



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA**

**GILSON ACIOLE RODRIGUES**

**DEFORMAÇÕES EM SISTEMAS NÃO  
LINEARES TIPO: KdV e mKdV**

CAMPINA GRANDE – PB

2013

**GILSON ACIOLE RODRIGUES**

**DEFORMAÇÕES EM SISTEMAS NÃO  
LINEARES TIPO: KdV e mKdV**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC),  
como requisito à obtenção do título de  
Licenciado em Física pela Universidade  
Estadual da Paraíba, sob a orientação do  
professor Dr. Alex da Silva.

CAMPINA GRANDE – PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

R696d      Rodrigues, Gilson Aciole.  
Deformações em sistemas não lineares tipo [manuscrito] :  
KdV e mKdV. / Gilson Aciole Rodrigues. – 2013.  
42 f. : Il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em  
Física) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2013.  
“Orientação: Prof. Dr. Alex da Silva, Departamento de  
Física”.

1. Sólitons. 2. Sistemas não lineares. 3. Matemática aplicada.  
I. Título.

21. ed. CDD 629.836

GILSON ACIOLE RODRIGUES

**DEFORMAÇÕES EM SISTEMAS NÃO  
LINEARES TIPO: KdV e mKdV**

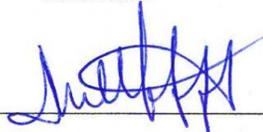
Aprovado em 15/07/2013

**Banca examinadora**



Prof. Dr. Alex da Silva / UEPB

Orientador



Profª. Dra. Morgana Ligia de Farias Freire / UEPB

Examinadora



Prof. MSc. Elialdo Andriola Machado / UEPB

Examinador

## **DEDICATÓRIA**

**“Porque d’Ele, e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; Glória, pois, a Ele eternamente. Amém.” (Rm 11:36)**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao **MEU DEUS**, que ao longo desta jornada sempre esteve ao meu lado, sua companhia é muito preciosa, me ensinando e fortalecendo a minha vida. Ao **REI JESUS** que nunca faltou sendo o meu pilar forte e seguro nos momentos de aflições e tranquilidade, mas, principalmente na hora da aflição. Portanto, Toda Honra, Glória e Poder a Ele.

Ao meu Orientador Dr. Alex da Silva, que sem sua ajuda e paciência não poderia subir mais este degrau na caminhada da vida.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Física da UEPB, em especial, Elialdo Andriola Machado, Jean Spinelly, Genival da Silva, Marcelo Gomes Germano, Morgana Lígia Freire, Antônio Barbosa e Lourivaldo Mota Lima, que contribuíram ao longo da minha formação, não só por meio das disciplinas e debates, mas, pelos momentos de amizade e compreensão para o desenvolvimento da minha Profissão. Não esquecendo os demais Professores do Departamento de Física.

Aos meus pais, Joel Rodrigues da Costa e Maria Aparecida Aciole Rodrigues, que ao longo desta árdua jornada não pouparam esforços, sempre me apoiaram com humildade, muito amor, carinho e dedicação. Portanto, não tenho dúvidas que se cheguei até aqui foi pelo belo trabalho que eles desempenharam como, pais e amigos, formando um homem. Aos meus irmãos, Lidiany Aciole Rodrigues e Sidney Aciole Rodrigues, que nunca deixaram de acreditar em mim, pelo afeto e as palavras sábias nos momentos mais necessários. Aos meus familiares que me inspiraram em especial ao meu tio Josafá Rodrigues, que foi mais um companheiro e contribuiu nesta conquista.

A Igreja, por meio de muitos irmãos que me ajudaram em orações, bons conselhos e carinho. Sendo a cada dia da minha vida um lugar de aconchego e descanso das batalhas terrenas.

A minha noiva Maria Rocha, que chegou em minha vida em momento oportuno, contribuindo ativamente para a conclusão deste trabalho com seu carinho e cumplicidade.

Aos funcionários da UEPB, Daniel e João, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas, em especial, Wanderson José, Leide Priscila, Thiago da Silva, Diego da Silva, Geovani Pereira, Rafaelle Souza, Simony Santos, Maxwellton Ferreira, Juliana Cardoso e demais pelos momentos de amizade e apoio.

## RESUMO

Fenômenos envolvendo fluidos em movimento estão presentes em toda a natureza: no corpo humano, na forma de circulação sanguínea; no ar, com o escoamento em torno de aeronaves possibilitando suas permanências no ar; na água, com as correntes e marés entre outros. Sólitons são ondas que não se dispersam ou se dissipam, mas em vez disso mantêm sua forma e tamanho indefinidamente, um fenômeno bem conhecido em vários campos da engenharia e da matemática aplicada. No caso da matemática aplicada, destacou-se a equação KdV que, devido ao fato de aparecer em vários contextos da ciência, é uma das mais importantes equações da teoria não linear. Neste trabalho, abordou-se um método alternativo para gerar soluções “solitônicas” para resolver sistemas de equações parciais não lineares, utilizando o método de deformação. Fez-se um estudo sobre alguns temas, como ondas viajantes e soluções tipo sólitons da KdV, mKdV e suas deformações. Ilustrou-se o método, construindo explicitamente soluções tipo sólitons das equações KdV, mKdV. Portanto, a técnica permite propor e resolver algumas novas famílias de equações não lineares.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sólitons, método de deformação, sistemas não lineares.

## **A B S T R A C T**

Phenomena involving moving fluids are present throughout nature: the human body, blood circulation in the form, the air flow around the aircraft allowing its permanence in air and water, with the currents and tides among others. Solitons are waves that do not disperse or dissipate, but instead retain their size and shape indefinitely, a well known phenomenon in various fields of engineering and applied mathematics. In the case of applied mathematics, it was stressed that the KdV equation, due to the fact that it appears in various contexts of science, is one of the most important equations of the nonlinear theory. This work is discussed an alternative method of generating solutions "solitonic" for solving systems of nonlinear partial equations using the method of deformation. There was a study on some issues, such as traveling waves and soliton-like solutions of KdV, mKdV and its deformations. Illustrated the method by constructing explicitly type soliton solutions of the KdV equation, mKdV. Therefore, the technique allows proposing and solving some new families of nonlinear equations.

**KEYWORDS:** Solitons, method of deformation, nonlinear systems.

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1</b> – Ondas solitárias em serie produzidas por Russel.....	14
<b>FIGURA 2</b> – Evolução no tempo de uma onda unidirecional .....	17
<b>FIGURA 3</b> – Representação esquemática da propagação de impulsos em fibras óticas lineares (em cima) e não lineares (em baixo).	19
<b>FIGURA 4</b> – Representação de uma onda dispersiva (sem escala).....	23
<b>FIGURA 5</b> – Representa a evolução de uma onda descrita por uma equação não linear.....	24
<b>FIGURA 6</b> – Representação do sóliton para equação KdV.....	28
<b>FIGURA 7</b> – Comportamento da solução da equação mKdV.....	30

## SUMÁRIO

<b>Introdução.....</b>	<b>11</b>
<b>1. Capítulo 1: Sólitons.....</b>	<b>13</b>
1.1 A descoberta das ondas solitárias.....	13
1.2 Aplicações: Sólitons em fibras óticas.....	19
1.3 Equações de ondas dispersivas .....	22
1.4 Equações de onda não linear.....	24
<b>2. Capítulo 2: Equações Que Exibem Soluções Tipo Sólitons .....</b>	<b>25</b>
2.1 A KdV .....	25
2.2 A mKdV .....	29
<b>3. Capítulo 3: Método de Deformação.....</b>	<b>31</b>
3.1 Apresentando o método de deformação .....	31
3.2 Soluções tipo sólitons para KdV e mKdV a partir de um sistema linear .....	34
3.3 Soluções tipo sólitons a partir de um sistema não linear .....	36
<b>Considerações Finais.....</b>	<b>38</b>
<b>Referências .....</b>	<b>39</b>

## INTRODUÇÃO

O Século XX ficou conhecido como a era da física linear, pois foi dominado por equações lineares como as de Maxwell e Schrödinger, e por métodos lineares, que é o caso das transformada de Fourier, teoria de perturbação e etc. Naturalmente, a importância da não linearidade, começando com as equações de Navier-Stokes e passando para as teorias da gravitação geral e dos campos quantizados com aplicações em física dos sólidos, física nuclear e em física de partículas foi reconhecida, embora o tratamento destes efeitos fosse muito difícil, exceto como perturbações da solução básica da teoria linearizada (NATTI e PIZA, 1996).

Em meio a não linearidade, podemos destacar a equação KdV (KORTEWEG e VRIES, 1985) que aparece em vários contextos da física, sendo uma das mais importantes equações da teoria não linear. Por exemplo, ela é aplicada em propagação de redes cristalinas, teoria de espalhamento quântico, no estudo de fluxo de Todda (TODDA, 1955), dentre outros. Durante as quatro últimas décadas, tornou-se cada vez mais evidente que não linearidades podem resultar em novos fenômenos, os quais não podem ser obtidos via teoria de perturbação. Este é o caso de ondas do tipo sóliton (EILENBERGER, 1981).

Os sólitons são ondas viajantes que interagem fortemente, não mudam de forma e conservam energia (BULLOUGH e CAUDREY, 1980). Uma grande variedade de fenômenos apresenta tais propriedades. Assim, citamos algumas áreas em física e áreas correlatas nas quais a teoria de sólitons tem sido utilizada com frequência: física de plasma, física do estado sólido, física das partículas elementares, meteorologia e, em particular, na descrição de fenômenos não lineares em ótica.

O emprego da teoria solitônica nas fibras óticas revolucionou a indústria das telecomunicações, pois permitiu que as novas fibras fossem cinquenta vezes melhores que as fibras antigas (GALLEAS et al. 2003).

Hoje sabe-se que a diversidade dos sistemas físicos, matemáticos, biológicos e químicos onde existem sólitons é tão grande, que não resta qualquer dúvida sobre a universalidade do fenômeno.

A solução tipo sólitons de sistemas não-lineares é empregada em várias áreas da ciência. Portanto, nosso desafio é estudar e encontrar estas soluções, que são

rigorosamente estudadas por vários métodos extremamente complexos. Entre esses métodos podemos destacar a representação Lax (LAX, 1968), transformações de Bäcklund (ABLOWITZ e CLARKSON, 1991), método do espalhamento inverso (FLASCHKA, 1974) dentre outros.

Neste trabalho, propõe um método alternativo simples e direto para gerar soluções do tipo ondas viajantes para equações não lineares. Apresenta como soluções não triviais para equações do tipo KdV, mKdV podem ser obtidas a partir de soluções simples de sistemas lineares e não lineares (BAZEIA et al. 2008)

Para uma melhor compreensão do presente trabalho este foi exposto da seguinte forma:

**Capítulo 1:** Relata-se um pouco sobre a teoria solitônica, como se deram as primeiras observações com relação às ondas solitárias. Bem como, sobre a física não linear, exemplificando a diferença entre a dispersão e a não linearidade presente na teoria dos sólitons. Ainda, é abordado neste capítulo um pouco sobre aplicações tecnológicas, em particular um breve relato sobre sólitons em fibras óticas.

**Capítulo 2:** Expõe os sólitons de um ponto de vista matemático, sendo este representado por soluções de uma categoria de equações diferenciais não lineares, as equações KdV e mKdV.

**Capítulo 3:** Foi exposto o método de deformação, construindo soluções de equações não lineares a partir de equações lineares e não lineares, em particular da KdV e mKdV.

## CAPÍTULO 1 - SÓLITONS

Neste capítulo, iniciamos uma breve revisão sobre a teoria dos sólitons, abordando, como se deram as primeiras observações com relação às ondas solitárias. Mencionamos o avanço tecnológico devido à teoria solitônica em muitos campos da ciência. Em particular, a propagação de sólitons em fibras óticas. Em meio aos efeitos de uma física não linear, destacamos a presença da equação KdV, que está sujeita a ação simultânea da não-linearidade e da dispersão, neste sentido, se completam, não ocorrendo qualquer alteração da forma do pacote de onda (SILVA, 2008).

### 1.1 A descoberta das ondas solitárias

O primeiro registro de uma onda solitária foi feito em agosto de 1834, pelo engenheiro naval Britânico, John Scott Russel (RUSSEL 1845). Ele observou um barco sendo puxado por dois cavalos um em cada margem do canal de Edinburgh-Glasgow, que era estreito e pouco profundo. De repente a embarcação parou, fazendo com que a massa de água que estava acumulada na proa do barco criasse uma elevação bem localizada. A seguir a elevação de água separou-se do barco e começou a propagar-se solitária ao longo do canal com uma velocidade de 14 km/h sem qualquer alteração visível da forma, e esta foi acompanhada por Russel a galopes de cavalo. A onda solitária percorreu uma distância de cerca de dois quilômetros desaparecendo no fim do caminho em ondulação da água do canal. Com curiosidade científica, procurou seguir esta estranha onda durante algum tempo, mas reparando que, apesar da altura da onda ir diminuindo gradualmente, mesmo após colisão com outras ondas, a sua forma permanecia inalterada. Russel chamou a este fenômeno “belo e singular” de Grande onda de translação.

Apesar de para o observador comum este fenômeno ser algo meramente “curioso” ou “interessante”, vinha de encontro às teorias existentes sobre ondas, naquela altura: qualquer onda não senoidal apresentava fenômenos de dispersão, isto é, os seus modos fundamentais deslocam-se a velocidades diferentes e como tal a onda expande-se e a

amplitude decresce continuamente (uma característica não linear em que a amplitude depende da velocidade). Foi à ausência desta dispersão que intrigou Russel.

Procurou então estudar este fenômeno, tentando encontrar modelos matemáticos que pudessem descrever esta forma de onda.

Russel fez uma série de experimentos, descobrindo como as produzir “em série”: acumulando água em uma extremidade de um canal raso separada por um anteparo e, de repente, retirando este anteparo. A massa d’água excedente se propaga em uma “meia-onda” (pois só há propagação acima da linha de repouso do canal) sem se deformar.

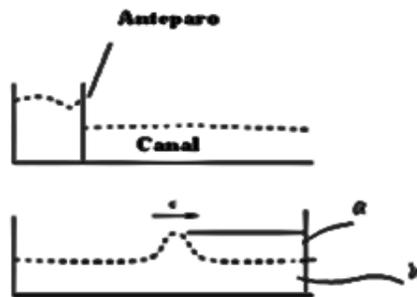


Figura 1 - Ondas solitárias em série produzidas por Russel. Fonte: SILVA, (2008).

Na Figura 1, observa-se o procedimento usado por Scott Russel para gerar ondas solitárias em série. Consistia em acumular uma massa d’água em um tanque, usando para isto um anteparo.

Com seus experimentos, descobriu uma interessante relação entre a altura da onda  $a$  (em relação ao nível de repouso da água), chamada de amplitude, em um canal de profundidade  $h$ , e sua velocidade de propagação  $c$ :

$$c^2 = g (h + a), \quad (1.1-1)$$

Sendo  $g$  é a aceleração da gravidade.

A equação (1.1-1) provocou certa discórdia, pois estava em contradição à outra equação encontrada por argumentos puramente teóricos por Airy. Assim J. Boussinesq e Lord Rayleigh tentaram resolver o problema, o que só veio a ocorrer, de fato em 1895 com o trabalho de D. J. Korteweg e G. de Vries (KORTEWEG e VRIES, 1895), eles

obtiveram teoricamente a formula de Russel para velocidade da onda solitária de translação, e mostraram que neste caso a forma da envoltória da onda era dada por:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^2[k(x - ct)], \quad (1.1-2)$$

onde o número de onda  $k$ , a amplitude  $a$ , e a velocidade da onda  $c$ , são dados, respectivamente por:

$$k^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}, \quad (1.1-3a)$$

$$a = 2k^2, \quad (1.1-3b)$$

$$c = 4k^2. \quad (1.1-3c)$$

Outra observação feita por Russel em 1844, que permaneceu sem explicação por mais de um século, foi que em colisões os sólitons preservam suas características. Em uma de suas experiências Russel observou duas ondas, elas propagavam-se com velocidades diferentes, percebeu que a onda mais veloz alcançava e ultrapassava a onda mais lenta, de modo que após o processo, ambas permaneciam intactas e não distorcidas, como se ambas satisfizessem o princípio de superposição linear (RUSSEL 1845).

Desta forma, havia a presença de efeitos não lineares, pelo fato de que, durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, as ondas depois da interação não estavam na posição que deveriam estar se ambas se movessem com velocidade constante. É característico de fenômenos ondulatórios apresentarem efeito dispersivo, assim, as ondas em propagação logo perdem energia e eventualmente desaparecem em um tempo finito.

Todavia, o que a dupla de pesquisadores holandeses Korteweg e de Vries, fez foi assumir a equação básica de dinâmica de fluidos, a equação de Navier-Stokes, e considerar uma expansão perturbativa para a propagação de uma onda do tipo fabricada por Russel, ou seja:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (1.1-4)$$

Inicialmente, encontra-se uma equação de onda unidirecional onde todas as perturbações se propagam com velocidade constante e igual a:

$$c_0 = \sqrt{gh} \cdot \quad (1.1-5)$$

A KdV, é uma das mais importantes equações da teoria de sistemas integráveis (junto com a equação de Schrödinger não linear). Originalmente foi escrita para modelar a propagação de uma onda longa (amplitude muito menor que seu comprimento) em um canal raso (TODDA, 1989).

A KdV é uma equação que aparece em muitos contextos distintos. De fato, ela passou muito tempo ignorada, até que Fermi, Pasta e Ulam, estudando os modos de propagação de ondas em redes cristalinas com acoplamento fracamente não linear, a redescobriram (FERMI et al., 1955). Aparece também em teoria de espalhamento quântico e no estudo de fluxos de Toda (FLASCHAKA, 1974). Esta ubiquidade se deve a uma característica: a KdV é, em certo sentido, a equação mais elementar que inclui efeitos não lineares e dispersivos.

Após uma série de transformações de escala, a equação de KdV pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1-6)$$

Onde  $u_x$  é a derivada primeira de  $u$  em relação à  $x$ ,  $u_{xxx}$  é a derivada terceira e  $u_t$  a derivada de  $u$  em relação à  $t$ . A equação de onda mais simples é dada por:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (1.1-7)$$

sendo  $c$  é uma constante (identificada como a velocidade), sendo uma equação linear (BURGERS, 1948). Sua solução pode ser verificada com:

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (1.1-8)$$

Sendo  $F$  uma função que descreve a perturbação em  $t = 0$ . O fator oscilatório aponta uma onda que se propaga para a direita.

A Figura 2 mostra a evolução no tempo de uma onda unidirecional com velocidade de propagação  $c$ .

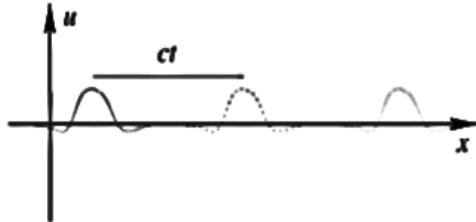


Figura 2 - Evolução no tempo de uma onda unidirecional. Fonte: SILVA, (2008).

No Século XIX, surgiram algumas análises feitas por Fourier, usadas basicamente na decomposição de funções arbitrárias como a superposição de senos e cossenos, ou até para exponenciais complexas. Suas análises tiveram bastante desenvolvimento apenas no século XX, portanto, utilizadas no estudo de sinais, propagação de ondas e equações diferenciais lineares.

Quando estabelecemos que  $\exp i(kx - \omega t)$  seja solução de (1.1-7), obtemos a relação  $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ , que relaciona a frequência das oscilações espaciais com as temporais. A possibilidade de usar funções da forma  $\exp i(kx - \omega t)$  para estudar equações lineares mais complexas, ou mesmo equações não lineares, foi um grande avanço teórico e também prático.

Se considerarmos uma equação da forma:

$$u_t + cu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.1-9)$$

Ao substituírmos  $u = \epsilon^{i(kx - \omega t)}$  obtemos:

$$\omega = ck - \beta K^3 \quad (1.1-10)$$

Quando  $\beta = 0$ , retornamos a equação de onda (1.1-7), ao fenômeno de propagação de frequências distintas com velocidades distintas chamamos de *dispersão*. A relação entre  $\omega$  e  $k$ , tal qual na equação (1.1-10), é chamada de relação de dispersão. A maneira mais

simples de incluímos um termo não linear em (1.1-7) é considerando a velocidade  $c$  como uma função de  $u$ , e com isso resulta:

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.1-11)$$

A equação (1.1-11) foi chamada de *equação de Burgers*, tornando uma das mais simples equações não linear. Ela revela a presença de choque, ou seja, a perda de continuidade da solução, após certo tempo. Observando a equação de evolução e comparando-a com a equação de onda, percebe-se que a velocidade que ela se propaga é proporcional a sua altura, portanto, sua crista se propaga mais rápido na direção de propagação, tendendo a quebrar. Os efeitos da dispersão e da não linearidade terão sentidos opostos, uma tende a desfazer a onda por completo e a outra a quebra-la. Assim, a KdV reuniu estes dois efeitos dando a possibilidade de ser resolvida e estudada, por um método para gerar soluções do tipo ondas viajantes em equações diferenciais (BAZEIA et al., 2008).

## 1.2 Aplicações: sólitons em fibras óticas

A ideia de utilizar a diferença entre índices de refração de meios diferentes para criar uma armadilha para raios de luz já foi implementada com grande sucesso. Fala-se das fibras óticas que todos conhecem e que ocupam um lugar importante no cotidiano. Em particular, as fibras óticas são usadas para transferência extremamente rápida de informação de alta densidade ao longo de grandes distâncias (CFTC 2013).

Apesar da ideia em que se baseia o fenômeno ser surpreendentemente simples, a sua realização técnica exige novos conceitos para ultrapassar duas dificuldades principais. Uma é a dissipação da luz, e, portanto a atenuação do sinal durante a propagação, a outra é a dispersão dos pacotes de ondas. Nesta seção não se discute os meios para combater a atenuação do sinal, mas ver-se como a não linearidade pode ser utilizada como uma ferramenta para manter a forma do sinal.

Ao observar a Figura 3, tem-se, que acontece uma sucessão de impulsos (cada um, portanto, considerado como um bit de informação) aplicados à entrada de uma fibra ótica linear (lado esquerdo da Figura 3). Devido à dispersão da velocidade de grupo ao longo da fibra ótica, à saída (do lado direito) cada pacote de ondas é mais largo, pois as harmônicas que o compõem propagam-se com velocidades diferentes.

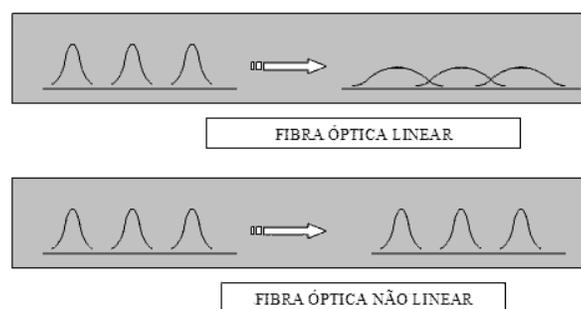


Figura 3 – Representação esquemática da propagação de impulsos em fibras óticas lineares (em cima) e não lineares (em baixo). Fonte: CFTC (2013).

Para transferir informação precisa-se de uma sucessão de impulsos separados por uma distância fixa (quanto menor for a distância entre dois impulsos sucessivos, maior é a densidade de informação transferida). Portanto, se a fibra for suficientemente longa, o

aumento da largura de cada impulso vai ultrapassar a distância média entre impulsos sucessivos e a sobreposição dos pacotes vai acontecer (como se apresenta na Figura 3, em cima). Nesta situação os pacotes, inicialmente diferentes, vão transformar-se numa onda contínua e perdem a sua identidade. Se à saída da fibra for colocado um receptor de ondas eletromagnéticas, este não conseguirá distinguir os impulsos iniciais e, portanto, os bits de informação.

A situação muda drasticamente, se a fibra for não linear (o caso ilustrado na Figura 3, em baixo). Como se sabe, neste caso é possível a criação e propagação de sólitons. Também se supõe que uma sucessão de sólitons é aplicada à entrada da fibra. Uma vez que os sólitons se propagam com velocidade constante, sem qualquer alteração da sua forma, independentemente do caminho percorrido e do comprimento da fibra (mais uma vez deve-se destacar que é uma situação idealizada, despreza-se vários efeitos incluindo a atenuação do sinal) o receptor vai receber exatamente a mesma sucessão de sólitons, exatamente a mesma informação sem quaisquer danos sofridos durante a propagação.

Mas, pode-se ir ainda mais longe. Recordar-se em primeiro lugar que os sólitons têm características bem definidas e inalteráveis. Por isso se pode considerar sucessões de sólitons, de amplitudes diferentes. Isto significa que se pode criar bits de informação diferentes, e, portanto codificar a informação ainda com maior densidade.

Além disso, os sólitons são transparentes em relação uns aos outros. Isto significa que se pode imaginar uma situação em que, depois de enviar informação usando um impulso multi-solitónico, envia-se outra informação usando outro impulso multi-solitónico com maior velocidade. Depois da interação entre ambos, o segundo impulso ultrapassa o primeiro e chega à saída da fibra primeiro. Desta forma, pode-se inverter a ordem de envio e de recepção de informação (CFTC, 2013).

Devido à estabilidade de tais ondas, em meados dos anos oitenta, A. Hasegawa (HASEGAWA, 1984) propôs que sólitons pudessem ser utilizados em comunicações transoceânicas e, a partir de então, vários desenvolvimentos tecnológicos foram realizados em propagação de sólitons por grandes distâncias (HAUS e WONG, 1996).

Emplit et al. (1987) foram os primeiros a realizarem a observação experimental da transmissão em pico segundos de sólitons em fibras óticas. No ano seguinte, Mollenauer e Smith (1988) transmitiram pulsos de sólitons por 4000 quilômetros

usando o efeito Raman. Uma equipe da Bell Labs em 1991 propagou sólitons por mais de 14.000 quilômetros utilizando uma fibra ótica dopada com érbio (MOLLENAUER et al., 1991). Em 1998, uma equipe da France Telecom coordenada por Thierry Georges, combinando sólitons óticos de diferentes comprimentos de onda, transmitiu dados à taxa de 1 terabit por segundo (LE GUEN et al., 1999). Enfim, o uso prático de sólitons transformou-se em realidade quando a Algety Telecom desenvolveu, em 2001, equipamentos de telecomunicações submarinos, na Europa, transmitindo sólitons.

O estudo teórico das propriedades dielétricas que uma fibra ótica deve apresentar, de modo que a comunicação via sólitons seja mais estável e eficaz do que a comunicação via sinais lineares no formato “Non-Return to Zero” – NRZ - (padrão atual), é um tema de grande importância tecnológica e econômica, com aplicações potenciais em Ciências dos Materiais e das Telecomunicações. Na última década tem sido abordado, com intensidade, estudos teóricos e experimentais, sobre temas relacionados com os processos de geração (MALOMED et al., 2005), propagação (GALLEAS et al. 2003) e estabilidade (CHEN e ATAI, 1998; YMAI et al., 2004) de sólitons em fibras dielétricas.

### 1.3 Equações de ondas dispersivas

Quando equações de ondas são derivadas de alguns princípios físicos subjacentes, ou governados por equações mais gerais, são feitas certas suposições, portanto, se as suposições forem menos extremas, pode-se obter equações que retêm mais do detalhe físico: por exemplo, onda dispersiva e não lineares. Considere a equação:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3-1)$$

que é uma simples equação de onda dispersiva. Para examinarmos a forma da solução de onda harmônica:

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.3-2)$$

Pode-se escolher a parte real ou imaginária, ou forma  $Ae^{i(kx - \omega t)} + \text{complexo conjugado}$ , onde  $A$  é uma constante. Assim a equação (1.3-2) é uma solução da equação (1.3-1) se:

$$\omega = k - k^3. \quad (1.3-3)$$

Esta relação de dispersão determina  $\omega(k)$  para determinado  $k$ . Sendo,  $k$  o número de onda (escolher para ser real de forma que a solução (1.3-2) é certamente oscilatório a  $t = 0$ ) e  $\omega$  é a frequência. A partir de (1.3-3) temos:

$$kx - \omega t = k\{x - (1 - k^2)t\}, \quad (1.3-4)$$

e a solução (1.3-2), com condição (1.3-3), descreve uma onda que propaga à velocidade:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2. \quad (1.3-5)$$

Em função de  $k$  (nota que  $c$  muda sinal por  $k = \pm 1$ .) em outras palavras, ondas de número de onda diferente propagam-se a velocidades diferentes: esta é a característica de uma onda dispersiva. Assim, um único perfil de onda que pode ser representado, supõe-se, pela soma de duas componentes cada uma com solução do tipo (1.3-2) mudará sua forma como o tempo evolui em virtude de velocidades diferentes das duas componentes. Se for necessário um melhor entendimento pode-se integrar em cima de todo  $k$  e com isso resulta:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (1.3-6)$$

Para  $A(k)$ , essencial para a transformação de Fourier de  $(u, 0)$ , a onda muda sua forma à medida que se move, portanto, ondas com diferentes números de onda  $k$ , ou ainda, com diferentes comprimentos de onda, propagam-se com diferentes velocidades, resultando em uma rápida dispersão (DRAZIN e JOHNSON, 1993).

A velocidade de um componente individual é determinada através da Equação (1.3-5) que é denominada velocidade de fase. A Equação (1.3-3) admitirá outra velocidade definida por:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \quad (1.3-7)$$

A Equação (1.3-7) é a velocidade de grupo, que determina a velocidade de um pacote de onda. Além disso, para movimentos de ondas práticas, tem-se:

$$c_g \leq c_f \quad (1.3-8)$$

Além disso, a velocidade de grupo é a velocidade de propagação de energia. A seguir na Figura 4, tem-se a evolução de uma onda descrita por uma equação diferencial com o termo de dispersão.

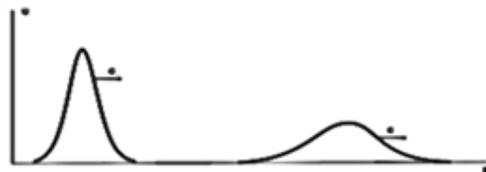


Figura 4 - Representação de uma onda dispersiva (sem escala). Fonte: SILVA, (2008).

## 1.4 Equações de onda não linear

Para estudos da não linearidade, seja uma equação não linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.4-1)$$

e uma solução para a equação (1.1-7) dada por:

$$u(x, t) = f[x - (1 - u)t] = f(y) \quad (1.4-2)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária. Para verificar que (1.4-2) é solução de (1.4-1) deve-se efetuar algumas substituições, define-se que  $y = x - (1 - u)t$ , e da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (u - 1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.4-3)$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.4-4)$$

Na Figura 5, tem-se o comportamento da solução (1.4-2). Pode-se analisar que as partes altas devem ser mais rápidas que as baixas, conseqüentemente em certo momento as partes altas devem superar as partes baixas provocando uma quebra na onda (ABLOWITZ e CLARKSON, 1991).

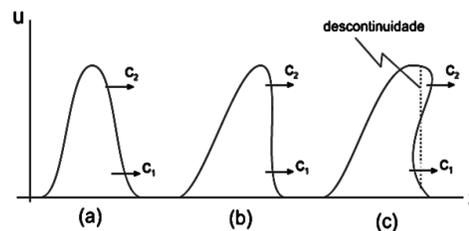


Figura 5 - Representa a evolução de uma onda descrita por uma equação não linear. Fonte: SILVA, (2008).

## CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES QUE EXIBEM SOLUÇÕES TIPO SÓLITONS

A equação KdV é uma das mais extraordinárias equações da teoria de sistemas integráveis, junto com a equação de Schroedinger não linear. São várias as aplicações da KdV, isto se deve ao fato, dela ser a equação mais fundamental que inclui efeitos não lineares e dispersivos.

Tem-se, também, a equação modificada da KdV conhecida como equação mKdV, que é aplicada em diversas áreas da física (FU et al., 2004; MATSUTANI, 2002; MIURA et al., 1968). Por exemplo, ela aparece no contexto das ondas eletromagnéticas, em filme de tamanho quantizado, em colisões de plasmas (KHATER et al., 1968). Também encontramos aplicações da mKdV em interfaces de ondas entre dois líquidos com profundidades variando gradualmente (HELFRICH et al., 1984), em ion (solíton) acústicos (TAJIRA e NISHIHARA, 2001; LONNGREN, 1998; WATANABE, 1984), média elástica (MATSUTANI, 1991) e por fim é aplicada também em problemas de fluxo de tráficos (NAGATANI, 1999; KOMATSU e SASA, 1995).

### 2.1 A KdV

A equação KdV tem a seguinte forma:

$$u_{t+} + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1-1)$$

sendo,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  e  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Note que a equação KdV contém um termo não linear ( $6uu_x$ ), e um termo dispersivo ( $u_{xxx}$ ). A equação (2.1-1) admite solução do tipo ondas viajante na forma:

$$u(x,t) = u(z) = u(kx - \omega t), \quad (2.1-2)$$

com,  $z = kx - \omega t$ . Sendo  $\vec{k}$  o vetor que dá a direção da onda, e  $c$  a velocidade da onda. Agora, escrevendo (2.1-1) em função da sua solução  $u(x, t) = u(z)$ , tem-se:

$$k^3 u_{zzz} - \omega u_z + 6k u_z = 0 \quad (2.1-3)$$

A Equação (2.1-3) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dz} \left[ k^2 u_{zz} - \left( \frac{\omega}{k} u - 3u^2 \right) \right] = 0 \quad (2.1-4)$$

integrando a Equação (2.1-4) em relação a variável  $z$  obtém-se:

$$k^2 u_{zz} = \frac{\omega}{k} u - 3u^2 + A \equiv \frac{dV(u)}{du} \quad (2.1-5)$$

onde se denomina por conveniência  $V(u)$  por "Potencial Associado", já que não se trata do potencial do sistema no sentido usual, e sim de uma definição útil como deverá ver-se adiante. Sabe-se que,  $A$  é uma constante de integração arbitrária.

Resolvendo a Equação (2.1-5), para descobrir qual é, a forma explícita do sóliton da equação KdV. Então, multiplicando a Equação (2.1-5) pelo fator integrante  $(du/dz)$  produz:

$$k^2 u_z u_{zz} - \frac{\omega}{k} u u_z + 3u^2 u_z = A u_z. \quad (2.1-6)$$

então,

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{k^2}{2} (u_z)^2 - \frac{\omega}{2k} u^2 + u^3 - A u \right] = 0. \quad (2.1-7)$$

integrando (2.1-7) novamente, obtém-se:

$$\frac{k^2}{2} (u_z)^2 = \frac{\omega}{2k} u^2 - u^3 - A u + B = V(u). \quad (2.1-8)$$

onde,  $B$  é uma segunda constante de integração arbitrária. Da Equação (2.1-8) observa-se que o potencial associado  $V(u)$  possui a seguinte forma:

$$V(u) = \frac{c}{2} u^2 - u^3 - A u + B. \quad (2.1-9)$$

sendo  $c = \omega/k$ .

Portanto, impondo as condições de contorno, encontra-se explicitamente a solução da equação KdV, logo:

$$u|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz}|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2}|_{\pm\infty} \rightarrow 0. \quad (2.1-10)$$

Quando  $z \rightarrow \pm\infty$ , segue que  $A = 0$  e  $B = 0$ . E assim a Equação (2.1-8), pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{c}{2} u^2 - u^3. \quad (2.1-11)$$

Após alguns artifícios matemáticos, tem-se:

$$\pm z = \int \frac{du}{u\sqrt{c-2u}}. \quad (2.1-12)$$

Considerando somente  $c - 2u > 0$ . Fazendo uma mudança de variável em que:

$$u = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \theta. \quad (2.1-13)$$

$$du = c \operatorname{sech}^2 \theta \operatorname{tgh} \theta d\theta. \quad (2.1-14)$$

Substituindo as Equações (2.1-13) e (2.1-14) na Equação (2.1-12), a solução da KdV, é:

$$u(z) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} \left( \frac{z}{k} - x_0 \right) \right]. \quad (2.1-15)$$

onde  $x_0$ , é um deslocamento de fase que indica a posição da onda no instante  $t = 0$ . Se  $x = 0$  em  $t = 0$ , adotando as quantidades  $A = c/2, k = \frac{\sqrt{c}}{2}$ , a solução (2.1-15) produz:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(kx - \omega t). \quad (2.1-16)$$

onde  $\omega = 4k^2$  é a frequência angular. A solução (2.1-16) do tipo onda solitária, é o sóliton da equação KdV que só existe se  $c > 0$ .

Na Figura 6, vê-se um esboço do comportamento do sóliton para a equação KdV, que mantém sua forma inalterada após alguns deslocamentos. A solução desse tipo de onda está em função da  $sech^2$  esta se torna uma solução de onda tipo sóliton mais simples possível que exprime um caráter não topológico (BAZEIA, 2004).

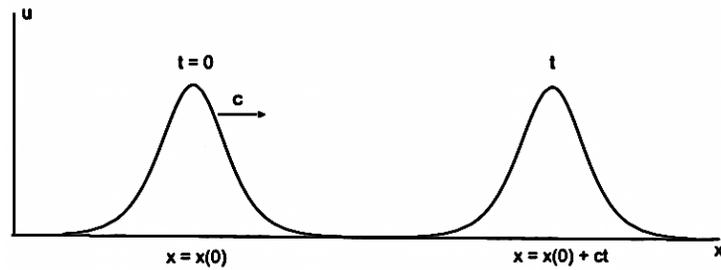


Figura 6 - Representação do sóliton para equação KdV. Fonte: SILVA, (2008).

## 2.2 A mKdV

A equação mKdV tem a seguinte forma:

$$u_t - 6u^{2u_x} + u_{xxx} = 0. \quad (2.2-1)$$

de maneira análoga a KdV, a Equação (2.2-1) também admite solução do tipo ondas viajante:

$$u(x, t) = u(z) = u(kx - \omega t), \quad (2.2-2)$$

onde  $z = kx - \omega t$ . Assim,

$$k^3 \frac{d^3 u}{dz^3} - \omega \frac{du}{dz} - 6k u^2 \frac{du}{dz} dz = 0. \quad (2.2-3)$$

e ainda pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dz} \left[ k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\omega}{k} u - 2u^3 \right] = 0 \quad (2.2-4)$$

Integrando, resulta:

$$k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\omega}{k} u - 2u^3 - A = 0 \quad (2.2-5)$$

onde  $A$  é uma constante de integração. Multiplicando a equação acima por um fator integrante  $du/dz$  produz:

$$k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{du}{dz} - \frac{\omega}{k} u \frac{du}{dz} - 2u^3 \frac{du}{dz} - A \frac{du}{dz} = 0, \quad (2.2-6)$$

integrando novamente em relação a variável  $z$ , tem-se

$$k^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 + 2Au + B = V(u), \quad (2.2-7)$$

sendo  $B$ , uma outra constante de integração. Para essa equação o potencial associado possui a seguinte forma:

$$V(u) = \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 + 2Au + B, \quad (2.2-8)$$

Em que  $c = \omega/k$ .

Portanto impondo as condições de contorno, determina-se explicitamente a solução da equação mKdV.,

$$u|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz}\Big|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2}\Big|_{\pm\infty} \rightarrow 0; \quad (2.2-9)$$

quando  $z \rightarrow \pm\infty$ , segue que  $A = 0$  e  $B = 0$ , assim a equação (2.2-7), é reescrita como:

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{u}{k} \sqrt{\frac{\omega}{k} + u^2}. \quad (2.2-10)$$

onde:

$$\pm z = \int \frac{du}{\frac{u}{k} \sqrt{\frac{\omega}{k} + u^2}} \quad (2.2-11)$$

Considerando que só existirá uma solução real, somente se  $\left(\frac{\omega}{k} + u^2\right) \geq 0$ . Fazendo uma mudança de variável e resolvendo a integral (2.2-11), encontra-se a solução da mKdV:

$$u(x, t) = \pm k \tanh(kx - \omega t) \quad (2.2-12)$$

Onde  $\omega = -2k^3$  é a frequência angular. A solução acima do tipo onda solitária, é o sóliton da equação mKdV a mesma possui dois sinais ( $\pm$ ). Isto permite que ela seja invariante a transformações  $v \rightarrow -v$ . Ilustrou-se na Figura 7, o comportamento da solução da mKdV.

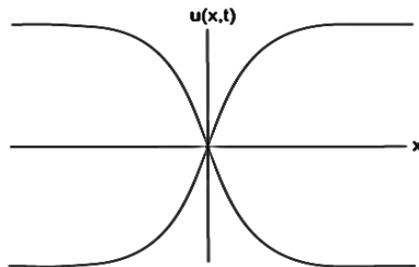


Figura 7 - Comportamento da solução da equação mKdV. Fonte: SILVA, (2008).

## CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE DEFORMAÇÃO

Nesta seção, apresenta-se o método de deformação. Usado para construir soluções do tipo ondas viajantes, para equações não lineares. Apresenta-se também as soluções não triviais para equações do tipo KdV, mKdV que podem ser obtidas a partir de soluções simples de sistemas lineares. Neste método, é possível encontrar uma solução não-trivial de um sistema integrável não linear, a partir de uma solução conhecida de um sistema linear simples, ou a partir de um sistema não linear (BAZEIA et al., 2008).

### 3.1 O Método de Deformação

Considere a equação Hamiltoniana em terceira ordem nas derivadas espaciais, descrita num espaço de dimensões (1+1) na seguinte forma:

$$u_t + (f(u))_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (3.1-1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante e função  $f(u)$  é um monômio da variável dinâmica  $u(x, t)$  que dependendo de sua forma a equação é linear ou não linear.

Assumindo que a Equação (3.1-1) admite solução tipo ondas viajante na forma:

$$u(x, t) = u(kx - \omega t), \quad (3.1-2)$$

onde em geral,  $\omega = \omega(k)$ . Então, pode escrever da seguinte forma:

$$\alpha u_{xxx} + [f(u)]_x - \frac{\omega}{k} u_x = 0, \quad (3.1-3)$$

que integrando resulta:

$$u_{xx} = V'(u) = \frac{\omega}{\alpha k} u - \frac{1}{\alpha} f(u) + \beta, \quad (3.1-4)$$

sendo,  $\beta$  uma constante de integração cujo valor é determinado a partir das condições assintóticas, satisfeita pela solução.  $V'(u)$  é dado por:

$$V'(u) = \frac{\partial V(u)}{\partial u}. \quad (3.1-5)$$

Aqui a constante de integração pode ser incluída na definição de  $V(u)$ , que é denominado em teoria de campos como Potencial (BAZEIA et al., 2002).

Supondo, a seguir, que exista outro sistema dinâmico em terceira ordem na variável dinâmica  $v$  em (1+1) dimensão, e que o interesse é determinar sua solução tipo ondas viajantes na forma:

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{\omega}t). \quad (3.1-6)$$

Como no caso anterior (ver equações (3.1-4) e (3.1-5)), considera-se que o novo sistema dinâmico admita solução tipo ondas viajante, então sua equação em segunda ordem produz:

$$u_{xx} = \tilde{V}(v) = \frac{d\tilde{V}(v)}{dv}. \quad (3.1-7)$$

Uma importante observação é que, se existir uma função de deformação, tal que:

$$u = g(v), \quad (3.1-8)$$

então o potencial associado para o novo modelo será:

$$\tilde{V}(v) = \frac{V[g(v)]}{[g'(v)]^2}; \quad (3.1-9)$$

onde

$$g'(v) = \frac{dg}{dv}. \quad (3.1-10)$$

A relação (3.1-9) é obtida da seguinte forma: adotando a Equação (3.1-4) do modelo original e, multiplicando pelo integrante  $(du/dx)$  produz:

$$\frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dV}{du} \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx}, \quad (3.1-11)$$

o que resulta em:

$$\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{2V(u)}. \quad (3.1-12)$$

Note que a Equação (3.1-12) é solução da Equação (3.1-4). De maneira análoga, adotando a Equação (3.1-7) para o segundo modelo, e multiplicando pelo fator integrante ( $dv/dx$ ) resulta:

$$\frac{dv}{dx} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)}. \quad (3.1-13)$$

A equação de primeira ordem resolve a equação de segunda (3.1-7), agora derivando a relação (3.1-8) encontra-se que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dv} \frac{dv}{dx}, \quad (3.1-14)$$

E substituindo (3.1-7) e (3.1-12) em (3.1-14) tem-se:

$$\pm \sqrt{2V(u)} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)} \frac{dg}{dv}. \quad (3.1-15)$$

Portanto, elevando ao quadrado em ambos os lados da equação (3.1-15), obtém-se que:

$$2V(u) = 2\tilde{V}(v) \left(\frac{dg}{dv}\right)^2, \quad (3.1-16)$$

e

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(u)}{\left(\frac{dg}{dv}\right)^2}. \quad (3.1-17)$$

Desta forma, comparando o primeiro sistema dinâmico definido a partir da Equação (3.1-4), com o segundo sistema dinâmico definido em (3.1-7) se observa que, se existir uma solução tipo ondas viajantes para o primeiro sistema dinâmico definido em (3.1-4), então também haverá uma solução tipo ondas viajantes para o segundo, dado por:

$$v(x,t) = v(kx - \tilde{\omega}t) = g^{-1}[u(kx - \omega t)]. \quad (3.1-18)$$

Mostrará através de vários exemplos que esse método é muito útil para construir solução tipo ondas viajante, para sistemas não lineares. Como o sistema dinâmico trabalhado não precisa ser integrável para o método funcionar. Entretanto, a utilidade do método é mais significativa para obter soluções tipo ondas viajante para sistemas integráveis. Nas próximas seções se discute como obter tais soluções para uma variedade de sistemas dinâmicos.

### 3.2 Soluções tipo sólitons para KdV e mKdV a partir de um sistema linear

Para gerar soluções não triviais para equações não lineares a partir de sistemas lineares, considere  $f(u) = 0$  e  $\alpha = 1$ , logo a Equação (3.1-1) produz:

$$u_t + u_{xxx} = 0. \quad (3.2-1)$$

Sendo uma equação linear, possui uma solução simples tipo ondas viajantes na forma

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t). \quad (3.2-2)$$

Onde  $\omega = k^3$ . Neste caso a Equação (3.1-4) resulta que:

$$u_{xx} = -\frac{\omega}{k} u + \beta = -k^2 u + \beta = V'(u), \quad (3.2-3)$$

Comparando com a solução (3.2-2) nota-se que  $\beta = 0$ , e integrando a Equação (3.2-3) tem-se:

$$V(u) = -\frac{k^2}{2} u^2 + \gamma. \quad (3.2-4)$$

entretanto, o que se quer é obter a solução não trivial da equação KdV (2.1-1):

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.2-5)$$

cuja forma é dada por:

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{\omega}t). \quad (3.2-6)$$

Seguindo o procedimento realizado em (3.1-4) e (3.1-5) tem-se que:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k} v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.2-7)$$

A seguir se a constante de integração  $\tilde{\gamma} = \frac{A^2 K^2}{2}$ , for escolhida com a deformação:

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = A \cos \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right], \quad (3.2-8)$$

o potencial associado tem a seguinte forma:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\left\{ \gamma - \frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right] \right\} (2k^2 v^2 - v^3)}{\frac{k^2 A^2}{2} \sin^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right]}; \quad (3.2-9)$$

o que produz:

$$\tilde{V}(v) = (2k^2 v^2 - v^3). \quad (3.2-10)$$

comparando (3.2-10) com (3.2-7) nota-se que:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = 4k^3, \quad (3.2-11)$$

a solução da KdV (2.1-1) obtêm-se, tomando a inversa da deformação:

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{\omega}t)] = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2 t)], \quad (3.2-12)$$

que é a solução da KdV.

Por outro lado, para construir uma solução da mKdV com o sinal negativo:

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.2-13)$$

Procede-se como em (3.1-4) e (3.1-5). Assim:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k} v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta} v + \tilde{\gamma}, \quad (3.2-14)$$

Portanto, se  $\tilde{\gamma} = \frac{A^2 K^2}{2}$ , for escolhida a deformação:

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = \pm A \cos \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{v}{k} \right) \right], \quad (3.2-15)$$

obtêm-se:

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = k^2 \left( 1 - \frac{v^2}{k^2} \right) \left\{ \frac{-\frac{k^2}{2} A^2 \cos^2 \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{v}{k} \right) \right] + \gamma}{A^2 \sin^2 \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{v}{k} \right) \right]} \right\}, \quad (3.2-16)$$

que resulta em:

$$\tilde{V}(v) = \frac{k^4}{2} - k^2 v^2 + \frac{v^4}{2}, \quad (3.2-17)$$

que pode ser comparada com a Equação (3.2-14), que obviamente elas serão iguais quando:

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = -2k^3. \quad (3.2-18)$$

Tomando a inversa da deformação em (3.2-15), se obtêm a solução tipo ondas viajantes para a equação mKdV negativa na forma:

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = \pm k \tanh[k(x + 2k^2t)]. \quad (3.2-19)$$

### 3.3 Soluções tipo sólitons a partir de um sistema não linear

Continuando a exposição do método por mostrar como se pode construir soluções tipo sólitons, para outros sistemas integráveis, iniciando com uma solução tipo sóliton de um dado sistema integrável. Por simplicidade, se inicia com a solução tipo sóliton (3.2-12) ou (3.2-6).

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)]. \quad (3.3-1)$$

Da equação KdV, tem-se:

$$u_{t+} - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.3-2)$$

o potencial da KdV, após atribuir as condições de contorno assume a seguinte forma:

$$V(u) = 2k^2u^2 - u^3, \quad (3.3-3)$$

desta forma, a solução da equação mKdV negativa é construída por:

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.3-4)$$

a partir da solução:

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)]. \quad (3.3-5)$$

Já foi visto anteriormente que o potencial da mKdV é:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k} v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}, \quad (3.3-6)$$

É claro que a partir da deformação:

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = 2(k^2 - v^2), \quad (3.3-7)$$

Identifica-se que:

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{k^4}{2} - k^2v^2 + \frac{v^4}{2} \quad (3.3-8)$$

Desde que:

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = -2k^3 \quad (3.3-9)$$

O inverso da deformação (3.3-7) resulta na solução:

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = \pm k \tanh[k(x + 2k^2t)]. \quad (3.3-10)$$

O método é simples e direto para encontrar, soluções tipo ondas viajante e sistemas integráveis não lineares. Ilustrou-se o método, construindo explicitamente soluções tipo sólitons das equações KdV e mKdV, a partir de uma solução trigonométrica simples de uma equação linear. Nesta seção mostrou-se como soluções tipo sólitons da equação KdV pode também gerar solução para equação mKdV.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho iniciou-se com um breve relato histórico, a partir de uma observação feita pelo engenheiro Naval, John Scott Russel. A teoria dos sólitons foi uma das mais extraordinárias descobertas da Física do século XX. Tornou-se claro que a Física linear não abrange muitos dos fenômenos da Natureza, que são governados por leis não lineares. A notoriedade da teoria foi imensa, não só pelos resultados obtidos matematicamente, mas também devido às novas tecnologias, como por exemplo, a fabricação de fibras ópticas não lineares, avanços no estudo experimental dos plasmas e de diversos sistemas em física da matéria condensada.

Do ponto de vista matemático, as equações não lineares que foram consideradas neste trabalho são integráveis. Cada uma destas equações representa uma idealização do processo ondulatório correspondente. Esta situação deu origem a um desenvolvimento interessante na teoria dos sólitons: A teoria de perturbações para sólitons, que permite descrever os efeitos de fenômenos relativamente fracos, tais como dissipação, impurezas e imperfeições do meio de propagação na dinâmica de sólitons.

Por outro lado, hoje o nome sólitons usa-se em sentido generalizado, abrangendo todas as ondas solitárias, ondas com energia localizada no espaço, mesmo se a equação correspondente não for integrável no sentido matemático.

Nesse trabalho abordou-se um método de deformação que possibilita solucionar e generalizar sistemas não lineares, que são considerados extremamente complicados para encontrar suas soluções tipo sólitons. Devido a matemática empregada na utilização do método ser simples, acredita-se que o método estudado possua grande interesse do ponto de vista físico, matemático e químico.

## REFERÊNCIAS

ABLOWITZ, M. J.; CLARKSON, P. A. Solitons, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering, Cambridge, 1991.

BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J.M.C. Phys. Rev. D 66, 101701(R), 2002.

BAZEIA, D. Topological Solitons. In Concise Encyclopedia of Supersymmetry. Duply, S., Siegel, W. e Bagger, J., Dordrecht: Kluver. 2004.

BAZEIA, D.; DAS, A.; LOSANO, L.; SILVA, A. A simple and direct method for generating traveling wave solutions for nonlinear equations. A. Phys. p.323, 2008.

BULLOUGH, R. K.; CAUDREY, P. J.; Topics in current physics: solitons, 1st ed, Springer-Verlag: New York, 1980.

CFTC – Centro de Física Teórica e Computacional, A Física dos Sistemas Complexos, 2013. Disponível em:  
<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo5/modulo1/topico3.php>. Acesso em: 29 de Jun. de 2013, 17:00:00.

CHEN, Y.; ATAI, J. Stability of fundamental solitons of coupled nonlinear Schrödinger equations. Optics Communications., v.150, p.381-389, 1998.

DRAZIN, P.G; JOHNSON, R.S. Sóliton: an introduction, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

EILENBERGER, G. Soliton: mathematical methods for physicists. Heidelberg: Springer-Verlag, 1981.

EMPLIT, P.; HAMAIDE, J. P.; REYNAUD, F.; FROEHLI, C.; BARTHELEMY, A. Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers. Optics Communications, v.62, n.6, p.374-379, 1987

FERMI, E.; PASTA, J. R.; ULAM, S. M. Studies on nonlinear problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab., 1955.

FLASCHKA, H. On the Toda Lattice II - Inverse Scattering Solution, Progress, Theoret physics, 1974.

FU, Z. LIU, S. LIU, S. Phys. Lett., 2004, p.326 – 364.

GALLEAS, W.; YMAI, L. H.; NATTI, P. L.; TAKANONATTI, E. R., Ondas do tipo sólitons em dielétricos, Rev. Bras. Ens. Fis., vol. 25 , n. 3, 2003, p. 294-304.

HASEGAWA, A. Numerical study of optical soliton transmission amplified periodically by the stimulated Raman process. Appl. Opt., v.23, 1984. p. 3302-3309.

HAUS, H. A.; WONG, W. S. Soliton in optical communications. Reviews of Modern Physics, v.68, 1996, p. 423-444.

HELFRICH, K. R.; MELVILLE, W. K.; MILES, J. W., J. Fluid Mech. p.149, 1984.

KHATER, A. H.; EL-KAKAAWY, O. H.; CALLEBAUT, D. K. Phys. Scr. 58, 545, 1968.

KORTEWEG, D. J.; VRIES, G., Phil, Mag, p.39, 1985.

KOMATSU, T.S.; SASA, S.I. Phys. Rev. p.52, 1995.

LAX, P. D., Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467 (1968).

LE GUEN, D.; DEL BURGO, S.; MOULINARD, L.; GROU, D.; HENRY, M.; FAVRE, F.; GEORGES, T. Narrow band 1.02 Tbit/s (51×20 Gbit/s) soliton DWDM transmission over 1000 km of standard fiber with 100 km amplifier spans. In: OFC-1999 - Optical Fiber Communication Conference, and the IOOC-1999 - International Conference on Integrated Optics and Optical Fiber Communication. Technical Digest Volume Supplement, p.PD4/1-PD4/3, 1999.

LONNGREN, K.E. Optic quantum electron, p.30, 1998.

YMAI, L. H.; GALLEAS, W.; NATTI, P. L.; NATTI, E. R. T. Estabilidade de sólitons em fibras óticas dielétricas de tipo  $\chi^2$ . Revista Ciências Exatas e Naturais, v.6, n.1, p.9-29, 2004.

MALOMED, B. A.; MIHALACHE, D.; WISE, F.; TORNER, L. Spatiotemporal optical solitons. Journal of Optics B, v.7, p.R53-R72, 2005.

MATSUTANI, S. J. Phys. A: Math. Gen. p.35, 2002.

MATSUTANI, S.; TSURU H. J. phys. Soc. Jpn. p.60, 1991.

MIURA, R. M.; GARDNER, C. S.; KRUSKAL, M.D. J. Math. Phys. 9, 1204, 1968.

MOLLENAUER, L. F.; SMITH, K. Demonstration of sólitons transmission over more than 4000 km in fi ber with loss periodically compensated by Raman gain. Optics Letters, v.13, p.675-677, 1988.

MOLLENAUER, L. F.; NEUBELT, M. J. ; HANER, M.; LICHTMAN, E.; EVANGELIDES, S.G.; NYMAN, B. M. Demonstration of error-free sólitons transmission at 2.5 Gbit/s over more than 14000 km. Electronics Letters, v.27, p.2055-2056, 1991.

NAGATANI, T. Physica A 264, 581, 1999.

NATTI, P. L.; PIZA, T. A. F. R. Small oscillation of a chiral Gross-Neveu system. Phys. Rev., D 55, 1996, p. 3403-3410.

RUSSEL, J.S., "Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science" (Sept. 1844, Plates XLVII-LVII:311, York 1845).

SILVA, A. Método para gerar soluções tipo ondas viajantes em equações diferenciais. Tese de Doutorado em Física, João Pessoa – PB, 2008.

TAJIRI, M.; NISHIHARA, K. J. phys. soc. jpn. p.54, 2001.

TODDA, M., Linear and Nonlinear Problems (Los Alamos, Sci. Lab, 1955).

TODDA, M., Nonlinear waves and solitons. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Translated from the Japanese, 1989.

WATANABE, S. J. Phys. Soc. Jpn. p.53, 1984.