.blogspot.com>

2.2.4.3 Densidade

Uma importante propriedade de uma substância é a razão entre sua massa e o seu volume, que é denominada densidade. Em símbolos, pode-se escrever:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (54)$$

É tomado por unidade geralmente o grama por centímetro cúbico (g/cm³). No sistema internacional (SI), a unidade é o quilograma por metro cúbico (kg/m³). A densidade relativa ou simplesmente densidade de um material é o quociente entre a massa específica desse

material e a massa específica de um material. De modo geral, o padrão utilizado é a água destilada a 4°C, cuja densidade absoluta pode ser considerada como 1g/cm³. A densidade é determinada em duas etapas: Primeiro determina-se a massa do corpo cuja densidade se quer medir; em seguida, determina-se a massa de água destilada à temperatura de 4°C, cujo volume seja igual ao do corpo em questão. Obtidos esses dois valores, basta dividir o primeiro pelo segundo, para se estabelecer o valor da densidade. No caso dos gases, utiliza-se como padrão a densidade do ar nas condições normais de temperatura e pressão.

A Tabela 3 apresenta alguns valores de densidade para diferentes substâncias:

Substância	Densidade kg/m ³
Alumínio	2,70 x 10 ³
Chumbo	11,3 x 10 ³
Cobre	8,96 x 10 ³
Concreto	2,7-3,0 x 10 ³
Ferro	7,96 x 10 ³
Gelo	0,92 x 10 ³
Madeira (de lei)	0,6-0,9 x 10 ³
Osso	1,7-2,0 x 10 ³
Ouro	19,3 x 10 ³
Solo (média)	5,52 x 10 ³
Tijolo	1,4-2,2 x 10 ³
Vidro (comum)	2,4-2,8 x 10 ³
Água	1,00 x 10 ³
Água salgada	1,025 x 10 ³
Álcool (etanol)	0,806 x 10 ³
Gasolina	0,68 x 10 ³
Mercúrio	13,6 x 10 ³
Ar	1,293
Hélio	0,1786

Tabela 3 – Densidade de algumas substâncias.

Fonte: Adaptado de Tipler (1985).

2.2.4.4 Difusividade térmica

Analisando a transferência de calor pode-se ver que a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica é uma propriedade importante denominada difusividade térmica α , que tem as dimensões m^2/s . Em símbolos:

$$\alpha = k / (\rho c_p) \quad (55)$$

A difusividade térmica serve para medir a relação entre a condutividade térmica e a sua capacidade em acumular energia térmica. Os materiais que possuem α grande respondem rapidamente as variações do ambiente térmico, enquanto materiais com α pequeno respondem mais lentamente, e levam mais tempo para atingir novas condições de equilíbrio (Incropera e DeWitt, 1992).

3. METODOLOGIA

O estudo decorreu por meio de pesquisas individuais via internet, livros e apostilas que continham informações sobre o conteúdo apresentado, e presença em aulas da disciplina relacionada com o objetivo do projeto. O estudo começou com leituras sobre os assuntos indicados e foi efetuado resolução de alguns exercícios na tentativa da compreensão do mesmo. A seguir apresenta-se todo o formalismo matemático do problema físico tratado nesta pesquisa.

3.1 O modelo diferencial

Considere um corpo esférico submetido a uma condição de contorno de terceira espécie (convecção na superfície) conforme ilustra a Figura 12.

Para $T=f(r,t)$, isto, é a temperatura varia radialmente e com o tempo, a equação (50) pode ser escrita por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (56)$$

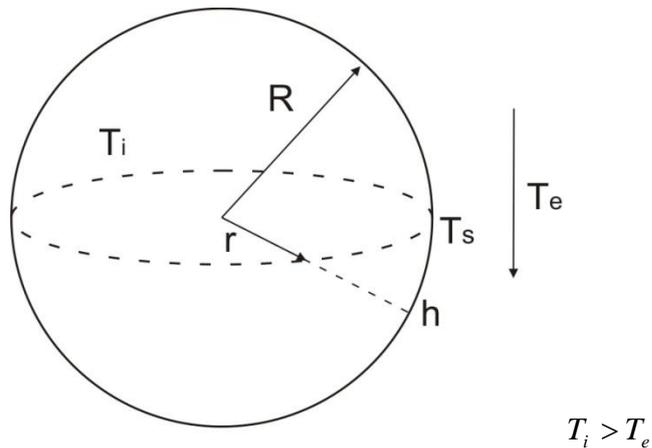


Figura 12 – Sólido esférico com fluido escoando sobre ele.

De acordo com a Figura 12, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$T(r,0) = T_i \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(0,t) \neq \infty \quad (58)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = h(T_s - T_e) = 0 \quad (59)$$

3.2 Solução analítica

Considere a seguinte variável auxiliar:

$$T' = T - T_e \quad (60)$$

Assim, derivando T' com respeito a r , obtém-se:

$$\frac{\partial T'}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (61)$$

$$-k \frac{\partial T'}{\partial r} \Big|_{r=R} = hT'_s \quad (62)$$

e

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial T'}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T'}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T'}{\partial t} \quad (63)$$

Para solução da equação (63) será usada a técnica da separação de variáveis. Para isto, seja $T' = T_1(t) \cdot T_2(r)$. Derivando T' e substituindo na equação (63), e separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \beta^2 T_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_1}{dr} \right) + \beta^2 T_1 = 0 \quad (64)$$

e

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \alpha \beta^2 T_2 = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{dt} + \alpha \beta^2 T_2 = 0 \quad (65)$$

Assim a técnica permitiu a transformação de uma equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias.

As soluções das equações (64) e (65) são as seguintes:

$$T_1(r) = C_1 \frac{\text{sen}(\beta r)}{r} + C_2 \frac{\cos(\beta r)}{r} \quad (66)$$

$$T_2(t) = C_3 e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (67)$$

Desde que $T' = T_1 \cdot T_2$, pode-se escrever:

$$T' = \left(C_1 \frac{\text{sen}(\beta r)}{r} + C_2 \frac{\cos(\beta r)}{r} \right) C_3 e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (68)$$

Como em $r=0$, T' é finita, então $C_2 = 0$, portanto:

$$T'(r, t) = C_1 C_3 \frac{\text{sen}(\beta r)}{r} e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (69)$$

ou ainda,

$$T'(r, t) = C \frac{\text{sen}(\beta r)}{r} e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (70)$$

Derivando T' , obtém-se:

$$\frac{\partial T'}{\partial r} = C \left(\frac{\cos(\beta r) \beta r - \text{sen}(\beta r)}{r^2} \right) e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (71)$$

Aplicando a equação (71) em $r=R$, tem-se:

$$\frac{\partial T'}{\partial r} \Big|_{r=R} = C e^{-\alpha \beta^2 t} \left(\frac{\cos(\beta R) \beta R - \text{sen}(\beta R)}{R^2} \right) \quad (72)$$

Desde que,

$$-k \frac{\partial T'}{\partial r} \Big|_{r=R} = h T'_s \quad (73)$$

tem-se:

$$-k C e^{-\alpha \beta^2 t} \left(\frac{\cos(\beta R) \beta R - \text{sen}(\beta R)}{R^2} \right) = h C \frac{\text{sen}(\beta R)}{R} e^{-\alpha \beta^2 t} \quad (74)$$

$$\frac{-k \cos(\beta R)\beta}{R} + \frac{k \operatorname{sen}(\beta R)}{R^2} = h \frac{\operatorname{sen}(\beta R)}{R} \quad (75)$$

$$-k \cos(\beta R)\beta = \left(h - \frac{k}{R}\right) \operatorname{sen}(\beta R) \quad (76)$$

$$\operatorname{tg}(\beta R) = \frac{-k\beta}{\left(h - \frac{k}{R}\right)} \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta R) = \frac{-k\beta R}{(hR - k)} \quad (77)$$

ou ainda:

$$\operatorname{tg}(\beta_n r) = \frac{-\beta_n r}{(Bi - 1)} \quad (78)$$

onde, Bi é o número de Biot para transferência de calor, definido por:

$$Bi = \frac{hR}{k} \quad (79)$$

Avaliando-se equação (79), verifica-se que o número de Biot é um parâmetro adimensional que quantifica o efeito convectivo na superfície do sólido pelo efeito difusivo no interior do mesmo.

Pelo teorema da unicidade a solução geral será:

$$T'(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sen}(\beta_n r)}{r} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \quad (80)$$

Para obter-se as constantes C_n , usa-se a condição inicial. Assim, em $t=0$, tem-se:

$$T'(t) = T_i - T_e = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sen}(\beta_n r)}{r} \quad (81)$$

multiplicando a equação (81) por $r \operatorname{sen}(\beta_m r)$ e integrando de 0 a R, tem-se:

$$\int_0^R r(T_i - T_e) \operatorname{sen}(\beta_m r) dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(\beta_m r) \operatorname{sen}(\beta_n r) dr \quad (82)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^R \operatorname{sen}(\beta_m r) \operatorname{sen}(\beta_n r) dr \quad (83)$$

Então, pela propriedade de ortogonalidade da função seno, tem-se:

$$\int_0^R r(T_i - T_e) \text{sen}(\beta_n r) dr = C_n \int_0^R \text{sen}^2(\beta_n r) dr \quad (84)$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\int_0^R r(T_i - T_e) \text{sen}(\beta_n r) dr}{\int_0^R \text{sen}^2(\beta_n r) dr} \quad (85)$$

Assim, resolvendo as integrais na equação (85), obtém-se:

$$C_n = \frac{\frac{(T_i - T_e)R^2}{(\beta_n R)^2} [\text{sen}(\beta_n R) - (\beta_n R)\cos(\beta_n R)]}{R \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(2\beta_n R)}{4\beta_n R} \right]} \quad (86)$$

ou

$$C_n = \frac{(T_i - T_e)R^2 [\text{sen}(\beta_n R) - (\beta_n R)\cos(\beta_n R)]}{\frac{R}{2\beta_n R} [\beta_n R - \text{sen}(\beta_n R)\cos(\beta_n R)](\beta_n R)^2} \quad (87)$$

ou ainda:

$$C_n = \frac{2(T_i - T_e) [\text{sen}(\beta_n R) - (\beta_n R)\cos(\beta_n R)]}{[\beta_n R - \text{sen}(\beta_n R)\cos(\beta_n R)](\beta_n R)} \quad (88)$$

Então, a solução geral do problema será:

$$T'(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(T_i - T_e) [\text{sen}(\beta_n R) - (\beta_n R)\cos(\beta_n R)]}{[(\beta_n R) - \text{sen}(\beta_n R)\cos(\beta_n R)](\beta_n R)} \left[\frac{\text{sen}(\beta_n r)}{r} \right] e^{-\alpha \beta_n^2 t} \quad (89)$$

Na forma adimensional tem-se:

$$T^*(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[\text{sen}(\beta_n R) - (\beta_n R)\cos(\beta_n R)]}{[(\beta_n R) - \text{sen}(\beta_n R)\cos(\beta_n R)](\beta_n R)} \left[\frac{\text{sen}(\beta_n r)}{r} \right] e^{-(\beta_n R)^2 F_0} \quad (90)$$

onde

$$T^*(r,t) = \frac{T'}{T_i - T_0} = \frac{T - T_e}{T_i - T_e} \quad (91)$$

A temperatura média da esfera é determinada por:

$$\bar{T}^* = \frac{1}{V} \int_V T^* dV \quad (92)$$

que dá como resultado:

$$\bar{T}^*(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(\beta_n R)^2 F_0} \quad (93)$$

onde,

$$B_n = \frac{6Bi^2}{(\beta_n R)^2 [(\beta_n R)^2 + Bi^2 - Bi]} \quad (94)$$

Nas equações (90) e (93), o parâmetro F_0 é o número de Fourier para a transferência de calor, dado por:

$$F_0 = \frac{\alpha t}{R^2} \quad (95)$$

3.3 Procedimentos Numéricos

Após a resolução analítica da equação diferencial parcial da transferência de calor, desenvolveu-se um código computacional no ambiente Mathematica, para obtenção dos resultados. Estes resultados foram analisados na forma gráfica, via software Grapher e tabelas numéricas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como a transferência de calor em um sólido esta intimamente relacionada às características do material, ao valor do número de Fourier que é função do tempo e ao valor do número de Biot, grandeza relacionada à velocidade da variação da temperatura em um sólido, admitiu-se um sólido regular, homogêneo e esférico de raio fixo 0,01 m, e escolheu-se cinco valores diferentes para o número de Biot, e obteve-se assim a distribuição de temperatura no sólido no decorrer do processo.

Na página a seguir ilustra-se a distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes valores do número de Biot.

4.1 Análise para $Bi=0,01$.

Na Tabela 4, tem-se na primeira coluna os valores do raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura para diferentes números de Fourier. Com os dados da mesma e com a ajuda do software Grapher obteve-se o gráfico ilustrado na Figura 13.

r(m)	T*				
	Fo=0,00288	Fo=0,02592	Fo=0,04896	Fo=0,072	Fo=0,08352
0	0,999999	1	0,99997	0,99981	0,999668
0,000333	0,999999	1	0,999969	0,999808	0,999666
0,000667	1	1	0,999967	0,999802	0,999658
0,001	1	1	0,999964	0,999792	0,999645
0,001333	1	0,999999	0,999959	0,999778	0,999626
0,001667	1	0,999999	0,999952	0,999759	0,999602
0,002	1	0,999999	0,999943	0,999735	0,999571
0,002333	1	0,999998	0,999931	0,999706	0,999535
0,002667	1	0,999997	0,999917	0,999672	0,999491
0,003	1	0,999995	0,999898	0,999631	0,99944
0,003333	1	0,999993	0,999876	0,999583	0,999381
0,003667	1	0,999989	0,999848	0,999528	0,999314
0,004	1	0,999984	0,999815	0,999464	0,999238
0,004333	1	0,999977	0,999775	0,999391	0,999153
0,004667	1	0,999966	0,999726	0,999309	0,999057
0,005	1	0,999951	0,999669	0,999215	0,99895
0,005333	1	0,999931	0,999602	0,999111	0,998832
0,005667	1	0,999904	0,999522	0,998994	0,998702
0,006	1	0,999869	0,99943	0,998864	0,998559
0,006333	1	0,999822	0,999324	0,998721	0,998402
0,006667	1	0,999762	0,999202	0,998563	0,998232
0,007	1	0,999686	0,999064	0,99839	0,998047
0,007333	1	0,999591	0,998908	0,998201	0,997848
0,007667	0,999999	0,999476	0,998733	0,997996	0,997634
0,008	0,999998	0,999336	0,998538	0,997774	0,997404
0,008333	0,999991	0,99917	0,998322	0,997536	0,997158
0,008667	0,999971	0,998976	0,998086	0,99728	0,996897
0,009	0,999924	0,998751	0,997828	0,997008	0,996619
0,009333	0,999824	0,998496	0,997548	0,996718	0,996326
0,009667	0,999645	0,99821	0,997247	0,996411	0,996018
0,01	0,999365	0,997892	0,996925	0,996087	0,995693

Tabela 4 – Temperatura adimensional em função do raio da esfera para $Bi = 0,01$ e diferentes números de Fourier.

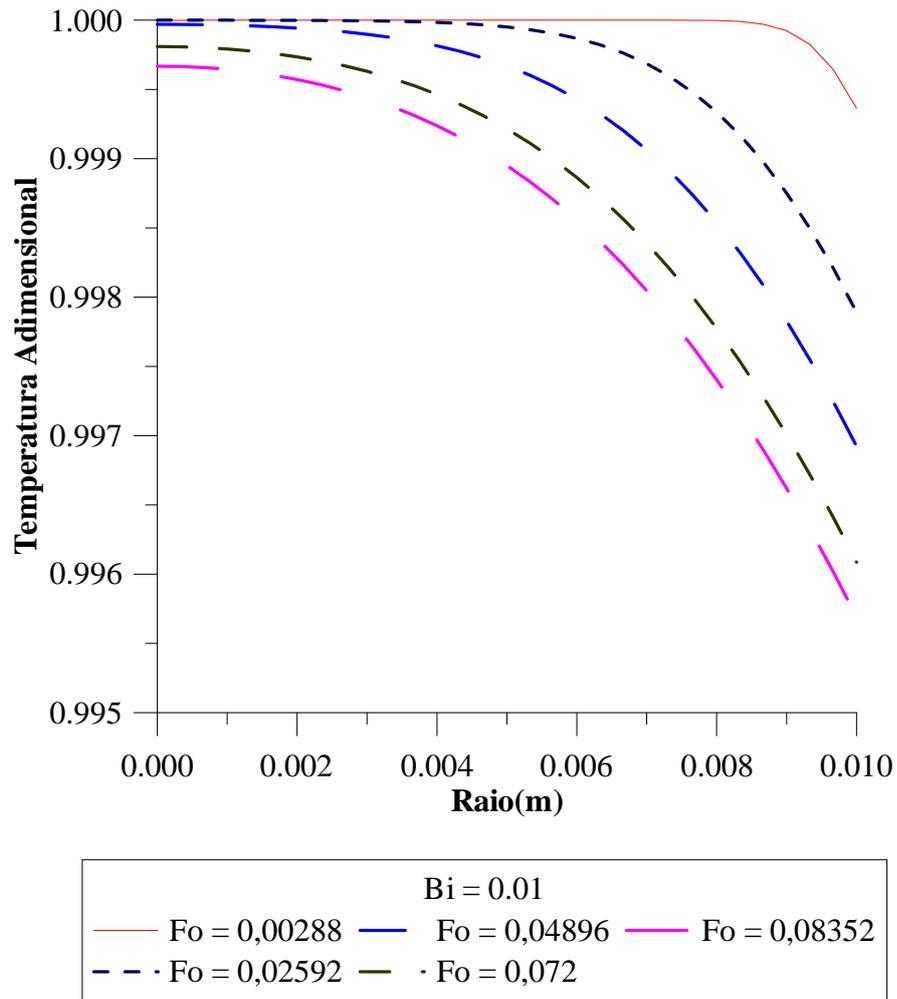


Figura 13 – Temperatura adimensional em função da posição radial para diferentes Fo e Bi = 0,01.

Avaliando a Figura 13 foi observado que devido o valor de Bi ser muito pequeno, não houve variação significativa da temperatura para o tempo analisado, ao ponto de não ocorrer o resfriamento total do sólido. Porém pode-se observar que para um tempo maior a temperatura diminuirá gradativamente.

4.2 Análise para $Bi=0,05$:

Na Tabela 5, tem-se na primeira coluna os valores para o raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura para diferentes números de Fourier. Com os dados da mesma e com a ajuda do software Grapher obteve-se o gráfico ilustrado na Figura 14.

r(m)	T*				
	Fo=0.00288	Fo=0.02592	Fo=0.04896	Fo=0.072	Fo=0.08352
0	0,999982	0,99999	0,999843	0,999051	0,998348
0,000333	0,999983	0,99999	0,99984	0,999041	0,998335
0,000667	0,999986	0,99999	0,99983	0,999012	0,998297
0,001	0,999987	0,99999	0,999813	0,998962	0,998232
0,001333	0,999987	0,999989	0,999788	0,998891	0,998139
0,001667	0,999987	0,999988	0,999754	0,998798	0,998019
0,002	0,999988	0,999986	0,99971	0,998681	0,997868
0,002333	0,999989	0,999983	0,999653	0,998538	0,997686
0,002667	0,999989	0,999978	0,99958	0,998366	0,99747
0,003	0,99999	0,99997	0,99949	0,998163	0,997217
0,003333	0,999991	0,999959	0,999379	0,997926	0,996927
0,003667	0,999992	0,999941	0,999242	0,997651	0,996594
0,004	0,999993	0,999916	0,999076	0,997335	0,996218
0,004333	0,999993	0,999879	0,998876	0,996974	0,995794
0,004667	0,999994	0,999827	0,998637	0,996565	0,99532
0,005	0,999995	0,999755	0,998353	0,996103	0,994792
0,005333	0,999996	0,999656	0,998017	0,995585	0,994207
0,005667	0,999997	0,999522	0,997624	0,995007	0,993562
0,006	0,999998	0,999344	0,997167	0,994364	0,992855
0,006333	0,999999	0,999112	0,99664	0,993654	0,992082
0,006667	1	0,998813	0,996037	0,992872	0,991241
0,007	1	0,998436	0,99535	0,992016	0,990329
0,007333	1	0,997966	0,994576	0,991082	0,989344
0,007667	0,999998	0,997391	0,993707	0,990069	0,988285
0,008	0,999989	0,996696	0,992741	0,988975	0,987151
0,008333	0,999956	0,995871	0,991674	0,987797	0,98594
0,008667	0,999859	0,994906	0,990503	0,986536	0,984651
0,009	0,999622	0,993792	0,989226	0,985191	0,983286
0,009333	0,999124	0,992525	0,987843	0,983762	0,981843
0,009667	0,998229	0,991104	0,986356	0,982249	0,980325
0,01	0,996833	0,98953	0,984765	0,980655	0,97873

Tabela 5 – Temperatura adimensional em função do raio da esfera para $Bi = 0,05$ e diferentes números de Fourier.

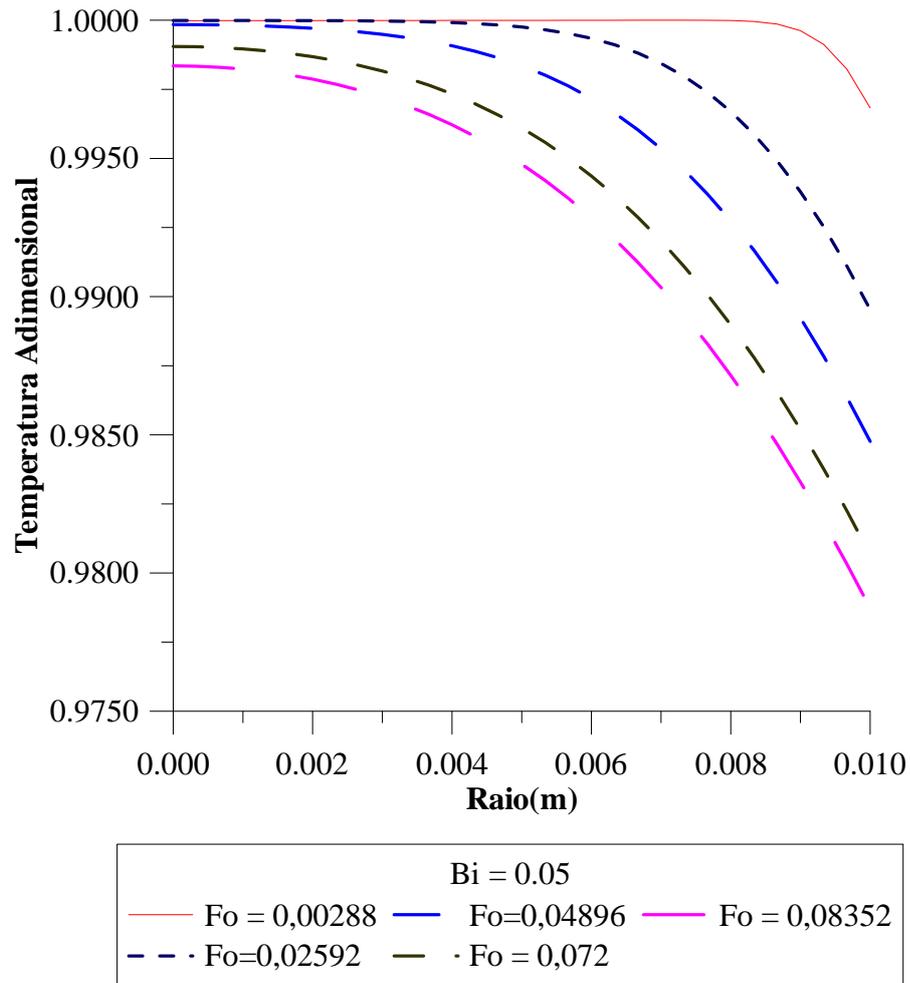


Figura 14 - Temperatura adimensional em função da posição radial para diferentes Fo e Bi = 0,05.

Assim como na Figura 13, o resfriamento do sólido para o tempo analisado praticamente não ocorreu, embora a temperatura tenha variado um pouco mais, porém ainda insignificante. Verifica-se uma leve variação da temperatura radialmente.

4.3 Análise para $Bi=1,00$:

Na Tabela 6, tem-se na primeira coluna os valores para o raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura para diferentes números de Fourier. Com os dados da mesma e com a ajuda do software Grapher obteve-se o gráfico ilustrado na Figura 15.

r(m)	T*				
	Fo=0.00288	Fo=0.02592	Fo=0.04896	Fo=0.072	Fo=0.08352
0	0,999921	0,999978	0,99721	0,983184	0,97117
0,000333	0,999947	0,999976	0,997151	0,983016	0,970953
0,000667	0,999996	0,999971	0,996972	0,982508	0,970299
0,001	1,00002	0,999961	0,996665	0,981652	0,9692
0,001333	1	0,999944	0,996213	0,980432	0,967644
0,001667	0,99999	0,999917	0,995597	0,978828	0,965613
0,002	0,999996	0,999874	0,99479	0,976812	0,963085
0,002333	1,00001	0,999808	0,993756	0,974352	0,960034
0,002667	1	0,999707	0,992454	0,971412	0,956429
0,003	0,999995	0,999555	0,990836	0,967949	0,952238
0,003333	0,999996	0,999328	0,988844	0,963919	0,947424
0,003667	1	0,998995	0,986413	0,959271	0,941948
0,004	1	0,998511	0,983472	0,953954	0,935772
0,004333	0,999997	0,99782	0,979941	0,947915	0,928855
0,004667	0,999996	0,996847	0,975735	0,9411	0,921158
0,005	1	0,995499	0,97076	0,933455	0,912642
0,005333	1	0,99366	0,964924	0,924928	0,90327
0,005667	0,999999	0,991191	0,958128	0,915469	0,893009
0,006	0,999996	0,987931	0,950275	0,905033	0,88183
0,006333	1	0,983695	0,941272	0,893579	0,869708
0,006667	1	0,978282	0,931029	0,881074	0,856623
0,007	0,999998	0,971475	0,919466	0,867491	0,842564
0,007333	0,999984	0,963055	0,906515	0,852813	0,827525
0,007667	0,999942	0,952808	0,892121	0,837031	0,811507
0,008	0,999756	0,940536	0,876245	0,820149	0,794522
0,008333	0,9991	0,92607	0,85887	0,802178	0,776588
0,008667	0,997211	0,909283	0,839996	0,783143	0,757731
0,009	0,992605	0,890099	0,819648	0,763079	0,737987
0,009333	0,983014	0,868502	0,797871	0,742032	0,717398
0,009667	0,965893	0,844542	0,774734	0,720059	0,696017
0,01	0,939441	0,818334	0,750325	0,697224	0,673901

Tabela 6 – Temperatura adimensional em função do raio da esfera para $Bi = 1,00$ e diferentes números de Fourier.

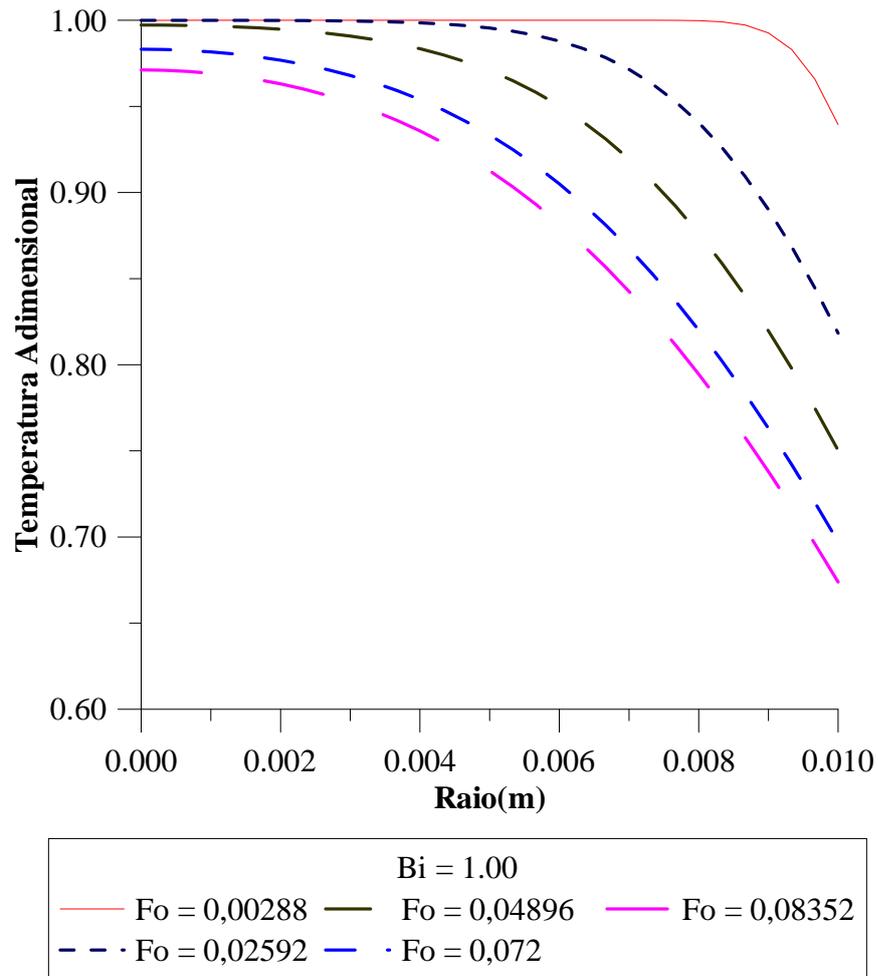


Figura 15 - Temperatura adimensional em função da posição radial para diferentes Fo e $Bi = 1,00$.

Neste caso, observou-se uma diminuição considerável da temperatura em detrimento dos valores de números de Biot analisados anteriormente. Pôde-se assim contemplar o aumento da velocidade de resfriamento do sólido na direção radial (altos gradientes de temperatura) e ao longo do tempo.

4.4 Análise para $Bi=5,00$.

Na Tabela 7, tem-se na primeira coluna os valores para o raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura para diferentes números de Fourier. Com os dados da mesma e com a ajuda do software Grapher obteve-se o gráfico ilustrado na Figura 16.

r(m)	T*				
	Fo=0.00288	Fo=0.02592	Fo=0.04896	Fo=0.072	Fo=0.08352
0	0,997257	0,999907	0,989612	0,943335	0,90707
0,000333	0,997963	0,9999	0,989403	0,942811	0,906435
0,000667	0,999454	0,999878	0,988765	0,94123	0,904522
0,001	1,0005	0,999836	0,987672	0,938569	0,901317
0,001333	1,00048	0,999767	0,986074	0,934793	0,896794
0,001667	0,999901	0,999656	0,983906	0,929849	0,890919
0,002	0,999631	0,999483	0,981079	0,923675	0,883649
0,002333	0,999913	0,999217	0,977486	0,916194	0,874934
0,002667	1,00025	0,998813	0,972999	0,907325	0,864721
0,003	1,00018	0,998208	0,967468	0,896974	0,852953
0,003333	0,999881	0,997312	0,960726	0,885046	0,839571
0,003667	0,999799	0,996005	0,952585	0,871442	0,824519
0,004	1,00001	0,994125	0,942844	0,856066	0,807744
0,004333	1,00017	0,991465	0,931288	0,838826	0,789201
0,004667	1,00007	0,987757	0,917694	0,819636	0,768852
0,005	0,999883	0,982673	0,901838	0,798426	0,746673
0,005333	0,999888	0,975818	0,883501	0,775137	0,722654
0,005667	1,00005	0,966729	0,862477	0,749733	0,696801
0,006	1,00012	0,954885	0,838582	0,7222	0,669141
0,006333	1,00002	0,939717	0,811661	0,692548	0,639718
0,006667	0,999904	0,920629	0,781602	0,660818	0,608602
0,007	0,999927	0,897031	0,748342	0,62708	0,575885
0,007333	0,999997	0,868372	0,711874	0,591438	0,541682
0,007667	0,999817	0,834181	0,672258	0,554028	0,506132
0,008	0,998859	0,794115	0,629621	0,515019	0,469396
0,008333	0,995818	0,747997	0,584164	0,474609	0,431658
0,008667	0,987423	0,695857	0,53616	0,43303	0,39312
0,009	0,967226	0,637955	0,485952	0,390536	0,354002
0,009333	0,925857	0,574795	0,433946	0,347407	0,314537
0,009667	0,853888	0,507118	0,380605	0,303939	0,27497
0,01	0,746617	0,435883	0,326435	0,260442	0,235552

Tabela 7 – Temperatura adimensional em função do raio da esfera para $Bi = 5,00$ e diferentes números de Fourier.

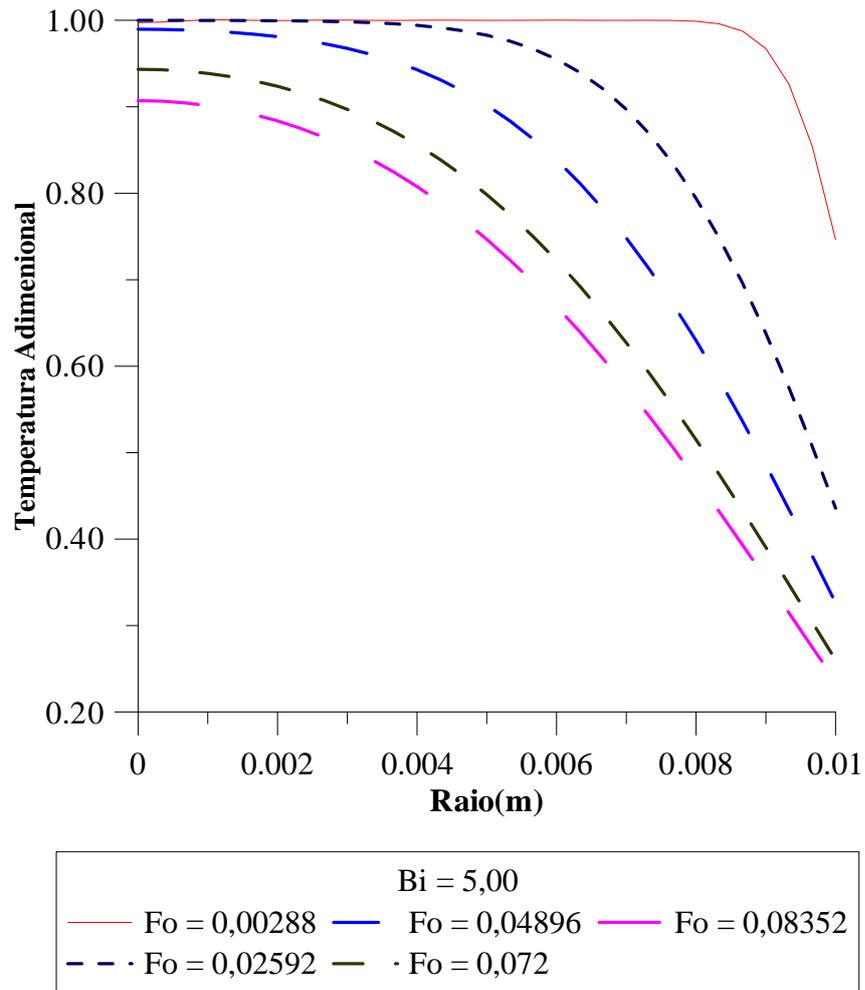


Figura 16 – Temperatura adimensional em função da posição radial para diferentes Fo e Bi = 5,00.

Com o aumento do número de Biot o resfriamento processou-se mais rápido, o que pôde ser observado pela maior diminuição da temperatura, tanto radialmente quanto ao longo do tempo.

4.5 Análise para Bi infinito.

Na Tabela 8, tem-se na primeira coluna os valores para o raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura para diferentes números de Fourier Com os dados da mesma e com a ajuda do software Grapher obteve-se o gráfico ilustrado na Figura 17.

r(m)	T*				
	Fo=0.00288	Fo=0.02592	Fo=0.04896	Fo=0.072	Fo=0.08352
0	0,997651	0,999546	0,969102	0,869436	0,804301
0,000333	0,998475	0,999516	0,968562	0,868438	0,803219
0,000667	0,999954	0,99942	0,966924	0,865434	0,79997
0,001	1,00051	0,999241	0,964133	0,860404	0,794548
0,001333	1,00005	0,998947	0,9601	0,853313	0,78694
0,001667	0,99969	0,998489	0,954698	0,844114	0,777135
0,002	0,999954	0,997791	0,94777	0,832752	0,765116
0,002333	1,00023	0,996746	0,939128	0,819168	0,750873
0,002667	1,00005	0,995207	0,928556	0,803299	0,734397
0,003	0,99982	0,99297	0,915817	0,785088	0,715686
0,003333	0,999953	0,989767	0,90066	0,764481	0,69475
0,003667	1,00015	0,985249	0,882825	0,741441	0,671611
0,004	1,00005	0,97898	0,862055	0,715946	0,646308
0,004333	0,999865	0,970424	0,838108	0,687999	0,6189
0,004667	0,999952	0,958946	0,810765	0,657626	0,589465
0,005	1,00012	0,94382	0,779848	0,62489	0,558109
0,005333	1,00005	0,924248	0,745232	0,589885	0,52496
0,005667	0,999883	0,899391	0,706858	0,552744	0,490176
0,006	0,999951	0,868419	0,664746	0,51364	0,453937
0,006333	1,00011	0,830569	0,619006	0,472787	0,416454
0,006667	1,00003	0,785216	0,569842	0,430435	0,377961
0,007	0,999776	0,731954	0,517562	0,386875	0,338712
0,007333	0,999354	0,670664	0,462574	0,342427	0,298985
0,007667	0,997365	0,601585	0,405384	0,297444	0,25907
0,008	0,989527	0,525349	0,346583	0,252301	0,219271
0,008333	0,966173	0,443004	0,28684	0,207386	0,179897
0,008667	0,908878	0,355993	0,226876	0,163099	0,141258
0,009	0,791639	0,266097	0,16745	0,119837	0,103661
0,009333	0,59317	0,175351	0,109331	0,077989	0,067402
0,009667	0,316594	0,085927	0,053275	0,037928	0,032762
0,01	0	0	0	0	0

Tabela 8 – Temperatura adimensional em função do raio da esfera para Bi infinito e diferentes números de Fourier.

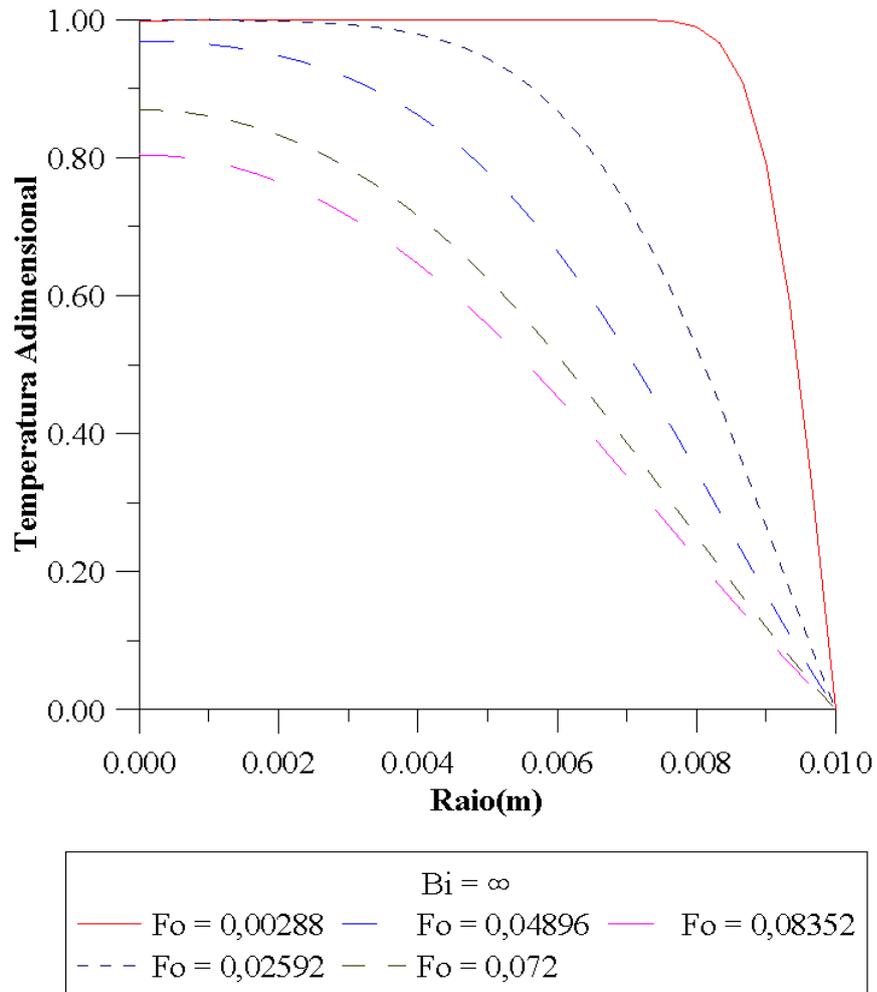


Figura 17 - Temperatura adimensional em função da posição radial para diferentes Fo e Bi infinito.

Nota-se claramente que para Bi infinito ocorreu o resfriamento total na superfície do sólido nos primeiros instantes do processo, e que a temperatura no interior do mesmo decaiu mais rápido que aqueles apresentados nos gráficos mostrados anteriormente. Esta condição física equivale a uma condição de contorno de 1ª espécie (equilíbrio térmico) na superfície.

4.6 Análise para diferenciar os números de Biot.

Para uma melhor análise do processo gerou-se a Tabela 9 e seu referido gráfico contendo a temperatura do processo para $Fo = 0,08352$ e diferentes valores de Bi analisados anteriormente.

r(m)	T*				
	Bi=0.01	Bi=0.05	Bi=1.00	Bi=5.00	Bi=1*10 ³⁰
0	0,999668	0,998348	0,97117	0,90707	0,804301
0,000333	0,999666	0,998335	0,970953	0,906435	0,803219
0,000667	0,999658	0,998297	0,970299	0,904522	0,79997
0,001	0,999645	0,998232	0,9692	0,901317	0,794548
0,001333	0,999626	0,998139	0,967644	0,896794	0,78694
0,001667	0,999602	0,998019	0,965613	0,890919	0,777135
0,002	0,999571	0,997868	0,963085	0,883649	0,765116
0,002333	0,999535	0,997686	0,960034	0,874934	0,750873
0,002667	0,999491	0,99747	0,956429	0,864721	0,734397
0,003	0,99944	0,997217	0,952238	0,852953	0,715686
0,003333	0,999381	0,996927	0,947424	0,839571	0,69475
0,003667	0,999314	0,996594	0,941948	0,824519	0,671611
0,004	0,999238	0,996218	0,935772	0,807744	0,646308
0,004333	0,999153	0,995794	0,928855	0,789201	0,6189
0,004667	0,999057	0,99532	0,921158	0,768852	0,589465
0,005	0,99895	0,994792	0,912642	0,746673	0,558109
0,005333	0,998832	0,994207	0,90327	0,722654	0,52496
0,005667	0,998702	0,993562	0,893009	0,696801	0,490176
0,006	0,998559	0,992855	0,88183	0,669141	0,453937
0,006333	0,998402	0,992082	0,869708	0,639718	0,416454
0,006667	0,998232	0,991241	0,856623	0,608602	0,377961
0,007	0,998047	0,990329	0,842564	0,575885	0,338712
0,007333	0,997848	0,989344	0,827525	0,541682	0,298985
0,007667	0,997634	0,988285	0,811507	0,506132	0,25907
0,008	0,997404	0,987151	0,794522	0,469396	0,219271
0,008333	0,997158	0,98594	0,776588	0,431658	0,179897
0,008667	0,996897	0,984651	0,757731	0,39312	0,141258
0,009	0,996619	0,983286	0,737987	0,354002	0,103661
0,009333	0,996326	0,981843	0,717398	0,314537	0,067402
0,009667	0,996018	0,980325	0,696017	0,27497	0,032762
0,01	0,995693	0,97873	0,673901	0,235552	0

Tabela 9 – Temperatura adimensional na esfera para diferentes valores de Bi e $Fo = 0,08352$.

Na Tabela 9, tem-se na primeira coluna os valores para o raio, e nas colunas subsequentes os valores da temperatura adimensional para diferentes valores de Bi. Com os dados da mesma e com a ajuda do Grapher obteve-se a Figura 18. Tornou-se evidente que a medida que o número de Biot cresce, a variação da temperatura radial aumenta.

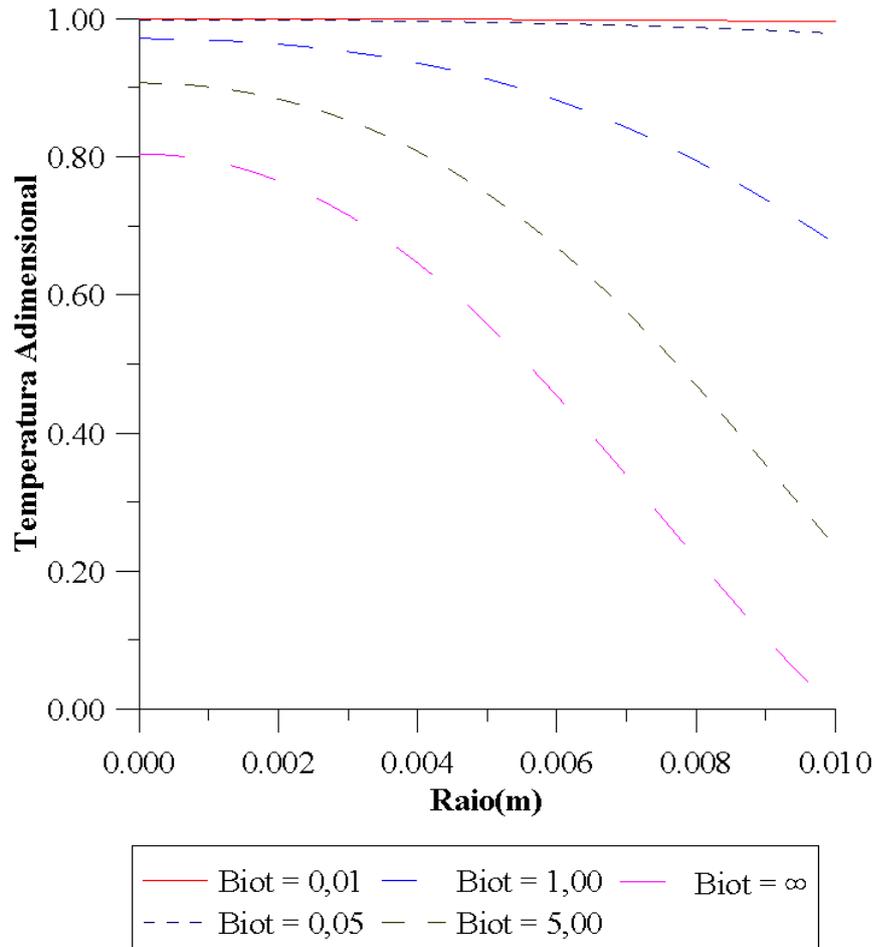


Figura 18 – Temperatura adimensional ao longo do raio da esfera, para diferentes Bi e $Fo = 0,08352$.

Para uma visão mais ampla do processo geram-se a Tabela 10 e o gráfico contendo a temperatura média no sólido em função do número de Fourier (Fo) para os valores de Bi já analisados (Figura 19).

r(m)	T*				
	Bi=0.01	Bi=0.05	Bi=1	Bi=5	Bi=1*10 ³⁰
0	1	1	1	1	1
0,00288	0,999914	0,99957	0,991709	0,964419	0,826967
0,00576	0,999827	0,99914	0,983707	0,934064	0,760366
0,00864	0,999741	0,99871	0,975892	0,906586	0,711266
0,01152	0,999655	0,998281	0,96823	0,881197	0,671229
0,0144	0,999568	0,997852	0,9607	0,857463	0,636983
0,01728	0,999482	0,997423	0,953286	0,835102	0,606852
0,02016	0,999396	0,996995	0,94598	0,813916	0,579838
0,02304	0,99931	0,996567	0,938772	0,793754	0,555292
0,02592	0,999223	0,996139	0,931658	0,774502	0,532763
0,0288	0,999137	0,995712	0,92463	0,756066	0,511923
0,03168	0,999051	0,995285	0,917685	0,73837	0,492524
0,03456	0,998965	0,994858	0,910819	0,721349	0,474372
0,03744	0,998879	0,994432	0,904029	0,704949	0,457316
0,04032	0,998793	0,994005	0,897311	0,689124	0,44123
0,0432	0,998706	0,993579	0,890663	0,673832	0,426012
0,04608	0,99862	0,993154	0,884083	0,659039	0,411578
0,04896	0,998534	0,992728	0,877568	0,644714	0,397854
0,05184	0,998448	0,992303	0,871117	0,630827	0,384778
0,05472	0,998362	0,991878	0,864727	0,617354	0,372298
0,0576	0,998276	0,991453	0,858397	0,604272	0,360367
0,06048	0,99819	0,991028	0,852126	0,59156	0,348944
0,06336	0,998103	0,990604	0,845912	0,579201	0,337993
0,06624	0,998017	0,99018	0,839754	0,567178	0,327483
0,06912	0,997931	0,989756	0,83365	0,555473	0,317384
0,072	0,997845	0,989332	0,8276	0,544074	0,307672
0,07488	0,997759	0,988908	0,821602	0,532967	0,298324
0,07776	0,997673	0,988485	0,815655	0,522139	0,289318
0,08064	0,997587	0,988062	0,809759	0,51158	0,280636
0,08352	0,997501	0,987639	0,803912	0,501279	0,272261

Tabela 10 – Temperatura média adimensional da esfera em função do número de Fourier para diferentes valores de Bi.

Na Tabela 10, tem-se na primeira coluna os valores para Fo , e nas colunas subsequentes os valores da temperatura média adimensional para diferentes valores de número de Biot. Com os dados da mesma e com a ajuda do Grapher obteve-se o seguinte gráfico ilustrado na Figura 19.

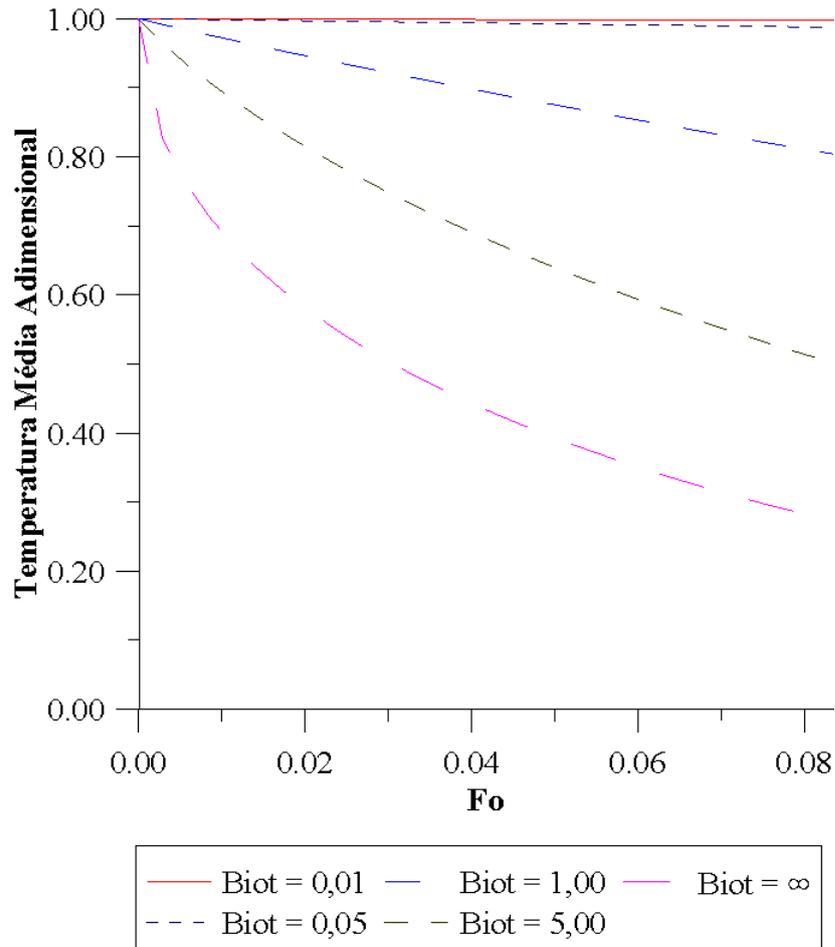


Figura 19 – Temperatura média adimensional da esfera em função do número de Fourier para diferentes números de Biot.

Como esperado a variação de temperatura esta fortemente relacionada com o número de Biot, o que reflete na temperatura média. Observou-se que quanto menor o valor de Biot menor a variação da temperatura média ao longo do tempo. O mesmo acontece com o aumento da variação da temperatura média para o aumento do número de Biot.

Como comentários finais, pôde-se perceber a importância do uso das equações diferenciais parciais, para obter resultados específicos e precisos de um problema físico. Isto torna-se mais fáceis com o uso da computação numérica. Vale salientar que o estudo foi centrado em parâmetros adimensionais que generaliza os resultados independente do material e condições iniciais de contorno da esfera. No entanto é necessário um estudo mais aprofundado e maiores testes com materiais, geometrias e processos físicos reais, como secagem ou resfriamento de frutas usando dados reais em tempo real.

Ficou evidente a necessidade da utilização de softwares como o Mathematica e o Grapher, que utilizam a computação numérica para gerar os resultados, simplificando assim a criação dos gráficos e os cálculos da equação usada, tornando mais rápido a finalização dos testes aplicados.

5. CONCLUSÕES

Durante o estudo percebeu-se a importância da pesquisa da transferência de calor e sua aplicação no setor industrial, uma vez que grandes empresas precisam de resultados específicos sobre o aquecimento e resfriamento de seus produtos.

A compreensão de conteúdos sobre equações diferenciais parciais ficou mais clara depois da pesquisa, além do conhecimento mais amplo sobre os meios de transferências de calor. A pesquisa em si, foi focada na condução, mais pode-se sugerir futuros estudos no meio de transferência de calor, com o foco na radiação ou em outras formas geométricas para atender a necessidade das empresas e do conhecimento científico.

De forma geral conclui-se que:

- a) A temperatura no interior da esfera decresce radialmente para qualquer tempo do processo.
- b) Quanto maior o número de Biot, mais rápido ocorre o resfriamento do sólido.
- c) Quanto menor o número de Biot, mais lento é o processo de resfriamento do material.
- d) Que quanto maior o sólido, dependendo do número de Biot ele pode ter um resfriamento rápido ou lento.
- e) De uma forma geral a transferência de calor é função das características do material, do tempo envolvido no processo e do tamanho do sólido.

6. REFERÊNCIAS

INCROPERA, F. P., DeWITT, D. P., 1992, Fundamentos de Transferência de Calor e de massa; School of Mechanical Engineering Purdue University, p 2-31.

TIPLER, P. A., Tipler/1b Física; traduzido por Horacio de Macedo. -2ª Ed. – rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

STENSMANN, B. H. W., Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física; Universidade Federal do Rio Grande do Sul [consulta, 2011-04-03]. Disponível na (http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008_02/Berenice/aula3.html).

WORDPRESS, Rogério física [consulta, 2011-03-28] Disponível na (<http://rogeriofisica.wordpress.com/2010/03/14/conveccao-e-radiacao/>).

GOMES, J. M., NUNES, E. L., VENTURA, D. R., FERRAZ, I. D., FARIA, J. A., FARIA, J. A., Portal do Professor [consulta, 2011-03-28]. Disponível na (<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=7715>).