UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RODOLFO JOSÉ DINIZ MAIA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Campina Grande/PB
Abril/2011

RODOLFO JOSÉ DINIZ MAIA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em comprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza

Campina Grande/PB

Abril/2011

M217p Maia, Rodolfo José Diniz.

Progressões Aritméticas e Geométricas [manuscrito] / Rodolfo José Diniz Maia. – 2011.

30 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática".

1. Ensino de Matemática. 2. Aprendizagem. 3. Educação Pública. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

ROFOLFO JOSÉ DINIZ MAIA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB (10)
Orientador

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

KSmgraciano
Prof. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 28 de abril de 2011

Dedico a minha mãe Analice.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela razão da minha existência e por me dar força e coragem em todos os momentos.

A minha mãe (Analice Diniz Maia) que sempre me deu puxões de orelha, ao meu pai (José Firmino Maia) que me ajudou muito com o seu trabalho.

Ao professor Juarez Dantas de Souza meu orientador, por quem tenho infinita gratidão pela paciência, compreensão, sabedoria e disponibilidade que sempre demonstrou durante a realização deste trabalho.

Aos meus irmãos Joselice e Neto, minha namorada Vericleide pelo incentivo.

Aos meus professores que me ajudaram direta ou indiretamente para realização deste sonho.

RESUMO

O ensino de matemática na rede pública de ensino em muitas situações é desprovido de motivações que possa despertar o interesse do aluno pela aprendizagem. Aulas sem estratégia e sem metodologia de ensino adequada são desinteressantes para o aluno. Neste trabalho, se da ênfase a importância do conceito matemático e ao desenvolvimento histórico do conceito matemático como estratégias de ensino. Em particular são abordados aspectos do ensino-aprendizagem referentes aos conceitos de progressões no ensino médio. São apresentadas sugestões metodológicas com base nas estratégias citadas que visam despertar o interesse dos alunos a aplicação de definições e conceitos trabalhados. Foram aplicados exemplos de situações cotidianas com muito êxito. Essas sugestões aplicadas em uma escola pública do estado da Paraíba (na cidade de Areial) resultaram em boa aprendizagem dos alunos em comparação a resultados anteriores. Com isto podemos ter a certeza que o método desenvolvido neste trabalho muito ajudará na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: (progressões, ensino, aplicação).

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho constitui-se numa exigência do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como pré-requisito para a conclusão do curso.

Por isso, foi observado que é comum os professores do ensino médio repassarem conteúdos de modo estanque, engessados numa visão puramente técnica sem se preocupar com o pensar matemático e sim em desenvolver cálculos e mais cálculos, que ficam sem nenhum significado para o aluno. No que diz respeito ao ensino das Progressões, um dos problemas é a falta de contextualização histórica e real. Este conceito deveria ser abordado vivenciando sua aplicação no cotidiano, buscando facilitar a aprendizagem dos alunos referente ao conceito das Progressões Aritméticas P.A e Geométricas P.G, deixando nítido que a matemática pode ser aplicada de forma prática no cotidiano. Desta forma, o objetivo desse trabalho é propor um método de ensino referente a esse conceito, capaz de fazer o aluno compreender e aplicá-lo no dia a dia. O desenvolvimento do conceito de Progressão Aritmética e Progressões Geométricas é mostrado desde muitos anos atrás, vindo com a necessidade de aprendizagem que até hoje o homem vem buscando a cada dia para seu melhor desenvolvimento, com isto a importância do estudo de PA e PG e suas aplicações podem ser vistas facilmente na sua história e no seu dia a dia, até por uma simples e importante sequência de 1 até 10, que são os primeiros algarismos estudados no nosso desenvolvimento. Portanto, o ensino das progressões na atualidade está também sendo observado neste trabalho, pois é um ensino que exige mudanças para que o aluno saia do livro didático para o seu cotidiano ficando mais fácil observar a importância do estudo das progressões. O método que é desenvolvido neste trabalho se trata de um desenvolvimento metodológico para o ensino de progressões em sala de aula, ou seja, mostra que através de um breve conceito histórico podemos explicar para o aluno a criação das progressões, com isso os alunos vão observar porque e para quê o estudo das progressões foi criado. Tendo logo após os conceitos e suas definições, exemplos práticos do dia a dia para que os alunos saiam do livro didático para realidade, ajudando com que eles percebam que não só as progressões, mais vários outros assuntos estão inclusos no seu cotidiano.

2. EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

As primeiras ideias sobre matemática pode ter iniciado a partir das primeiras manifestações de socialização do homem e nas suas realizações econômicas nas primeiras comunidades primitivas.

O estudo das progressões começou através de povos muito antigos desde os babilônicos, há muito tempo atrás, desde a necessidade dos egípcios em observar as enchentes do rio Nilo, para assim produzir seus alimentos na época certa e com isso garantir sua sustentação. Criou-se, portanto, um calendário de 365 dias divididos em 12 meses, de 30 dias cada, e mais cinco dias para as comemorações aos seus deuses (Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys), separando-os ainda em três estações de quatro meses cada (semear, crescer e colher).

Na mesopotâmia foi criada a tabela de Plimpton 322 (1900 a 1600 a. C.), ilustrada na Figura 1, uma das principais tabelas babilônicas, na qual está implícita a soma de uma progressão geométrica, dada por $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$.

Figura 1. Tabela Plimpton 322. Fonte: 94_historiadaspa.

A mesopotâmia é, mais ou menos, a região que fica entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje fica o Iraque. Foi nesta região que floresceram culturas de grande impacto na antiguidade e que influenciaram bastante as civilizações do Oriente Médio e até a Grécia antiga. A Babilônia, aí localizada, era o centro de troca de saberes, que deixou para a posteridade vestígios de uma civilização altamente evoluída para os padrões da época e que desenvolveu, sobre maneira, a matemática de então. Há registros de estudos astronômicos entre seu povo. No entanto foram os egípcios que preservaram muitos dos papiros que contribuíram para o conhecimento da atual matemática. É num dos papiros encontrados em Kahun, datado em 1950 a. C., que foram encontradas alguns problemas teóricos de Progressões Aritméticas e Geométricas, sendo o papiro Rhind (ou Ahmes), datado de aproximadamente 1650 a. C., a fonte primária sobre a matemática egípcia antiga. Ele foi encontrado no Egito com seus dezoito pés de comprimento e treze polegadas de altura pelo escocês A. Henry Rhind, sendo publicado em 1927 e que deixa evidência do uso da progressão aritmética por aquela civilização.

É no papiro de Rhind que é apresentado uma progressão geométrica, formada pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ do Hekat, mais conhecidas como frações dos olhos do deus Hórus, Figura 2. Os egípcios multiplicavam todos os elementos por 64 e no final encontravam a soma S = $\frac{63}{64}$.

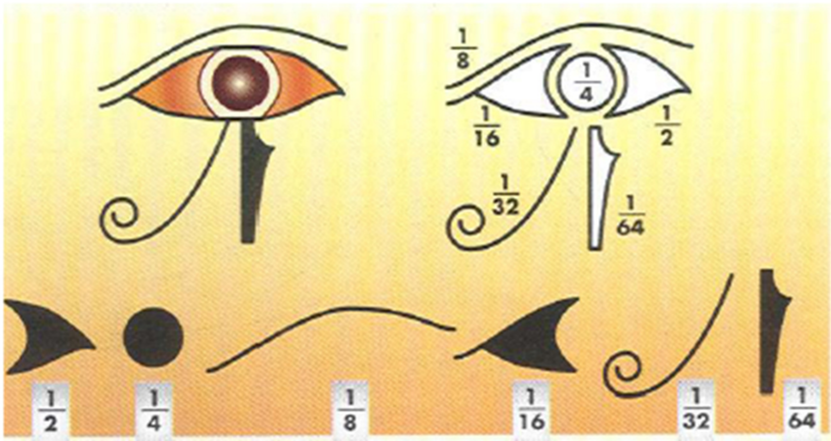

Figura 2. Olho de Hórus. Fonte: 94_historiadaspa.

Apesar dos registros encontrados dando aos babilônios e egípcios praticamente o inicio do estudo das progressões, é na Grécia que o estudo sistematizado da matemática começa a acontecer.

Dá-se a Pitágoras (585 a.C. a 500 a.C.) e aos sábios gregos a criação da Aritmética Teórica. É evidente que os Gregos, a partir de Thales de Mileto, iniciaram o desenvolvimento da Filosofia que tem na matemática e na Física os motivos maiores para explicar o Universo.

Pitágoras, Figura 3, a exemplo de Thales, andou pelo Egito e deve ter aprendido muito da matemática egípcia e babilônica. Ele fundou no sul da Itália, numa colônia grega, uma escola que ficou conhecida como Escola Pitagórica e é atribuída a este, o descobrimento da demonstração do Teorema que ficou conhecido como Teorema de Pitágoras. Desenvolveu estudos que envolveram o conhecimento das progressões aritméticas e geométricas, das séries harmônicas e descobriu proporções matemáticas importantes relacionadas com as notas musicais. Relacionando a música à matemática e confirmando-se a teoria de que "tudo no Universo estaria relacionado com os números naturais". Para Pitágoras tudo era número e que os números explicavam o Universo.

Figura 3. Pitágoras. Fonte: 94_historiadaspa.

Em 600 a.C originaram-se os números figurados através da escola pitagórica. Esses números representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética, como exemplo, Figura 4.

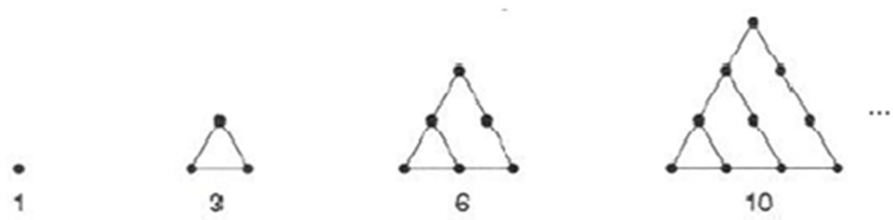

Figura 4.Números triangulares.

Embora os números inteiros 1, 3, 6, 10, ..., não representem uma progressão aritmética ou geométrica, eles apresentam relações importantes com a geometria e oferecem oportunidade para o estudo das sequências, tema pertinente às progressões.

Apesar do estudo da Escola Pitagórica e de outros filósofos do período denominado pré-socrático, dos quais restaram apenas fragmentos, é em Alexandria, cidade fundada por Alexandre da Macedônia, no delta no Nilo, que a matemática toma os rumos sistematizados do qual herdamos até a data de hoje.

Merece destaque o grego Euclides de Alexandria que produziu a obra “Os Elementos” (1482 a. C.), Figura 5, desenvolvida em 13 livros com 465 proposições, destacando-se o livro VIII que apresenta as proporções contínuas e progressões geométricas, que estão relacionadas na forma a : b = b : c = c : d, formando a progressão geométrica a, b, c, d.

Figura 5. Página do livro “Os Elementos” de Euclides. Fonte: 94_historiadaspa.

Os Elementos de Euclides tiveram uma importância fundamental na evolução da Matemática até os dias de hoje. Até o século XIX, juntamente com a Bíblia, foram os livros mais lidos no mundo ocidental. Neles, Euclides sistematizou a Teoria dos Números e da Geometria Plana e Espacial.

Na evolução histórica, vimos a Aritmética tomar rumos cada vez mais aprofundados. É com Diofanto de Alexandria (século III d.C) que foi desenvolvida uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números, escrevendo três trabalhos, sendo o mais importante “A Arithmética”, composto por treze livros. Pouco se sabe da vida de Diofanto além de uma tradição referida numa coleção de problemas chamada “Antologia Grega”.

Os Hindus tiveram papel destacado na evolução do estudo da teoria dos números. Eles tinham uma grande facilidade com a aritmética e legaram ao mundo ocidental uma influência muito grande, principalmente no estabelecimento da contagem com a criação dos algarismos, hoje denominados *hindu-arábicos*. O matemático Bhaskara, o último matemático medieval importante da Índia (1114-1185), teve papel importante na matemática tendo desenvolvido estudos relativos à soma de progressões aritméticas e geométricas.

Cabe destacar outro matemático hindu chamado Aryabhata com sua obra **Aryabhatiya**, que fala, dentre outros assuntos, a respeito de progressões aritméticas, mostrando como se achar a soma e o número de termos de uma progressão. Vê-se na sua obra a seguinte explicação a respeito de um fato relativo à progressão:

“Multiplicando a soma de uma progressão por oito vezes a sua razão, logo após, somando o quadrado da diferença entre o dobro do primeiro termo e sua razão, extraindo a raiz quadrada deste determinado valor, subtraindo duas vezes o primeiro termo, dividindo pela razão, somando-se a um e dividindo por dois, iremos encontrar o número de termos da progressão”[Boyer, Carl Benjamim, 1906].

A história prossegue e no decorrer da evolução histórica dos conceitos matemáticos, surgem na Europa matemáticos de alta expressão no pensamento matemático, como o algebrista Michael Stifel (1486-1567), considerado o maior algebrista alemão do século XVI, com sua obra “Arithmética” (destacando a importância de associar uma progressão aritmética a uma geométrica), e John Napier (1550-1617) que, através do conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, chegou aos logaritmos e as tabelas logarítmicas.

No entanto, foi Carl Friedrich Gauss, nascido em Brunswich, na Alemanha, em 30 de abril de 1777, que segundo alguns, nos seus dez anos de idade, durante uma aula de matemática, chegou à fórmula da soma da progressão aritmética. Segundo contam, o seu professor preocupado com a disciplina da turma, pediu que os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100, imaginando ele que com essa atitude, os alunos passariam boa parte do tempo trabalhando e teria então a disciplina restabelecida. Para seu espanto, em poucos instantes, Gauss apresentou um resultado bastante convincente. Ele se baseou no fato de que a soma dos números equidistantes dos extremos resulta sempre num mesmo valor, isto é, esta soma é constante, conforme mostra a Figura 6.

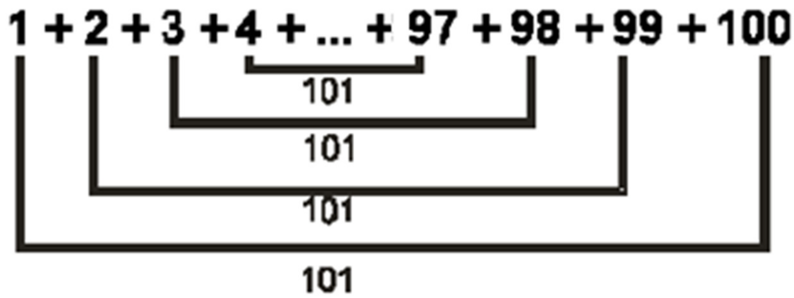

Figura 6. Soma dos termos equidistante dos extremos de uma PA.

Ele observou que na soma dos números naturais de 1 a 100, a soma dos termos equidistantes dos extremos era constante e igual a 101, e como existiam 50 pares de termos equidistantes, a soma seria exatamente 50 x 101 oferecendo um resultado igual a 5.050.

No caso geral, observa-se que este fenômeno ocorre numa progressão aritmética finita qualquer. Assim, considerando-se uma PA a_1, a_2, ... , a_n, como a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos, basta então somar o primeiro ao último termo, multiplicar esta soma pelo número de termos e dividir por 2. Ou seja, a soma poderia ser obtida pela seguinte fórmula:

$$S = \frac{(a_1 + a_2)}{2} n \quad . \tag{1}$$

É evidente que Gauss naquele momento não chegou a esta fórmula e nem generalizou o resultado, mas foi um passo importante que contribuiu de modo decisivo para o estudo das progressões aritméticas e geométricas. Posteriormente, Gauss se destacou em vários ramos importantes da Matemática, sendo considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

No darwinismo (teoria estudada em biologia criada por Charles Robert Darwin) também podemos encontrar as progressões aritméticas e geométricas. Um dos exemplos encontra-se em um dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, com influência de Thomas Malthus, ou seja, as populações crescem em PG ao mesmo tempo em que as reservas alimentares crescem em PA. A Figura 7 ilustra o crescimento da população em comparação com as reservas de alimentos existentes no mundo, ou seja, seguindo esta hipótese, daqui a alguns anos as reservas alimentares serão insuficientes para alimentar toda população.

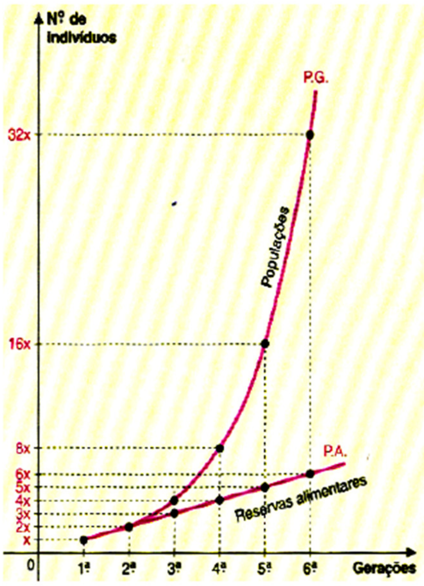

Figura 7. Doutrina de Darwin. Fonte: 94_historiadaspa.

Esta comparação de Malthus sobre crescimento da população e suas reservas deixou de ser aceita nos dias atuas, pois não há uma diferença tão grande como mostrado no gráfico acima.

Como vimos nesta breve incursão histórica, é grande a importância do estudo das Progressões na evolução da matemática e das relações dos homens em diversos momentos de sua evolução histórica.

3. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

A matemática está presente em cada momento do nosso cotidiano desde a criação do mundo. Como por exemplo, a divisão do tempo em milênios, séculos e anos. A aplicabilidade dessa ciência é comprovada até mesmo pelas pessoas que não tiveram muita escolaridade, contudo, são capazes de administrar esse conhecimento muito bem. Com isto vamos aprender a resolver algumas questões utilizando progressões aritméticas e geométricas.

Consideremos a sequência 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., observe que cada termo, depois do primeiro, é igual ao anterior adicionado a 2 (dois). Essa sequência é chamada de *progressão aritmética* (PA), e o numero fixo é chamado de razão (r) da progressão. Portanto, progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um numero fixo, chamado razão da progressão.

Quando $r > 0$, a progressão aritmética é crescente; quando $r < 0$, decrescente e quando $r = 0$, constante ou estacionária. Se a progressão aritmética possui um último termo, ela é finita, caso contrário é infinita. Sua representação matemática é: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ e o termo geral a_n, é deduzido, como segue.

3.1 DEFINIÇÃO

Chama-se *progressão aritmética* (PA) uma sequência na forma, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, em que qualquer termo a partir do segundo pode ser determinado pela fórmula:

$$a_n = a_{n-1} + r, \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

em que r é uma constante denominada razão. Assim uma PA é uma sequência em que cada termo a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

3.2 TERMO GERAL DE UMA PA

Numa PA de razão **r** qualquer termo a partir do segundo corresponde ao antecessor mais a razão, assim;

$$a_2 = a_1 + r; \tag{3.a}$$

$$a_3 = a_1 + 2r; \tag{3.b}$$

$$a_4 = a_1 + 3r; \tag{3.c}$$

Consequentemente, o termo geral, a_n, de uma PA é dado pela equação;

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r, \text{ com } n \in \mathbb{N} \quad . \tag{3.d}$$

3.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Consideremos a PA finita (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34). Nela, 6 e 34 são extremos, cuja soma é 40; 10 e 30, 14 e 26, 18 e 22 são termos equidistantes dos extremos, cujas somas são iguais a 40. Assim, podemos afirmar que numa PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Usando esta propriedade, deduz-se a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Seja a PA (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) e S_n a soma dos n termos tal que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{4.a}$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{4.b}$$

Somando as equações 4.a e 4.b:

$$2\, S_n = (a_1 + an) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \tag{5}$$

Observa-se que na Eq. (5) todo o termo entre parêntese tem soma ($a_1 + a_n$), então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \, . \tag{6}$$

4 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Consideremos a sequência (4, 8, 16, 32, 64). Observamos que: 8 = 4 x 2, 16 = 8 x 2, 32 = 16 x 2, 64 = 32 x 2. Ou seja, cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2. Esse número 2 é denominado de *razão*. Essa sequência de números constitui uma *progressão geométrica* (abreviadamente, PG). Portanto, progressão geométrica é uma sequência de números não nulos na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um numero fixo chamado razão da progressão. De modo geral numa PG com razão q temos $a_n = a_{n-1}.q$, para n > 1.

Dizemos que uma *progressão geométrica* é *finita* quando possui apenas um número finito de termos, quando temos uma progressão geométrica $(a_1,a_2,a_3,a_4,...)$ com uma quantidade infinita de termos, dizemos que ela é uma PG *infinita*.

4.1 DEFINIÇÃO

Chama-se *progressão geométrica* (PG) uma sequência na forma, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, em que qualquer termo a partir do segundo pode ser determinado pela fórmula:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \text{ , com } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

em que *q* é uma constante denominada razão. Assim, uma PG é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

4.2 TERMO GERAL DE UMA PG

A fórmula do termo geral, a_n, de uma PG permiti encontrar qualquer termo da progressão.

Utilizando a definição de PG, temos

$$a_2 = a_1 \text{ x } q^1; \tag{6.a}$$

$$a_3 = a_2 \text{ x } q = a_1q^2; \tag{6.b}$$

$$a_4 = a_3 \text{ x } q = a_1q^3; \tag{6.c}$$

...

$$a_n = a_1q^{n-1} \tag{6.d}$$

4.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

Na soma (S_n) de uma PG podem acontecer quatro situações:

1) Se $q = 0$, $S_n = a_1$;
2) Se $q = 1$, $S_n = na_1$;
3) Se $|q| > 1$, S_n diverge quando n tende a infinito;
4) Se $|q| < 1$, S_n converge para um determinado valor de N quando n tende a infinito.

4.3.1 SOMA DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

Neste caso a soma dos n termos da PG (S_n) pode ser calculado como segue.

Seja a PG finita ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ou $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{n-1}$) com $q \neq 0$, a soma, S_n , dos n termos dessa PG é dado por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 +... + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \tag{7}$$

mas se $|q|>1$, tem-se;

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} \tag{7.a}$$

Multiplicando a Eq. (7) por q,

$$q.S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n \tag{7.b}$$

Subtraindo da Eq. (7.b) a Eq. (7.a),

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1). \tag{7.c}$$

Logo a S_n dos n termos de uma PG finita é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{8}$$

4.3.2 SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Neste caso, $|q| < 1$ a soma S_n converge para n no infinito.

Considerando a PG (1/2, 1/4, 1/8, ...), temos que quanto mais forem adicionados termos, mais a soma vai se aproximar de 1, ou seja, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

Dada uma PG infinita ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$), dizemos que $a_1 + a_2 + \ldots = S$ se o limite das somas parciais, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ quando n tende a infinito é S, ou seja:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

Considere a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1.(1 + q + q^2 + \ldots)$. O limite de S_n quando n tende a infinito é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1q^n}{1-q}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - a_1 \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

como $|q| < 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q},$$

ou seja,

$$Sn = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (9)$$

5. APLICAÇÕES

As progressões, PA e PG, têm muitas aplicações práticas envolvendo várias áreas, como exemplo: na construção civil, na agricultura, na matemática financeira, processos de interpolação, etc. A aplicação do conceito matemático em situações cotidianas ou em qualquer situação problema é fundamental para mostrar a importância do conceito matemático na vida das pessoas. Neste trabalho mostramos alguns exemplos de aplicações que poderiam ser apresentados em sala de aula.

5.1 APLICAÇÕES DE PA

EXEMPLO 1. Um matemático (com pretensões de carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, em que o primeiro degrau mede 50 cm e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, mostre que os degraus da escada estão em PA e determine o comprimento máximo da peça.

Solução

Como estamos trabalhando com uma progressão aritmética, temos que definir cada um dos elementos que a constituem. Primeiramente é indicado o número de termos (n), ou seja, 20 degraus, logo após definimos o primeiro e o último termo da progressão a_1 *e* a_{20} *que são respectivamente o primeiro e o último degrau da escada. Portanto já que temos estes dados podemos calcular o comprimento. O primeiro termo corresponde ao comprimento do primeiro degrau, ou seja,* $a_1 = 50$ *cm, o último termo corresponde ao* *comprimento do último degrau, ou seja,* $a_{20} = 30$ *cm, o número de termos n corresponde ao número de degraus da escada. Dessa forma usando a equação (6), temos*

$a_1 = 50$ *cm,* $a_{20} = 30$ *cm e* $n = 20$,

$$S_{20} = \frac{(50 - 30).20}{2} = \frac{1600}{2} = 800\ cm = 8\ m.$$

EXEMPLO 2. Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1 m uma da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15 m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?

Solução

Como temos que regar 60 roseiras com intervalos de três em três roseiras, fazendo esta divisão obtem-se o número de viagens (n = 20). Calculando a primeira viagem (a_1) *temos uma distância de 34 m, continuando o cálculo para segunda viagem* (a_2) *obteremos 40 m, ou seja, uma razão de 6m para cada viagem. Para obtermos a soma de todo o percurso, temos que saber a distância da última viagem. O primeiro termo corresponde a 34m pois a distância da fonte até a primeira roseira é de 15m, mas como a distância entre as roseiras são de 1m entre elas e ele só consegue regar 3 roseiras por viajem. Na primeira viajem ele percorre 15m da fonte até a primeira roseira e mais 2m até a terceira roseira dando uma distância de 17m, como ele tem que voltar para a fonte sua primeira viajem é de 34m. A mesma coisa ele vai fazer na segunda viajem, ele vai percorrer os 17m da primeira viajem e mais 3m para regar outras 3 roseiras, neste caso 20m, novamente voltando para a fonte a viajem será de 40m. Dessa forma usando as equações (3.d) e (6), temos:*

$a_1 = 34$ *(1^a viagem),* $a_2 = 40$ *(2^aviagem),* $n = 20$ *(n^o de viagens) e* $r = 6$,

$a_{20} = 34 + (20 – 1).6 = 34 + 19.6 = 34 + 114 = 148.$

$$S_{20} = \frac{(34 + 148).20}{2} = \frac{3640}{2} = 1820\ m.$$

5.2 APLICAÇÕES DE PG

EXEMPLO 1. Sabendo que a população de certo município era 120000 habitantes em 2010 e que essa população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, e considerando essa taxa de crescimento para os próximos anos, qual será o número de habitantes desse município em 2013.

Solução

Estamos trabalhando com crescimento da população, portanto de início já observamos o primeiro termo (a_1) que são de 120000 habitantes, como sabemos que esse aumento é de 3% ao ano, podemos calcular o segundo termo (a_2), ou seja, $a_2 = a_1 + 3\%$ de a_1 e logo após a razão (q) entre esses termos. Tendo estes dados podemos calcular o número de habitantes deste município durante este intervalo de tempo. Dessa forma usando a equação (6.d), temos:

$a_1 = 120000$ *e sua taxa de 3% temos que* $a_2 = 123600$, *logo* $q = 1{,}03$, *portanto:*

$a_4 = 120000.\ 1{,}03^{4-1} = 120000.\ 1{,}03^{3} = 120000.\ 1{,}092727 = 131127$ *habitantes.*

EXEMPLO 2. Uma indústria está produzindo atualmente 100000 unidades de um certo produto. Quantas unidades estará produzindo ao final de 4 anos, sabendo que o aumento anual da produção é de 10% ?

Solução

Iremos calcular o aumento desta produção seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, ou seja, obtendo o primeiro termo (a_1) que é a atual produção, este aumento de 10% ao ano, podemos obter o segundo termo (a_2), ou seja, $a_2 = a_1 + 10\%$ de a_1e logo após sua razão (q) com $q = a_2/a_1$, tendo estes dados conseguimos, através da equação (6.d) podemos calcular o aumento da produção ao final de 4 anos.

Sendo $a_1 = 100000$ *e sua produção de 10% ao ano temos que* $a_2 = 110000$, *logo* $q = 1{,}1$, *portanto:*

$a_5 = 100000.\ 1{,}1^{5-1} = 100000.\ 1{,}1^{4} = 100000.\ 1{,}4641 = 146410$ *unidades.*

6. SUGESTÃO METODOLÓGICA PARA TRABALHAR OS CONCEITOS DE PA E PG EM SALA DE AULA

- Fazer uma introdução histórica ou apresentar uma situação-problema;
- Mostrar séries de números que são PA, como exemplo os números naturais, os números impares, a contagem de números de 5 em 5;
- Apresentar conceitualmente o que é uma PA;
- Definir o que é uma PA;
- Apresentar exercícios de cálculo (uso das formas);
- Apresentar exercícios de aplicação.

6.1 EXEMPLO DE PLANO PARA UMA AULA DE 50 MINUTOS (PA):

ESCOLA ESTADUAL E. F. M. FRANCISCO APOLINÁRIO

PROFESSOR: Rodolfo José Diniz Maia

DISCIPLINA: Matemática

SÉRIE: 1° Ano do Ensino Médio

ASSUNTO: Progressões Aritméticas

PLANO DE AULA

Neste plano de aula se faz uso da história sobre PA como recurso didático no sentido de motivar os alunos a aprendizagem.

OBJETIVO GERAL: Fazer com que os alunos percebam a importância de PA, que o estudo de PA é importante e é facilmente utilizado no cotidiano.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Conhecer o que é PA;
- Saber que a PA está presente no cotidiano e pode ser facilmente utilizada;
- Fazer aplicações do conceito referentes a PA.

DESENVOLVIMENTO

INTRODUZINDO O CONCEITO DE PA

Um dos principais fatos históricos sobre PA se tratou a 5000 a.C. quando os egípcios tiveram que observar o período de enchente do rio Nilo para que eles pudessem plantar na época certa. Nisto observaram que quando ocorria inundação verificava-se a presença de uma determinada estrela a leste um pouco antes do sol, justamente a cada 365 dias. Com isto conseguiram se programar melhor dividindo estes dias em 12 partes que chamaram de meses, cada mês com 30 dias e mais 5 dias para comemorações, por sua vez dividiram estes meses em três estações, ou seja, semear, crescer e colher. E assim criaram um calendário que serviu e serve até os dias atuais para o nosso desenvolvimento.

DEFINIÇÃO

Uma PA é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r em que r é chamada de razão.

EXEMPLO: A sequência (1, 3, 5, 7, 9, ...) é uma PA em que $a_1 = 1$ e $r = 2$.

CLASSIFICAÇÃO DE UMA PA

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três:

a) Crescente, cada termo é maior que o anterior, ou seja, $r > 0$.

   EXEMPLO: A sequência (1, 2, 3, 4, ...) é uma PA em que $a_1 = 1$ e $r = 1$;

b) Constante, cada termo é igual ao anterior, ou seja, $r = 0$.

   EXEMPLO: A sequência (6, 6, 6, 6, ...) é uma PA em que $a_1 = 6$ e $r = 0$;

c) Decrescente, cada termo é menor que o anterior, ou seja, $r < 0$.

   EXEMPLO: (0, -2, -4, -6, ...) em que $a_1 = 0$ e $r = -2$.

FÓRMULA DO TERMO GERAL;

O termo geral de uma PA (a_n) é determinado pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

EXEMPLO: Calcule o 17º termo da PA cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

Solução

Note que $a_1 = 3$ e $r = 5$, que aplicando a fórmula do termo geral encontra-se $a_{17} = a_1 + 16r = 3 + 16 . 5 = 83$.

RECURSOS UTILIZADOS:

- Quadro negro;
- Giz;
- Livro Didático.

AVALIAÇÃO: Aplicação de uma atividade prática para ser respondida coletivamente.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO NO COTIDIANO:

Um garoto começa a juntar sua mesada, dada pelos seus pais, com o intuito de comprar um computador após dois anos de dedicação. Se a mesada deste garoto é de 150 reais por mês, sendo que deste valor ele subtrai todo mês 50 reais para seus gastos com a escola, sem considerar os acréscimos de juros, qual será a quantia obtida por este garoto após este tempo?

Solução

Iremos calcular a quantia que o garoto irá conseguir seguindo os seguintes passos, ou seja, obtendo o primeiro termo (a_1) que é o valor que ele ficará no primeiro mês, poderemos também obter o valor do segundo mês (a_2), com isto calculamos a razão r entre estes mêses. Como o tempo total n é de dois anos, usando a Eq. 3.d, tem-se:

$a_1 = 100$ reais (1º mês), $a_2 = 200$ reais (2ºmês), $r = 100$, $n = 24$.

$a_{24} = 100 + (24 – 1). 100 = 100 + 2300 = 2400$ reais.

6.2 EXEMPLO DE PLANO PARA UMA AULA DE 50 MINUTOS (PG)

ESCOLA ESTADUAL E. F. M. FRANCISCO APOLINÁRIO
PROFESSOR: Rodolfo José Diniz Maia
DISCIPLINA: Matemática
SÉRIE: 1° Ano do Ensino Médio
ASSUNTO: Progressões Geométricas

PLANO DE AULA

Neste plano de aula se faz uso da história sobre PG como recurso didático no sentido de motivar os alunos a aprendizagem.

OBJETIVO GERAL: Fazer com que os alunos percebam a importância de PG, que o estudo de PG é importante e é facilmente utilizado no cotidiano.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Conhecer o que é PG;
- Saber diferenciar a PA da PG, reconhecendo em que momento qual deve ser utilizada;
- Fazer aplicações do conceito referentes a PG.

DESENVOLVIMENTO

DEFINIÇÃO
Uma PG é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior pela constante q, em que esse q é denominado de razão.

EXEMPLO: A sequência (1, 2, 4, 8, ...) é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = 2$;

CLASSIFICAÇÃO;
As progressões geométricas podem ser classificadas em 5 categorias:

a) Crescente, quando cada termo a partir do segundo é maior que seu antecessor, ou seja, PG com termos positivos temos, $q > 1$ e PG com termos negativos temos, $0 < q < 1$.

EXEMPLO: A sequência (3, 9, 27, 81, ...) é uma PG em que $a_1 = 3$ e $q = 3$;

A sequência (-54, -18, -6, -2, ...) é uma PG em que $a_1 = -54$ e $q = 1/3$.

b) Constante, quando os termos têm o mesmo valor, ou seja, $q = 1$ e quando todos os seus termos são nulos temos, q qualquer.

EXEMPLO: A sequência (7, 7, 7, 7, ...) é uma PG em que $a_1 = 7$ e $q = 1$;

c) Decrescente, quando cada termo é menor ao anterior, ou seja, PG com termos positivos temos, $0 < q < 1$ e PG com termos negativos temos, $q > 1$.

EXEMPLO: A sequência (-1, -2, -4, -8, ...) é uma PG em que $a_1 = -1$ e $q = 2$.

A sequência (1, 1/3, 1/9, 1/27, ...) é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = 1/3$.

d) Alternantes, cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior, ou seja, $q < 0$.

EXEMPLO: A sequência (5, -5, 5, -5, ...) é uma PG em que $a_1 = 5$ e $q = -1$;

e) Estacionárias, $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = ... = 0$, ou seja, $q = 0$.

EXEMPLO: A sequência (3, 0, 0, 0, ...) é uma PG em que $a_1 = 3$ e $q = 0$.

FÓRMULA DO TERMO GERAL;

O termo geral de uma PG (a_n) é determinado pela fórmula:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

EXEMPLO: Obtenha o 10^o e o 15^o termos da PG (1, 2, 4, 8, ...).

Solução

$a_{10} = a_1 . q^9 = 1 . 2^9 = 512.$

$a_{15} = a_1 . q^{14} = 1 . 2^{14} = 4096.$

RECURSOS DIDÁTICOS:

- Quadro negro;
- Giz;
- Livro Didático.

AVALIAÇÃO: Aplicação de uma atividade prática para ser respondida coletivamente.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO NO COTIDIANO

Para se locomover em uma cidade grande, o meio mais utilizado pelas pessoas é o ônibus urbano, sendo que em uma determinada cidade a tarifa cobrada pelas empresas não está agradando aos trabalhadores e aos estudantes que necessitam de tal meio de transporte. Sendo de 2 reais o valor cobrado atualmente e com um aumento de 5% a cada três mêses, de quanto será o valor desta tarifa após um ano?

Solução

Estamos trabalhando com crescimento de tarifa, portanto já observamos o primeiro termo (a_1) que são de 2 reais, como sabemos que esse aumento é de 5% a cada três mêses, podemos calcular o segundo termo (a_2), ou seja, $a_2 = a_1 + 5\%$ de a_1 e logo após a razão (q) entre esses termos. Dessa forma podemos calcular através da equação (6.d) o valor desta tarifa após este tempo, considerando que o ano tem 4 trimestres e que no início do primeiro trimestre o primeiro termo corresponde a dois reais, tem-se uma PG com cinco termos, de modo que;

$a_1 = 2$ reais e sua taxa de 5% temos que $a_2 = 2{,}10$, logo $q = 1{,}05$, portanto:

$a_5 = 2.\ 1{,}05^{5-1} = 2.\ 1{,}05^4 = 2.\ 1{,}21550625 \approx 2{,}40$ reais.

Esses planos de aula foram executados na Escola Estadual E. F. M. Francisco Apolinário, na cidade de Areial para os alunos do 1º ano do ensino médio. A metodologia empregada foi bem sucedida motivando o interesse dos alunos pelo conteúdo. Os conceitos apresentados foram fixados através de exemplos práticos e os resultados da avaliação foram satisfatórios.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados alguns problemas de ordem didático-pedagógicos referentes ao ensino aprendizagem de PA e PG. A aprendizagem dos alunos foi motivada pela importância do conteúdo e suas aplicações mostradas aos alunos. O resultado da avaliação foi satisfatório apesar das dificuldades de alguns alunos em aprender matemática. Conforme os resultados obtidos, concluímos que esta motivação através da história e também relacionada com o cotidiano, ajudou muito na aprendizagem dos alunos, pois quando se fala nesses tópicos o aluno saberá para que foi criado tal assunto e qual a sua utilidade e onde será usada, ou seja, irá despertar uma motivação de tal maneira que eles iram saber utilizar a aprendizagem que obtiveram no seu dia a dia. Esperamos que esse trabalho possa contribuir para outros professores na elaboração de estratégias a metodologias de ensino.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., **Matemática completa**, 2ª Ed. Renovada, FTD, São Paulo 2005.

IEZZI, G., HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar**, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7ª Ed. Atual, São Paulo 2004.

BOYER, C. B. **Historia da matemática** / revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2° Ed.- São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

94_HISTORIADASPA. Site:<http://www.obejtivomaringa.com.br/colegio_objetivo/__site2008/_assets/materiais/94_historiadaspa.pdf.>. Acessado em 02/02/2011.

BARRETO, F, BENIGNO. **Matemática aula por aula,** Volume único: ensino médio. FTD, São Paulo 2000.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**, Volume 1. 4ª Ed. Ática, 2007.