Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
Centro de Ciências e Tecnologia - CCT
Licenciatura Plena em Matemática

Joselito Elias de Araújo

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Campina Grande, PB
Junho - 2011

Joselito Elias de Araújo

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como pré-requisito para a obtenção do título de Graduado no curso de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande, PB

Junho - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

Ar12e Araújo, Joselito Elias de.

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações [manuscrito] / Joselito Elias de Araújo. – 2011.

45 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Equações Diferenciais - Aplicações. 2. Equações Diferenciais Ordinárias. 3. Aprendizagem – Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.35

JOSELITO ELIAS DE ARAÚJO

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia - CCTda Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como pré-requisito para a obtenção do título de Graduadono curso de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 22 / 06 / 2011

Banca Examinadora

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Ms. Luciano dos Santos Ferreira
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Luiz Lima de Oliveira Junior

Prof. Ms. Luiz Lima de Oliveira Júnior
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a meus pais, José Araújo Filho e Maria Elias de Araújo, a quem honro pelo esforço com o qual me mantiveram na escola, permitindo-me alcançar os objetivos desejados e a minha esposa Luzineide que tanto contribuiu para essa realização.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e a força que tem me dado todos os dias e as pessoas do meu convívio que acreditaram e contribuíram, mesmo que indiretamente, para a conclusão deste curso.

Aos meus pais José Araújo Filho e Maria Elias de Araújo, pelo amor e pela paciência que tem me doado todo esse tempo. Por terem feito o possível e o impossível para me oferecer a oportunidade de estudar, acreditando e respeitando minhas decisões e nunca deixando que as dificuldades acabassem com os meus sonhos.

A minha esposa Luzineide do N. Silva, por ter sentido junto comigo, todas as angústias e felicidades, acompanhando cada passo de perto. Pelo amor, amizade, e apoio depositados, além da companhia por todos esses anos.

Ao meu orientador Aldo Trajano, pelo empenho, paciência e compromisso e todos os professores que muito contribuíram para minha formação.

Aos amigos de turma pelo convívio diário e pelas agradáveis lembranças que serão eternamente guardadas, em especial a José Elias, Arthur, Samara, Leandro, Luana e Janaína.

Resumo

Neste trabalho estudamos as Equações e os Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Estudamos também a existência e a unicidade para solução das Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem. Aliado a essa teoria vamos fazer três aplicações tais como: Infecção e Propagação do vírus HIV (nesta aplicação vamos estudar modelos matemáticos e sua representação a um fenômeno real observado), Equilíbrio entre duas forças (vamos usar a teoria das Equações Diferenciais e aplicar no estudo de um fenômeno físico) e o problema da Braquistrócrona, que consiste na busca de uma equação que esteja associada ao movimento de uma partícula (para encontrarmos a equação associada ao movimento dessa partícula vamos fazer uso do Cálculo Variacional e da Equação de Euler-Lagrange).

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Vírus HIV, Problema da Braquistrócrona, Equilíbrio.

Abstract

In this paper we study the equations and systems of Ordinary Differential Equations First Order. We also study the existence and uniqueness for solution of Ordinary Differential Equations of First Order. Allied to this theory will make three applications such as: Infection and propagation of the HIV virus (this study we application mathematical models and their representation to a real phenomenon observed), Balancing two forces (we use the theory of differential equations and applied to the study of a physical phenomenon) and the problem of Braquistrocrona, which consists in finding an equation that is associated with the motion of a particle (to find the equation associated the movement of this particle will make use of variational calculus and equation Euler-Lagrange).

Keywords: Differential Equations, HIV Virus, Braquistrocrona Problem, Balance.

Sumário

Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias começa com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII, motivados por problemas físicos. Em fins do século XVIII a teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das ferramentas mais importante e eficaz para pesquisa científica e tecnológica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros foram decisivas no desenvolvimento do Cálculo das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Fluídos e outros.

A maioria das leis da Física, Biologia, Química e Ciências Sociais encontram suas expressões naturais nas Equações Diferenciais. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícitas. Inicialmente, procurava-se expressar as soluções em termos de funções elementares, um dos métodos mais usados era procurar reduzir o problema de obtenção da solução ao cálculo de primitivas. Entretanto, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito pequeno.

Essa constatação gerou a busca de novos métodos e surgiu assim, no século XIX, o uso das séries de funções. Esse método surge dentro do estudo das Equações Diferenciais Parciais, em cuja resolução aparecem Equações Diferenciais Ordinárias. O rigor que a Análise ganhava no decorrer do século XIX começou a pôr em dúvida certos métodos onde às operações com séries eram feitas um tanto descuidadamente. Foi nesta fase que surgiu os Teoremas de Existência e Unicidade, a importância desses teoremas reside em que, sabendo-se a priori da existência de solução, sua busca através de processos informais se torna justificável e promissor. Os teoremas de existência e unicidade marcam, por assim dizer, o início da fase moderna, que se define com Poincaré, no final do século XIX.

Agregado ao estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, vamos mostrar que os modelos matemáticos e computacionais tem demonstrado sua potecialidade de previsão ao longo de muitos anos em diversas áreas. Pesquisadores da área Biológica descubriram, que esses modelos somados à computadores de alto desempenho podem ser aliados importantes no combate à doenças causadas pelo vírus da AIDS (síndrome da imunodeficiência adquirida).

O termo modelo matemático significa que existe um sistema de equações matemáticas, que descrevem um determinado problema de maneira quantitativa ou qualitativa muito próximo do fenômeno real observado.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 apresentamos os conceitos e as definições a respeito das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, modelamos uma aplicação com o objetivo de facilitar o entendimento da teoria, expomos também à teoria sobre os Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, seguido pelo Teorema da Existência e Unicidade para soluções de Equações Diferenciais Ordinárias ou também conhecido como: Problema de Cauchy para um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias.

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados, ou seja, algumas aplicações voltadas para a teoria estudada no capítulo 1. Estudamos problemas como: Epidemias (Infecção e Propagação de Vírus usando modelos matemáticos), Equilíbrio entre duas forças e o Problema da Braquistócrona. Neste capítulo tentamos mostrar a importância dos modelos matemáticos (conjunto de símbolos matemáticos que representam de alguma forma o objeto estudado) consiste em ter uma linguagem concisa que expressa nossas idéias de maneira clara e sem ambigüidade.

No capítulo 3 apresentamos uma teoria auxiliar para o desenvolvimento deste trabalho.

1 Equações Diferenciais Odinárias

1.1. Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

As Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1.1}$$

onde $p : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $q : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, definidas em um intervalo aberto (a, b).

Uma função $y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (1.1), se ela for diferenciável e satisfazer a equação

$$y' = \frac{dy}{dt},$$

onde y' é a derivada de y com relação a variável independente t.

Analisando a equação (1.1) podemos observar dois problemas básicos.

1. Determinar a solução geral da equação (1.1)
2. Determinar a solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} + p(t)y & = & q(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

onde, $t_0 \in (a, b)$ e y_0 são os dados iniciais. Veremos ainda que o problema de valor inicial possui uma e somente uma solução.

Quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem obtemos uma família de solução que dependem de uma constante arbitrária.

O tipo mais simples da equação (1.1) é a equação de crescimento exponencial.

$$\frac{dy}{dt} = ky, \tag{1.3}$$

onde k é uma constante.

A função $y(t) = e^{kt}$ é uma solução de (1.3), assim como qualquer de seus múltiplos ce^{kt}, onde c é uma constante abitrária.

Afirmamos que a solução geral de (1.3) é ce^{kt}, de fato dada uma solução qualquer $y(t)$ de (1.3), diferenciando a expressão

$$y(t) = e^{-kt}$$

e usando a equação (1.3), obtemos:

$$\frac{d}{dt}y(t)e^{-kt} = \frac{dy}{dt}e^{-kt} - ky(t)e^{-kt} = 0.$$

O que implica

$$y(t)e^{-kt} = c, \quad \text{ou seja,} \quad y(t) = ce^{kt}.$$

Vamos resolver o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= ky \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Usaremos o fato de (1.3) ter solução geral, e a provável solução desse problema de valor inicial ser da forma $y(t) = ce^{kt}$.

Uma solução do problema de valor inicial (1.4) em um inervalo aberto (a, b) é uma função $y(t)$ que está definida em (a, b), tal que $\frac{dy}{dt}$ também está definida neste intervalo e satisfaz (1.4).

Sabemos que a solução de (1.4) é da forma $y(t) = ce^{kt}$ e utilizando-se o dado valor inicial determinamos a constante c: assim, $y(t_0) = ce^{kt_0}$ o que implica que $y(t_0) = y_0$, então a solução do problema é dada por

$$y(t) = y_0e^{k(t-t_0)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se a função $p(t) = 0$, então a equação (1.1) é chamada de equação linear homogênea e torna-se:

$$\frac{dy}{dt} = q(t). \tag{1.5}$$

A solução geral de (1.5) é dada integrando-se ambos os membros da equação, ou seja,

$$\int \left(\frac{dy}{dt}\right) dt = \int q(t)dt + c \Rightarrow y(t) = \int q(t)dt + c.$$

Agora, considere equações da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} = p(t)y + q(t). \tag{1.6}$$

Vamos definir uma função auxiliar $\mu(t)$, de tal forma que ao multiplicarmos (1.6) por esta função a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, do tipo (1.5) a qual já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada fator integrante da equação linear. Seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

vamos mostrar que esta função é um fator integrante da equação (1.6). Derivando $\mu(t)$, temos:

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt}\left(\int p(t)dt\right)' = e^{\int p(t)dt}p(t) = \mu(t)p(t) \tag{1.7}$$

Agora, multiplicando (1.6) por $\mu(t)$, obtemos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \tag{1.8}$$

como

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t)$$

de (1.7), podemos reescrever (1.8) da seguinte forma:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t). \tag{1.9}$$

Observe que o lado esquerdo de (1.9) é a derivada de um produto, daí, podemos reescrever-la do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)q(t) \tag{1.10}$$

fazendo

$$Y(t) = \mu(t)y(t) \text{ e } f(t) = \mu(t)q(t),$$

a equação (1.10) torna-se

$$\frac{dY}{dt} = f(t).$$

Assim, a equação (1.9) é uma equação do tipo (1.5). Portanto a solução geral de (1.10) é dada por:

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c$$

Como $\mu(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos que, a solução geral de (1.6) é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)q(t) + c.$$

Agora, vamos mostrar como podemos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Comparando as equações:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \quad e \quad \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t)$$

podemos observar que $\mu(t)$ deve ser uma função que satisfaz a equação:

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Supondo $\mu(t) \neq 0$ e multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{\mu(t)}$, temos:

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\mu(t)}p(t)\mu(t) \Rightarrow \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt} = p(t)$$

ainda podemos escrever-la como:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\ln|\mu(t)|\right)\frac{d\mu}{dt} = p(t)$$

pela regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\ln|\mu(t)|) = p(t)$$

integrando ambos os membros da equação anterior, temos:

$$\int \frac{d}{dt}(\ln|\mu(t)|)dt = \int p(t)dt \Rightarrow \ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + c_1$$

aplicando a exponencial em ambos os membros e eliminando o valor absoluto, obtemos:

$$e^{\ln \mu(t)} = e^{\int p(t)dt + c_1} \Rightarrow \mu(t) = e^{c_1} e^{\int p(t)dt} \Rightarrow \mu(t) = ce^{\int p(t)} dt$$

tomando em particular c=1, obtemos:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Aplicação 1.1 *A proporção de carbono 14(radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir daí o carbono 14 se transforma em carbono 12 a uma taxa proporcional a quantidade atual.*

O modelo matemático que representa o problema acima é

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= -ky \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

agora vamos determinar a solução da equação linear

$$\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

o fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int p(t)} dt = e^{\int kdt} = e^{kt} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = e^{kt}$$

multiplicando a equação linear acima por $\mu(t)$ obtemos:

$$e^{kt}\frac{dy}{dt} + ke^{kt}y = 0$$

note que, o lado esquerdo da equação anterior é igual a derivada do produto, logo

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}y) = 0$$

integrando ambos os lados da última equação, temos:

$$\int \frac{d}{dt}(e^{kt}y)dt = \int 0dt + c \qquad \Rightarrow \qquad e^{kt}y = c$$

fazendo $t = 0$ e $y = y_0$ e substituindo na equação anterior, obtemos:

$$e^{ky}y = c \qquad \Rightarrow \qquad c = y_0$$

portanto,

$$y = y_0 e^{-kt}.$$

1.2. Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

No estudo de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias é comum na literatura usar o tempo t como variável independente e $x = x(t)$ como função desconhecida. Para não fugir à regra, adotaremos a mesma notação, indicando por x' a derivada temporal. Dessa forma, x' estará representando a derivada da função $x(t)$ com respeito a variável t.

Considere uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{1.12}$$

que pode ser vista como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem por meio da mudança de variável.

Consideremos

$$\begin{cases} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \end{cases} \tag{1.13}$$

derivando (1.13), tem-se:

$$\begin{cases} x_1' &= x' \\ x_2' &= x'' \end{cases} \tag{1.14}$$

agora, isolando x'' na equação

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

e fazendo as devidas substituições e usando (1.14), obtemos de (1.12) o sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= b(t) - a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Como no caso de sistemas algébricos lineares, o Sistema de Equações Diferenciais (1.15) também pode ser representado na forma matricial.

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{1.16}$$

onde as matrizes $A(t)$ e $B(t)$ são dadas por:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1 *Uma solução da Equação Diferencial Ordinária matricial* (1.16) *no intervalo I é um par de funções $X(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ derivável nesse intervalo, tal que:*

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in I$$

ou, de forma equivalente:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t). \end{cases}$$

1.3. Sistemas com Coeficientes Constantes

Consideremos um sistema linear, homogêneo de ordem 2×2 de Equações Diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{1.17}$$

onde os coeficientes $a_{ij}, i, j = 1, 2$, são constantes reais. Na forma matricial o sistema (1.17) se escreve como:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

donde a solução geral para (1.18) é da forma:

$$X(t) = Ce^{tA},$$

onde $C = X(0)$ é uma matriz constante.

Dada uma matriz quadrada A, definimos a exponencial da matriz tA como a matriz e^{tA}, de mesma ordem que A, dada por:

$$e^{tA} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + ... + \frac{t^nA^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!},$$

onde I representa a matriz identidade.

Note que a série da matrizes acima converge absolutamente e portanto converge.

A exponencial de matrizes acima, goza das seguintes propriedades básicas:

$(P1)$ $e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$ para qualquer matriz quadrada A;

$(P2)$ $e^{t(A+B)} = e^{tA}.e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem que comutam, isto é, $AB = BA$;

$(P3)$ $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A.e^{tA} = e^{tA}.A$, para qualquer matriz quadrada A, com entradas constantes.

1.4. O Problema de Cauchy para um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$x' = f(t, x) \tag{1.19}$$

onde, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.2 *Uma solução de* (1.19) *é uma função* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1*, tal que:*

i) $(t, \varphi(t)) \in D, \quad \forall t \in I$

ii)$\varphi'(x) = f\left(t, \varphi(t)\right), \quad \forall t \in I.$

O Problema de Cauchy para (1.19) consiste em dados $(t_0, x_0) \in D$ fixo, saber se existe alguma solução de (1.19) que no ponto t_0 assume o valor x_0 e se essa solução é única.

Escreve-se

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

onde $(t_0, x_0) \in D$.

Usando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, deduzimos que o problema de Cauchy (1.20) é equivalente a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds, \quad t \in I. \tag{1.21}$$

Demonstração:

Seja φ uma solução de (1.20), então:

$$\begin{cases} \varphi'(t) &= f\left(t, \varphi(t)\right) \\ \varphi(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

agora, integrando de t_0 até t a primeira igualdade, resulta:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s) ds = \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds,$$

ou seja,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds \Longrightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds$$

portanto, φ é solução de (1.21).

Reciprocamente, seja φ uma solução de (1.21), ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds$$

derivando a igualdade em relação a t, obtém-se:

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds \Longrightarrow \varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right)$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f\left(s, \varphi(s)\right) ds \Longrightarrow \varphi(t_0) = x_0.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.1 *Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem*

$$x' = f(t, x)$$

definida em D, onde D é o conjunto:

$$|t - t_0| \leq a \quad e \quad \|x - x_0\| \leq b$$

com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Suponhamos que:
i) f é contínua em D
ii)$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t,x) \quad e \quad (t,y) \in D \quad e \quad para \quad algum \quad L > 0$.

Então existe uma única solução $\varphi(t)$ de (1.19) satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$ definida no intervalo

$$I : |t - t_0| \leq \delta$$

onde

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad e \quad M = \sup_{(t,x)\in D} \|f(t,x)\|.$$

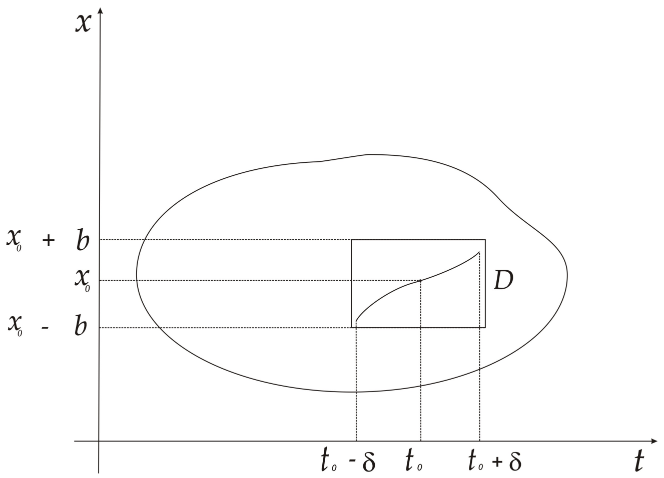


Figura 1.: Retângulo em torno de (t_0, x_0), onde o problema de valor inicial tem uma única solução.

Demonstração:

(Existência)

Consideremos a sequência de funções

$$\begin{cases} \varphi_0(t) &= x_0 \\ \varphi_n(t) &= x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds \end{cases} \tag{1.22}$$

onde $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que (φ_n) é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \quad e \quad \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$\varphi_0(t) = x_0 \quad para \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

então

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds$$

de onde se deduz que φ_1 é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$.

Além disso,

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b \quad se \quad |t - t_0| \leq \delta.$$

Suponhamos agora que $\varphi_{n-1}(t)$ seja continua em

$$|t - t_0| \leq \delta \quad e \quad \|\varphi_{n-1}(t) - x_0\| \leq b$$

neste intervalo. De (1.22) deduz-se que $\varphi_n(t)$ é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$ e

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$$

logo, φ_n é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \quad e \quad \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$(t, \varphi_n(t)) \in D \quad se \quad |t - t_0| \leq \delta \quad e \quad n \in \mathbb{N}.$$

Agora, mostremos que a sequência (φ_n) converge uniformemente em $|t - t_0| \leq \delta$. Temos que

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq M|t - t_0|.$$

Para $n = 2$, (1.22) torna-se:

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_1(s)\right) ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_1(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_0(s)\right)ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s,\varphi_1(s)\right)-f\left(s,\varphi_0(s)\right)\right]ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s,\varphi_1(s)\right)-f\left(s,\varphi_0(s)\right)\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)\|ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ML|s-t_0|ds = ML\frac{|t-t_0|^2}{2!} \quad \text{em} \quad |t-t_0|\leq\delta.
\end{aligned}$$

Suponha que,

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| = ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \text{em} \quad |t-t_0|\leq\delta$$

de (1.22), temos que:

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_n(s)\right)ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_n(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s,\varphi_n(s)\right)-f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)\right]ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s,\varphi_n(s)\right)-f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\|ds\right| \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} ML^{n-1}\frac{|s-t_0|^n}{n!}ds = ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{em} \quad |t-t_0|\leq\delta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| \leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \text{se} \quad |t-t_0|\leq\delta \quad \text{e} \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

logo

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall t\in[t_0-\delta,t_0+\delta].$$

Usando o Critério de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\|$$

converge uniformemente em $|t - t_0| \leq \delta$.
Logo, a série

$$\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)]$$

converge uniformemente em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.
Por outro lado,

$$S_n(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + ... + \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) = \varphi_n(t).$$

Consequentemente, a sequência $(\varphi_n(t))$ converge uniformemente para uma função $\varphi(t)$ em $|t - t_0| \leq \delta$.

Usando-se a condição ii) deduz-se que:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(t, \varphi_n(t)\right) = f\left(t, \varphi(t)\right) \quad \text{uniformemente em} \quad |t - t_0| \leq \delta.$$

De fato,

$$\|f\left(t, \varphi_n(t)\right) - f\left(t, \varphi(t)\right)\| \leq L\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

desde que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t) \quad \text{uniformemente em} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

então:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| < \frac{\epsilon}{L} \quad \forall t \quad \text{em} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

portanto,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t)\| < L.\frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \quad \forall t \in |t - t_0| \leq \delta.$$

Agora, tomando-se o limite em (1.22) quando $n \longrightarrow \infty$, obtém-se:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds\right],$$

ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds$$

daí, temos que:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \tag{1.23}$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Agora, derivando (1.23) em relação a t, resulta que:

$$\varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right), \quad \forall t \in I.$$

Logo $\varphi(t)$ é solução de (1.19), tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

(Unicidade)
Suponhamos que existe uma outra solução $\psi(t)$ de (1.19) com $\psi(t_0) = x_0$. Então

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad \forall t \in I. \tag{1.24}$$

Vamos mostrar que

$$\varphi(t) \equiv \psi(t), \quad \forall t \in I.$$

Mostremos por indução que

$$\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq bL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, temos

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall t \in I$$

e suponhamos que

$$\|\psi(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq bL^{n-1} \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall t \in I \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},$$

então

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)-\varphi_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}\|\psi(s)-\varphi_{n-1}(s)\|ds\right\| \\
&\leq bL^n\int_{t_0}^{t}\frac{|s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}=bL^n\frac{|s-t_0|^n}{(n-1)!n}\Big|_{t_0}^{t}=bL^n\frac{|t-t_0|^n}{n!}
\end{aligned}$$

portanto, pelo Princípio da Indução Finita

$$\|\psi(t)-\varphi_n(t)\|\leq bL^n\frac{|t-t_0|^n}{n!}\quad \forall t\in I \;\text{ e }\; \forall n\in\mathbb{N},$$

portanto

$$\|\psi(t)-\varphi_n(t)\|\leq bL^n\frac{\delta^n}{n!}\longrightarrow 0 \;\text{ se }\; n\longrightarrow\infty,$$

ou seja,

$$\|\psi(t)-\varphi(t)\|\leq 0\quad \forall t\in I$$

donde concluímos que

$$\psi(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in I.$$

■

2 Aplicações

2.1. Modelo SIR de epidemologia (Kermack-McKendric)

O modelo SIR é considerado bastante simples para descrever qualquer epidemia, mas a partir dele o estudo teórico de modelos matemáticos em epidemologia ganhou tanta força que poderiamos afirmar que atualmente existem mais modelos que doenças.

Entretanto, para algumas epidemias, a busca de modelos mais realista, é ainda maior, como é o caso da AIDS, cuja descrição, apesar de recente, já mereceu algumas dezenas de modelos. A busca de modelos matemáticos que represente fielmente a dinâmica de uma dada epidemia tem motivado pesquisadores a desenvolverem seus estudos nessa direção.

A partir de 1927 os modelos matemáticos, formulados por Kermack-McKendric, consideram que uma epidemia com microparasitas (vírus ou bactérias) ocorre em uma comunidade fechada através de contato entre pessoas infecciosas e pessoas sadias.

Nas aplicações epidemiológicas consideremos uma população fixa formada por N habitantes e que esta população esteja subdividida em três classes distintas de indivíduos (compatimentos) de acordo com a sanidade ou infecciosidade de seu elemento, são elas: os suscetíveis, os infectados e os renovados. Os suscetíveis são indivíduos que podem adquirir a infecção através do contado com um indivíduo infectado. Os infectados são aqueles que têm a doença e podem transmitir-la. Os renovados são os indivíduos que já passaram pela doença e que não podem ser mais contaminados. Seja:

1. $S = S(t)$: Pessoas sadias mas suscetíveis à doença, podendo ser infectadas quando em contato com pessoas doentes.

2. $I = I(t)$: Pessoas Infectadas.
3. $R = R(t)$: Indivíduos imunes que já contraíram a doença e se recuperam, ou estão isolados ou morreram.

Suponha que a comunidade seja fechada, ou seja, que a população se mantenha constante não variando com o tempo t. Então:

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Para cada tipo de doença podemos modelar uma velocidade de propagação através das interações entre as variáveis S, I e T. O processo epidemológico pode ser esquematizado pelo sistema compartimental que resume as taxas de transições entre as três classes.

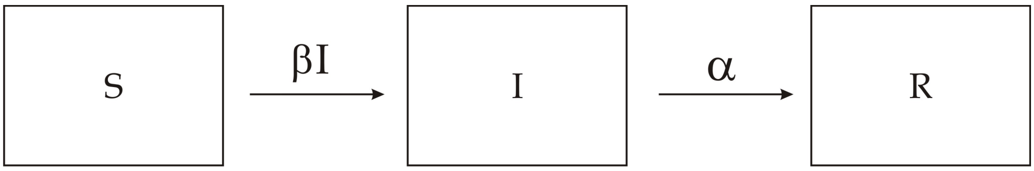


Figura 1.: Esquema Compartimental de uma Epidemia (Modelo SIR)

Onde β_I é a taxa de transmissão da doença ($\beta > 0$) e α é a taxa de remoção ($\alpha > 0$).

Se consideramos que:

1. Cada compartimento é composto de indivíduos homogêneos.
2. Cada indivíduo infeccioso tem a mesma probabilidade de se encontrar com um suscetível.
3. Não ocorre nascimento na comunidade e a morte somente é causada pela doença.

Então o modelo matemático (SIR) que descreve a epidemia, é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \alpha I \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \tag{2.1}$$

em qualquer situação é fundamental conhecer os valores iniciais $S_0 = S(0)$, $I_0 = I(0)$, $R_0 = 0$ e os parâmetros β e α, para avaliar a dinâmica da epidemia.

2.2. Modelo de Conversão (Anderson-May, 1986)

Este modelo presupõe que todos infectados terão AIDS depois de um certo tempo (o que não é necessariamente verdade).

Consideremos uma população que todos os seus elementos estão infectados quando $t = 0$.

Seja $x = x(t)$ a porcentagem da população soropositivo (HIV^+) que ainda não tem os sintomas da AIDS e $y = y(t)$ a porcentagem da população que desenvolve a doença. Temos

$$x(t) = 1 - y(t) \quad \text{com} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Agora, seja $v(t)$ a taxa de conversão da infecção para AIDS. Então, um modelo que fornece a dinâmica de conversão da doença é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & -v(t)x \\ \dfrac{dy}{dt} & = & v(t)x \end{cases} \tag{2.2}$$

com $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

Sabemos que a taxa de conversão $v(t)$ é uma função crescente com o tempo, então considere

$$v(t) = at \qquad (a > 0)$$

neste caso, podemos reescrever o sistema (2.2) da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & (-at)x \\ \dfrac{dy}{dt} & = & (at)x \end{cases} \tag{2.3}$$

a solução do sistema (2.3) é dada por

$$x(t) = e^{\int(-at)dt} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{at^2}{2}} \ \text{e} \ y(t) = 1 - x(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-\frac{at^2}{2}}.$$

A velocidade de conversão é máxima quando $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$, ou seja,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a(t\frac{dx}{dt} + x) = 0 \quad \text{como} \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad t\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}.$$

Por outro lado, temos que $\dfrac{dx}{dt} = -atx$, portanto

$$-atx = -\frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{t}\frac{1}{ax} = \frac{1}{at}, \quad \text{ou seja,} \quad t = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

então, o valor máximo de conversão será:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{a}}} = \left.v(t)x\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{a}}} = \left.atx\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{a}}} &= \left. a\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{at^2}{2}}\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{a}}} \\
&= a\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}} \\
&= a\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{e}} \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{a}\frac{1}{\sqrt{e}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{e}} \simeq 0.607\sqrt{a}.
\end{aligned}
$$

onde a constante $e = 2,7182$ com quatro casas decimais exatas.

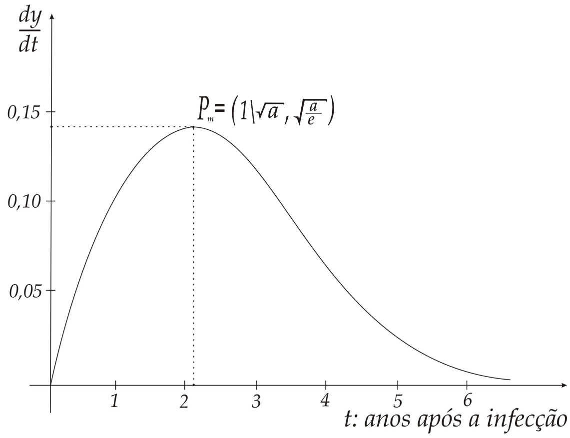


Figura 2.: Velocidade de Conversão

2.3. Por que uma corda simplesmente enrolada num poste sustenta um barco?

Consideremos uma corda em contato com uma superfície cilíndrica vertical de coeficiente de atrito estático μ. Suponhamos que o contato se dê em todo um setor AB de ângulo α (em geral, $\alpha > 360^{\circ}$, mas para efeito da nossa figura supomos $\alpha < 180^{\circ}$) e que não há uma força T_0 aplicada a uma das extremidades da corda, como indicada na figura abaixo. O problema consiste em saber qual a força T_1 que deve ser exercida na outra extremidade para manter o equilíbrio.

Analisando a figura acima podemos observar que,

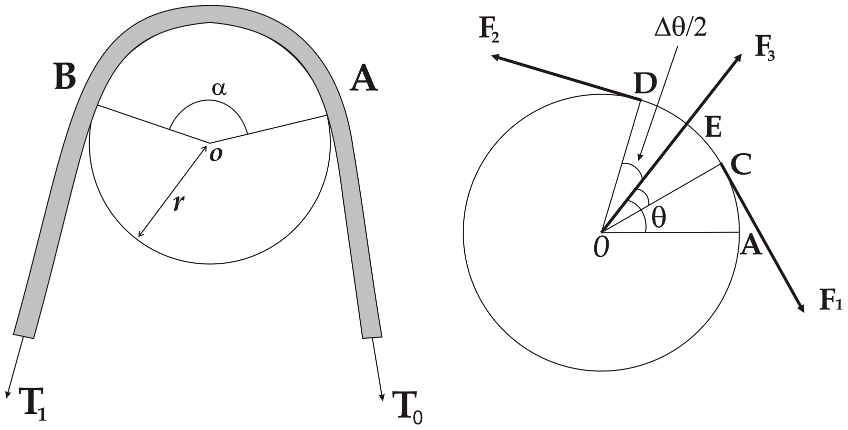


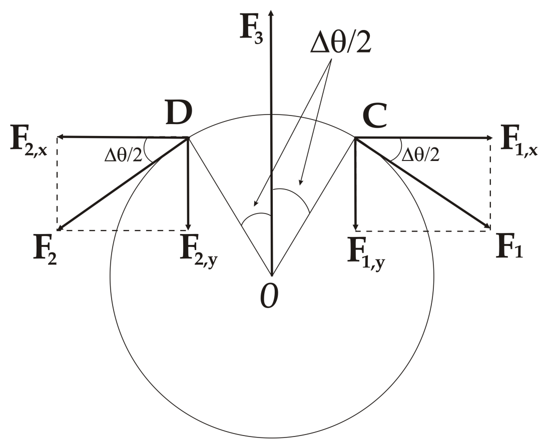
Figura 3.: Corda em contato com uma superfície cilíndrica

1. F_1 é a tensão da corda no ponto C, o que implica $\mid F_1 \mid = T\big(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\big)$.
2. F_2 é a soma da tensão no ponto D e da força de atrito, ou seja, $\mid F_2 \mid = T\big(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\big) + \mu \mid F_3 \mid$.
3. F_3 é a reação total da superfície ao longo do trecho CD, isto é, $\mid F_3 \mid = N(\theta) r \Delta\theta$, onde $N(\theta)$ é a reação da superfície sobre a corda e μ é o coeficiente de atrito estático.

Usando a condição de equilíbrio, ou seja,

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \tag{2.4}$$

e projetando (2.4) sobre a direção de F_3 e sobre a direção ortogonal, temos:



Note que,

$$-F_{1,y} - F_{2,y} + F_{3,y} = 0$$

daí, temos