UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FRANCISCO DINIZ JÚNIOR

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB

2014

FRANCISCO DINIZ JÚNIOR

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE - PB

2014

D585t Diniz Júnior, Francisco.
Trigonometria no triângulo retângulo e aplicações [manuscrito] / Francisco Diniz Junior. - 2014.
50 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Trigonometria. 2. Triângulo Retângulo. 3. Ensino de matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

FRANCISCO DINIZ JÚNIOR

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título.

Aprovada em 24/07/2014

Nota:

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano / UEPB
Orientadora

Prof. Ms. Castor da Paz Filho / UEPB
Examinador

Joselma S. Santos

Profª Ms. Joselma Soares dos Santos / UEPB
Examinadora

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Francisco Diniz e Sônia Maria Diniz, que foram os principais responsáveis por todas as minhas conquistas, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me pôs de pé nos momentos difíceis, me dando forças para vencer os obstáculos encontrados durante o curso.

Aos meus pais, Francisco Diniz e Sônia Maria Diniz, que fizeram o que podiam e o que não podiam, para que hoje eu pudesse subir mais um degrau na minha carreira acadêmica.

Aos meus irmãos, Pedro Diniz e Francimar Diniz, pelo carinho que sempre demonstraram, e pela ajuda que sempre me deram.

As minhas irmãs, Francicleide Diniz Morais e Maria José Diniz Sousa, pelo amor demonstrado em formas de palavras e ações, e pela ajuda de sempre.

Ao meu cunhado, Marconi Morais Da Cruz que contribuiu diretamente para que hoje eu alcançasse esta vitória.

A minha tia Luzia Maria Diniz, que muito contribuiu para minha formação.

A minha madrinha Socorro Fernandes,e aos seus filhos a quem tenho como irmãos, Suane Fernandes e Edivaldo Sousa, por estarem sempre presentes, e pelo incentivo de sempre.

Aos meus cunhados e cunhadas, sobrinhos e sobrinhas pela compreensão de sempre.

A minha Orientadora, Professora Kátia Suzana Medeiros Graciano, pelo empenho nas orientações, pelas palavras de incentivo, epela compreensão de sempre.

A Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, pela realização do curso, bem como, a todos os professores do Departamento de Matemática, que muito contribuíram para minha formação.

A toda minha turma de graduação, em especial Andréa, Ataiz, Ellen, Edna, Flavia, Janailson, Janaína, João Antonio, Renilton, Tayrone e Weiller, por cada palavra amiga, por cada “Bom Dia” me incentivando a prosseguir, pelos momentos de risadas, de problemas compartilhados, pelas manhãs, tardes, noites, e madrugadas de estudos, pelo tempo e atenção que me doaram, pelas dúvidas tiradas, em fim por muito contribuírem para minha formação.

A minha turma de Segurança do Trabalho - SENAI, pelas contribuições diretas e indiretas. Em especial ao meu amigo Jefferson Pedrosa, pela sua contribuição.

A Professora Regilane pelo carinho e atenção de sempre.

Aos meus colegas de trabalho, Andreza, Elyclênio, Isaac, Izabel e Tatiany pelas contribuições diretas e indiretas. Em especial ao meu ex-professor, que me inspirou para cursar Matemática, e atual colega de trabalho, a quem tenho como um Pai, Manassés Alves da Silva.

Aos meus amigos mais que especiais, Adriana, Amanda, Alan, Elis, Eliane, Jefferson, Mariellee Reginaldo, que estiveram sempre ao meu lado quando precisei, e por cada contribuição para que hoje eu alcançasse mais uma vitória.

A minha saudosa amiga Késsia Araújo, que muito contribuiu na minha formação, estando sempre ao meu lado e me fortalecendo com suas palavras de ânimo e incentivo

Por fim, meus sinceros agradecimentos aos professores Castor da Paz filho, e JoselmaSoares dos Santos, que compõem a banca examinadora.

“Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece.”

Filipenses 4. 13

RESUMO

A trigonometria no triângulo retângulo tem sido apresentada sob ausência de aplicações contextualizadas, o que tem causado dificuldade na aprendizagem dos alunos, que por sua vez, não conseguem identificá-la no seu dia-a-dia. No intuito de minimizar este problema, foi desenvolvido nesta pesquisa um levantamento histórico, com aplicações contextualizadas buscando uma inserção do conteúdo à realidade do aluno. Para isso, além do levantamento histórico e das aplicações, foram citados alguns conceitos e teoremas, assim como suas demonstrações que são de grande importância para o desenvolvimento da trigonometria no triângulo retângulo, possibilitando uma melhor compreensão do conteúdo por parte do corpo discente. A fundamentação teórica está nos autores: Iezzi (1978); Boyer (1996);Guelli (1996);Morey (2003); Pereira (2012); Costa(2013); dentre outros. Portanto,desejam-se despertar o interesse do alunado pelo estudo da trigonometria no triângulo retângulo, fazendo um paralelo entre sua história esituações-problemas,dando um sentido significativo ao ensino-aprendizagem da trigonometria.

PALAVRAS- CHAVE: Trigonometria; Triângulo Retângulo; Aplicações

ABSTRACT

The trigonometry in the right triangle has been presented by the absence of contextualized applications, that has caused difficulties in student learning, which in turn, can not identify in their daily life. In order to minimize this problem, was developed in this research a historical survey, with contextualized applications looking for an implantation of content to student's reality. For this, besides the historical survey and applications, were cited some concepts and theorems, as well as their statements that have great importance to the development of trigonometry in the right triangle, allowing a better understanding of the content by the students. The theoretical foundation is in the authors: Iezzi (1978); Boyer (1996); Guelli (1996); Morey (2003); Pereira (2012); Costa (2013); among others. Therefore, the desire is to rise the interest of the students in the study of trigonometry in the right triangle, making a parallel between their story and problem-situations, giving a significant sense in the teaching-learning of trigonometry.

KEYWORDS: Trigonometry; Right Triangle; applications

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da trigonometria no triângulo retângulo, deve estar de forma intrínseca ligado às suas aplicações, sendo elas mais próximas possíveis do cotidiano do alunado, uma vez que tal conteúdo provoca nos mesmos um certo desconforto, que por sua vez, está expresso na dificuldade da aprendizagem do tema aqui pautado.

Considerando a natureza do objeto de estudo desse trabalho, foi proposto os seguintes objetivos: Determinar os motivos que levaram ao surgimento da trigonometria no triângulo retângulo; Conhecer o processo de desenvolvimento; Identificar os matemáticos que contribuíram para tal surgimento e desenvolvimento, assim comosuas contribuições; Aplicar o conteúdo a situações – problema voltados ao cotidiano do corpo discente.

Este trabalho encontra-se organizado em três momentos distintos: “Capítulos II, III e IV” sendo respectivamente, o segundo capítulo um levantamento histórico sobre o surgimento datrigonometria, no qual o enfoque maior foi o matemático Hiparco de Niceia, que foi considerado o pai da trigonometria por ser pioneiro na elaboração de tabelas trigonométricas, no terceiro capítulo é abordada algumas definições e teoremas que são de grande importância na compreensão da trigonometria no triângulo retângulo, são demonstradas as relações trigonométricas no triângulo retângulo e seus ângulos notáveis, como também, a relação trigonométrica fundamental. Por fim, no quarto capítulo foi feito algumas aplicações envolvendo situações- problema do cotidiano com trigonometria no triângulo retângulo.

CAPÍTULO II

Neste capítulo será apresentada uma explanação objetivando identificar o surgimento e o desenvolvimento da trigonometria, sendo citados alguns matemáticos que contribuíramcom suas respectivas contribuições para o ramo da trigonometria, com foco especial no triângulo retângulo.

2.1 HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

A trigonometria surgiu e se desenvolveu no mundo antigo, a partir da necessidade de sua aplicação à diversas áreas do cotidiano, sendo elas, ligadas à astronomia, agrimensura, construções e navegação.

Os primeiros indícios da trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia através do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito observa-se esse estudo através do Papiro Ahmes que contém, aproximadamente, 84 problemas, e faz menções ao seqt (inclinação) de um ângulo. Na Babilônia havia um grande interesse pela astronomia por questões de cunho religioso, assim como um grande envolvimento nas conexões com o calendário e as épocas de plantio, os babilônicos sentiram a necessidade de construir um calendário astrológico, desenvolvido em 28 a.C., durante o reinado de Sargon, e posteriormente construíram uma tábua de eclipses lunares, sendo esta elaborada a partir do ano 747 d.C.

A primeira nomenclatura dada à trigonometria foi a *trilaterometria*, pois os antigos egípcios e babilônicos conheciam teoremas sobre razões de triângulos semelhantes, além disso, eram leigos no que diz respeito a medição de ângulos.

> Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo melhor seria chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo. (Boyer.1996. p.108)

Posteriormente passou a ser conhecida por *trigonometria*, palavra composta por três radicais gregos: **tri** (três), **gonos** (ângulos) e **metron** (medir), que tem por objetivo o cálculo das medidas dos ângulos e lados de um triângulo.

Pela primeira vez, foi encontrado com os povos gregos um estudo sistemático de relações entre ângulos num circulo e os comprimentos das cordas que os subentendem, na qual as propriedades das cordas eram as medidas de ângulos centrais, ou inscritos em círculos, sendo conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, cogitado que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da lua.

A trigonometria bem como os demais ramos da matemática, não foi obra de um só indivíduo, nem de uma só nação, também, vamos conhecer alguns homens e suas contribuições para o surgimento e desenvolvimento da trigonometria,

2.2HIPARCO DE NICÉIA

Hiparco foi um astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego da escola de Alexandria, nascido em 190 a.C. em Nicéia, foi considerado o fundador da astronomia devido as suas contribuições para o nascimento e desenvolvimento da mesma, sendo a astronomia a grande impulsionadora da trigonometria, visto que Hiparco estabeleceu uma ponte entre a astronomia e a geometria, contribuindo significativamente para o nascimento da trigonometria na Grécia.

Hiparco foi considerado o pai da trigonometria por ter sido o pioneiro na elaboração de tabelas trigonométricas, sendo estas calculadas e usadas por ele na astronomia, possibilitando ao mesmo elaborar um catálogo estelar.

> Para construir as tabelas trigonométricas, utilizadas para medir triângulos na terra relacionados com ocorrência no céu, Hiparco precisou usar o triângulo retângulo para calcular suas cordas, com o objetivo de determinar as posições das estrelas e dos planetas usando uma unidade de medida para arcos e ângulos e um sistema de coordenadas para localizar um corpo na esfera celestial. (Pereira.2012.p.28).

É cogitado que a tabela de cordas de Hiparco tenha grande contribuição no uso sistemático do círculo de 360º, mas é possível que ele tenha tomado de Hipsicles, que já havia dividido o dia em 360 partes sob influência babilônica.

2.3CLÁUDIOPTOLOMEU

Cláudio Ptolemeu ou Ptolomeu,foi um cientistagrego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também, trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

Ptolomeu contribuiu significativamente para o desenvolvimento da trigonometria, tendo como contribuição maior a influente obra trigonométrica da antiguidade "*Syntaxis Matemática"* que significa *"Síntese Matemática"*, obra composta por treze livros de autoria de Ptolomeu, passando a ser conhecida posteriormente, como *"Almagesto"* que significa *"O maior",* sendo esta coleção, uma abordagem matemática do modelo grego do universo analisando o movimento do sol, da lua e dos planetas. Outra grande contribuição dada por Ptolomeu foi o seu teorema, o qual leva aos seguintes resultados:

- sen(a+b) = sen(a). cos(b) + cos(a). sen(b);
- sen(a-b) = sen(a). cos(b) – cos(a). sen(b);
- cos(a + b) = cos(a). cos(b) – sen(a) . sen(b);
- cos(a - b) = cos(a). cos(b) + sen(a) . sen(b).

Por isso, essas quatro fórmulas são conhecidas também, como fórmulas de Ptolomeu.

O círculo de 360º também recebeu suas contribuições advindas de Ptolomeu, deve-se lembrar que a divisão do círculo em 360 partes veio desde a época de Hiparco, no entanto, Ptolomeu subdividiu seus graus em sessenta partes *"minutos",* sendo cada minuto subdividido em sessenta partes *"segundos"*.

2.4 ARYABHATA

Aryabhatafoi um dos grandes astrônomos e matemático da era clássica da Índia, sendo pioneiro e contribuinte de maneira relevante para o desenvolvimento da trigonometria com o livro "Aryabhata-Siddhanta', o qual definiu *seno* como a relação moderna entre a metade de umângulo e a metade de uma corda, e então, definiu o *cosseno, verseno* e o *seno* inverso.

Foi através dos trabalhos e estudos de Aryabhata que Robert de Chesterdeu o nome de "seno e cosseno" a relação definida por Aryabhata, devido a uma tradução errônea, visto que, a tal relação foi dado o nome *jiva*que os árabes converteram em *jiba,* e Robert na sua tradução de árabe para latim o interpretou como sendo *jaib,* que por sua vez, significa*sinus*em latim, e *seno* em português, não esquecendo que a sua contribuição foi para a relação "metade de um ângulo e a metade de uma corda", ou seja, a corda de 15º era a meia corda de 30°, a corda de 30º era a meia corda de 60º e assim sucessivamente.

2.5PITÁGORAS

Pitágoras foi umfilósofo e matemáticogrego que nasceu em Samos, sendo ele um dos maiores contribuintes para o desenvolvimento da matemática como um todo, e consequentemente contribuiu significativamente com o desenvolvimento do ramo da trigonometria, por sua vez, foi fundador de uma escola mística e filosófica na Itália, cujos princípios foram determinantes para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidental, sendo os principais temas: a harmonia matemática, a doutrina dos números e o dualismo cósmico essencial.

Uma das maiores contribuições de Pitágoras foi a descoberta e demonstração do *"Teorema de Pitágoras",* que recebeu o seu nome, embora haja cogitação e seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele. O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo que por sua vez, afirma: *"Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."*, sendo este teorema demonstrado de diversas maneiras diferentes.

Outra contribuição importante para a matemática, foi o desenrolar de números irracionais, pois o primeiro número irracional a ser descoberto foi a raiz quadrada do número 2, que surgiu exatamente da aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo de catetos valendo 1.

2.6TALES DE MILETO

Tales de Mileto foi um filósofo e matemático grego, nascido em Mileto na antiga colônia grega na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 623 a.C ou 624 a.C. Sendo ele indicado como um dos sete sábios da Grécia Antiga. Tales foi o primeiro a introduzir a geometria na Grécia, estudando retas e ângulos e fazendo demonstrações rigorosas tais como:

- Os ângulos da base do triângulo isósceles têm a mesma medida;
- Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente congruentes, então são congruentes;
- Todo diâmetro divide o círculo em duas partes congruentes;
- A demonstração de que ao unir qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo.

Em seus estudos, Tales chegou a calcular o tamanho de uma pirâmide através do comprimento da sombra projetada por ela, esses cálculos eram feitos em um determinado tempo, dependia do sol e do horário, pois ele fincava no chão uma vara na vertical, e media o comprimento desta vara, e em seguida, deduzia que no momento em que a sombra produzida pela vara fosse igual ao seu comprimento, teria um triângulo retângulo e isósceles, semelhante a outro triângulo retângulo e isósceles formado pela pirâmide e por sua sombra. Por semelhança de triângulo, ele deduziu que a altura da pirâmide é igual a sombra somado a metade da base.

Dentre tantas contribuições e teoremas, o mais importante e mais conhecido é o Teorema que recebeu o seu nome “Teorema de Tales” que afirma: “*Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes*“,sendo este baseado em dois conceitos: “Razão entre dois números” e “Triângulos Semelhantes”.

CAPÍTULOIII

Neste capítulo serão citadas algumasdefinições e teoremas que são de extrema importância para a compreensão da trigonometria no triângulo retângulo. Em seguida, serão demonstradas as relações trigonométricas no triângulo retângulo e seus ângulos notáveis, assim como, a relação trigonométrica fundamental, para isso, será usada a seguinte notação: Para congruência "≡" ; Para semelhança "~" e para ângulos "Â, Ê..." de modo que a letra seja acentuado indicando o ângulo.

3. 1TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem a duas condições: "*Os ângulos internos correspondentes têm medidas iguais, ou seja, são congruentes.*"E*"Os lados correspondentes são proporcionais"*.

Definição 1

Quando a razão entre dois segmentos é igual a razão entre outros dois segmentos, diz-se que eles são proporcionais

.

Como o triângulo é um polígono de três lados tem-se:

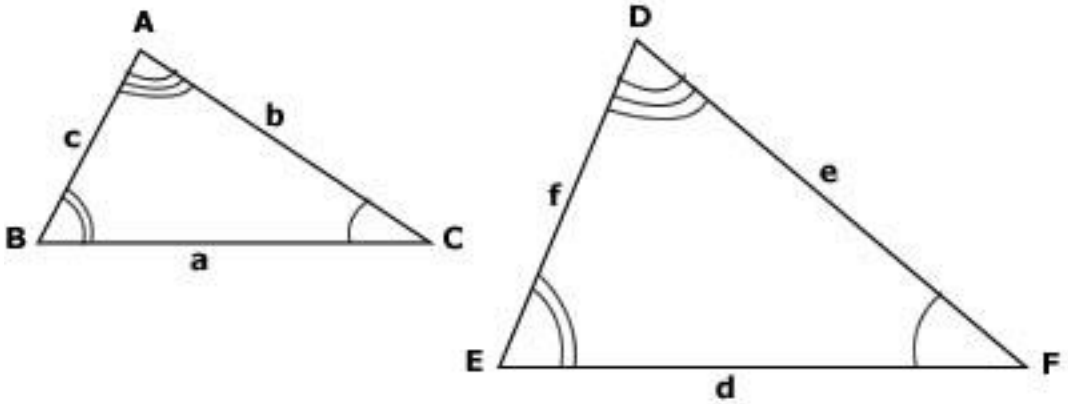


Figura 1 - Triângulos Semelhantes

Com $\hat{A} \sim \hat{D}, \hat{B} \sim \hat{E}$ e $\hat{C} \sim \hat{F}$.

Tem-se ainda, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$

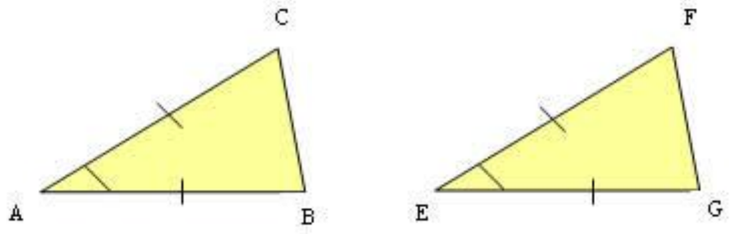
Logo,

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Porém, existem quatro casos em que é possível verificar se dois triângulos são semelhantes conhecendo apenas alguns de seus elementos.

1º Caso (L.A.L – Lado, Ângulo, Lado)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados correspondentes e os ângulos formados por eles congruentes.



.

Figura 2 – Triângulos Semelhantes: Caso L.A.L

Temos,

Dados dois triângulos ΔABC e ΔEFG, se $\overline{AC} = \overline{EF}$, $\hat{A} \sim \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EG}$, então, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$.

2º Caso (L.L.L – Lado, Lado, Lado)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três lados correspondentes congruentes.

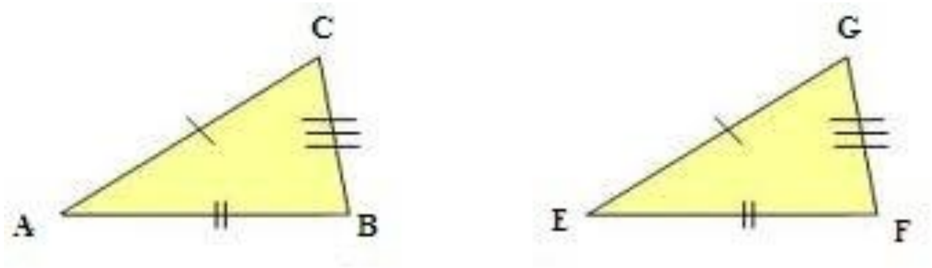


Figura 3 – Triângulos Semelhantes: Caso L.L.L

Dados dois triângulos ΔABC e ΔEFG, se $\overline{AC} = \overline{EF}$,$\overline{AB} = \overline{EG}$, e $\overline{BC} = \overline{FG}$, então, ΔABC ~ ΔEFG.

3º Caso (A.L.A – Ângulo, Lado, Ângulo)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos congruentes e lado entre os ângulos congruente.

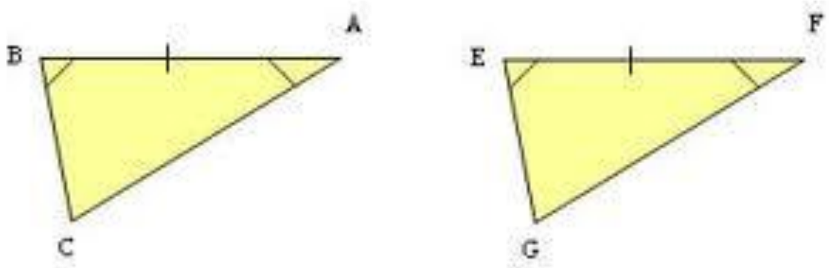


Figura 4– Semelhança de Triângulos: Caso A.L.A

Dados dois triângulos ΔABC e ΔEFG, se $\hat{B} \sim \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$,e $\hat{A} \sim \hat{F}$, então, ΔABC ~ ΔEFG.

4º Caso (L.A.A – Lado, Ângulo, Ângulo)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem congruência do ângulo adjacente ao lado, e congruência do ângulo oposto ao lado.

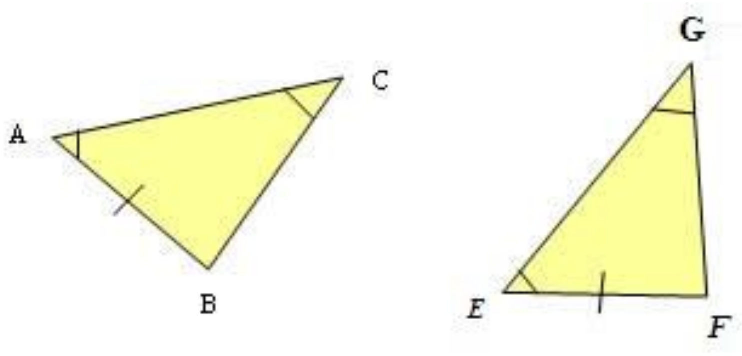


Figura 5–Semelhança de Triângulos: Caso L.A.A

Dados dois triângulos ΔABC e ΔEFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} \sim \hat{E}$, e $\hat{C} \sim \hat{G}$, então, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$.

A partir do 3º e 4º caso é possível afirmarque se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então os triângulos são semelhantes.

3.2TEOREMA DE TALES

Enuncia-sea seguir, algumas definições necessárias para a compreensão do mesmo:

Definição 2

Duas retas são paralelas quando elas nunca se cruzam, mantendo sempre a mesma distância uma da outra.

Definição 3

Os ângulos de inclinação de duas retas paralelas formados a partir de uma reta transversal são congruentes.

Definição 4

Quando três ou mais retas em um mesmo plano são paralelas entre si, dizemos que elas formam um feixe de retas paralelas

Através de retas paralelas e transversais e do conceito de proporcionalidade Tales, desenvolveu o Teorema a seguir:

Teorema 1

"*Um feixe de retas paralelas divide duas retas transversais, de maneira que os segmentos obtidos em uma são ordenadamente proporcionais aos segmentos obtidos na outra*"

Demonstração: Para provar a veracidade do teorema será considerado dois casos: o 1º caso, para o feixe de retas paralelas que dividem uma transversal em segmentos congruentes; o 2º caso, para feixes de retas paralelas que dividem a transversal em segmentos com medidas racionais e não congruentes.

1º Caso

Considere o feixe de retas paralelas a, b e c , e as transversais r' e s', em que $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$,.Apresenta-se que $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$, ou seja, , $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$

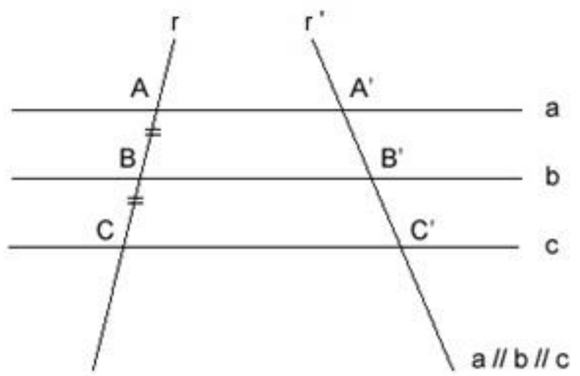


Figura 6 - Teorema de Tales : 1º Caso

Traçados os segmentos $\overline{A'E}$e $\overline{B'F}$,paralelos a reta r, conforme figura a seguir, obtém-se os paralelogramos ABEA' e BCFB', com $\overline{AB} \equiv \overline{EA'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{FB'}$. Com isso, e sabendo que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$conclui-se que $\overline{EA'} \equiv \overline{FB'}$.

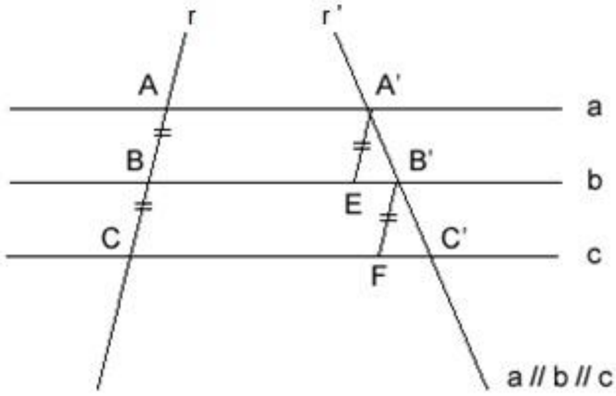


Figura 7 - Teorema de Tales: 1º Caso

Considerando as retas paralelas que contêm os segmentos $\overline{EA'}$e $\overline{FB'}$, e a reta transversal r’, tem-se que os ângulos EÂ’B’ e F$\widehat{B}$’C’ são correspondentes, ou seja, EÂ’B’ ≡ F$\widehat{B}$’C’. De maneira análoga, considerando as retas paralelas b e c, e a reta transversal r’, tem-se que os ângulos A’$\widehat{B}$’E e B’$\widehat{C}$’F são correspondentes, ou seja, A’$\widehat{B}$’E ≡ B’$\widehat{C}$’F.

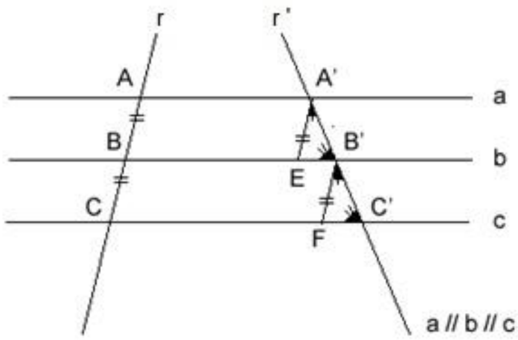


Figura 8 - Teorema de Tales: 1º Caso

Pelo caso LAA (lado, ângulo e ângulo oposto), tem-se que os triângulos ΔA’B’E eΔB’C’F são congruentes.

Portanto, $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$e os segmentos $\overline{AB}$e $\overline{BC}$ são proporcionais aos segmentos $\overline{A'B'}$e $\overline{B'C'}$, ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$

2º Caso

Considere o feixe de retas paralelas **a , b** e **c** e as retas transversais **r** e **r'**. Apresenta os segmentos AB e BC que possuem medidas racionais, são proporcionais aos segmentos A'B' eB'C', ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

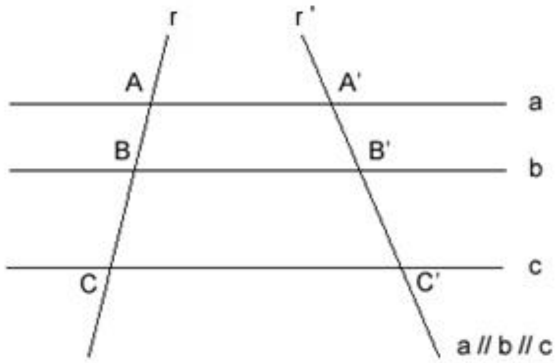


Figura 9 -Teorema de Tales: 2° Caso

Dividimos o segmento $\overline{AB}$em duas partes de medida m (AB = 2m) e o segmento $\overline{BC}$ em três partes de medida m (BC = 3m).

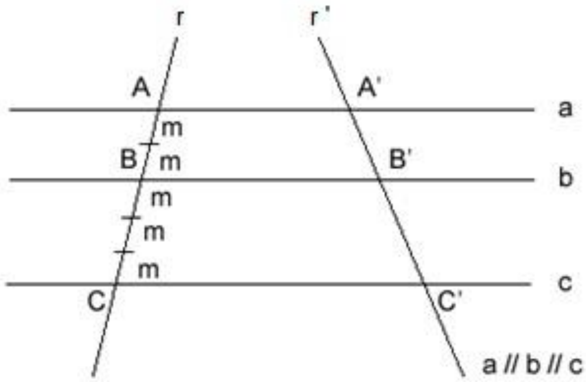


Figura 10 - Teorema de Tales: 2° Caso

Pelos pontos que dividem os segmentos $\overline{AB}$e $\overline{BC}$ em partes de medida m, é possível traçar retas paralelas às retas **a, b** e **c.**

De acordo com o 1º caso, essas retas paralelas traçadas determinam em *r'* segmentos que possuem medidas iguais. Neste caso, é indicado esta medida por**n**.

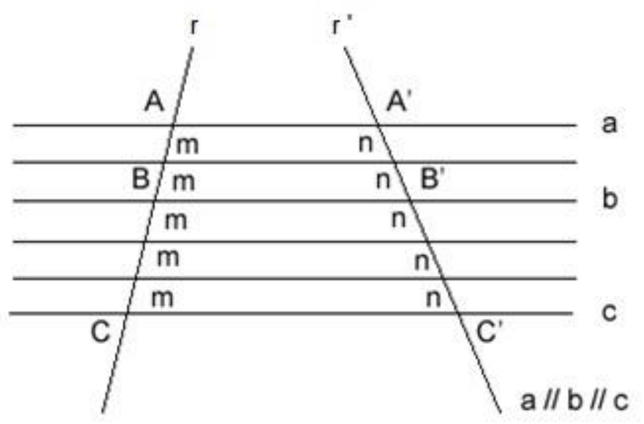


Figura 11 - Teorema de Tales: 2° Caso

Dessa forma, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$

Portanto os segmentos $\overline{AB}$e $\overline{BC}$ são proporcionais aos segmentos $\overline{A'B'}$e $\overline{B'C'}$, ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

3.3RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo é definido a partir das medidas de seus lados e de seus ângulos, respectivamente. Quanto aos seus lados, tem-se o "*Triângulo Equilátero*",o "*Triângulo Isósceles*", e o "*Triângulo Escaleno*" , já com respeito aos seus ângulos temos o "*Triângulo Retângulo*", o "*Triângulo Acutângulo*", o "*Triângulo Obtusângulo*" e por fim o "*Triângulo equiângulos*". Porém, será limitado ao Triângulo Retângulo.

Definição5

O triângulo é dito retângulo quando possui um ângulo reto.

Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *Hipotenusa*, e os outros dois são chamados de *catetos*. Apresenta-se a figura a seguir:

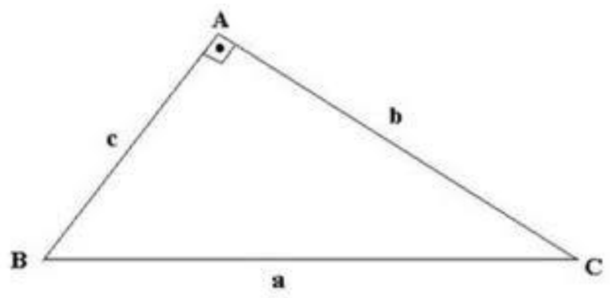


Figura 12 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Sendo:

BC = a - Hipotenusa

AC = be AB = c - Catetos

A hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo reto e correspondente ao maior ângulo do triângulo retângulo.

Agora, será apresentado esse mesmo triângulo com a altura relativa à hipotenusa (AH = h).

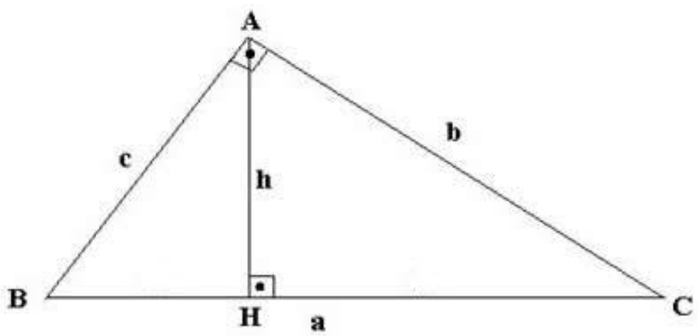


Figura 13 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Ao traçar a altura destacam-se três triângulos retângulos, isto é ΔABC, ΔABH e ΔACH. Veja que é possível verificar que os triângulos são semelhantes entre si.

Inicialmente,considera-se os três triângulos separadamente, o triângulo ΔABC indicado na figura 13, e os outros dois triângulosΔABHe ΔACH abaixo representados, retirados a partir da mesma figura.

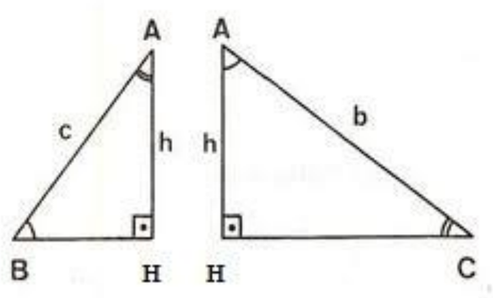


Figura 14- Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Observando os triângulos ΔABC e ΔAHC, tem-se BÂC= A$\hat{H}$C, pois são retoseA$\hat{C}$B = A$\hat{C}$H, pois são comuns aos dois triângulos. Portanto, ΔABC~ΔAHC.

Observando agora o ΔABC e ΔAHB, podemos notar que BÂC=A$\hat{H}$B, pois são retos,eA$\hat{B}$C=A$\hat{B}$H, pois são comuns aos dois triângulos. Portanto ΔABC~ΔAHC.

Como ΔAHC e ΔAHB são semelhantes ao ΔABC, esses triângulos são semelhantes entre si, ou seja, ΔABC~ΔAHC~ ΔAHB.

A partir do que foi analisado pode-sechegar à seguinte definição:

Definição6

Em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos, que são semelhantes ao maior e, consequentemente semelhantes entre si.

A partir da definição anterior, é possível estabelecer algumas relações entre as medidas de seus lados. Para isso,é necessário continuar usando letras minúsculas para representar as medidas de seus lados.

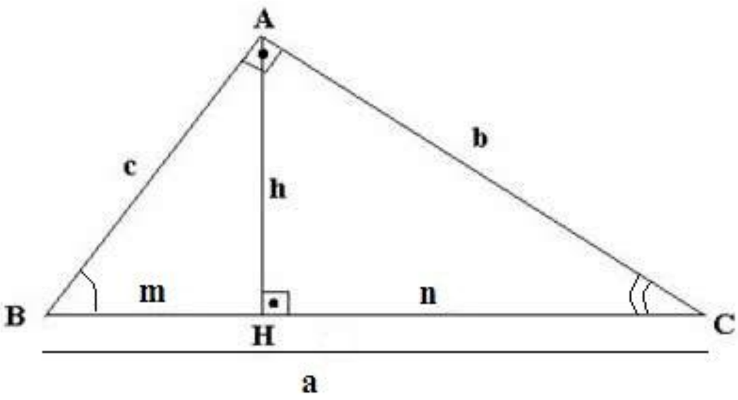


Figura 15 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Sendo:

a– Medida da hipotenusa;

b e **c** – Catetos;

h – Medida da altura em relação a hipotenusa;

m e **n** – Medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, sendo a = m + n.

Como em triângulos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, verifica-se o seguinte:

Em relação aos triângulos ΔABC e ΔAHBpode-se retirar as seguintes relaçõesda figura 15:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$,daí tem-se: a.h = b.c ;

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$,daítem-se: a.m = c.c , portanto c² = a.n;

$\frac{c}{n} = \frac{b}{h}$, daí tem-se: c.h = b.m .

Em relação aos triângulos ΔABC e ΔAHC pode-se retirar as seguintes relações da figura 15:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$,daí tem-se: a.n = b.b, portanto b² =a.n;

$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$,daí tem-se:a.h = b.c;

$\frac{c}{h} = \frac{b}{n}$, daí tem-se: c.n = b.h .

Em relação aos triângulos ΔAHB e ΔAHC,é possível retirar as seguintes relações da figura 15.

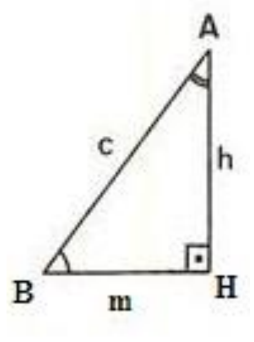


Figura 16 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo

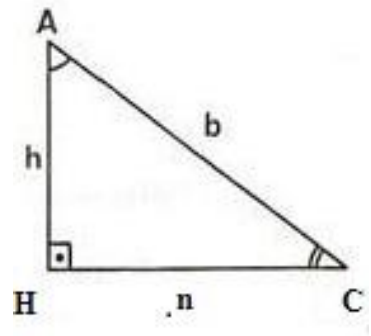


Figura 17 - Relações Métricas no Triângulo Retângulo

$\frac{c}{b} = \frac{h}{n}$, daí tem-se: c.n = b.h ;

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$, daí tem-se: h.h = n.m , portanto h^2 = n.m

$\frac{c}{b} = \frac{m}{h}$, daí tem-se:c.h = b.m .

3.4TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Dentre inúmeras demonstrações, iremos demonstrar de trêsmaneiras diferentes.

Teorema 2

“*Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.”*

3.4.1 - Demonstração Clássica

Dado o triângulo retângulo ΔABC, de catetos b e c tem hipotenusa a, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Considera-se um quadrado ABCD de lado b + c.Sobre os lados desse quadrado destacam-se os pontos M, N, P, Q, como na figura a seguir, de modo que:

AM = BN = CP = DQ = b;

MB = NC = PD = QA = c.

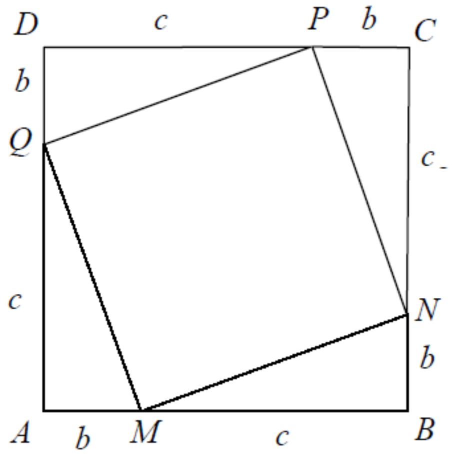


Figura 18 - Teorema de Pitágoras

Pelo caso de congruência LAL, os triângulos retângulos ΔQAM, ΔMBN, ΔNCP e ΔPDQ, são congruentes ao triângulo retângulo da hipótese. Tem-se ainda que, MN = NP = PQ = QM = a. Isso implica que o quadrilátero MNPQ é um losango. Vamos mostrar que de fato ele é um quadrado.

Suponha que os ângulos agudos do triângulo da hipótese sejam: α e β.

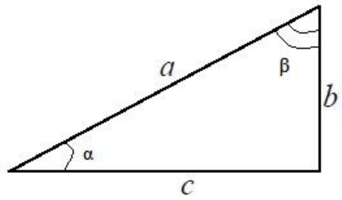


Figura 19 - Teorema de Pitágoras

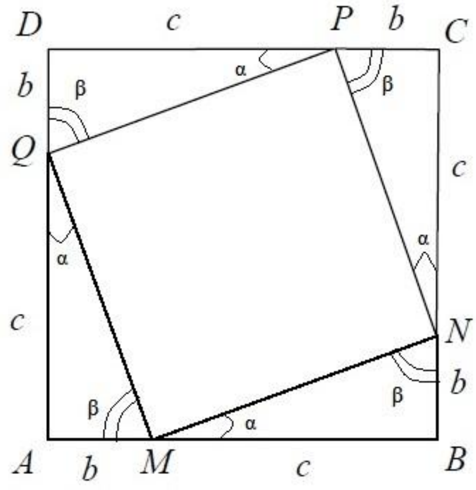


Figura 20 - Teorema de Pitágoras

Pela congruência dos triângulos ΔQAM, ΔMBN, ΔNCP e Δ*PDQ* descritos acima, os ângulos agudos destes triângulos retângulos medem αe β , de acordo com a figura acima.

Como α + β = 90º segue que cada ângulo interno do quadrilátero Δ*MNPQ* deve ser reto. PortantoΔ*MNPQ* é um quadrado de lado *a* .Daí a área do quadrado de lado *b* +*c* é igual a soma da área do quadrado de lado *a* com a área de quatro triângulos retângulos de catetos *b* e *c* .

Ou seja,

$$(b + c)^2 = 4\frac{bc}{2} + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Logo, $a^2 = b^2 + c^2$como queríamos provar.

3.4.2 - Demonstração por semelhança de triângulos:

Dado um triângulo ΔABCrepresentado na figura 15, de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*.A altura AH em relação a base BC, divide este triângulo em dois outros triângulos: ΔABH e ΔAHC,

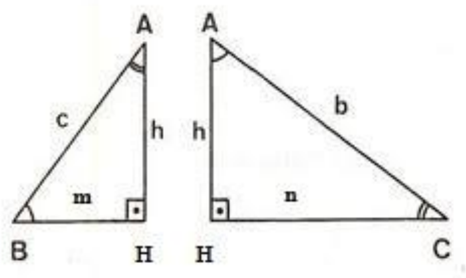


Figura 21 - Teorema de Pitágoras

Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo somam 90º, segue os triângulos ΔABC, ΔABH e ΔAHC que possuem os mesmos ângulos, logo são semelhantes.

Da semelhança ΔABC $\cong$ ΔABH tem-se:

$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = ma$

Da semelhança ΔABC ~ ΔAHC tem-se:

$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = na$

Logo obtém-se:

$b^2 + c^2 = na + ma \Rightarrow b^2 + c^2 = (n+m)\ a$

Como $n + m = a$; tem-se:

$b^2 + c^2 = a.a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

Portanto fica provado que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.5RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

As relações métricas no triângulo retângulo abordadas anteriormente, limitam-se apenas às medidas dos lados do triângulo. Agora, será realizada uma abordagem que além de envolver as medidas dos lados do triângulo retângulo, também envolvam as medidas dos ângulos internos do triângulo.

Definição 7

Denomina-se“Cateto Oposto”, o lado do Triângulo Retângulo que fica de frente ao ângulo.

Definição 8

Denomina-se "Cateto Adjacente", o lado do Triângulo Retângulo que está "vizinho" ao ângulo.

Considerandoo triângulo ΔABC, e determina-se quais são os catetos oposto e adjacente em relação aos ângulos$\hat{B}$e$\hat{C}$.

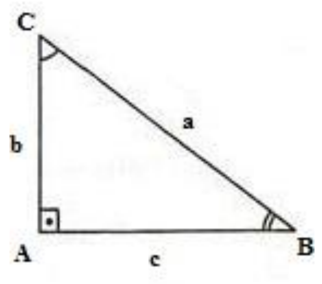


Figura 22–Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Em relação ao ângulo $\hat{B}$, tem-se que o lado AC = b é o seu cateto oposto, bem como, o lado AB = c é o seu cateto adjacente.

Em relação ao ângulo $\hat{C}$, o lado AB = c é o seu cateto oposto, bem como, o ladoAC = b é o seu cateto adjacente.

Com respeito ao ângulo reto $\hat{A}$, o segmento oposto a ele é BC = a que por sua vez, é denominado como *hipotenusa.*

Segue algumas relações trigonométricas.

Seno(**sen**) **de um ângulo** é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

Assim: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$;$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$

Cosseno(cos)de um ângulo é o quociente entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

Assim: $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$;$\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$

Tangente (tg)de um ângulo é o quociente entre os catetos oposto e adjacente ao ângulo.

Assim: $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c}$;$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}$.

Observa-se ainda que:

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{B}}$; $\text{tg}\hat{C} = \frac{sen\ \hat{C}}{cos\ \hat{C}}$

Pois, no $\triangle$ABC, retângulo em Â, tem-se:

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$; $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$

Assim:

$$\frac{sen\ \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

Mas,

$\text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$.

Portanto :

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{B}}$

Para mostrar que$\text{tg}\hat{C} = \frac{sen\ \hat{C}}{cos\ \hat{C}}$faz-se de modo análogo.

3.6ÂNGULOS NOTÁVEIS

Sabe-se que as relações *seno, cosseno e tangente* não dependem unicamente das medidas dos lados do triângulo retângulo, mas também, das medidas de seus ângulos internos. Realiza-se agora, o cálculo de *seno, cosseno e tangente* de 30º, 60º e 45º respectivamente.

Observa-se o triângulo equiláteroΔABC, de lado ℓ e altura *h*, sabe-se que num triângulo equilátero, a medida de cada ângulo interno é igual a 60º, e a altura relativa a qualquer lado coincide com a mediana e com a bissetriz.

Observe a figura a seguir e note que CH é a altura, mediana e bissetriz relativa ao lado AB= ℓ , note também que H é ponto médio de AB, então, AH = $\frac{\ell}{2}$.

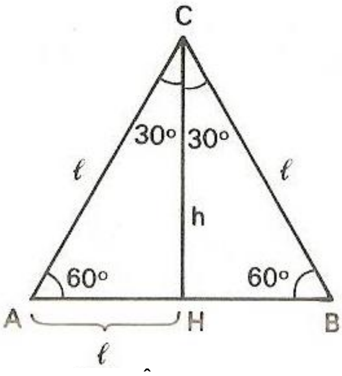


Figura 23 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Inicialmente serácalculado a altura *h*.

Tem-se AH= $\frac{\ell}{2}$,CH= h = altura e CH é bissetriz de $\hat{C}$, isto é CH divide o ângulo $\hat{C}$ em dois ângulos de 30º.

Como o ΔAHC é retângulo, aplicando Pitágoras, tem-se a seguinte:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, entende-se que h = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Observa-se o triângulo ΔAHC e calculasen, cos e tg de 30º:

Como $\hat{C}$ = 30º, tem-se:

$$\textbf{Sen 30°=} \ \frac{\text{Cateto Oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 30º = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow \text{sen } 30º = \frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow \text{sen } 30º = \frac{1}{2};$$

$$\textbf{Cos 30°=} \ \frac{\text{Cateto Adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos 30º = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Rightarrow \cos 30º = \frac{\ell\sqrt{3}}{2\ell} \Rightarrow \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Tg 30°= $\dfrac{\text{Cateto Oposto a } \hat{C}}{\text{Cateto Adjacente a } \hat{C}} \Rightarrow \text{tg } 30^{o} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{tg } 30^{o} = \dfrac{2\ell}{2\ell\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } 30^{o} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } 30^{o}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Agora, será calculadosen, cos e tg de 60º:

Como $\hat{A}$ = 60º, tem-se:

Sen 60°= $\dfrac{\text{Cateto Oposto a } \hat{A}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 60^{o} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Rightarrow \text{sen } 60^{o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

Cos 60°= $\dfrac{\text{Cateto Adjacente a } \hat{A}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos 60^{o} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow \cos 60^{o} = \dfrac{\ell}{2\ell} \Rightarrow \cos 60^{o} = \dfrac{1}{2}$;

Tg 60°= $\dfrac{\text{Cateto Oposto a } \hat{A}}{\text{Cateto Adjacente a } \hat{A}} \Rightarrow \text{tg } 60^{o} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \text{tg } 60^{o} = \dfrac{2\ell\sqrt{3}}{2\ell} \Rightarrow \text{tg } 60^{o} = \sqrt{3}$.

Para o cálculo de sen, cos e tg de 45º, toma-se um triângulo retângulo isósceles ΔABC, de lado ℓ, e sabendo que os ângulos da sua base medem 45º, calcula-se :

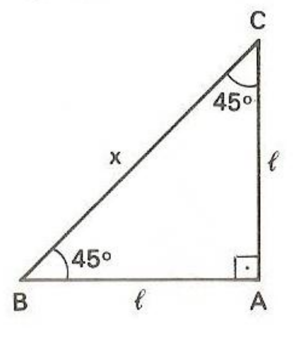


Figura 24 – Ângulos Notáveis

Inicialmente será calculada a hipotenusa x em função de ℓ. Aplicando o Teorema de Pitágoras tem-se o seguinte:

$x^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow x^2 = 2\ell^2 \Rightarrow x = \ell\sqrt{2}$

Agora, sabe-se que $x = \ell\sqrt{2}$ .Toma-se o triângulo ΔABC ecalcula-sesen, cos e tg de 45º:

Sen 45°= $\dfrac{\text{Cateto Oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 45^{\circ} = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45^{\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

Cos 45°= $\dfrac{\text{Cateto Adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

Tg 45°= $\dfrac{\text{Cateto Oposto a }\hat{B}}{\text{Cateto Adjacente a }\hat{B}} \Rightarrow \text{tg } 45^{\circ} = \dfrac{\ell}{\ell} \Rightarrow \text{tg } 45^{\circ} = 1$.

Desse modo, organizando os resultados obtidos em uma tabela, tem-se:

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora mostra-se a Relação Fundamental da Trigonometria.

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Considerando o triângulo retângulo dado na figura 23 e o ângulo α = ^B.Tem-se:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$

Pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, daí

$\frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Logo, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$, como se queria mostrar.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Sabendo que o surgimento e o desenvolvimento da trigonometria deu-se a partir da necessidade de suas aplicações à diversas áreas do cotidiano, sendo inicialmente aplicada a astronomia, agrimensura e navegação, que por sua vez são aplicações da trigonometria esférica, contudo, neste capítulo será realizado uma explanação de algumas aplicações trigonométricas no triângulo retângulo.

4.1 APLICAÇÃO 1

Com o objetivo de calcular a altura de um prédio, um topógrafo colocou seu teodolito a uma distância de 25 metros do prédio como mostra a figura abaixo, ao mirar o topo do prédio ele verificou que fazia um ângulo de 30º, após calculada a altura do prédio, ele percebeu que tinha desprezado a altura em que o teodolito estava, diante disto, não teria uma altura exata do prédio. Determine a altura do prédio no primeiro momento desprezando a altura do teodolito e, em seguida, calcule a altura exata do prédio, levando-se em consideração que o teodolito esta fixo a uma distância de 1,60m do chão.

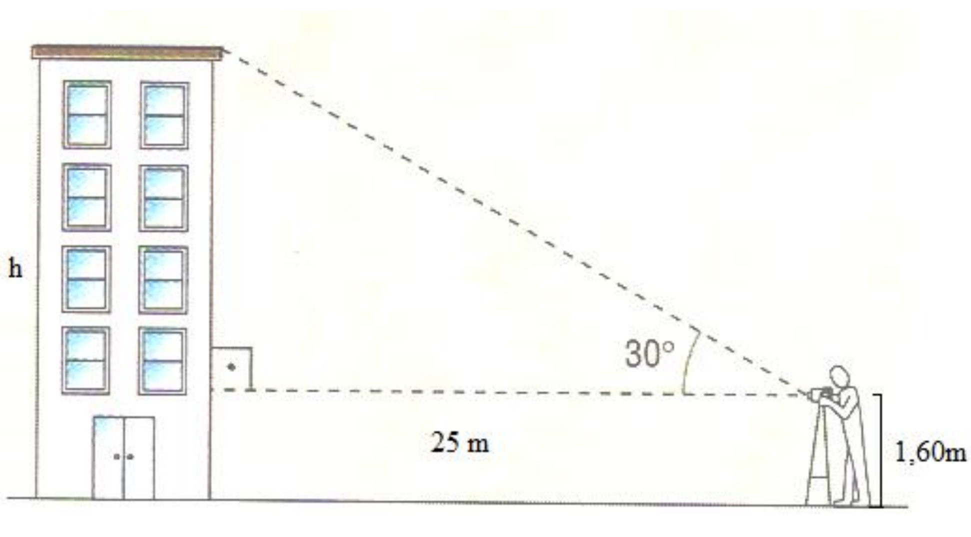


Figura 25 – Aplicação1

Solução:

Tem-se

$\operatorname{tg} 30° = \frac{h}{25} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{25}$

$\Rightarrow 3h = 25\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \frac{25\sqrt{3}}{3}$

Considerando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, tem-se:

$h = \frac{43{,}25}{3} = 14{,}42m$

Considerando a altura do teodolito, tem-se:

h = 14,42 + 1,60

$\Rightarrow$ h = 16,02 m

Portanto, a altura do prédio desprezando a altura do teodolito é 14,42 metros, enquanto que, levando em consideração a altura do teodolito é 16,02 metros.

4.2 APLICAÇÃO 2

Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de 30º com a pista (horizontal). Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energiaelétrica situada a 2km do aeroporto e com altura igual a 300 metros. Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre.

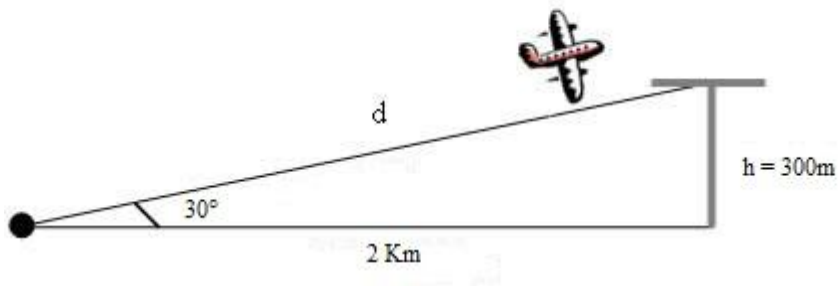


Figura 26 – Aplicação 2

Solução:

Tem-se,

$$\mathrm{tg}\ 30° = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow 3h = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Considerando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, tem-se:

$$h = \frac{3{,}46}{3} = 1{,}15\mathrm{km}$$

Transformando em metros, tem-se:

h = 1.15 . 1000 = 1150 m, isto é, o avião estará a uma altura de 1150 metros.

Portanto, mantendo-se o trajeto não haverá colisão do avião com a torre.

4.3 APLICAÇÃO 3

Um pescador quer atravessar um rio, usando um barco e partindo do ponto **C**. A correnteza faz com que ele atraque no ponto **B** da outra margem, 180 m abaixo do ponto A. Se ele percorreu 225 m durante a travessia, qual a largura do rio?

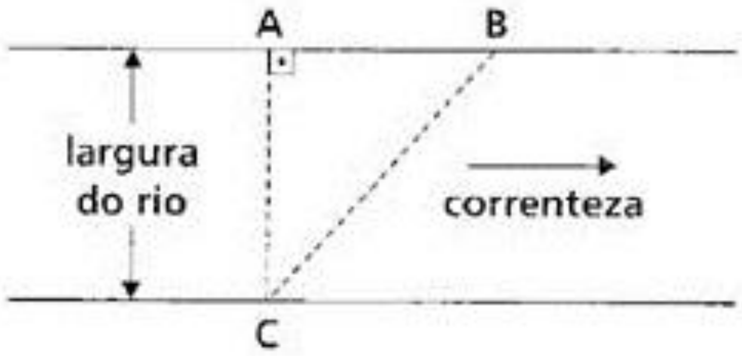


Figura 27 – Aplicação 3

Solução:

Considerando a largura do rio AC =x, e como BC = 221 m e AB = 180m.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se o seguinte resultado:

$225^2 = x^2 + 180^2$

$\Rightarrow 50\ 625 = x^2 + 32\ 400$

$\Rightarrow x^2 = 50\ 625 - 32\ 400$

$\Rightarrow x^2 = 18\ 225$

$\Rightarrow x = 135$ m

Logo, a largura do rio é 135 metros.

4.4 APLICAÇÃO 4

Uma pessoa na margem de um rio vê o topo de uma árvore na outra margem sob um ângulo de 60º com a horizontal. Quando recua 20m vê o topo da mesma árvore sob um ângulo de 30º. Desprezando a altura do observador, qual é a largura do rio?

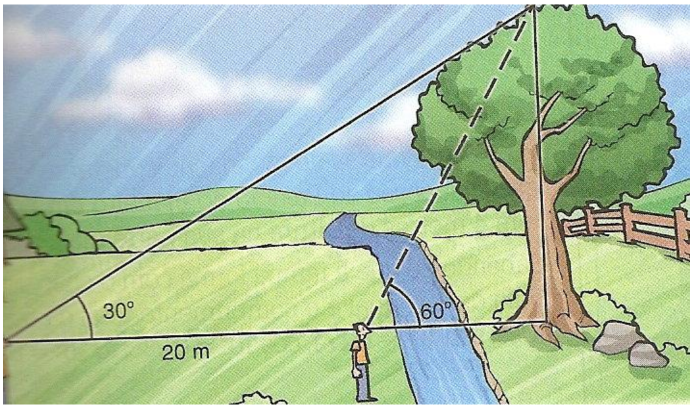


Figura 28 – Aplicação 4

Solução:

Considere:

Altura da árvore = h

Largura do rio = x

Tem-se:

$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{(20+x)}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{(20+x)}$

$\Rightarrow 3h = (20 + x)\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \frac{(20+x)\sqrt{3}}{3}$ metros.

Tem-se ainda que:

$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow h = \sqrt{3}\,x$ metros

Como h = h. obtém-se:

$\sqrt{3}\,x = \frac{(20+x)\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\,x = (20 + x)\sqrt{3}$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\,x = 20\sqrt{3} + \sqrt{3}\,x$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,x = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\,x = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = 10$ metros

Portanto, a largura do rio é 10 metros.

4.5 APLICAÇÃO 5

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1 500m de altura. Devido a velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o segmento PA, inclinado 30º em relação a PB, conforme demonstra a figura abaixo.A que distância do ponto P na qual o paraquedista saltou do avião está o ponto A onde ele tocará o solo?

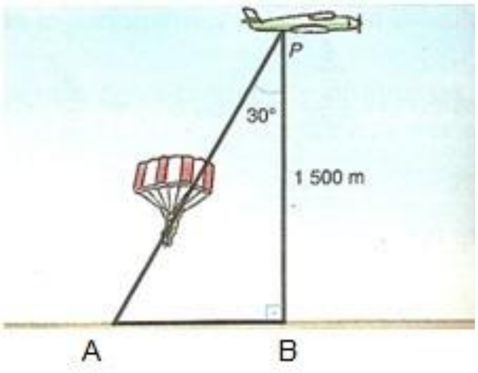


Figura 29 – Aplicação 5

Solução:

Considerando AP = x e PB = 1500m, tem-se:

Cos 30º = $\frac{1500}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1500}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\,x = 3000$

$\Rightarrow x = \frac{3000}{\sqrt{3}}$

Racionalizando temos:

$x = \frac{3000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3000\sqrt{3}}{3} = 1000 \cdot \sqrt{3}$

Considerando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$,tem-se:

$x = 1000 \cdot 1{,}73 = 1730$ m

A distância do ponto A ao ponto P é de 1730 metros.

4.6 APLICAÇÃO 6

Uma torre de transmissão de TV de 60m de altura está implantada num terreno horizontal. Um cabo de tensão vai desde o solo até ao ponto mais alto da torre e faz com o solo um ângulo de 45º. Qual o comprimento do cabo?

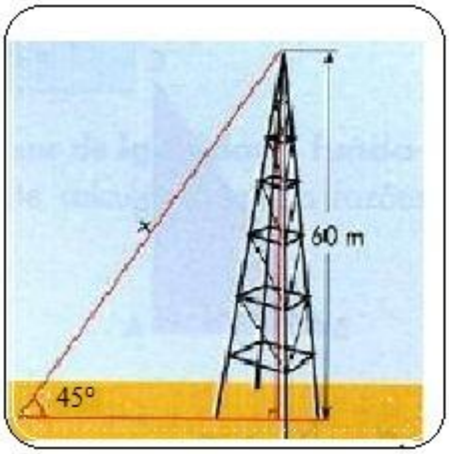


Figura 30 - Aplicação 6

Solução:

sen 45º $= \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{60}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,x = 120$

$\Rightarrow x = \frac{120}{\sqrt{2}}$

Racionalizando tem-se::

$x = \frac{120}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{120\sqrt{2}}{2} = 60\,.\sqrt{2}$

Considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, tem-se:

$x = 60 \,.\, 1{,}41 = 42{,}3$ m

Portanto, o comprimento do cabo é de 42,3 metros.

CONCLUSÃO

Através de um levantamento histórico, foi possível identificar o surgimento e o desenvolvimento da trigonometria, em particular no triângulo retângulo, assim como os matemáticos que contribuíram para tal, que por sua vez, tornaram relevante a parte histórica da trigonometria, possibilitando ao pesquisador compreender a importância deste processo.

Vale salientar que desde o inicio a Trigonometria não foi desprovida de aplicações, muito pelo contrário, foi decorrente das necessidades da época que se deu tal surgimento. Isso motiva a destacar em situações - problemas o conteúdo em questão.

Quanto ao seu desenvolvimento, conclui-se que foi um processo gradativo, com contribuições de diversos matemáticos, para isto, foram selecionados alguns conceitos e teoremas e também, suas demonstrações, que contribuíram significativamente para o processo de desenvolvimento, servindo assim, de base, para então, compreender e abordar a Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Por fim, éenfatizado a importância da aplicação contextualizada da Trigonometria no Triângulo Retângulo no processo Ensino-Aprendizagem.

REFERÊNCIAS

COSTA, Nielce M. Lobo da.**A História da Trigonometria.** Disponível em: http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf Acesso em: 01/ set/13.

GUELLI, Oscar. **Conquistando a História da Matemática 6: Dando Corda na Trigonometria.** 4ed. São Paulo: Ática, 1996.

IEZZI,Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria.** 2ed. São Paulo: Atual, 1978.

MOREY, Bernadete. Geometria e Trigonometria na Índia e Países Árabes**.** NOBRE, Sergio. (Org). **Coleção História da Matemática para Professores.** Rio Claro: UNESP, 2003.

MORI, Iracema; ONAGA. Dulce Satiko. **Matemática: Ideias e Desafios 9º ano.** 17ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

PEREIRA, Cícero da Silva: **Aprendizagem em Trigonometria no ensino Médio: Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa.** Jundiaí: Paco, 2012.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** 2ed. Campinas: Unicamp, 2008.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática 9º ano.** 2ed. São Paulo: FTD, 2012.

Sites consultados

http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf

Acesso em 20/02;13 às 18:00

http://harley551.files.wordpress.com/2008/12/trigonometria-monografia.pdf

Acesso em 02/06/2013 às16:37

http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-tales.htm

Acesso em 02/06/2013 às16:40

http://www.colegiocatanduvas.com.br/desgeo/teotales/
Acesso em 02/06/2013 às16:45

http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=riv&cod=_relacoestrigonometricasnotrianguloretangulo
Acesso em 02/06/2013 às16:48

http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/DanieldosSantosCosta.pdf
Acesso em 02/06/2013 às16:58

http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296653.o
Acesso em 02/06/2013 às16:50

http://www4.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/carlos_francisco_borges.pdf
Acesso em 02/06/2013 às17:00

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/razoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo-30-45-.htm
Acesso em 02/06/13 às19:50

http://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes.php
Acesso em 02/06/13 às19:51

http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/rz_trigo_triret.htm/rz_trigo_triret.htm
Acesso em 02/06/13 às19:55

http://www.cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art_47/aprendendo.html
Acesso em 09 /06/13 às08 :35

http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/00004E/00004E5D.pdf
Acesso em 09/06/13 às09:30

http://www.cursoraizes.com.br/resources/a_historia_da_matematica.pdf
Acesso em 09/06/13 às10:15

http://www.colegiocatanduvas.com.br/desgeo/trigonometira/

Acesso em 09/06/13 às10:35

http://www.profezequias.net/trigonometria.html

Acesso em 23 / 11/ 2013 às12 :43